Math 08-08-09

នៃលំហាត់

រៀង សោភ័ណ្ឌ

គណិតវិទ្យា

ភាគ ២

១០

នៃមានៈ

គណិតវិទ្យា ភាគ2

ថ្នាក់ទី10

បោះពុម្ពផ្សាយដោយ

ក្រុម អេង ឌិច គត

គណៈកម្មការនិពន្ធ និងរៀបរៀង

លោក រឿង សោភ័ណ្ឌ

បច្ចេកទេសកុំព្យូទ័រ និងពិនិត្យ

លោក រឿង សោភ័ណ្ឌ

លោក ស៊ុន សៅលី, លោក ចាន់ធី មករា

ក. រឿង សុគន្ធា ,ក. គឹម ម៉ារ៉ាឌី

យុវសិស្ស រឿង សោភា

រចនាក្រប

លោក រឿង សោភ័ណ្ឌ

ឯកសារយោង

[1] សៀវភៅ គណិតវិទ្យា ភាគ1+2 ថ្នាក់ទី10(ថ្មី,2008), ក្រសួងអប់រំយុវជន និង កីឡា។

[2] សៀវភៅ គណិតវិទ្យា ភាគ1+2 ថ្នាក់ទី10(ថ្មី,2008) សំរាប់ គ្រូ, ក្រសួងអប់រំយុវជន និង កីឡា។

[3] Math-Problems Vol.1+2+3, រៀង សោភ័ណ្ឌា, ក្រុម អាន និង គិត ។

[4] សៀវភៅ គណិតវិទ្យា ថ្នាក់ទី7,8,9,10,11,12, ក្រសួងអប់រំយុវជន និង កីឡា។

[5] សៀវភៅ គណិតវិទ្យា ថ្នាក់ទី7,8,9,10,11,12, សំរាប់ គ្រូ, ក្រសួងអប់រំយុវជន និង កីឡា។

[6, 7,...] និងសៀវភៅយ៉ាងច្រើនទៀត...។

អារម្ភកថា

ស្បៀវភៅកំណែ គណិតវិទ្យាថ្នាក់ទី 10 ភាគ២ រួមមាន 6ជំពូក។ ដើម្បីជាជំនួយដល់ប្អូនសំរាប់ស្វ័យសិក្សា ជាមួយនឹង កម្មវិធីសិក្សាថ្មីនេះ ទើបខ្ញុំបាទរៀបចំកំណែនេះឡើង។

ការរៀបចំកំណែនេះ គឺគ្រប់មេរៀន និងលំហាត់ ដែលសុទ្ធតែយកលំនាំតាម ស្បៀវភៅ គណិតវិទ្យា ភាគ1+2 ថ្នាក់ទី10(ថ្មី,2008), ក្រសួងអប់រំយុវជន និង កីឡា។

ដើម្បីឲ្យស្បៀវភៅសិក្សានេះ កាន់តែល្អប្រសើរ យើងខ្ញុំនឹងរង់ចាំទទួលការរិះគន់ និងកែលំអក្នុងន័យស្ថាបនាពីសំណាក់លោកគ្រូ អ្នកគ្រូនិងសិស្សានុសិស្សដោយក្តីរីករាយ។

គណៈកម្មការនិពន្ធនិងរៀបរៀង,ភ្នំពេញ, ១៥-០៩-០៨

រៀង សោភ័ណ្ឌា

មេរៀនទី ១ ផលធៀបត្រីកោណមាត្រ

មេរៀនសង្ខេប

- ក្នុងត្រីកោណ ABC កែងត្រង់ C : $\tan A=\frac{BC}{AC}, \sin A=\frac{BC}{AB}$,

  $\cos A=\frac{AC}{AB}$

- $\tan A=\frac{\sin A}{\cos A}$, $\sin^2 A+\cos^2 A=1$, $1+\tan^2 A=\frac{1}{\cos^2 A}$
- $\sin(90°-A)=\cos A$, $\cos(90°-A)=\sin A$,

  $\tan(90°-A)=\frac{1}{\tan A}$

តារាងតម្លៃផលធៀបត្រីកោណមាត្រនៃមុំពិសេស

α	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$	$120°$	$135°$	$150°$	$180°$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\tan\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	មិនកំណត់	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

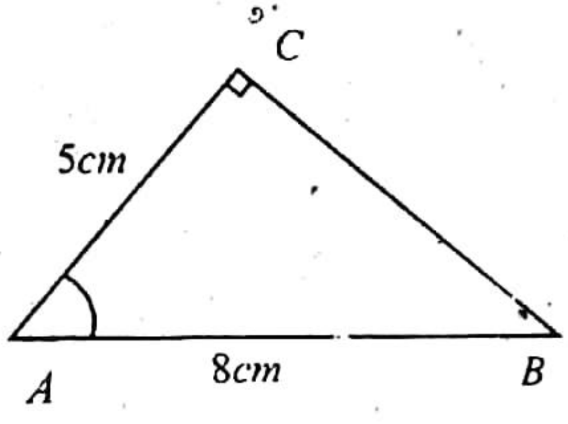
៖ ក្នុងតម្រុយអរតូណរមេមានចំណុច $M(x,y)$ នៅលើរង្វង់ផ្ចិត O កាំ r និង $\angle xOM = \alpha$ ៖ $\cos\alpha = \frac{x}{r}$, $\sin\alpha = \frac{y}{r}$, $\tan\alpha = \frac{y}{x}$

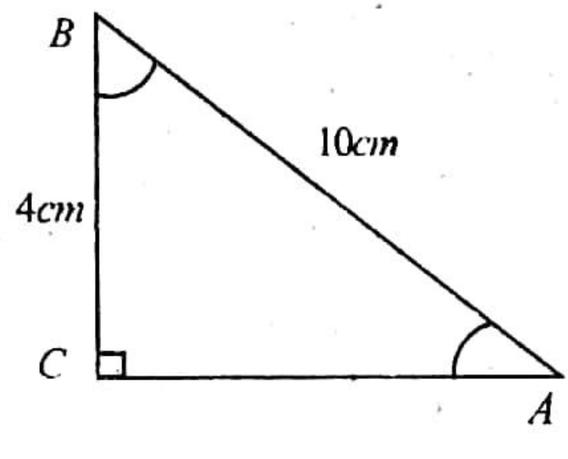
៖ បើ $r = 1 : \cos\alpha = x, \sin\alpha = y, \tan\alpha = \frac{y}{x}$

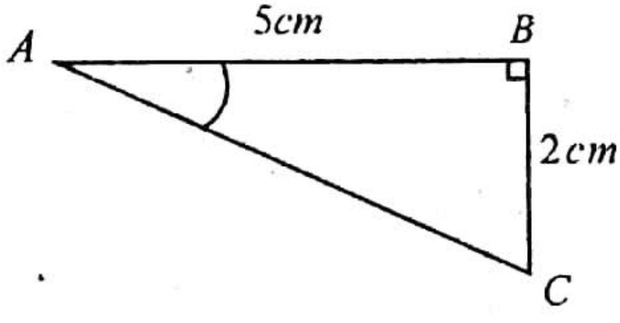
៖ $\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$, $\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$, $\tan(180° - \alpha) = -\tan\alpha$

លំហាត់

1. តាមរូបខាងក្រោមនេះ គណនាផលធៀបត្រីកោណមាត្រនៃមុំ A រួចឲ្យតម្លៃប្រហែលនៃមុំ A ៖







2. ABC ជាត្រីកោណកែងត្រង់ A ។ បើស្គាល់មុំមួយ និងជ្រុងមួយ ចូរគណនារង្វាស់ជ្រុងពីទៀត៖

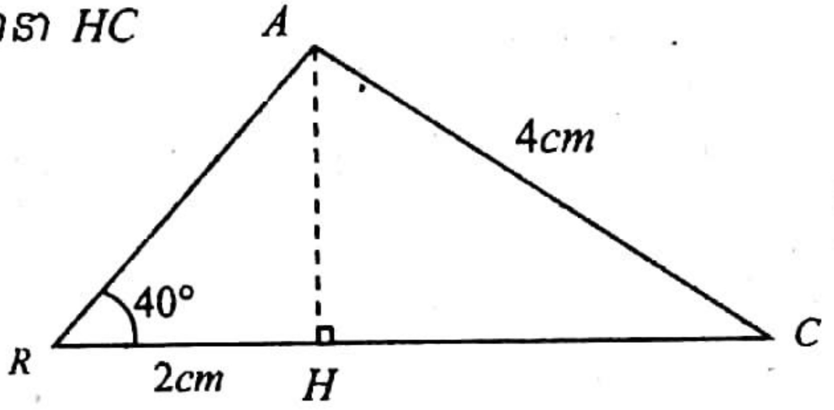
ក. $B = 18°$, $AB = 5$ ខ. $B = 32°$, $AC = 9$

គ. $B = 68°$, $BC = 12$ ឃ. $C = 60°$, $BC = 10$

3. AH ជាកំពស់នៃត្រីកោណសាមញ្ញ ARC ដែល $HR = 2cm$, $AC = 4cm$, $\angle R = 40°$ ។

ក. គណនា AH រួចរកតំលៃប្រហែលនៃមុំ C

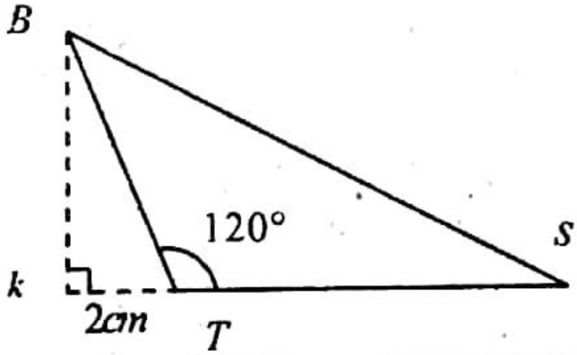
ខ. គណនា HC



4. BK ជាកម្ពស់នៃត្រីកោណ BTS ។

ក. គណនារង្វាស់មុំ BTK

ខ. គណនា BK និង BS រួចរកតំលៃនៃមុំ S ។



5. ស្រាយបំភ្លឺសមភាព៖ $\frac{3-6\cos^2\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}=3(\sin\alpha+\cos\alpha)$

6. គណនាតម្លៃនៃកន្សោមនីមួយៗខាងក្រោម៖

ក. $\frac{\sin 45^\circ}{\sin 30^\circ-\sin 60^\circ}$ ខ. $\tan 45^\circ+\tan 30^\circ\tan 60^\circ$

គ. $\frac{\sin 65^\circ}{\cos 25^\circ}$ ឃ. $\tan 75^\circ+\tan 15^\circ$

7. សម្រួលកន្សោម៖

$B=\cos(180^\circ-\alpha)-\sin(180^\circ-\alpha)+\cos(90^\circ-\alpha)$

8. រកតំលៃ $\cos\alpha$ រឺ $\sin\alpha$ រឺ $\tan\alpha$ ដោយស្គាល់៖

ក. $\sin\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$ និង $0^\circ\le\alpha\le180^\circ$

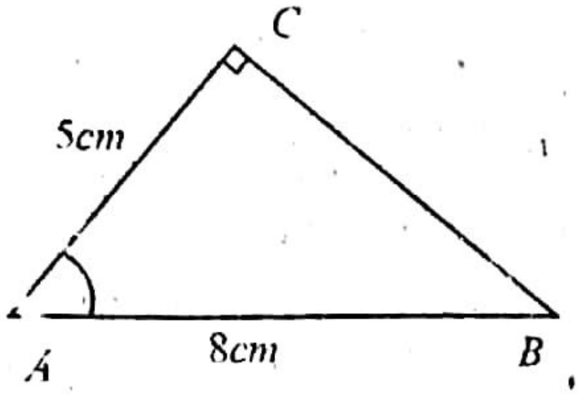
ខ. រកតម្លៃ $\cos\alpha=-\frac{4}{5}$ និង $90^\circ\le\alpha\le180^\circ$

គ. $\tan\alpha=2$ និង $0^\circ\le\alpha\le90^\circ$.

ឃ. $\tan\alpha=-\frac{1}{2}$ និង $90^\circ\le\alpha\le180^\circ$

ដំណោះស្រាយ

1. តាមរូបខាង ក្រោមនេះគណនាផលធៀបត្រីកោណមាត្រនៃមុំ A រួចអោយតំលៃប្រហែលនៃមុំ A



យើងមានៈ ត្រីកោណកែង ABC មានរង្វាស់ជ្រុង

$$AC = 5cm\ ,\ AB = 8cm$$

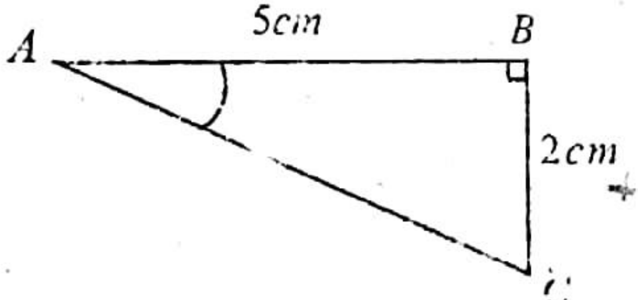
គេបានៈ $\cos\widehat{A} = \dfrac{AC}{AB}$

$$\cos\widehat{A} = \frac{5}{8}$$

$$= 0.625$$

នាំអោយៈ $\widehat{A} \approx 51.32°$ ឬ $\widehat{A} \approx 51°19'1''$

ដូចនេះ $\boxed{\widehat{A} \approx 51°19'1''}$



យើងមានៈ $\triangle ABC$ កែងត្រង់ B មាន $AB = 5cm$, $BC = 2cm$

គេបាន $\tan\widehat{A}=\frac{BC}{AB}=\frac{2cm}{5cm}$

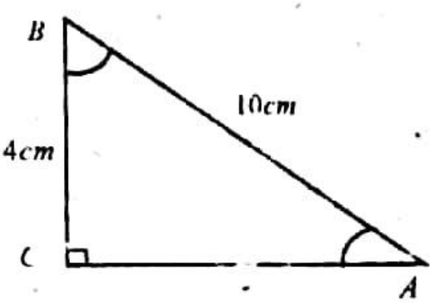
$\tan\widehat{A}=0.4$

នាំអោយ: $\widehat{A}\approx 21.80°$ ឬ $\widehat{A}\approx 20°48'$

ដូច្នេះ $\boxed{\widehat{A}\approx 20°48'}$

+យើងមាន: $\Delta\ ABC$ កែងត្រង់ C ដែល

មាន $BC=4cm$, $AB=10cm$



គេបាន: $\sin\widehat{A}=\frac{BC}{AB}$

$\sin\widehat{A}=\frac{4}{10}=0.4$

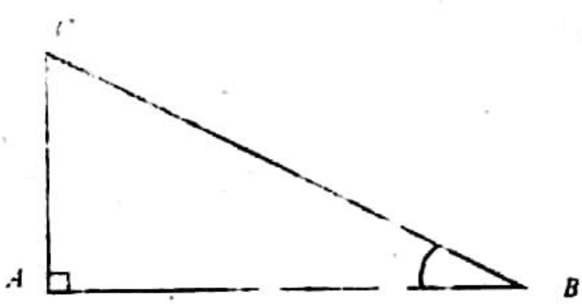
នាំអោយ: $\widehat{A}\approx 23.58°$ ឬ $\widehat{A}\approx 23°34'48''$

ដូច្នេះ $\boxed{\widehat{A}\approx 23°34'48''}$

2. ABC ជាត្រីកោណកែងត្រង់ A ។ បើស្គាល់ ំមួយ និង ជ្រ មុំមួយ និងជ្រុងមុំមួយចូរគណនាជ្រុងពីរផ្សេងទៀត៖

ក. $\widehat{B}=18°$, $AB=5$

រក AC, BC



ក្នុង $\Delta\ ABC$ កែងត្រង់ A គេបាន

$$\tan\widehat{B}=\frac{AC}{AB}$$

$\Rightarrow AC=AB\tan\widehat{B}\Rightarrow AC=5\times\tan 18^\circ$

តែ $\tan 18^\circ\approx 0.3249$

គេបាន $AC\approx 1.62$

ដូចនេះ $\boxed{AC\approx 1.62}$

ក្នុងត្រីកោណកែង ABC គេបាន $\sin\widehat{B}=\dfrac{AC}{BC}$

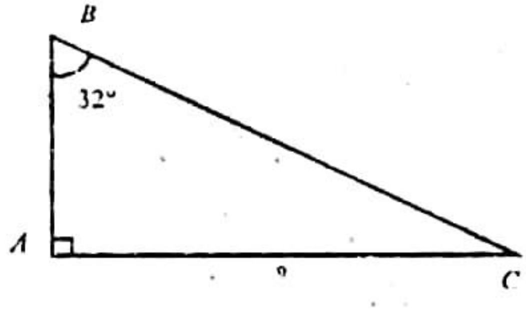
នោះ $BC=AC\cdot\dfrac{1}{\sin\widehat{B}}\approx\dfrac{1.62}{\sin 18^\circ}$ តែ $\sin 18^\circ\approx 0.309$

$\Rightarrow BC\approx\dfrac{1.62}{0.309}\approx 5.25$

ដូចនេះ $\boxed{BC\approx 5.25}$

ខ. $\widehat{B}=32^\circ$, $AC=9$

រក AB, BC



ក្នុងត្រីកោណកែង ABC គេបាន:

$$\tan\widehat{B}=\frac{AC}{AB}$$

$\Rightarrow AB=\dfrac{AC}{\tan\widehat{B}}\Rightarrow AB=\dfrac{9}{\tan 32^\circ}$

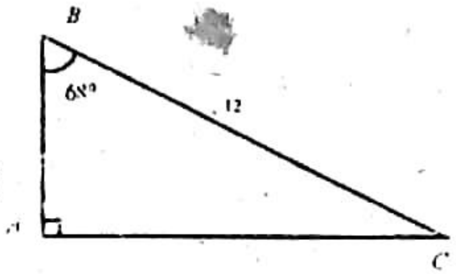
ដូចនេះ $\boxed{AB\approx 14.40}$

គេបាន: $\sin\widehat{B}=\dfrac{AC}{BC}\Rightarrow BC=\dfrac{AC}{\sin\widehat{B}}\Rightarrow BC=\dfrac{9}{\sin 32^\circ}$
$=16.98$

ដូចនេះ $\boxed{BC=16.98}$

គ. $\widehat{B}=68^\circ$, $BC=12$

រក AB , AC



ក្នុងត្រីកោណ ABC កែងត្រង់ A គេបាន

$$\sin\widehat{B}=\frac{AC}{BC}$$

$\Rightarrow AC=BC\sin\widehat{B}\Rightarrow AC=12\cdot\sin 68^\circ$

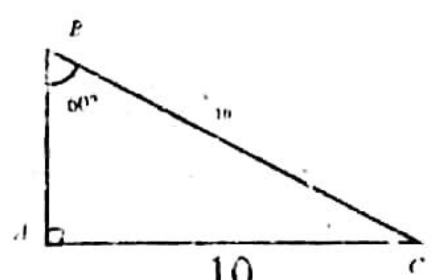
ដូច្នេះ $\boxed{AC=11.13}$

គេបាន: $\cos\widehat{B}=\dfrac{AB}{BC}\Rightarrow AB=12\cos 68^\circ=4.50$

ដូច្នេះ $\boxed{AB=4.50}$

ឃ. $\widehat{C}=60^\circ$, $BC=10$

រក AC, AB



ក្នុងត្រីកោណ ABC កែងត្រង់ A គេបាន:

$\cos\widehat{C}=\dfrac{AC}{BC}\Rightarrow AC=BC\cos\widehat{C}=10\cos 60^\circ=\dfrac{10}{2}=5$

ដូចនេះ $\boxed{AC=5}$

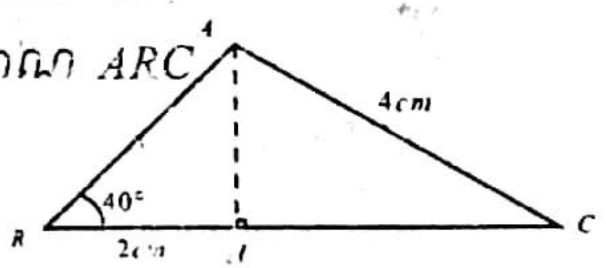
គេបាន $\sin\widehat{C} = \dfrac{AB}{BC}$

នោះ $AB = BC\sin\widehat{C} = 10\sin 60^\circ = 8.66$

ដូចនេះ $\boxed{AB = 8.66}$

3. ក. គណនា AH រួចរកតម្លៃប្រហែលនៃមុំ $\widehat{C}$

យើងមាន AH ជាកំពស់នៃត្រីកោណ ARC



គេបាន $\tan\widehat{R} = \dfrac{AH}{RH}$

$\Rightarrow AH = RH\cdot\tan\widehat{R} = 2\cdot\tan 40^\circ = 1.68$

ដូចនេះ $\boxed{AH = 1.68}$

ដោយក្នុងត្រីកោណកែង AHC គេបាន:

$\sin\widehat{C} = \dfrac{AH}{AC} = \dfrac{1.68}{4} = 0.42 \Rightarrow \widehat{C} = 24.83^\circ$

ដូច្នេះ $\boxed{\widehat{C} = 24^\circ 50'}$

ខ. គណនា HC

ក្នុងត្រីកោណ AHC កែងត្រង់ H នោះ $HC = AC\cos\widehat{C}$

$= 4\cdot\cos(24^\circ 50')$

$= 3.63$

ដូច្នេះ $\boxed{HC = 3.63}$

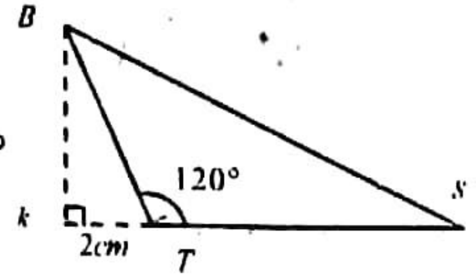
4. ក. គណនារង្វាស់មុំ BTK

ក្នុងត្រីកោណ BTS ហើយ BK ជាកំពស់នៃ ΔBTS

គេបាន $\widehat{BTK}+\widehat{BTS}=180°$

នោះ $\widehat{BTK}=180°-120°=60°$

ដូច្នេះ $\boxed{\widehat{BTK}=60°}$



ខ. គណនា BK និង BS រួចរកតំលៃនៃមុំ S

ក្នុងត្រីកោណ BKT កែងត្រង់ K គេបាន: $\tan\widehat{T}=\dfrac{BK}{KT}$

នោះ $BK = KT\cdot\tan\widehat{T}$

$= 2\cdot\tan 60°$

$= 2\sqrt{3}$

$= 3.46$

ដូចនេះ $\boxed{BK=3.46}$

ក្នុងត្រីកោណកែង BKS តាមពីតាគ័រ, គេបាន:

$BS^2 = BK^2+KS^2$ តែ $KS = KT+TS = 2+6.5=8.5$

$$\Rightarrow BS=\sqrt{(3.46)^2+(8.5)^2}=\sqrt{84.22}=9.17$$

ដូចនេះ $\boxed{BS=9.17}$

រកតំលៃ $\widehat{S}$ ក្នុងត្រីកោណកែង BKS គេបាន: $\tan\widehat{S}=\dfrac{KB}{SK}$

$$\Rightarrow \tan\widehat{S}=\frac{3.46}{8.5}\Rightarrow \tan\widehat{S}\approx 0.4070\Rightarrow \widehat{S}\approx 22.15°=22°9'.$$

ដូចនេះ $\boxed{\widehat{S} \approx 22.15^\circ}$

5. ស្រាយបំភ្លឺសមភាព: $\dfrac{3-6\cos^2\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}=3(\sin\alpha+\cos\alpha)$

យើងមាន: $\dfrac{3-6\cos^2\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}=\dfrac{3(1-2\cos^2\alpha)}{\sin\alpha-\cos\alpha}$

$$=\frac{3(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha-2\cos^2\alpha)}{\sin\alpha-\cos\alpha}$$

$$=\frac{3(\sin^2\alpha-\cos^2\alpha)}{\sin\alpha-\cos\alpha}$$

$$=\frac{3(\sin\alpha+\cos\alpha)(\sin\alpha-\cos\alpha)}{\sin\alpha-\cos\alpha}$$

$$=3(\sin\alpha+\cos\alpha)$$

ដូចនេះ $\boxed{\dfrac{3-6\cos^2\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}=3(\sin\alpha+\cos\alpha)}$

6. គណនាតំលៃកន្សោមនីមួយៗខាងក្រោម៖

ក. $\dfrac{\sin 45^\circ}{\cos 60^\circ+\sin 60^\circ}=\dfrac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}}$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}$$

$$=\frac{\sqrt{6}}{6}$$

ដូចនេះ $\boxed{\dfrac{\sin 45^\circ}{\cos 60^\circ+\sin 60^\circ}=\dfrac{\sqrt{6}}{6}}$

ខ. $\tan 45^\circ+\tan 30^\circ\cdot\tan 60^\circ=1+\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\sqrt{3}$

ដូចនេះ $\boxed{\tan 45^\circ+\tan 30^\circ\cdot\tan 60^\circ=2}$

គ. $\frac{\sin 65^\circ}{\cos 25^\circ}=\frac{\sin\left(90^\circ-25^\circ\right)}{\cos 25^\circ}$

$=\frac{\cos 25^\circ}{\cos 25^\circ}=1$ ព្រោះ៖ $\sin\left(90^\circ-25^\circ\right)=\cos 25^\circ$

ដូចនេះ $\boxed{\dfrac{\sin 65^\circ}{\cos 25^\circ}=1}$

ឃ. $\tan 75^\circ\cdot\tan 15^\circ=\tan\left(90^\circ-15^\circ\right)\cdot\tan 15^\circ$

$=\frac{\tan 15^\circ}{\tan 15^\circ}=1$ ព្រោះ៖ $\tan\left(90^\circ-\alpha\right)=\frac{1}{\tan\alpha}$

ដូចនេះ៖ $\boxed{\tan 75^\circ\cdot\tan 15^\circ=1}$

7 <u>សម្រួលកន្សោម:</u>

$$B=\cos\left(180^\circ-\alpha\right)-\sin\left(180^\circ-\alpha\right)+\cos\left(90^\circ-\alpha\right)$$

$$=-\cos\alpha-\sin\alpha+\sin\alpha=-\cos\alpha$$

ដូចនេះ $\boxed{B=-\cos\alpha}$

8. រកតម្លៃ $\cos\alpha$ ឬ $\sin\alpha$ ឬ $\tan\alpha$ ដោយស្គាល់

ក. $\sin\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$ និង $0^\circ\le\alpha\le180^\circ$

+ចំពោះ $0^\circ\le\alpha\le90^\circ$ គេបាន $\cos\alpha>0$

ដោយ $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1\Rightarrow\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha$

$$=1-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$$

$$=\frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow\cos\alpha=\pm\frac{1}{2}$$

តែ $\cos\alpha>0\Rightarrow\cos\alpha=\frac{1}{2}$

+ចំពោះ $90^\circ\le\alpha\le180^\circ$ នោះ $\cos\alpha<0\Rightarrow\cos\alpha=-\frac{1}{2}$

+ចំពោះ $0^\circ\le\alpha\le90^\circ$ នោះ $\tan\alpha>0$

$$\Rightarrow\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}}=\sqrt{3}$$

+ចំពោះ $90^\circ\le\alpha\le180^\circ$ នោះ $\tan\alpha<0$

$$\Rightarrow \tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}} = -\sqrt{3}$$

ដូច្នេះ បើ $0° \le \alpha \le 90°$ នោះ $\cos\alpha = \frac{1}{2}, \tan\alpha = \sqrt{3}$

បើ $90° \le \alpha \le 180°$ នោះ $\cos\alpha = -\frac{1}{2}, \tan\alpha = -\sqrt{3}$

ខ. $\cos\alpha = -\frac{4}{5}$ និង $90° \le \alpha \le 180°$

ដោយ $90° \le \alpha \le 180°$ នោះ $\sin\alpha > 0$ តែ $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$

$$\Rightarrow \sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha = 1 - \left(-\frac{4}{5}\right)^2 = 1 - \frac{16}{25} = \frac{9}{25}$$

$\Rightarrow \sin\alpha = \pm\frac{3}{5}$ តែ $\sin\alpha > 0$

ដូច្នេះ $\boxed{\sin\alpha = \frac{3}{5}}$

ដោយ $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ តែ $90° \le \alpha \le 180°$ នោះ $\cos\alpha < 0$

$\Leftrightarrow \tan\alpha < 0$

$$\Rightarrow \tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}} = -\frac{3}{4}$$

ដូច្នេះ $\boxed{\tan\alpha = -\frac{3}{4}}$

គ. $\tan\alpha = 2$ និង $0° \le \alpha \le 90°$

ដោយ $0° \le \alpha \le 90°$ និង $\sin\alpha > 0, \cos > 0$

យើងមាន $\tan\alpha = 2$

$$\Rightarrow \tan^2\alpha = 4 \Rightarrow 1 + \tan^2\alpha = 5$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\cos^2\alpha} = 5 \Rightarrow \cos^2\alpha = \frac{1}{5} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{\sqrt{5}}{5} \text{ , } \cos\alpha > 0$$

ដោយ $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

$$\Rightarrow \sin^2\alpha = 1 - \cos^2 = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$$

$$\Rightarrow \sin\alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$; ព្រោះ $\sin\alpha > 0$

ដូច្នេះ $\boxed{\cos\alpha = \frac{\sqrt{5}}{5} \text{ , } \sin\alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}}$

ឃ. $\tan\alpha = -\frac{1}{2}$ និង $90° \le \alpha \le 180°$

ដោយ $90° \le \alpha \le 180°$ គេបាន: $\sin\alpha > 0$, $\cos\alpha < 0$

យើងមាន $\tan\alpha = -\frac{1}{2} \Rightarrow \tan^2\alpha = \frac{1}{4} \Rightarrow 1 + \tan^2\alpha = \frac{5}{4}$

$$\Rightarrow \frac{1}{\cos^2\alpha} = \frac{5}{4} \Rightarrow \cos^2\alpha = \frac{4}{5}$$

នាំឲ្យ $\cos\alpha = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$ ព្រោះ $\cos\alpha < 0$

ដោយ $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$

$= 1 - \frac{4}{5} = \frac{1}{5} \Rightarrow \sin\alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$ ព្រោះ $\sin\alpha > 0$

ដូចនេះ $\boxed{\cos\alpha = -\frac{2\sqrt{5}}{5}\ ,\ \sin\alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}}$

មេរៀនទី ២

ការអនុវត្តនៃផលធៀបត្រីកោណមាត្រ

មេរៀនសង្ខេប

ABC ជាត្រីកោណចារឹកក្នុងរង្វង់កាំ R មានរង្វាស់ជ្រុង $BC = a,\ AC = b,\ AB = c$ និង រង្វាស់មុំ A, B, C ឈមរៀងគ្នានឹងកំពូល A, B, C ។

1.ទ្រឹស្តីបទស៊ីនុស៖ $$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

2.ទ្រឹស្តីបទកូស៊ីនុស៖ $$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$

3.ផ្ទៃក្រឡា S នៃត្រីកោណ ABC ៖

$$S = \frac{1}{2}ab\sin C = \frac{1}{2}ac\sin B = \frac{1}{2}bc\sin A$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$ ដែល $p = \frac{a+b+c}{2}$

(រូបមន្តហេរ៉ុង)

$$\frac{abc}{2S} = \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

លំហាត់

1.គណនារង្វាស់ជ្រុង និងមុំនៃត្រីកោណ ABC បើស្គាល់៖ .

ក. $BC=109$, $A=33^\circ$, $C=66^\circ$

ខ. $AC=16$, $A=143^\circ$, $B=22^\circ$

គ. $BC=20$, $AC=13$, $A=67^\circ$

2.គណនាជ្រុង BC នៃត្រីកោណ ABC បើគេដឹងថា $A=75^\circ$ និង កាំរង្វង់ចារឹកក្រៅត្រីកោណស្មើនឹង $10cm$ ។

3.គណនាជ្រុង BC នៃត្រីកោណ ABC បើគេស្គាល់៖

ក. $A=75^\circ$, $AB=4$ និង $AC=6$

ខ. $A=123^\circ$, $AB=7$ និង $AC=5$

គ. $B=60^\circ$, $AB=3$ និង $AC=5$

ឃ. $A=135^\circ$, $AB=3$ និង $AC=5$

4.គណនារង្វង់មុំ A,B និង C នៃត្រីកោណ ABC បើស្គាល់ $BC=10$, $AC=4$ និង $AB=7$ ។

5. $ABCD$ ជាចតុកោណព្នាយកែងត្រង់ A និង B ដែល $C=70^\circ$, $AC=CD=5cm$ ។កន្ទះបន្ទាត់ពុះមុំ B និង D កាត់អង្កត់ទ្រូង AC ត្រង់ E និង F ។ គណនា EF ។

6.រកប្រភេទត្រីកោណ ABC ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់៖

ក. $a\sin A = b\sin B$ ខ. $a\cos A = b\cos B$

7. ក... ានារង្វាស់មុំនៃត្រីកោណ MNP បើស្គាល់ $MN = 10$, $MP = 24$, $NP = 26$ ។

8. គ... ...ាស់អង្កត់ទ្រូងនៃប្រលេឡូក្រាម ដោយស្គាល់រង្វាស់ជ្រុងទាំងពី... $a = 6$, $b = 4$ និងមុំមួយ $\alpha = 50°$ ។

9. $MNPQ$ ...ាចតុកោណព្នាយកែងត្រង់ M និង Q ដែល $MN = ...m$, $NP = 20cm$ និង $PQ = 18cm$ ។

ក. គណនារង្វាស់មុំ N និងរង្វាស់អង្កត់ទ្រូង MP និង NQ ។

ខ. គណនាក្រឡាផ្ទៃត្រីកោណ QNP ។

10. $ABCD$ ជាចតុកោណព្នាយដែលមានបាត $AB = 23$, $CD = 15$ និងជ្រុងទ្រេត $BC = 12$, $B = 60°$ ។

ក. គណនាអង្កត់ទ្រូង AC, BD និងជ្រុងទ្រេត AD

ខ. គណនាក្រឡាផ្ទៃត្រីកោណ ACD ។

11. មានចតុកោណ $ABCD$ចារឹកក្នុងរង្វង់ដែលមាន $AB = 7$, $BC = 5$, $CD = 5$, $B = 60°$ ។

ក. គណនារង្វាស់អង្កត់ទ្រូង AC និង BD

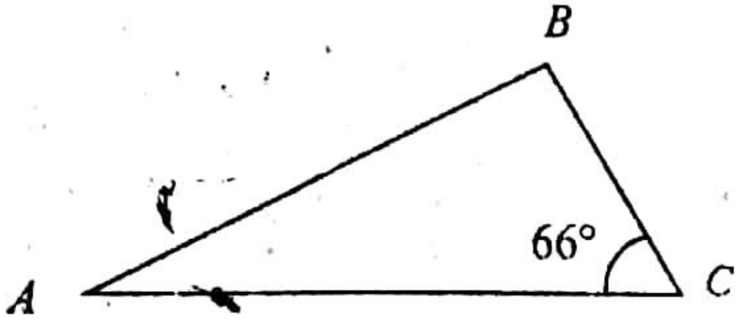
ខ. គណនាជ្រុង AD និងរង្វាស់កាំរង្វង់ចារឹកក្រៅចតុកោណ.

គ. គណនាក្រឡាផ្ទៃចតុកោណ $ABCD$ ។

ដំណោះស្រាយ

1.<u>គណនារង្វាស់ជ្រុង និង មុំនៃត្រីកោណ</u> ABC ៖

<u>គេស្គាល់</u>៖ក. $BC = 109$, $A = 33^\circ$, $C = 66^\circ$



យើងមានត្រីកោណ ABC

→ <u>រកមុំ</u> B ៖ យើងបាន: $B = 180^\circ - (33^\circ + 66^\circ)$

$\boxed{B = 81^\circ}$

→ <u>រករង្វាស់ជ្រុង</u> AB ; AC

តាង $a = BC$; $b = AC$; $c = AB$

តាមទ្រឹស្តីបទកូស៊ីនុស $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} \Rightarrow b = \dfrac{a \times \sin B}{\sin A}$

$$= \frac{109 \times \sin 81^\circ}{\sin 33^\circ}$$

$$= \frac{109 \times 0.9876}{0.5446}$$

$$b = 197.66$$

តាមទ្រឹស្តីបទកូស៊ីនុស $\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C} \Rightarrow c = \frac{a \times \sin C}{\sin A}$

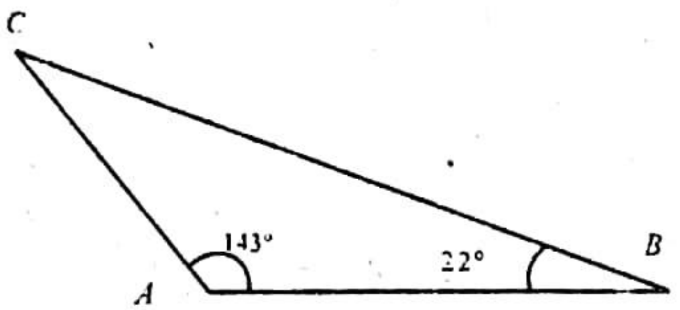
$$= \frac{109 \times \sin 66°}{\sin 33°}$$

$$= \frac{109 \times 0.9135}{0.5446}$$

រ $C = 182.83$

ដូច្នេះ $\boxed{B = 81° \ ; \ AC = 197.66 \ , \ AB = 182.83}$

ខ. $AC = 16 \ , \ A = 143° \ , \ B = 22°$



<u>គណនាមុំ</u> C ៖

យើងបាន៖ $C = 180° - (143° + 22°) = 15°$

<u>គណនារង្វាស់ជ្រុង</u> AB <u>និង</u> BC

តាង $b = AC \ , \ a = BC \ , \ c = AB$

តាមទ្រឹស្តីបទកូស៊ីនុស $\frac{b}{\sin B} = \frac{a}{\sin A}$

$$\Rightarrow a = \frac{b \times \sin A}{\sin B}$$

$$= \frac{16 \times \sin 143^\circ}{\sin 22^\circ}$$

$$= \frac{16 \times 0.6018}{0.3746}$$

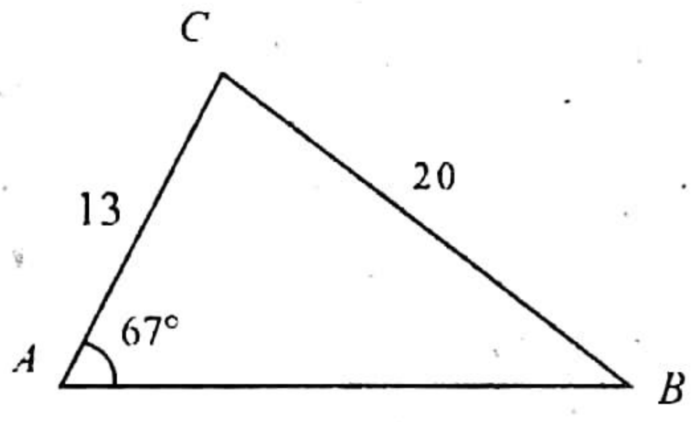
$$= 25.70$$

តាមទ្រឹស្តីបទកូស៊ីនុស $\frac{b}{\sin B} = \frac{a}{\sin A} \Rightarrow c = \frac{b \times \sin C}{\sin B}$

$$= \frac{16 \times \sin 15^\circ}{\sin 22^\circ} = \frac{16 \times 0.2588}{0.3746} = 11.05$$

ដូច្នេះ $\boxed{c = 15^\circ \ , \ AB = 11.05 \ , \ BC = 25.70}$

គ. $BC = 20$, $AC = 13$, $A = 67^\circ$



រកមុំ B

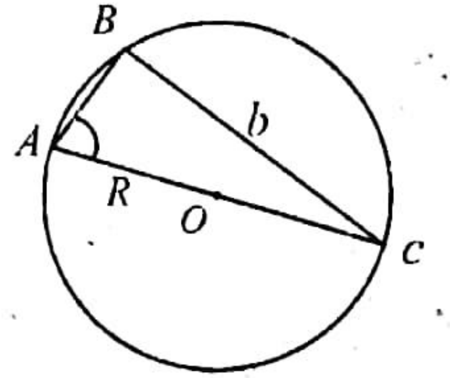
តាមទ្រឹស្តីបទកូស៊ីនុស $\frac{AG}{\sin B} = \frac{BC}{\sin A} \Rightarrow AB = \frac{BC \cdot \sin C}{\sin A}$

$$= \frac{20 \cdot \sin 76.25}{\sin 67^\circ} = \frac{20 \cdot \sin 0.9713}{0.9205}$$

$$AB = 21.10$$

ដូច្នេះ $\boxed{B = 36.75\ ,\ C = 76.25\ ,\ AB = 21.10}$

2. គណនាជ្រុង BC នៃត្រីកោណ ABC



ដោយ ABC ជាត្រីកោណចារឹកក្នុងរង្វង់

យើងបានតាមទ្រឹស្តីបទកូស៊ីនុស $\dfrac{b}{\sin \widehat{A}} = 2R$

$$\Rightarrow b = 2R \cdot \sin \widehat{A} = 2 \times 10 \times \sin 75^\circ = 19.32$$

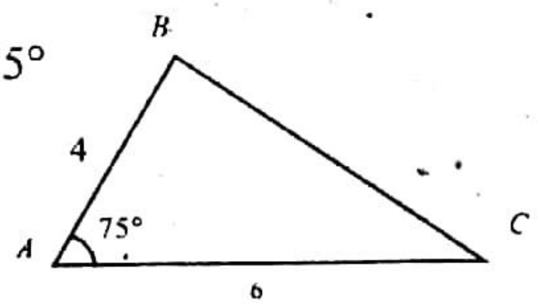
ដូច្នេះ $\boxed{b = 19.32}$

3. គណនាជ្រុង BC នៃត្រីកោណ ABC បើគេស្គាល់៖

ក. $A = 75^\circ\ ,\ AB = 4\ ,\ AC = 6$

តាមទ្រឹស្តីបទនៃកូស៊ីនុសនៃត្រីកោណ

$$(BC)^2 = (AB)^2 + (AC)^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos \widehat{A}$$
$$= 4^2 + 6^2 - 2 \cdot 4 \cdot 6 \cos 75^\circ$$
$$= 16 + 36 - 48 \cdot 0.2588$$
$$= 52 - 12.4224$$



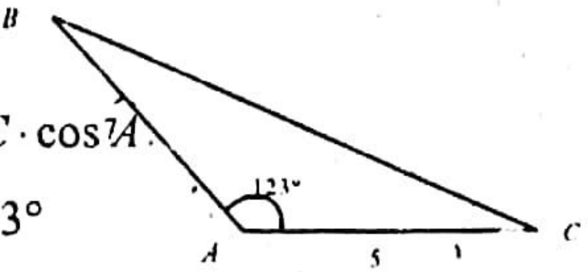
$$(BC)^2 = 39.5776$$

$$\Rightarrow BC = \sqrt{39.5776}$$

ដូច្នេះ $\boxed{BC = 6.2910}$

ខ. $A = 123°$, $AB = 7$ និង $AC = 5$

តាមទ្រឹស្តីបទកូស៊ីនុស



$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos A$$

$$BC^2 = 7^2 + 5^2 - 2 \cdot 7 \cdot 5 \cdot \cos 123°$$

$$= 49 + 25 - 70(-0.5446)$$

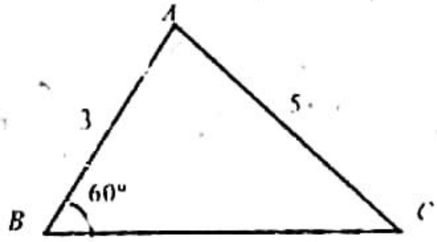
$$= 74 + 38.122$$

$$BC = \sqrt{112.122} = 10.58$$

ដូច្នេះ $\boxed{BC = 10.58}$

គ. $B = 60°$, $AB = 3$ និង $AC = 5$

កំនត់រង្វាស់មុំ $\widehat{C}$



តាមទ្រឹស្តីបទកូស៊ីនុស

$$\frac{AB}{\sin \widehat{C}} = \frac{AC}{\sin \widehat{B}} \Rightarrow \sin \widehat{C} = \frac{AB \cdot \sin \widehat{B}}{\hat{A}C}$$

រឺ $\sin \widehat{C} = \dfrac{3 \cdot \sin 60°}{5} = \dfrac{3 \cdot 08660}{5}$

$$\sin \widehat{C} = 0.519 \Rightarrow \widehat{C} = 31.256$$

$$\Rightarrow \widehat{A} = 180° - (60° + 31.256) = 88.735°$$

+កំនត់ BC

តាមទ្រឹស្តីបទកូស៊ីនុស $\dfrac{BC}{\sin\widehat{A}}=\dfrac{AC}{\sin\widehat{B}} \Rightarrow BC=\dfrac{AC\cdot\sin\widehat{A}}{\sin\widehat{B}}$

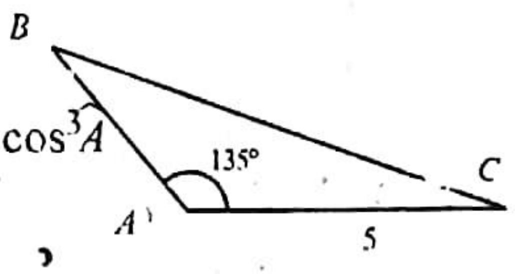
$$=\frac{5\cdot\sin 88.735^\circ}{\sin 60^\circ}$$

$$=\frac{5\times 0.999}{\sin 60^\circ}$$

$\boxed{BC=5.77}$

ខ. $A=135^\circ$, $AB=3$ និង $AC=5$

តាមទ្រឹស្តីបទកូស៊ីនុស



$$BC^2=AB^2+AC^2-2\cdot AB\cdot AC\cdot\cos\widehat{A}$$

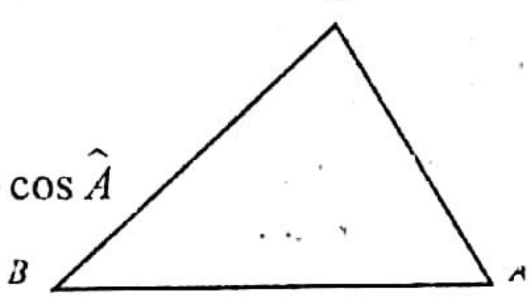
$$=3^2+5^2-2\cdot 3\cdot 5\cdot\cos 135^\circ$$

$$=9+25-30(-0.7071)$$

$$=34+21.213$$

$\boxed{BC=\sqrt{55.213}}$

4. គណនារង្វាស់មុំ A,B និង C នៃត្រីកោណ ABC បើគេស្គាល់ $BC=10$, $AC=4$ និង $AB=7$



ទ្រឹស្តីបទកូស៊ីនុស

$$BC^2=AB^2+AC^2-2\cdot AB\cdot AC\cdot\cos\widehat{A}$$

$$\cos\widehat{A}=\frac{AB^2+AC^2-BC^2}{2\cdot AB\cdot AC}$$

$$=\frac{7^2+4^2-10^2}{2\cdot7\cdot4}=\frac{65-100}{56}=-\frac{35}{56}$$

$$\cos\widehat{A}=-0.625\Rightarrow\widehat{A}=\cos^{-1}(-0.625)=128.68°$$

តាមទ្រឹស្តីបទកូស៊ីនុស

$$AC^2=AB^2+BC^2-2\cdot AB\cdot BC\cdot\cos\widehat{B}$$

$$\Rightarrow\cos\widehat{B}=\frac{AB^2+BC^2-AC^2}{2\cdot AB\cdot BC}$$

$$=\frac{7^2+10^2-4^2}{2\cdot7\cdot10}=\frac{49+100-16}{140}=\frac{133}{140}=0.95$$

$$\Rightarrow\widehat{B}=\cos^{-1}(0.95)=18.1948°$$

+រកមុំ $\widehat{C}$ តាមទ្រឹស្តីបទកូស៊ីនុស

$$AB^2=AC^2+BC^2-2\cdot AC\cdot BC\cdot\cos\widehat{C}$$

$$\Rightarrow\cos\widehat{C}=\frac{AC^2+BC^2-AB^2}{2\cdot AC\cdot BC}$$

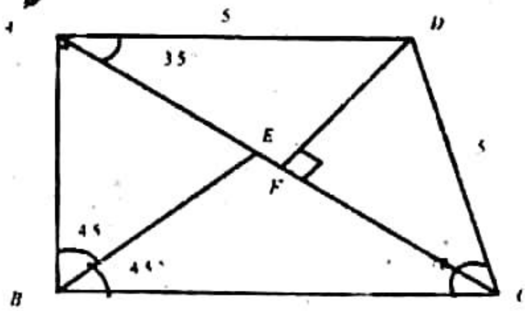
$$=\frac{16+100-49}{80}=\frac{67}{80}$$

$$\cos\widehat{C}=0.8375\Rightarrow\widehat{C}=\cos^{-1}(-0.8375)=33.12°$$

ដូច្នេះ $\boxed{\widehat{A}=128.68°\ ,\ \widehat{B}=18.20°\ ,\ \widehat{C}=33.12°}$

5.រក EF

ដោយផលបូកមុំជាប់ជ្រុងទ្រេតចតុកោណព្នាយស្មើនឹង 180° ។



កន្ទះបន្ទាត់ពុះមុំកំពូលរបស់ត្រីកោណសមបាតជាកំពស់ និងជាមេដ្យាន នៃត្រីកោណ ADC ក្នុងចតុកោណព្នាយ, គេបាន

$$\widehat{ADC} = 360^\circ - (90^\circ + 90^\circ + 70^\circ) = 110^\circ$$

ដោយ $[DF]$ ជាកន្ទះបន្ទាត់ពុះ មុំ $\widehat{ADC}$,

គេបាន៖ $\widehat{ADF} = \widehat{FDC} = \dfrac{110^\circ}{2} = 55^\circ$

គេបានក្នុងត្រីកោណកែង ADF

$$\Rightarrow \widehat{DAF} = 180^\circ - (90^\circ + 55^\circ) = 35^\circ$$

គេបាន $\sin 35^\circ = \dfrac{DF}{AD} \Rightarrow DF = AD\sin 35^\circ$

$$= 5\times\sin 35^\circ$$

$$= 2.8678$$

គេបាន៖ $\cos 35^\circ = \dfrac{AF}{AD} \Rightarrow AF = 5\times\cos 35^\circ = 4.0957$

$$\Rightarrow AC = 2AF = 8.1914$$

ដោយ $\widehat{BAC} = 90^\circ - 35^\circ = 55^\circ$

ហើយ $\widehat{BCA} = \widehat{BCD} - 35^\circ$

$$\widehat{BCA} = 70^\circ - 35^\circ = 35^\circ$$

គេបាន $\left.\begin{array}{c}\Delta ADF \\ \sim \\ \Delta CAB\end{array}\right| \Rightarrow \dfrac{AD}{AC}=\dfrac{DF}{AB}=\dfrac{AF}{BC}$

រី $\dfrac{AD}{AC}=\dfrac{DF}{AB} \Rightarrow AB=\dfrac{DF\cdot AC}{AD}$

$$=\frac{2.8678\times 8.1914}{5}=4.6982$$

រី $\dfrac{AD}{AC}=\dfrac{AF}{BC} \Rightarrow BC=\dfrac{AF\times AC}{AD}=\dfrac{4.0957\times 8.1914}{5}=6.71$

ក្នុង ΔABC ដែល $[BE]$ ជាកន្ទះបន្ទាត់ពុះមុំ

គេបាន $\dfrac{AB}{BC}=\dfrac{AE}{EC}=\dfrac{AF-EF}{AF+EF}$

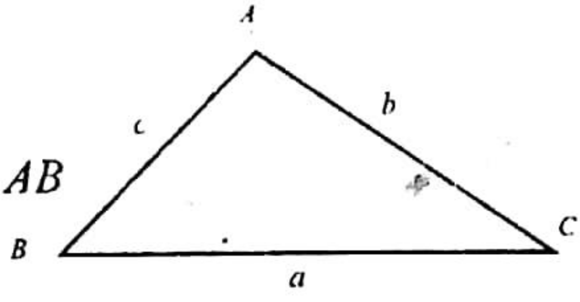
នោះ $\dfrac{AF-EF}{AF+EF}=\dfrac{4.6982}{6.71}=0.7$

$$AF-EF=0.7AF+0.7EF$$

$$0.3AF=1.7EF$$

$$\boxed{EF=\frac{0.3\times 4.0957}{1.7}=0.72}$$

6. <u>រកប្រភេទត្រីកោណ</u>



ក. $a\sin A=b\sin B$

តាង $a=BC$, $b=AC$, $c=AB$

តាមទ្រឹស្តីបទស៊ីនុស គេបាន៖

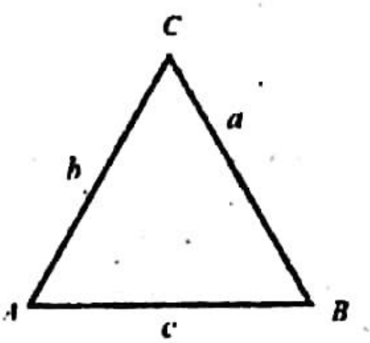
$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}\Rightarrow\frac{a}{b}=\frac{\sin A}{\sin B}\quad(1)$$

តាមសម្មតិកម្ម $a\sin A=b\sin B\Rightarrow\frac{\sin A}{\sin B}=\frac{b}{a}\quad(2)$

$(1)\,\&\,(2)\Rightarrow a^2=b^2\Rightarrow a=b$

ដូច្នេះ ABC ជាត្រីកោណសមបាត

ខ. $a\cos A=b\cos B$



យើងមាន៖ $a\cos A=b\cos B$

$$\Rightarrow\frac{a}{b}=\frac{\cos B}{\cos A}\quad(1)$$

តែ៖ $b\sin A=a\sin B$

តាមទ្រឹស្តីបទកូស៊ីនុស

$$\Rightarrow\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$$

$$\Rightarrow\frac{a}{b}=\frac{\sin A}{\sin B}\quad(2)$$

យើងបាន៖ $(1)=(2)\Rightarrow\frac{\cos B}{\sin A}=\frac{\cos A}{\sin B}$

$\Rightarrow\sin B\cos B=\sin A\cos A\Rightarrow2\sin B\cos B=2\sin A\cos A$

$\Rightarrow\sin 2B=\sin 2A\Rightarrow\widehat{A}=\widehat{B}$

$\Rightarrow$ ដូច្នេះ ABC ជាត្រីកោណសមបាត

- រកមុំ $\widehat{C}$ តាមទ្រឹស្តីបទកូស៊ីនុស $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$

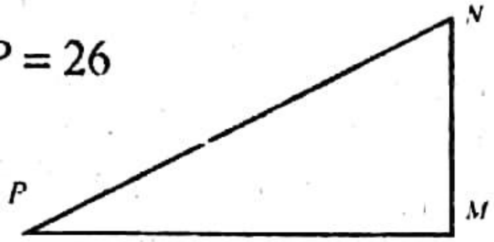
ដោយ $\widehat{A}=\widehat{B}$ ហើយ $a=b$

$\Rightarrow \widehat{A}=\widehat{B}=\widehat{C}$ (ទ្រឹស្តីបទកូស៊ីនុស)

ដោយ $\widehat{A}=\widehat{B}=\widehat{C}$ នោះត្រីកោណ ABC ជាត្រីកោណសម័ង្ស

7. គណនារង្វាស់មុំនៃត្រីកោណ MNP

បើស្គាល់ $MN=10$, $MP=24$, $NP=26$



-រករង្វាស់មុំត្រីកោណ MNP

តាមទ្រឹស្តីបទកូស៊ីនុស

$$PN^2=MN^2+MP^2-2\cdot MN\cdot PM\cdot\cos\widehat{M}$$

$$\Rightarrow \cos\widehat{M}=\frac{MN^2+MP^2-PN^2}{2\cdot MN\cdot PN}$$

$$=\frac{10^2+24^2-26^2}{480}=\frac{100+576-676}{480}$$

$$\Rightarrow \widehat{M}=90^\circ$$

+ រករង្វាស់មុំ $\widehat{N}$

តាមទ្រឹស្តីបទកូស៊ីនុស

$$MP^2=PN^2+MN^2-2\cdot PN\cdot MN\cos\widehat{N}$$

$$\Rightarrow \cos\widehat{N}=\frac{PN^2+MN^2-MP^2}{2\cdot PN\cdot MN}$$

$\Rightarrow \cos\widehat{N} = 0.3846 \Rightarrow \widehat{N} = \cos^{-1} 0.32846$ $\boxed{\widehat{N} = 67.36°}$

+ *រករង្វាស់មុំ* $\widehat{P}$

តាមទ្រឹស្តីបទកូស៊ីនុស $MN^2 = PN^2 + MP^2 - 2\cdot PN \cdot MP \cdot \cos\widehat{P}$

$$\cos\widehat{P} = \frac{PN^2 + MP^2 - MN^2}{2\cdot PN \cdot MP}$$

$$= \frac{26^2 + 24^2 - 10^2}{2\cdot 26\cdot 24} = \frac{676 + 576 - 100}{2\cdot 624} = \frac{1152}{1248}$$

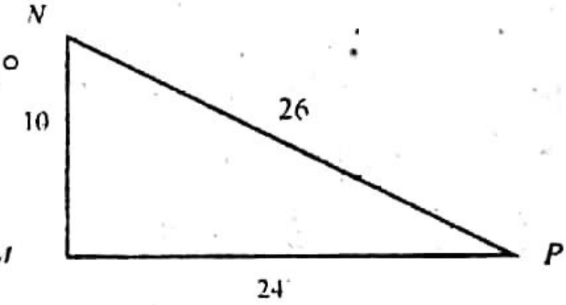
$$\cos\widehat{P} = 0.9230$$

$$\Rightarrow \widehat{P} = \cos^{-1}(0.9230)$$

$$\widehat{P} = 22.63°$$

ដូចនេះ $\boxed{\widehat{M} = 90°\ ,\ \widehat{N} = 67.36°\ ,\ \widehat{P} = 22.63°}$

រករង្វាស់មុំនៃត្រីកោណ MNP (*របៀបទី* 2)



+ $\cos\widehat{P} = \frac{24}{26} = 0.932 = \cos 22.62°$

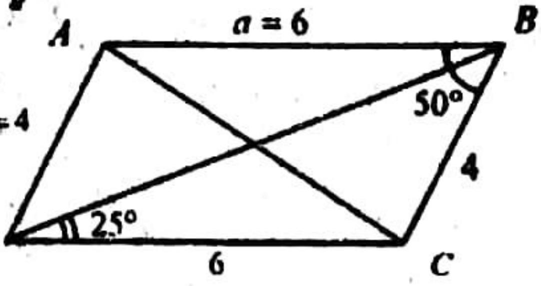
$\boxed{\Rightarrow \widehat{P} = 22.62°}$

+ $\cos\widehat{M} = \frac{24}{10} = 2.4 = \cos 90°$

$\boxed{\Rightarrow \widehat{M} = 90°}$

$\boxed{+\cos\widehat{N} = \frac{10}{26} = 0.384 = \cos 67.38° \Rightarrow \widehat{N} = 67.38°}$

8. <u>គណនារង្វាស់អង្កត់ទ្រូងនៃប្រលេឡូក្រាម</u>



តាម $DB = \dfrac{4}{\sin 25°} = \dfrac{4}{0.422} = 9.4$

$AC = \sin 50° \times 6 = 4.60$

ដូចេះ $\boxed{AC = 4.60\ ,\ DB = 9.4}$

9. ក. $N = 53.13°$

$MP = 24.08cm$

$NQ = 34cm$

ខ. $144cm^2$

10. ប្រើផលធៀបត្រីកោណមាត្រ និងទ្រឹស្តីបទពីតាគរ

ក. $AC = 19.92$

$BD = 23.43$

$AD = 10.58$

ខ. $S = 77.96$

$BD = 23.43$

$AD = 10.58$

11. ប្រើមុំចារឹកក្នុងរង្វង់ស្កាត់ធ្នូពីរប៉ុនគ្នា រកឲ្យឃើញ $\angle C = 92.2°$

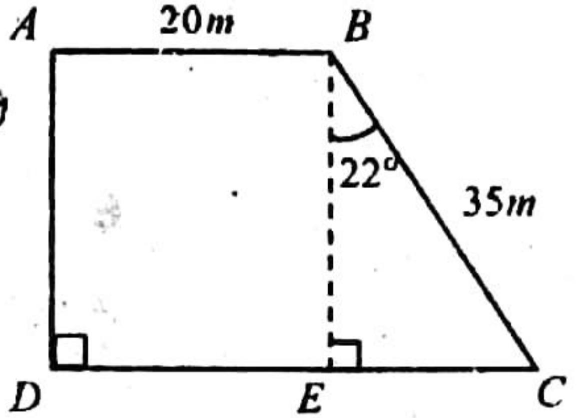
ក. $AC = 6.24$, $BD = 7.20$

ខ. $AC = 2$, $R = 3.60$

គ. $S = 15.15$

លំហាត់ជំពូកទី 6

1. ដីចំការមួយក្បាលរាង ចតុកោណព្នាយកែង $ABCD$ ។ ដោយដឹងថា $AB = 20m$, $BC = 35m$ និង $\angle CBE$ ។ គណនាផ្ទៃក្រឡាចំការ ។



2. រកផលធៀបត្រីកោណមាត្រនៃមុំតូចជាង 45° ដែលស្មើ នឹងផលធៀបត្រីកោណមាត្រនីមួយៗ នេះ៖

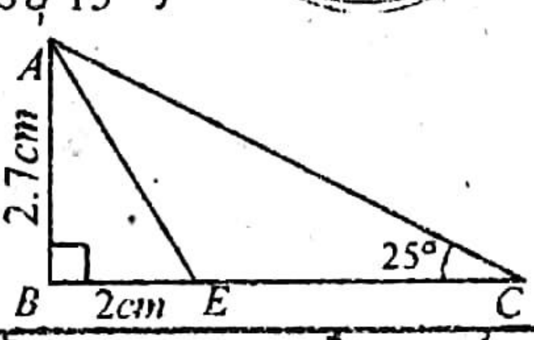
ក. $\sin 63°$ ខ. $\cos 82°$ គ. $\tan 73°$

3. រកប្រភេទត្រីកោណ ABC បើគេដឹងថា

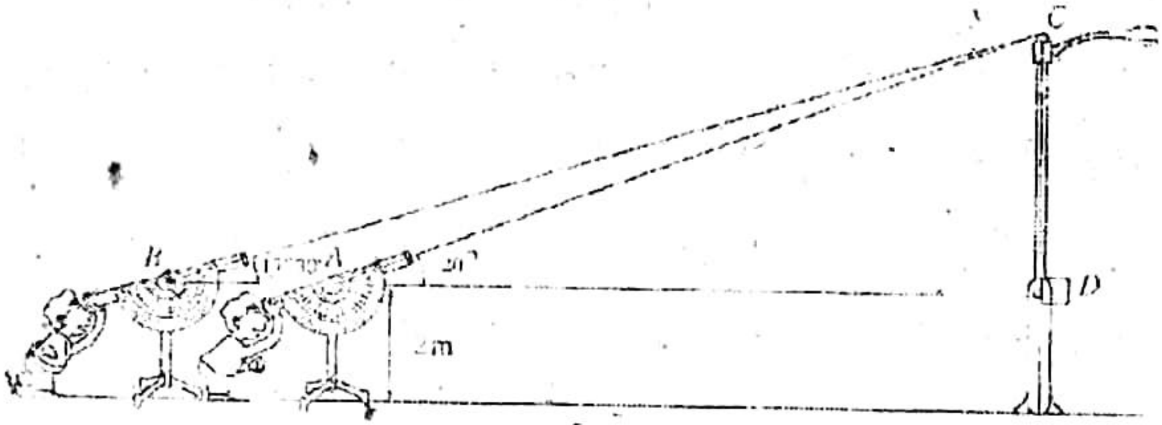
$$\sin^2 A + \sin^2 B = \sin^2 C$$

4. ទ្រនិចវែងនាឡិកាមានប្រវែង $2cm$ ធ្វើចលនាឆាកចេញពីលេខ 6 បានមុំ 30° ។ តាមគំនូសតាងនេះចូរគណនា ប្រវែង AC រួចទាញរកតង់សង់នៃមុំ 15° ។

5. តាមរូបខាងស្តាំនេះ ចូរគណនា $\tan C$ រួចទាញរករង្វាស់ EC ។ រកតម្លៃប្រហែលនៃមុំ CAE ។



6. គេចង់វាស់កម្ពស់បង្គោលភ្លើងហ្វាមួយ ដែលគេមិនអាចវាស់ផ្ទាល់បាន និងមិនអាចទៅក្បែរជើងបង្គោលបាន ។ គេដាក់ឧបករណ៍វាស់ម៉ុទ័រនៅត្រង់ A ដែលមានកម្ពស់ $2m$ ពីដី គេកំណត់បានមុំ $20°$ ។ បន្ទាប់មកគេរំកិលឧបករណ៍នៅត្រង់ A ដែលមានកម្ពស់ $2m$ ពីដី គេកំណត់បានមុំ $20°$ ។ បន្ទាប់មកគេរំកិលឧបករណ៍មកត្រង់ចំណុច B គេកំណត់បានមុំ $17°30'$ ។ ដោយស្គាល់ចម្ងាយ $AB = 15m$ ។ តើបង្គោលភ្លើងមានកម្ពស់ប៉ុន្មាន ។



7. បើបញ្ចកោណនិយ័តមួយចារឹកក្នុងរង្វង់កាំ $R = 5m$ ចូរគណនារង្វាស់ជ្រុងនៃបញ្ចកោណ ។

8. គណនាតម្លៃលេខនៃកន្សោមនីមួយៗ៖

$$A = \sin 135° + \sin 120° + \cos 150°$$

$$B = 2\cos 120° + \sin 150° - \tan 135°$$

$$C = \tan 45° + \tan 30° \tan 60°$$

$$D=\frac{tna60^\circ-\sin 150^\circ+2\cos 150^\circ}{3\sin^2 90+4\cos 60^\circ+4\tan 135^\circ}$$

9. សម្រួលកន្សោមខាងក្រោមជាអនុគមន៍នៃ $\sin\alpha$ ឬ $\cos\alpha$

$$A=2\sin(90^\circ-\alpha)+\cos(180^\circ-\alpha)$$

$$B=1-\sin^2\alpha+\cos^2\alpha\ ,\ C=\frac{\sin^2\alpha}{1+\cos\alpha}$$

$$D=\sqrt{\frac{2}{1+\sin\alpha}+\frac{2}{1-\sin\alpha}}$$

10. ផ្ទៀងផ្ទាត់ថាចំពោះគ្រប់ α នោះគេបាន៖

ក. $(\cos x+\sin x)^2+(\cos x-\sin x)^2=2$

ខ. $\tan^2\alpha-\sin^2\alpha=\tan^2\alpha\cdot\sin^2\alpha$

គ. $\sin^4\alpha-\cos^4\alpha+2\sin^2\alpha+4\cos^2\alpha=3$

ឃ. $\dfrac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$

ង. $\dfrac{1-\cos^2\alpha}{1+\sin^2\alpha}=\dfrac{1}{\cos^2\alpha}$

ច. $\sqrt{\dfrac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}-\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}=\dfrac{2}{\tan\alpha}$

11. រកតម្លៃប្រហែលនៃមុំ α ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់៖

ក. $\sin\alpha=0.4$ និង $0^\circ\le\alpha\le 90^\circ$

ខ. $\sin\alpha = \frac{\sqrt{5}}{4}$ និង $90^\circ \le \alpha \le 180^\circ$

គ. $\cos\alpha = -\frac{1}{2}$ និង $0^\circ \le \alpha \le 180^\circ$

ឃ. $\tan\alpha = \sqrt{3}$ និង $0^\circ \le \alpha \le 180^\circ$

12. គណនា $\cos\alpha$ និង $\tan\alpha$ ដោយស្គាល់៖

ក. $\sin\alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ និង $90^\circ \le \alpha \le 180^\circ$

ខ. $\sin\alpha = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$ និង $0^\circ \le \alpha \le 180^\circ$

13. គណនា $\cos\alpha$ និង $\sin\alpha$ ដោយស្គាល់៖

ក. $\tan\alpha = \frac{1}{3}$ និង $0^\circ \le \alpha \le 180^\circ$

ខ. $\tan\alpha = -2$ និង $0^\circ \le \alpha \le 180^\circ$

14. គណនា $\sin\alpha$ និង $\tan\alpha$ ដោយស្គាល់ $\cos\alpha = -\frac{2}{3}$ និង $0^\circ \le \alpha \le 180^\circ$ ។

15. គណនា $\frac{1+\tan\alpha}{1-\tan\alpha}$ ដោយស្គាល់ $\sin\alpha = \frac{3}{4}$ និង $0^\circ \le \alpha \le 180^\circ$ ។

16. គណនាកាំរង្វង់ចារឹកក្រៅត្រីកោណ ABC ដែល $A = 143^\circ$ និង $BC = 10$ ។

17. គណនារង្វាស់ជ្រុង AC នៃត្រីកោណ ABC បើស្គាល់៖

ក. $AB = 8$, $BC = 7$ និង $A = 60^\circ$

ខ. $AB = 4$, $BC = 5$ និង $A = 120^\circ$

18. សង់ត្រីកោណ ABC ក្នុងតម្រុយកូអរដោនេដែល $A(1,2)$, $B(-1,3)$ និង $C(2,-1)$ ។ គណនារង្វាស់មុំ A មុំ B និងមុំ C ។

19. មានត្រីកោណកែងសមបាត ABC កែងត្រង់ C និង $AC = BC = \sqrt{3}$ ។ D ជាចំណុចមួយនៅលើ AC ដែលមុំ $\angle DBC = 30^\circ$ ។

ក. គណនាតម្លៃប្រាកដនៃជ្រុងនីមួយៗ របស់ត្រីកោណ ABD

ខ. តាមតម្លៃប្រាកដនៃជ្រុងរបស់ត្រីកោណ ABD ចូរគណនា $\cos 15^\circ$, $\sin 15^\circ$ និង $\tan 15^\circ$ ។

20. មានត្រីកោណ ABC កែងត្រង់ A ។ នៅក្រៅត្រីកោណនេះគេសង់ ការេ $C_1 : ABMN$, $C_2 : ACPQ$, $C_3 : BCRS$ ។ គេគូសកម្ពស់ចេញពីកំពូល A ដែលកាត់ BC ត្រង់ I និងកាត់ SR ត្រង់ J ។

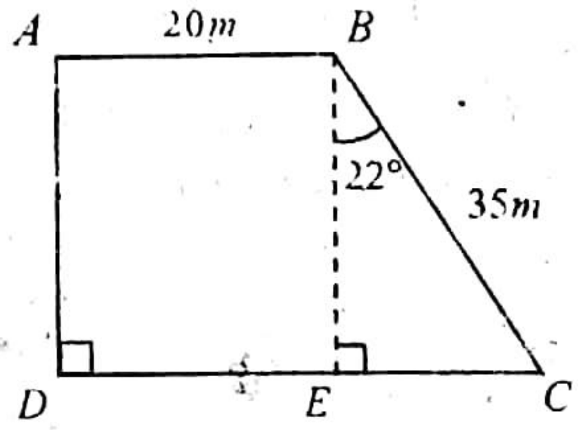
ក. បង្ហាញថាផ្ទៃក្រឡាការេ C_2 ស្មើនឹង 2 ដងផ្ទៃក្រឡាត្រីកោណ BCP ។ បង្ហាញថាផ្ទៃក្រឡាចតុកោណ $CIJR$ ស្មើនិង 2 ដងផ្ទៃក្រឡាត្រីកោណ BCP និង ACR រួចទាញបង្ហាញថាផ្ទៃក្រឡា C_2 ស្មើនឹងផ្ទៃក្រឡា $CIJR$ ។

ខ. តាមលំនាំដូចគ្នានេះបង្ហាញថាផ្ទៃក្រឡា C_1 ស្មើនិងផ្ទៃក្រឡា $BIJS$ ។

គ ចូរទាញសន្និដ្ឋានថា $BC^2 = AB^2 + AC^2$ ។

ដំណោះស្រាយ

1.



<u>គណនាក្រលាផ្ទៃចតុកោណ</u>

ក្នុងត្រីកោណ BEC កែងត្រង់ E គេបាន

$\cos\widehat{A} = \frac{BE}{BC}$ នាំអោយ $BE = BC\cos\widehat{A}$

នោះ $BE = 35\cos 22^\circ = 32.45m$

ហើយ $\sin\widehat{B} = \frac{EC}{BC}$

នាំអោយ $EC = BC\sin\widehat{B} = 35\cdot\sin 22^\circ = 13.11m$

$S_{ABCD} = \frac{1}{2}(AB + DC)\cdot AD$, $(AD = BE)$

$$S_{ABCD}=\frac{1}{2}(20+33.11)\cdot 32.45=861.74m^2$$

ដូច្នេះ $\boxed{S_{ABCD}=861.74m^2}$

2. រកផល ធៀបត្រីកោណមាត្រនៃមុំតូចជាង 45° ដែលស្មើ នឹងផលធៀបត្រីកោណមាត្រនីមួយៗ

ក. $\sin 63^\circ=\sin(90^\circ-27^\circ)$

$$=\cos 27^\circ$$

ដូច្នេះ $\boxed{\sin 63^\circ=\cos 27^\circ}$

ខ. $\cos 82^\circ=\cos(90^\circ-8^\circ)$

$$=\sin 8^\circ$$

ដូច្នេះ $\boxed{\cos 82^\circ=\sin 8^\circ}$

គ. $\tan 73^\circ=\tan(90^\circ-17^\circ)$

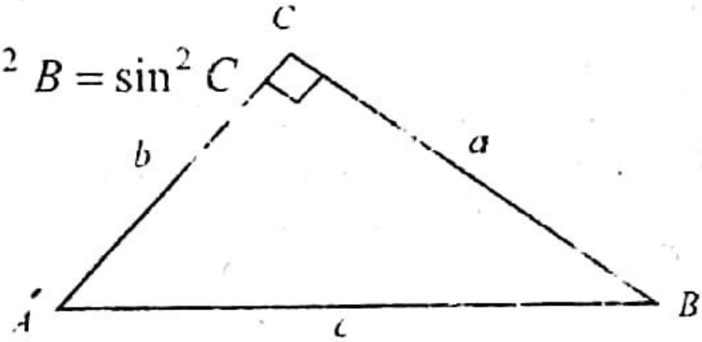
$$=\frac{1}{\tan 17^\circ}$$

ដូច្នេះ $\boxed{\tan 73^\circ=\frac{1}{\tan 17^\circ}}$

3. រកប្រភេទត្រីកោណ ABC

បើគេមាន៖ $\sin^2 A+\sin^2 B=\sin^2 C$

តាមទ្រឹស្តីបទស៊ីនុស



$$\frac{a}{\sin\widehat{A}}=\frac{b}{\sin\widehat{B}}=\frac{c}{\sin\widehat{C}}\Rightarrow\frac{a^2}{\sin^2\widehat{A}}=\frac{b^2}{\sin^2\widehat{B}}=\frac{c^2}{\sin^2\widehat{C}}$$

$$\Rightarrow\frac{a^2+b^2}{\sin^2\widehat{A}+\sin^2\widehat{B}}=\frac{c^2}{\sin^2\widehat{C}}$$

ដោយ $\sin^2\widehat{A}+\sin^2\widehat{B}=\sin^2\widehat{C}$

សមភាពនេះកើតមាននៅពេល $a^2+b^2=c^2$

ដោយ a , b , c ជាជ្រុងនៃ ΔABC

ដូច្នេះ ΔABC ជាត្រីកោណកែង

4. <u>គណនាប្រវែង</u> AC <u>រួចទាញ</u> $\tan 15°$

ក្នុង ΔOBA កែងត្រង់ A ហើយ $OC=2cm$

គេបាន៖ $\widehat{B}_1=180°-(30°+90°)\Rightarrow\widehat{B}_1=60°$

$$\Rightarrow\sin\widehat{B}_1=\frac{OA}{OB}=\frac{OA}{2}$$

គេបាន $OA=2\sin 60°$

$$=2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$=\sqrt{3}$$

ដោយ $AC=OC-OA$

ដូច្នេះ $\boxed{AC=\left(2-\sqrt{3}\right)cm}$

<u>រក</u> AB

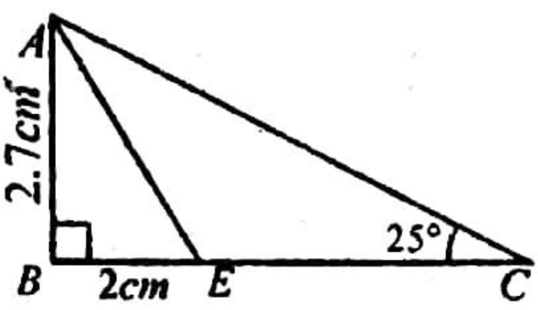
ដោយ $\sin\widehat{O}=\frac{AB}{OB}=\frac{AB}{2}\Rightarrow AB=2\cdot\sin 30°=1$

ក្នុង ΔABC កែងត្រង់ A គេបាន៖ $\tan\widehat{B}_2=\frac{AC}{AB}$

$$\tan\widehat{B}_2=2-\sqrt{3}\Rightarrow\widehat{B}_2=15°$$

ដូចនេះ: $\boxed{\tan 15°=2-\sqrt{3}}$

5. <u>គណនា</u> $\tan\widehat{C}$ <u>រួចទាញរក</u> EC



ក្នុងត្រីកោណ ABC គេបាន

$\tan\widehat{C}=\tan 25°=0.4663$

ដោយ $\tan\widehat{C}=\frac{AB}{BC}$

$$\Rightarrow\tan\widehat{C}=\frac{AB}{BE+EC}$$

$$0.4663=\frac{2.7}{2+EC}$$

$$0.4663(2+EC)=2.7$$

$$EC=\frac{2.7-0.9326}{0.4663}$$

ដូចនេះ: $\boxed{\tan\widehat{C}=0.4663\ ,\ EC=3.79cm}$

<u>រកតំលៃប្រហែល</u> $\angle CAE$

ក្នុងត្រីកោណ ABC កែងត្រង់ B គេបាន

$$AE=\sqrt{2^2+(2.7)^2}=3.36cm$$

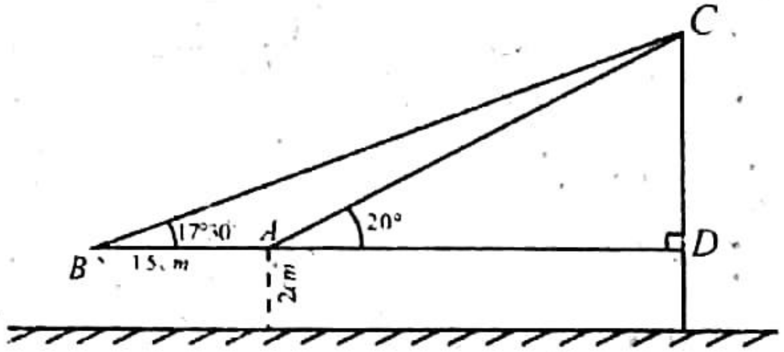
តាមទ្រឹស្តីបទស៊ីនុសក្នុងត្រីកោណ AEC គេបាន

$$\frac{EC}{\sin\widehat{EAC}}=\frac{AE}{\sin 25^\circ}\Rightarrow\frac{3.79}{\sin\widehat{EAC}}=\frac{3.36}{\sin 25^\circ}$$

$$\Rightarrow \sin\widehat{EAC}=\frac{3.79\cdot\sin 25^\circ}{3.36}\quad 0.4767$$

$\boxed{\widehat{EAC}=28.47^\circ}$ រឺ $\boxed{\widehat{EAC}=28^\circ 28'12''}$

6. <u>គណនាកំពស់បង្គោលភ្លើង</u>



ក្នុងត្រីកោណ ACD គេបាន $\tan 20^\circ=\frac{CD}{AD}$

នាំអោយ $CD=AD\cdot\tan 20^\circ \quad (1)$

ក្នុងត្រីកោណ BCD គេបាន៖ $\tan 17^\circ 30'=\frac{CD}{BD}=\frac{CD}{15+AD}$

នាំអោយ $CD=(15+AD)\cdot\tan 17^\circ 30' \quad (2)$

តាម (1) និង (2) គេបាន៖

$$\Rightarrow AD\cdot\tan 20° = 15\tan 17°30' + AD\tan 17°30'$$

$$\Rightarrow AD(\tan 20° - \tan 17°30') = 15\tan 17°30'$$

នាំអោយ $AD = \dfrac{15\tan 17°30'}{\tan 20° - \tan 17°30'}$ (3)

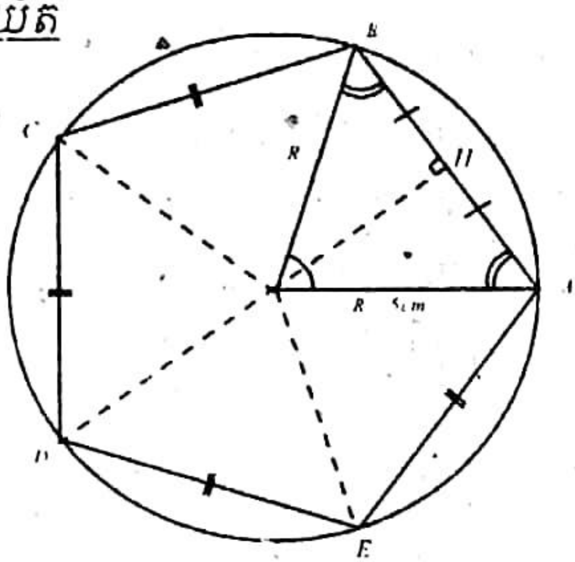
យក (3) ជំនួស (1) គេបាន

$$CD = \frac{15\tan 20°\cdot\tan 17°30'}{\tan 20° - \tan 17°30'} = 35.37$$

ដូច្នេះ $CD = 35.37$

កំពស់បង្គោលភ្លើង $\boxed{= CD + 2 = 37.37m}$

7. <u>រករង្វាស់ជ្រុងនៃបញ្ចកោណនិយ័ត</u>



ក្នុងបញ្ចកោណនិយ័តចារឹកក្នុងរង្វង់គេបានត្រីកោណសមបាត 5 ប៉ុនគ្នា ។ ដោយបញ្ចកោណមានជ្រុង $n = 5$ គេបាន

ផលបូករង្វាស់មុំក្នុងពហុកោណ

$S = (n-2)\times 180°$

$S = 3\times 180° = 540°$

គេបាន $\widehat{ABC} = \widehat{BCD} = \widehat{CDE} = \widehat{DEA} = \widehat{EAB}$

ព្រោះបញ្ចកោណចារឹកក្នុងរង្វង់ៗនោះ $\widehat{EAB} = \dfrac{540°}{5} = 108°$

ដោយត្រីកោណទាំង 5 ជាត្រីកោណសមបាតប៉ុនគ្នាគេបាន

$$\widehat{OEA}=\widehat{OAE}=\widehat{OAB}=\widehat{DEO}=\frac{108^\circ}{2}=54^\circ$$

ក្នុង ΔOBH កែងត្រង់ H គេបាន $\cos\widehat{OBA}=\frac{BH}{R}$

$\Rightarrow BH=R\cdot\cos 54^\circ$ តែ $AB=2BH$

$$AB=2R\cos 54^\circ$$

$$AB=2\times 5\cos 54^\circ$$

$$AB=5.88$$

ដូច្នេះ រង្វាស់ជ្រុងនៃបញ្ចកោណនិយ័តស្មើ $\boxed{5.88}$

8. <u>គណនាតំលៃលេខនៃកន្សោមនីមួយៗ</u>

$$A=\sin 135^\circ+\sin 120^\circ+\cos 150^\circ$$
$$=\sin(180^\circ-45^\circ)+\sin(180^\circ-60^\circ)+\cos(180^\circ-30^\circ)$$
$$=\sin 45^\circ+\sin 60^\circ-\cos 30^\circ$$
$$=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{A=\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$B=2\cos 120^\circ+\sin 150^\circ-\tan 135^\circ$$
$$=2\cos 2\cdot 60^\circ+\sin(180^\circ-30^\circ)-\tan(180^\circ-45^\circ)$$
$$=2\cos(180^\circ-60^\circ)+\sin(180^\circ-30^\circ)-\tan(180^\circ-45^\circ)$$
$$=2\cos 60^\circ+\sin 30^\circ+\tan 45^\circ \Rightarrow B=\frac{1}{2}$$

$$C=\tan 45+\tan 30^\circ \tan 60^\circ$$

$$=1+\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\sqrt{3}=1+\frac{\sqrt{3^2}}{3}=1+\frac{3}{3}\ \boxed{\Rightarrow C=2}$$

$$D=\frac{\tan 60^\circ-\sin 150^\circ+2\cos 150^\circ}{3\sin^2 90^\circ+4\cos 60^\circ+4\tan 135^\circ}$$

$$=\frac{\tan 60^\circ-\sin(180^\circ-30^\circ)+2\cos(180^\circ-30^\circ)}{3\sin^2 90^\circ+4\cos 60^\circ+4\tan(180^\circ-45^\circ)}$$

$$=\frac{\sqrt{3}-\sin 30^\circ-2\cos 30^\circ}{3\cdot 1^2+4\cdot\frac{1}{2}-4\tan 45^\circ}$$

$$=\frac{\sqrt{3}-\frac{1}{2}-2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}{3+2-4\cdot 1}=\frac{-\frac{1}{2}}{1}\Rightarrow \boxed{D=-\frac{1}{2}}$$

9. សំរួលកន្សោមខាងក្រោមឲ្យជាអនុគមន៍នៃ $\sin x$ ឬ $\cos x$

$$A=2\sin(90^\circ-\alpha)+\cos(180^\circ-\alpha)$$

$$=2\cos\alpha-\cos\alpha$$

$$\Rightarrow \boxed{A=\cos\alpha}$$

$$B=1-\sin^2\alpha+\cos^2\alpha$$

$$=\cos^2\alpha+\cos^2\alpha$$

$$\Rightarrow \boxed{B=2\cos^2\alpha}$$

$$C=\frac{\sin^2\alpha}{1+\cos\alpha}$$

$$=\frac{1-\cos^2\alpha}{1+\cos\alpha}$$

$$=\frac{(1-\cos\alpha)(1+\cos\alpha)}{1+\cos\alpha}$$

$$\Rightarrow \boxed{C=1+\cos\alpha}$$

$$D=\sqrt{\frac{2}{1+\sin\alpha}+\frac{2}{1-\sin\alpha}}$$

$$=\sqrt{\frac{2(1-\sin\alpha)+2(1+\sin\alpha)}{1^2-\sin^2\alpha}}$$

$$=\sqrt{\frac{2-2\sin\alpha+2+2\sin\alpha}{\cos^2}}=\sqrt{\frac{4}{\cos^2\alpha}}$$

$$\Rightarrow \boxed{D=\frac{2}{\cos\alpha}}$$

10. ផ្ទៀងផ្ទាត់ថាចំពោះគ្រប់ α នោះ៖

គេបាន៖

ក. $(\cos\alpha+\sin\alpha)^2+(\cos\alpha-\sin\alpha)^2=2$

យើងមាន៖ $(\cos\alpha+\sin\alpha)^2+(\cos\alpha-\sin\alpha)^2$

$$=\cos^2\alpha+2\cos\alpha\sin\alpha+\sin^2\alpha+\cos^2\alpha-2\cos\alpha\sin\alpha+\sin^2\alpha$$

$=2\left(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha\right)=2$ ផ្ទៀងផ្ទាត់

ដូចនេះ $\boxed{(\cos\alpha+\sin\alpha)^2+(\cos\alpha-\sin\alpha)^2=2}$

ខ. $\tan^2\alpha-\sin^2\alpha=\tan^2\alpha\cdot\sin^2\alpha$

យើងមាន៖ $\tan^2\alpha-\sin^2\alpha$

$=\dfrac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}-\sin^2\alpha=\dfrac{\sin^2\alpha-\sin^2\alpha\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}$

$=\dfrac{\sin^2\alpha\left(1-\cos^2\alpha\right)}{\cos^2\alpha}=\dfrac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}\cdot\sin^2\alpha$

$=\tan^2\alpha\cdot\sin^2\alpha$ ផ្ទៀងផ្ទាត់

ដូចនេះ $\boxed{\tan^2\alpha-\sin^2\alpha=\tan^2\alpha\cdot\sin^2\alpha}$

គ. $\sin^2\alpha-\cos^2\alpha+2\sin^2\alpha+4\cos^2\alpha=3$

យើងមាន៖ $\sin^2\alpha-\cos^2\alpha+2\sin^2\alpha+4\cos^2\alpha$

$=3\sin^2\alpha+3\cos^2\alpha=3\left(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha\right)$

$=3$ ផ្ទៀងផ្ទាត់

ដូចនេះ $\boxed{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha+2\sin^2\alpha+4\cos^2\alpha=3}$

ឃ. $\dfrac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$

យើងមាន៖

$$\frac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}=\frac{1-\dfrac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}}{1+\dfrac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}}=\frac{\dfrac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}}{\dfrac{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}}=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$$

ដូច្នេះ $\boxed{\frac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}$

ង. $\frac{1-\cos^2\alpha}{1-\sin^2\alpha}=\frac{1}{\cot^2\alpha}$

មាន៖ $\frac{1-\cos^2\alpha}{1-\sin^2\alpha}=\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}=\tan^2\alpha=\frac{1}{\cot^2\alpha}$ ផ្ទៀងផ្ទាត់

ដូច្នេះ $\boxed{\frac{1-\cos^2\alpha}{1-\sin^2\alpha}=\frac{1}{\cot^2\alpha}}$

ច. $\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}-\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}=\frac{2}{\tan\alpha}$

យើងមាន៖ $\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}-\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$

$=\sqrt{\frac{(1+\cos\alpha)^2}{1-\cos^2\alpha}}-\sqrt{\frac{(1-\cos\alpha)^2}{1-\cos^2\alpha}}$

$=\sqrt{\frac{(1+\cos\alpha)^2}{\sin^2\alpha}}-\sqrt{\frac{(1-\cos\alpha)^2}{\sin^2\alpha}}$

$=\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}-\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{2\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{2}{\tan\alpha}$ ផ្ទៀងផ្ទាត់

ដូច្នេះ $\boxed{\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}-\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}=\frac{2}{\tan\alpha}}$

11. រកតម្លៃប្រហែលនៃមុំ α ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់

ក. $\sin = 0.4$ និង $0° \le \alpha \le 90°$

-ចំពោះ $0° \le \alpha \le 90°$ នោះ $\cos\alpha > 0$

ដោយ $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

$$\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha$$

$$\cos^2\alpha = 1 - (0.4)^2 = 0.84$$

$$\cos\alpha = 0.9$$

$$\Rightarrow \alpha = 23°57'$$

ដូចេ្នះ $\boxed{\alpha = 23°57'}$

ខ. $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{5}}{4}$ និង $90° \le \alpha \le 180°$

-ចំពោះ $90° \le \alpha \le 180°$ នោះ $\cos\alpha < 0$, $\sin\alpha > 0$

ដោយ $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

$$\cos^2 = 1 - \sin^2\alpha = 1 - \left(\frac{\sqrt{5}}{4}\right)^2 = 0.69$$

$$\cos\alpha = \pm 0.83$$

តែ $\cos\alpha < 0 \Rightarrow \cos\alpha = 0.83$

ដូចេ្នះ $\boxed{\alpha = 146°}$

គ. $\cos\alpha = -\dfrac{1}{2}$ និង $0° \le \alpha \le 180°$

-ចំពោះ $0° \le \alpha \le 180°$ នោះ $\cos\alpha < 0$

$$\cos^2\alpha = 1-\sin^2\alpha = 1-\left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$$

តែ $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

$$\cos^2\alpha = 1-\sin^2\alpha$$

$$= 1-\left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$$

$$\cos\alpha = \pm 0.87$$

ដោយ $\cos\alpha < 0 \Rightarrow \cos\alpha = 0.87$

ដូចនេះ $\alpha = 150°$

ឃ. $\tan\alpha = \sqrt{3}$ និង $0° \le \alpha \le 180°$

យើងមាន $\tan^2\alpha = 3$

$$1+\tan^2\alpha = 3+1$$

$$\frac{1}{\cos^2\alpha} = 4$$

$$\cos\alpha = \pm\frac{1}{2}$$

ដូចនេះ $\alpha = 60°$

12 គណនា $\cos\alpha$ និង $\tan\alpha$

ក. $\sin\alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ និង $90° \le \alpha \le 180°$

-ចំពោះ $90° \le \alpha \le 180°$ នោះ $\cos\alpha < 0$

ដោយ $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$

$$\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha$$

$$=1-\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)^2=1-\frac{20}{25}=\frac{1}{5}$$

$$\cos\alpha=-\frac{\sqrt{5}}{5}$$

-ចំពោះ $90^\circ\le\alpha\le180^\circ$ នោះ $\tan\alpha<0$

តែ $\tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\dfrac{\frac{2\sqrt{5}}{5}}{-\frac{\sqrt{5}}{5}}=-2$

ដូច្នេះ $\boxed{\cos\alpha=-\frac{\sqrt{5}}{5}\ ,\ \tan\alpha=-2}$

ខ. គណនា $\cos\alpha$ និង $\tan\alpha$

យើងមាន $\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$ និង $0^\circ\le\alpha\le180^\circ$

-ចំពោះ $0^\circ\le\alpha\le90^\circ$ នោះ $\cos\alpha>0$, $\tan\alpha>0$

តែ $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$

$$\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha$$

$$=1-\left(\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}\right)^2=1-\frac{2-\sqrt{3}}{4}$$

$$\cos\alpha=\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$$

-ចំពោះ: $0^\circ\le\alpha\le90^\circ$ នោះ: $\tan\alpha>0$

ដោយ $\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

$$\frac{\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}}{\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}}=\frac{\sqrt{\left(2+\sqrt{3}\right)\left(2-\sqrt{3}\right)}}{\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^2}$$

$$=\frac{1}{2+\sqrt{3}}=\frac{2-\sqrt{3}}{\left(2+\sqrt{3}\right)\left(2-\sqrt{3}\right)}=2-\sqrt{3}$$

-ចំពោះ: $90^\circ\le\alpha\le180^\circ$ នោះ: $\cos\alpha>0$, $\tan\alpha>0$

ដូច្នេះ: បើ $0^\circ\le\alpha\le90^\circ$ នោះ: $\cos\alpha=\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$

$$\tan\alpha=2-\sqrt{3}$$

បើ $0^\circ\le\alpha\le180^\circ$ នោះ: $\cos\alpha=-\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$

$$\tan\alpha=\sqrt{3}-2$$

13. គណនា $\cos\alpha$ និង $\sin\alpha$

ក. $\tan\alpha = \frac{1}{3}$ និង $0° \le \alpha \le 180°$

យើងមាន $\tan\alpha = \frac{1}{3}$

$$\Rightarrow 1+\tan^2\alpha = \frac{10}{9}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\cos^2\alpha} = \frac{10}{9}$$

$$\Rightarrow \cos^2\alpha = \frac{9}{10}$$

$$\Rightarrow \cos\alpha = \sqrt{\frac{9}{10}} = \frac{3\sqrt{10}}{10}$$

-ចំពោះ $0° \le \alpha \le 180°$ នោះ $\tan\alpha < 0$

តែ $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

$$\sin\alpha = \tan\alpha - \cos\alpha$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{3\sqrt{10}}{10} = \frac{\sqrt{10}}{10}$$

ដូច្នេះ: $\cos\alpha = \frac{3\sqrt{10}}{10}$, $\sin\alpha \frac{\sqrt{10}}{10}$

ខ. $\tan\alpha = -2$ និង $0° \le \alpha \le 180°$

យើងមាន $\tan\alpha = -2$

$$\Rightarrow 1+\tan^2\alpha = 5$$

$$\frac{1}{\cos^2\alpha}=5$$

$$\cos^2\alpha=\frac{1}{-5}$$

$$\Rightarrow \quad \cos\alpha=-\frac{1}{\sqrt{5}}=-\frac{\sqrt{5}}{5}$$

-ចំពោះ $0^\circ\le\alpha\le180^\circ$ នោះ $\sin\alpha>0$

តែ $\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\Rightarrow\sin\alpha=\tan\alpha\cdot\cos\alpha$

$$\sin\alpha=-2\times\left(-\frac{\sqrt{5}}{5}\right)=\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

ដូច្នេះ $\boxed{\cos\alpha=-\frac{\sqrt{5}}{5}\,,\sin\alpha=\frac{2\sqrt{5}}{5}}$

14. <u>គណនា</u> $\sin\alpha$ <u>និង</u> $\tan\alpha$

បើ $\cos\alpha=-\frac{2}{3}$ និង $0^\circ\le\alpha\le180^\circ$

-ចំពោះ $0^\circ\le\alpha\le180^\circ$ នោះ $\sin\alpha>0$

ដោយ $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$

$$\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha$$

$$=1-\frac{4}{9}=\frac{5}{9}$$

$$\sin\alpha=\frac{\sqrt{5}}{3}$$

-ចំពោះ $0^\circ\le\alpha\le180^\circ$ នោះ $\tan\alpha<0$

តែ $\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\frac{\sqrt{5}}{3}}{-\frac{2}{3}}=-\frac{\sqrt{5}}{2}$

ដូច្នេះ $\boxed{\sin\alpha=\frac{\sqrt{5}}{3}\ ,\ \tan\alpha=-\frac{\sqrt{5}}{2}}$

15. គណនា $\frac{1+\tan\alpha}{1-\tan\alpha}$ (1)

បើ $\sin\alpha=\frac{3}{4}$ និង $0^\circ\le\alpha\le180^\circ$

-ចំពោះ $0^\circ\le\alpha\le180^\circ$ នោះ $\cos\alpha>0$

ដោយ $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$

$$\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha=1-\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{7}{16}$$

$$\cos\alpha=\frac{\sqrt{7}}{4}$$

-ចំពោះ $0^\circ\le\alpha\le90^\circ$ នោះ $\tan\alpha>0$

ដែរ $\tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\dfrac{\frac{3}{4}}{\frac{\sqrt{7}}{4}}=\dfrac{12}{4\sqrt{7}}$

$$\tan\alpha=\frac{12}{4\sqrt{7}}=\frac{3}{\sqrt{7}}$$

-ចំពោះ: $90^\circ\le\alpha\le180^\circ\Rightarrow\cos\alpha<0\ ,\ \sin\alpha>0$

ដោយ $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$

$$\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha$$

$$=1-\left(\frac{3}{4}\right)^2$$

$$\cos\alpha=-\frac{\sqrt{7}}{4}$$

-ចំពោះ: $90^\circ\le\alpha\le180^\circ\Rightarrow\tan\alpha<0$

$$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=-\frac{3}{7}$$

តាម (1) $\dfrac{1+\tan\alpha}{1-\tan\alpha}=\dfrac{1+\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}{1-\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}$

$$=\frac{\cos\alpha+\sin\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}$$

+ករណី $0^\circ\le\alpha\le90^\circ$

$$\frac{\cos\alpha+\sin\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}=\frac{\frac{\sqrt{7}}{4}+\frac{3}{4}}{\frac{\sqrt{7}}{4}-\frac{3}{4}}=\frac{\sqrt{7}+3}{\sqrt{7}-3}$$

$$=\frac{\left(\sqrt{7}+3\right)^2}{\sqrt{7^2}-3^2}=-\frac{\left(\sqrt{7}+3\right)^2}{2}$$

+ករណី $90^\circ\le\alpha\le180^\circ$

$$\frac{\cos\alpha+\sin\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}=\frac{-\frac{\sqrt{7}}{4}+\frac{3}{4}}{-\frac{\sqrt{7}}{4}-\frac{3}{4}}=\frac{-\sqrt{7}+3}{-\sqrt{7}-3}$$

$$=\frac{-\left(\sqrt{7}-3\right)}{-\left(\sqrt{7}+3\right)}=\frac{\left(\sqrt{7}-3\right)^2}{\left(\sqrt{7}+3\right)\left(\sqrt{7}-3\right)}$$

$$=\frac{\left(\sqrt{7}-3\right)^2}{7-9}=-\frac{\left(\sqrt{7}-3\right)^2}{2}$$

ដូចនេះ $\quad \frac{1+\tan\alpha}{1-\tan\alpha}=-\frac{\left(\sqrt{7}+3\right)^2}{2}$;

$$\frac{1+\tan\alpha}{1-\tan\alpha}=-\frac{\left(\sqrt{7}-3\right)^2}{2}$$

16. គណនាកាំរង្វង់ចារឹកក្រៅត្រីកោណ $A=143^\circ$ និង $BC=10$

$A = 143°$ និង $BC = 10$

-តាមទ្រឹស្តីបទស៊ីនុស $\frac{BC}{\sin\widehat{A}} = 2R \Rightarrow R = \frac{BC}{2\sin\widehat{A}}$

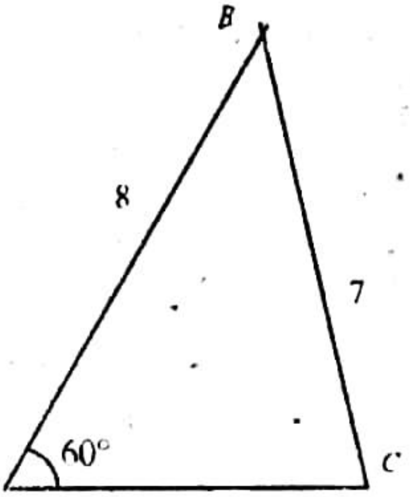
$$= \frac{10}{2\sin 143°}$$

$$= \frac{10}{2 \cdot 0.6018}$$

$\boxed{R = 8.308}$

17. គណនារង្វាស់ AC នៃត្រីកោណ ABC បើស្គាល់៖

ក. $AB = 8$; $BC = 7$ និង $A = 60°$



តាមទ្រឹស្តីបទកូស៊ីនុស

$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos\widehat{A}$

$7^2 = 8^2 + AC^2 - 2 \cdot 8 \cdot AC \cdot \cos 60°$

$49 = 64 + AC^2 - 16 \cdot AC \cdot \frac{1}{2}$

$\Rightarrow AC^2 - 8AC + 15 = 0$

យើងមាន $\Delta' = (-4)^2 - 15 = 1$

$\Rightarrow AC = 4 - 1 = 3$, $AC = 4 + 1 = 5$

ដូច្នេះ ប្រវែង $\boxed{AC = 3 , AC = 5}$

ខ. $AB = 4$; $BC = 5$ និង $A = 120°$

-កំនត់មុំ C

តាមទ្រឹស្តីបទកូស៊ីនុស $\dfrac{AB}{\sin\widehat{C}}=\dfrac{BC}{\sin\widehat{A}}\Rightarrow \sin\widehat{C}=\dfrac{AB\cdot\sin\widehat{A}}{BC}$

$$=\frac{4\cdot\sin 120^\circ}{5}=\frac{4\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}{5}$$

$$\Rightarrow \sin\widehat{C}=0.692\Rightarrow \boxed{\widehat{C}=43.7886}$$

-កំនត់មុំ $\widehat{B}$

$$\Rightarrow \widehat{B}=180-(120+43.7886)\boxed{=16.2114}$$

-រកប្រវែង AC

តាមទ្រឹស្តីបទកូស៊ីនុស $\dfrac{AC}{\sin\widehat{B}}=\dfrac{BC}{\sin\widehat{A}}$

$$\Rightarrow AC=\frac{BC\cdot\sin\widehat{B}}{\sin\widehat{A}}$$

$$=\frac{5\cdot\sin 16.2114^\circ}{\sin 120^\circ}=\frac{5\times 0.2791}{0.8660}=\frac{1.3955}{0.8660}$$

$$\boxed{AC=1.61}$$

18. គណនារង្វាស់មុំ A មុំ B និង C

យើងមាន៖ $A(1,2)$, $B(-1,3)$ និង $C(2,-1)$

គេបាន៖ $AB=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$, $AC=\sqrt{1^2+3^3}=\sqrt{10}$

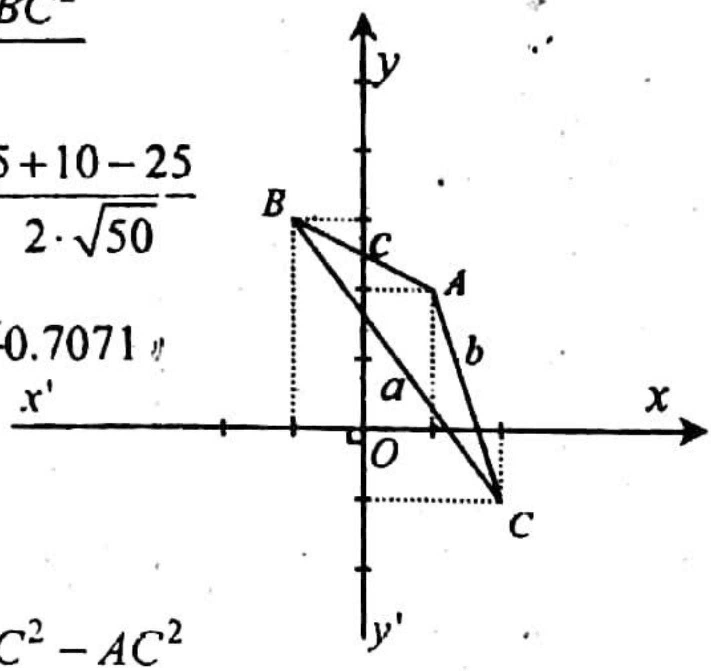
$$BC=\sqrt{4^2+3^2}=5$$

តាមទ្រឹស្តីបទកូស៊ីនុសក្នុងត្រីកោណ ABC គេបាន៖

$$\cos\widehat{A}=\frac{AB^2+AC^2-BC^2}{2AB\cdot AC}$$

$$=\frac{\sqrt{5}^2+\sqrt{10}^2-5^2}{2\sqrt{5}\cdot\sqrt{10}}=\frac{5+10-25}{2\cdot\sqrt{50}}$$

$$=\frac{-5\cdot\sqrt{50}}{50}=-\frac{\sqrt{2}}{2}=-0.7071$$



$$\cos\widehat{A}=-0.7071$$

ដូច្នេះ $\boxed{\widehat{A}=135^\circ}$

$$\cos\widehat{B}=\frac{AB^2+BC^2-AC^2}{2AB\cdot BC}$$

$$\Rightarrow\cos\widehat{B}=\frac{2}{\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

នាំឲ្យ $\boxed{\widehat{B}=26.56^\circ \text{ ឬ } \widehat{B}=26^\circ34'}$

$$\cos\widehat{C}=\frac{AC^2+BC^2-AB^2}{2AC\cdot BC}$$

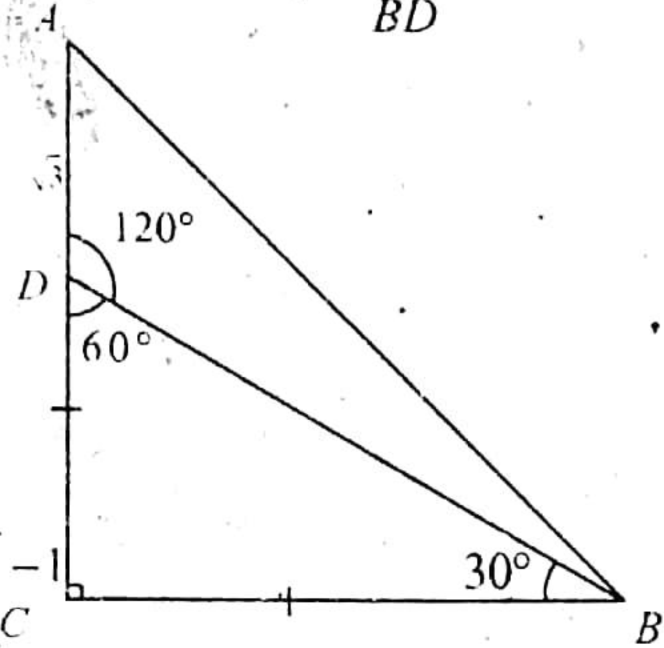
$$=\frac{10+25-5}{2\cdot5\cdot\sqrt{10}}=\frac{3}{\sqrt{10}}=\frac{3\sqrt{10}}{10}$$

នាំឲ្យ $\widehat{C}=18.43^\circ$ ឬ $\widehat{C}=18^\circ26'$

ដូច្នេះ $\boxed{\widehat{A}=135^\circ\ ,\ \widehat{B}=26^\circ34'\ ;\ \widehat{C}=18^\circ26'}$

19. <u>គណនាតំលៃពិតប្រាកដនៃជ្រុងនីមួយៗរបស់</u> ΔABD

ក្នុងត្រីកោណ DCB កែងត្រង់ C គេបាន៖ $\cos 30^\circ = \dfrac{BC}{BD}$



$$\Rightarrow BD = \frac{BC}{\cos 30^\circ} = \frac{\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 2$$

ដោយ $\sin 30^\circ = \dfrac{DC}{DB}$

$$DC = DB \cdot \sin 30^\circ = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$$

គេបាន $AD = AC - DC = \sqrt{3} - 1$

ក្នុងត្រីកោណកែង ACB គេបាន

$$AB = \sqrt{\sqrt{3}^2 + \sqrt{3}^2} = \sqrt{6}$$

ដូចេ្នះ $\boxed{BD = 2\ ,\ AD = \sqrt{3} - 1\ ,\ AB = \sqrt{6}}$

20. ក. $S_{BCP} = \dfrac{1}{2} CP \cdot BH = \dfrac{1}{2} CP \cdot AC = \dfrac{1}{2} S_{ACPQ}$

$$S_{C_2} = 2S_{BCP}$$

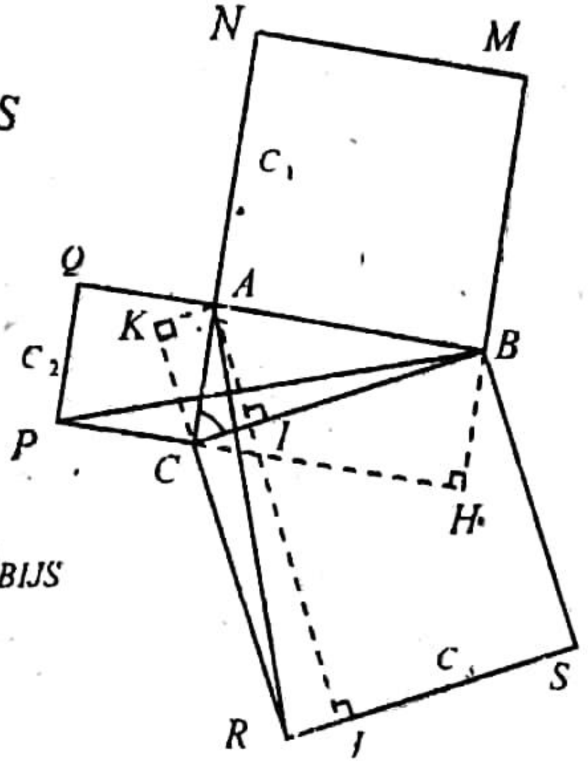
$$S_{ACR} = \frac{1}{2} CR \cdot AK$$

$$= \frac{1}{2} CR \cdot CI$$

$$= \frac{1}{2} S_{CIJR}$$

$\Delta BCP = \Delta ACR$ តាមករណីទី 2 នៃ Δ ប៉ុនគ្នា

$\Rightarrow S_{C_2} = S_{CIJE}$



ខ. ភ្ជាប់ ΔBCM និង ΔABS

$$S_{C_2} = 2S_{BCM}$$

$$S_{BIJS} = S_{ABS}$$

ប៉ុន្តែ $S_{BCM} = S_{ABS}$

$$\Rightarrow S_{C_2} = S_{BIJS}$$

គ. $S_{C_1} + S_{C_2} = S_{CIJR} + S_{BIJS}$

$$S_{C_1} + S_{C_2} = S_{C_3}$$

$$AB^2 + AC^2 = BC^2$$

មេរៀនទី១ បំណែងចែកប្រេកង់

មេរៀនសង្ខេប

1. ចំពោះទិន្នន័យមិនផ្គុំជាថ្នាក់

• តារាងបំណែងចែកប្រេកង់ ។

អថេរ	x_1	x_2	……	x_n
ប្រេកង់	f_1	f_2	……	f_n

• ក្រាបសសរ តំណាងដោយ

គូសដោយដៅតម្លៃអថេរ x_i លើអ័ក្សអាប់ស៊ីស និងប្រេកង់ f_i លើអ័ក្សអរដោនេ រួចគូសសសរដែលមានកំពស់ស្មើប្រេកង់ ។

• ក្រាបពិត៖ ខ្សែបន្ទាត់ដាច់ប្រៀកប្រាសដែលមានកំពូល ស្មើប្រេកង់នៃអថេរនីមួយៗ ។

2. ចំពោះទិន្នន័យផ្គុំជាថ្នាក់

• រៀបចំទិន្នន័យជាថ្នាក់ ដាក់ក្នុងតារាងបំណែងចែកប្រេកង់ ។

ចន្លោះ	$c_0 - c_1$	$\dots c_{i-1} - c_i \dots$	$c_{n-1} - c_n$
ប្រេកង់	f_1	$\dots f_i \dots$	f_n

• អ៊ីស្តូក្រាម៖ ដៅលើអ័ក្សអាប់ស៊ីសជាចន្លោះថ្នាក់ និងដៅប្រេកង់ លើអ័ក្សអរដោនេ រួចសង់ចតុកោណកែងដែលមាន បាតជាចន្លោះថ្នាក់ និងប្រេកង់ជាកំពស់ ។

- ពហុកោណប្រេកង់៖ សង់ខ្សែកាច់ដែលភ្ជាប់ដោយចំណុចកណ្តាលនៃជ្រុងខាងលើរបស់ចតុកោណកែងនៃអ៊ីស្តូក្រាម ។
- តារាងប្រេកង់កើន ប្រេកង់ថយ

ចន្លោះថ្នាក់	ប្រេកង់ f_i	ប្រេកង់កើន F_i	ប្រេកង់ថយ G_i
$c_0 - c_1$	f_1	$F_1 = f_1$	$G_1 = f_1 + f_2 + \dots + f_n$
$c_1 - c_2$	f_2	$F_2 = f_1 + f_2$	$G_2 = f_2 + \dots + f_n$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$c_i - 1 - c_i$	f_i	$F_i = f_1 + f_2 + \dots + f_i$	$G_i = f_i + \dots + f_n$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$c_n - 1 - c_n$	f_n	$F_n = f_1 + f_2 + \dots + f_n$	$G_n = f_n$

- ពហុកោណប្រេកង់កើន៖ ជាខ្សែកាច់ភ្ជាប់ដោយចំណុច $(c_0, 0)$; (c_1, F_1) ; .... ; (c_n, F_n) ។
- ពហុកោណប្រេកង់ថយ៖ ជាខ្សែកាច់ភ្ជាប់ដោយចំណុច (c_0, G_n) ; .... ; $(c_n, 0)$ ។

លំហាត់

1. ចូរបោយឈ្មោះសំណុំសាកល អថេរ និងប្រភេទនៃអថេរចំពោះការសិក្សាស្ថិតិនីមួយៗ៖

   ក) ពិន្ទុតេស្តភាសាអង់គ្លេសក្នុងថ្នាក់រៀនមួយ

   ខ) ល្បឿនរថយន្តបើកបរលើកំណាត់ផ្លូវមួយ ?

   គ) សញ្ជាតិរបស់ភ្ញៀវស្នាក់នៅក្នុងសណ្ឋាគារមួយ

   ឃ) ទីកន្លែងកំណើតរបស់សិស្សមួយក្រុម

   ង) ចំនួនអាវយឺតដែលបានលក់ចេញរបស់ហាងមួយទៅតាមទំហំអាវ

   ច) ចំនួនអាវយឺតដែលបានលក់ចេញក្នុងមួយថ្ងៃរបស់ហាងមួយអស់ពេល 100ថ្ងៃ

2. ទិន្នន័យខាងក្រោមនេះជាចំនួនបងប្អូនបង្កើតរបស់សិស្សម្នាក់ៗ៖

1	0	3	2	5	2	1	1	4	3	1	2	3	1	2
2	2	3	1	2	0	0	5	1	4	1	1	1	4	0
1	1	1	2	1	3	1	2	2	3	0	4	2	1	0
	1	2	0	2	1	3	2	1	1	2	2	2	1	1

   រៀបចំទិន្នន័យដាក់ក្នុងតារាងបំណែងចែកប្រេកង់

   ខ) តើករណីណាកើតញឹកញាប់ជាងគេ ?

   គ) សង់ក្រាបនៃទិន្នន័យនេះ។

3. ទិន្នន័យនេះបង្ហាញពីម៉ាសសិស្ស 47 នាក់ (គិតជា kg)

48.3 57.2 50.5 56.1 60.7 65.7 45.0 43.7 47.5 51.0 55.4 61.5

68.5 59.7 66.1 52.5 53.1 51.2 64.0 60.7 69.2 40.8 44.0 51.0

57.5 60.6 6?.5 71.5 70.5 58.1 54.3 48.2 47.0 ?6.5 65.0 57.0

74.5 65.5 70.0 73.7 51.5 52.5 54.5 56.5 60.5 45.5 50.5

ក) ប្រមូលទិន្នន័យជា 9 ថ្នាក់ រួចសង់តារាងបំណែងចែកប្រេកង់ កើន ប្រេកង់ធៀប

ខ) សង់អ៊ីស្តូក្រាម និងពហុកោណប្រេកង់

គ) សង់ពហុកោណប្រេកង់កើនៗ

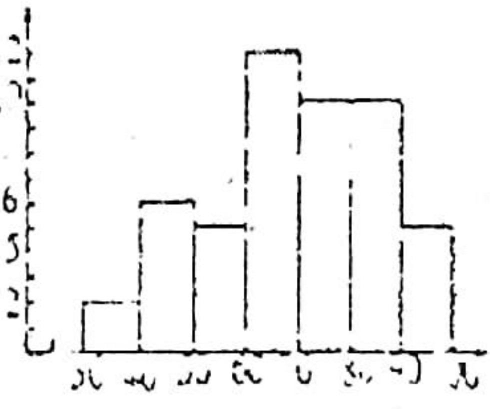
4. អ៊ីស្តូក្រាមនេះជាពិន្ទុគណិតវិទ្យារបស់សិស្សថ្នាក់ទី 10 A ៖

ក) ចូររកទំហំនៃថ្នាក់

ខ) តើថ្នាក់ទី 10 A មានសិស្សប៉ុន្មាននាក់?

គ) ចូរសង់ពហុកោណប្រេកង់

ឃ) ចូរសង់តារាងបំណែងចែកប្រេកង់កើន និងពហុកោណប្រេកង់កើនៗ



5. ទិន្នន័យជាប្រាក់ចំណាយលើសេវាទូរស័ព្ទប្រចាំខែរបស់អតិថិជន (គិតជាពាន់រៀល)៖

ប្រាក់ចំណាយ	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80	80-90	90-100
ចំនួនអតិថិជន	1	2	2	3	4	11	17	8	2

ក) សង់ពហុកោណប្រេកង់កើន

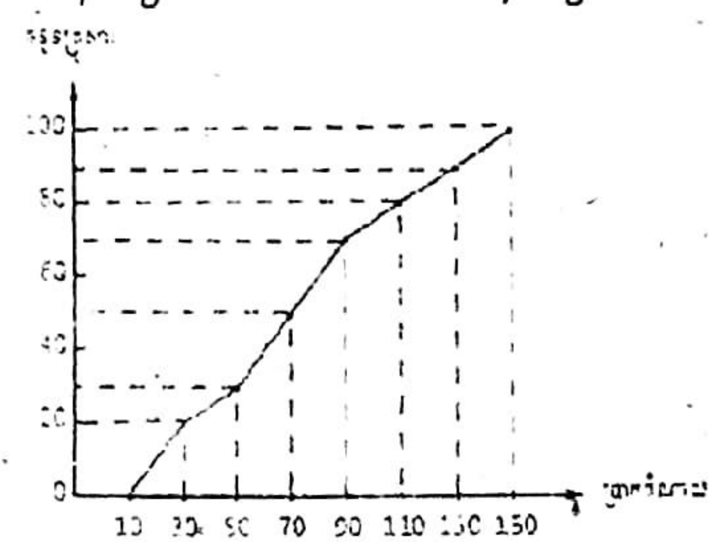
ខ) តើមានអតិថិជនប៉ុន្មានគ្រួសារដែលប្រើទឹកក្នុងមួយខែអស់ យ៉ាងតិច 70000៛ ? តិចជាង 70000៛ ស្មើនឹងប៉ុន្មានភាគរយ ?

6. ពហុកោណប្រេកង់កើននេះបង្ហាញពីទិន្នន័យនៃការស្ទង់មនុស្ស 100 គ្រួសារអំពីប្រាក់ចំណាយប្រចាំខែលើសេវាអគ្គិសនី (គិតជាម៉ឺនរៀល) ៖

ក) សង់តារាងបំណែងចែកប្រេកង់នៃប្រាក់ចំណាយ

ខ) សង់អ៊ីស្តូក្រាមតាងប្រាក់ចំណាយ

គ) តើមានប៉ុន្មានគ្រួសារដែលចំណាយច្រើនជាង ឬស្មើនឹង 30 ម៉ឺនរៀល ទៅតិចជាង 90 ម៉ឺនរៀល ។



ដំណោះស្រាយ

1. ក) សំណុំសិស្ស ពិន្ទុតេស្តភាសាអង់គ្លេស អថេរបរិមាណ ។

ខ) សំណុំរថយន្ត ល្បឿនរថយន្តអថេរបរិមាណ ។

គ) សំណុំភ្ញៀវ សញ្ជាតិ អថេរគុណភាព ។

ឃ) សំណុំសិស្ស កន្លែងកំណើត អថេរគុណភាព ។

ង) សំណុំអាវយឺត ទំហំថេរ ។

- បើគេសរសេរលើស្លាកជាអក្សរ $(S, M, L, X, XL, \ldots)$ នោះទំហំអាវ ជាអថេរគុណភាព ។
- បើគេកំណត់សរសេរជាលេខ ទំហំ វាជាអថេរបរិមាណ ។

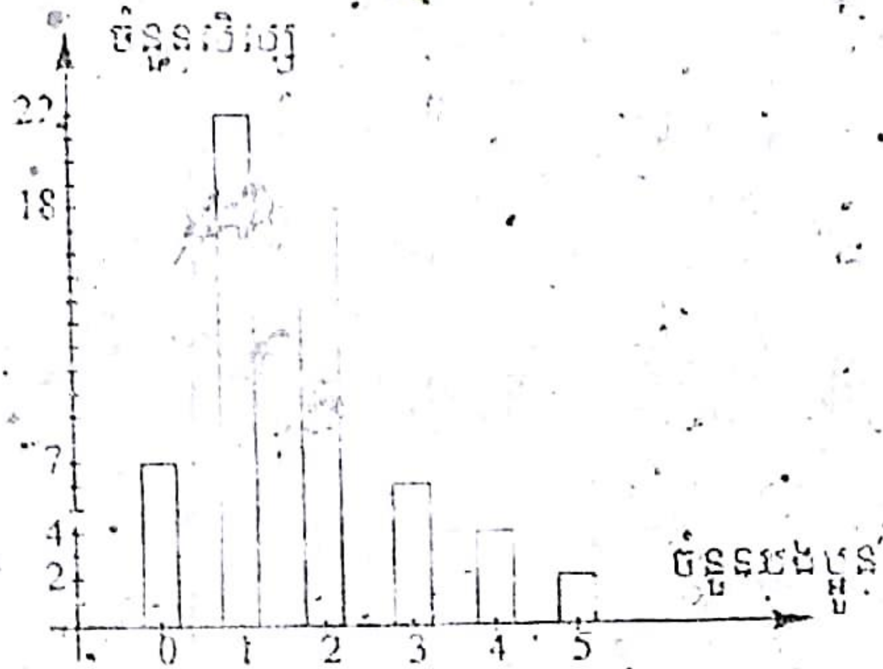
ច) សំណុំអាវយឺត ចំនួនអាវយឺតលក់ចេញក្នុងមួយថ្ងៃ អថេរបរិមាណ ។

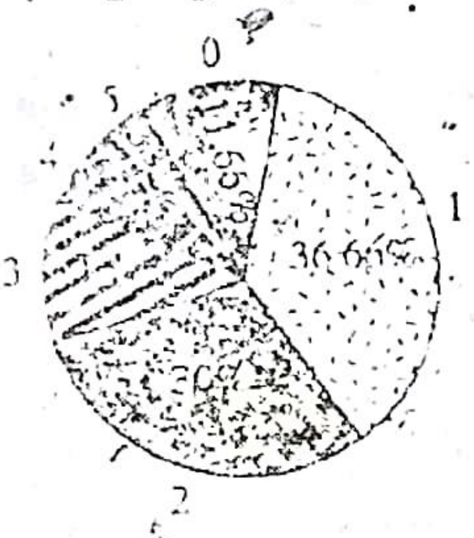
2. ក) តារាងបំណែងចែកប្រេកង់

ចំនួនបងប្អូន	0	1	2	3	4	5
ចំនួនសិស្ស	7	22	18	7	4	2

ខ) សិស្សមានបងប្អូន 1នាក់ ។

គ) ដ្យាក្រាមសរសៃ

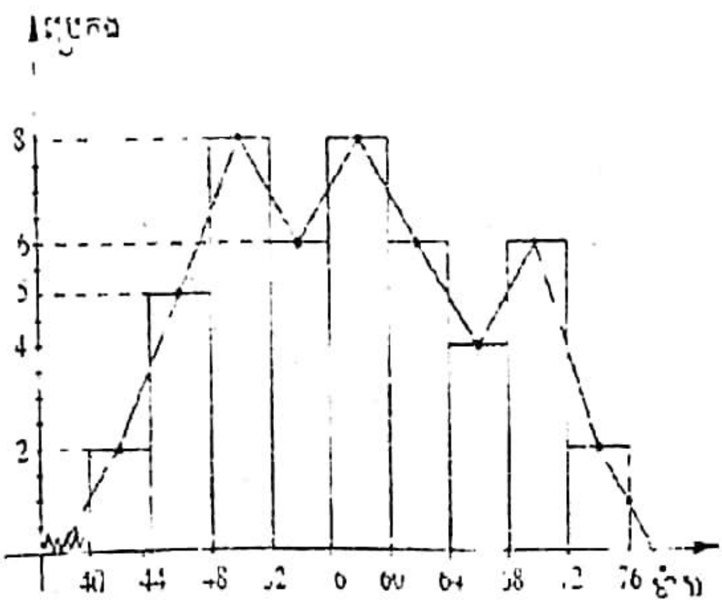

ចំនួនសិស្ស
22
18
7
4
2
ចំនួនបងប្អូន
0
1
2
3
4
5


0
5
1
3
2
36.66%

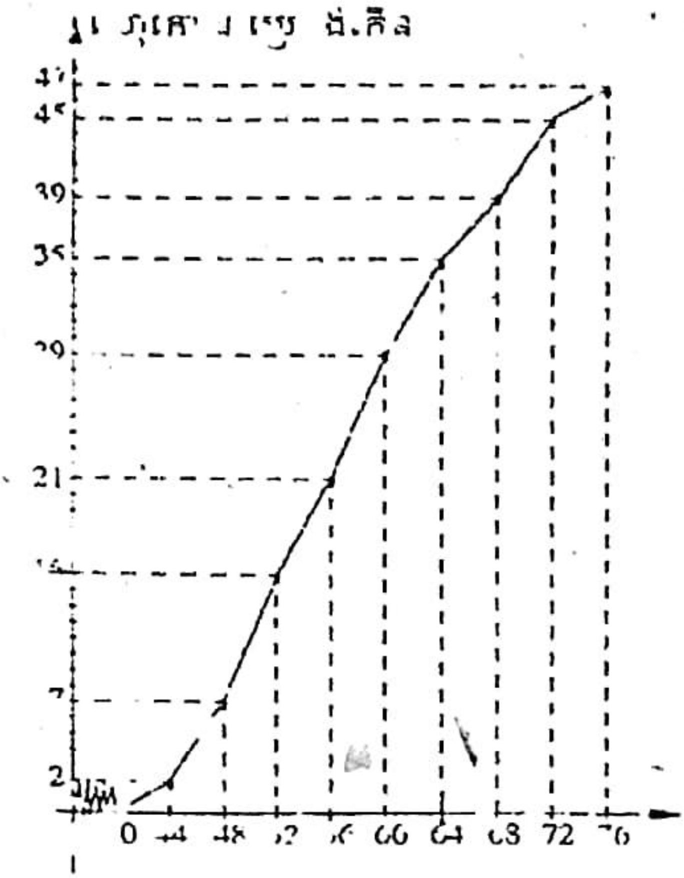
3. ក)

ចន្លោះថ្នាក់	ប្រេកង់	ប្រេកង់កើន	ប្រេកង់ធៀប
44 – 44	2	2	0.04
44 – 48	5	7	0.11
48 – 52	8	15	0.17
52 – 56	6	21	0.13
56 – 60	8	29	0.17
60 – 64	6	35	0.13
64 – 68	4	39	0.09
68 – 72	6	45	0.13
72 – 75	2	47	0.04

ខ) អ៊ីស្តូក្រាម និងពហុកោណប្រេកង់



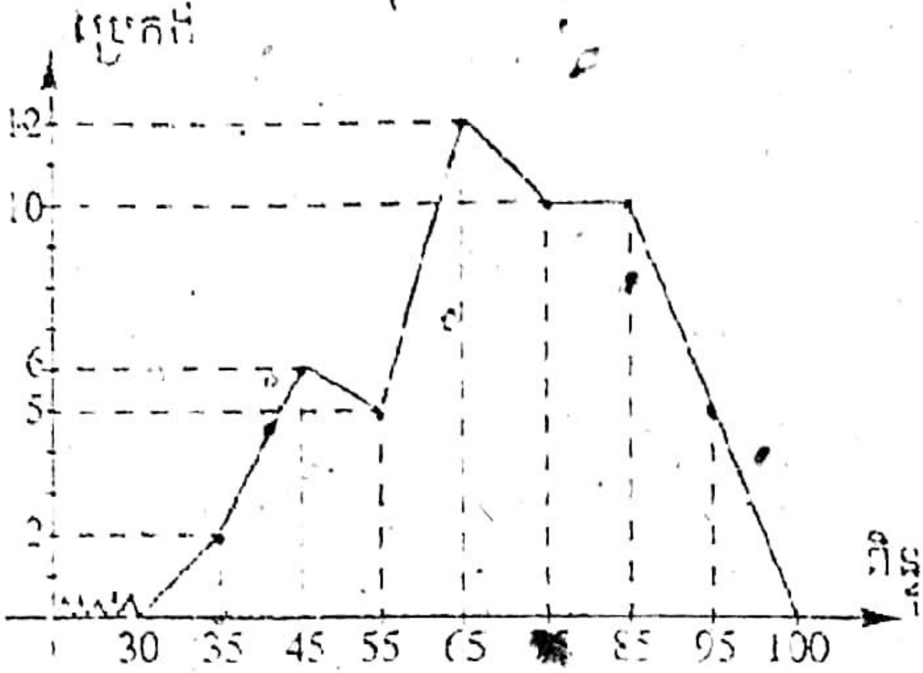
គ) ពហុកោណប្រេកង់កើន



4. ក) 35,45,55,65,75,85,95

ខ) 50 នាក់ ។

គ) ពហុកោណប្រេកង់



ឃ) តារាងបំណែងចែកប្រេកង់កើន

ចន្លោះថ្នាក់	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80	80-90	90-100
ប្រេកង់	2	6	5	12	10	10	5
ប្រេកង់កើន	2	8	13	15	35	45	50

5. ក)

ខ) 27 គ្រួសារ 23 គ្រួសារ

54% 46%

6. ក) តារាងបំណែងចែកប្រេកង់

ថ្លៃចំណាយ	10-30	30-50	50-70	70-90	90-110	110-130	130-150
ចំនួនគ្រួសារ	20	10	20	20	10	10	10

ខ)

គ) 80 គ្រួសារ , 70 គ្រួសារ ។

មេរៀនទី២ ស្ថាតិស្ទីក

មេរៀនសង្ខេប

1. ចំពោះទិន្នន័យមិនជុំជាថ្នាក់

• ម៉ូល M_0 ជាតម្លៃអថេរណាដែលមានប្រេកង់ច្រើនជាងគេ ។

• មធ្យម

ចំពោះទិន្នន័យមិនប្រមូលផ្តុំ

$x_1, x_2, \ldots, x_N : \bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_N}{N}$, N ជាប្រេកង់សរុប

បើទិន្នន័យបៀបគ្នាតាមតំណែងរៀងប្រេកង់

$: \bar{x} = \frac{x_1 f_1 + x_2 f_2 + \ldots + x_n f_n}{f_1 + f_2 + \ldots + f_n}$

• មេដ្យាន $x_1 \le x_2 \ldots \le x_{\frac{N}{2}} \le x_{\frac{N}{2}+1} \le \ldots \le x_N$

បើ N គូ : $M_e = \frac{1}{2}\left(x_{\frac{N}{2}} + x_{\frac{N}{2}+1}\right)$ ។

បើ N សេស : $M_e = x_{\frac{N+1}{2}}$ ។

2 ចំពោះទិន្នន័យផ្តុំជាថ្នាក់

• បើថ្នាក់ $c_{i-1} - c_i$ មានប្រេកង់ធំជាងគេនោះ

$M_0 = \frac{c_{i-1} - c_i}{2}$ ម៉ូលគឺ ។

• មធ្យម : $\bar{x} = \frac{x_1 f_1 + \ldots + x_n f_n}{f_1 + \ldots + f_n}$ ដែល x_i ជា ផ្ចិតនៃថ្នាក់ ។

• មេដ្យាន : $M_e = c_{i-1} + \frac{\frac{N}{2} - F_{i-1}}{f_i}(c_i - c_{i-1})$ ដែល

$F_i > \frac{N}{2} \geq F_{i-1}$ ។

លំហាត់

1. ទិន្នន័យនេះជាពិន្ទុរបស់សិស្ស : 30 ; 40 ; ៩0 , 50 , 70 , ៩0 , 60 ; 90 ; ៦0 ។ គណនាម៉ូត មធ្យម និងមេដ្យាននៃទិន្នន័យ ។
2. ក្នុងការប្រលង សិស្សម្នាក់ទទួលបានការវាយតំលៃរបស់គណៈកម្មការតាមពិន្ទុដូចខាងក្រោម ៖

ពិន្ទុ	85	70	75	80	82
ការវាយតម្លៃ	30%	20%	20%	20%	10%

ចូររកពិន្ទុមធ្យម ។

3. តារាងទិន្នន័យនេះ បង្ហាញពីរយៈពេលដែលសិស្សអង្គុយរៀនដោយខ្លួនឯងក្នុងមួយអាទិត្យ (រយៈពេលគិតជាម៉ោង) ។

រយៈពេល	0–4	4–8	8–12	12–16	16–20	20–24
ចំនួនសិស្ស	1	2	18	35	11	3

ក) ចូររកម៉ូត និងមធ្យមនៃរយៈពេលដែលសិស្សរៀនដោយខ្លួនឯង ។

ខ) ចូររកមេដ្យាន ។

4 តារាងបំណែងចែកប្រេកង់អំពីចំនួនផ្សារទៅតាមទំហំផ្ទៃក្រឡានៃផ្សារនីមួយៗ ៖

ក) កំណត់រកមធ្យមនៃផ្ទៃក្រឡាផ្សារ ។

ខ) កំណត់មេដ្យាននៃផ្ទៃក្រឡាផ្សារ ។

ក្រលាផ្ទៃ(m^2)	400–700	700–1000	1000–1300	1300–1600	1600–1900
ចំនួនផ្សារ	26	28	33	40	20

ដំណោះស្រាយ

1\. តាម $\bar{x} = \dfrac{x_1 + x_2 ... + x_n}{N} = \dfrac{540}{9} = 60$

$M_e = 60$ ព្រោះ $\dfrac{50+70}{2} = 60$

2\. តាម $\bar{x} = \dfrac{x_1 + x_2 ... + x_n}{N} = \dfrac{392}{5} = 78,4$

3. $M_0 = 14h$

$x = 13h\ 29'$

$M_e = 13h\ 36'$

4. ក) $\bar{x} = 1150$, $M_0 = 1450$

ខ) $M_e = 1177.27$

លំហាត់ជំពូក

1. តារាងបំណែងចែកប្រេកង់នេះបង្ហាញពីចំនួនបងប្អូនបង្កើតរបស់សិស្ស ៖

ចំនួនបងប្អូន	0	1	2	3	4
ប្រេកង់	5	10	17	6	2

ក) បកស្រាយទិន្នន័យជាក្រាប ។

ខ) តើសិស្សមានបងប្អូនបង្កើត 3នាក់មានចំនួនប៉ុន្មាន ? ត្រូវនឹងប៉ុន្មានភាគរយ ?

គ) តើមានសិស្សប៉ុន្មាននាក់ដែលមានបងប្អូនបង្កើតយ៉ាងតិចម្នាក់ ? យ៉ាងច្រើន 2នាក់ ? ត្រូវនឹងប៉ុន្មានភាគរយ ?

ឃ) សង់តារាងបំណែងចែកប្រេកង់ធៀប ប្រេកង់កើនប្រេកង់ថយ ។

ង) គណនាមធ្យមមេដ្យាន និងម៉ូតនៃទិន្នន័យ ។

2. ទិន្នន័យនេះ ជាប្រេកង់នៃការចំណាយប្រចាំខែរបស់គ្រួសារមួយ ៖

ប្រភេទចំណាយ	អគ្គិសនី	ទឹក	អាហារ	ការសិក្សា	ការធ្វើដំណើរ	ផ្សេងៗ
ភាគរយនៃប្រាក់ចំណាយ	9%	5%	41%	20%	10%	15%

ក) បកស្រាយទិន្នន័យជាក្រាប ។

ខ) រករង្វាស់ទីតាំងនៃទិន្នន័យ ។

3. ទិន្នន័យនេះជារយៈពេលដែលទារកទាំងឡាយបានបៅដោះម្ដាយ (គិតជាខែ)

3	5	5	3	7	13	0	0	2	4	4	6	6	7	7	9	3
8	8	10	12	12	15	7	1	4	9	5	7	7	17	15	11	12
3	4	5	8	8	7	6	4	4	1	17	15	10	6	4	10	

ក) ប្រមូលផ្ដុំទិន្នន័យដាក់ជា 6 ថ្នាក់ក្នុងតារាងបំណែងចែកប្រេកង់ រួចបកស្រាយទិន្នន័យជាក្រាប ។

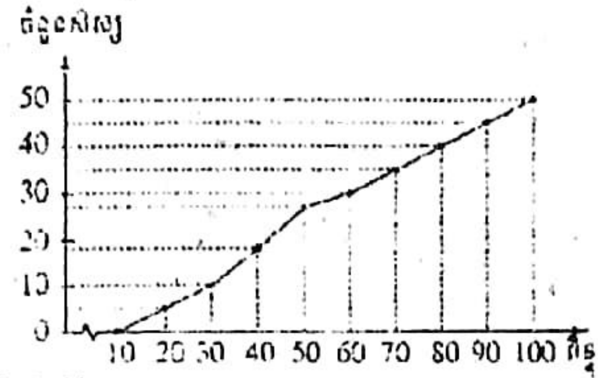
ខ) សង់តារាងបំណែងចែកប្រេកង់កើន និងពហុកោណប្រេកង់កើន ។

គ) គណនាមធ្យម មេដ្យាន និងម៉ូតនៃរយៈពេល ។

4. គេដឹងថា មធ្យមនៃទិន្នន័យមួយស្មើនឹង 40 និងមេដ្យានស្មើនឹង 39 ។ បើគេបន្ថែម 5 ទៅលើតម្លៃនីមួយៗ តើមធ្យម និងមេដ្យានស្មើនឹងប៉ុន្មាន ?

5. ក្រាបនេះជាពហុកោណប្រេកង់កើន

បង្ហាញពីពិន្ទុគណិតវិទ្យារបស់សិស្ស 50 នាក់ ។



ក) ចូរគណនាមធ្យមនៃពិន្ទុគណិតវិទ្យា ។

ខ) ចូររកមេដ្យាននៃពិន្ទុគណិតវិទ្យា ។

៦ តារាងទិន្នន័យនេះ ជាប្រាក់បៀវត្សរ៍របស់កម្មករ និងអ្នកជំនាញក្នុងរោងចក្រមួយ (គិតជាម៉ឺនរៀល) ៖

កម្មករ

ប្រាក់បៀវត្សរ៍	ចំនួនកម្មករ
24 - 28	56
28 - 32	38
32 - 36	6

អ្នកជំនាញ

ប្រាក់បៀវត្សរ៍	ចំនួនអ្នកជំនាញ
36 - 42	62
42 - 48	37
48 - 54	1

ក) គណនាមធ្យមនៃបៀវត្សរ៍របស់កម្មករ និងមធ្យមបៀវត្សរ៍របស់អ្នកជំនាញ ។

ខ) គណនាមធ្យមបៀវត្សរ៍របស់បុគ្គលិកក្នុងរោងចក្រ បើគេដឹងថាក្នុងរោងចក្រនេះមានកម្មករ 80% និងអ្នកជំនាញ 20% ។

7. [illegible] ប្រឡងពិនិត្យរបស់សិស្សទាំង 8 លើកមាន [illegible] 12.5 (ពិន្ទុ 20 លើក 20) ។ បើ [illegible] តើសិស្ស [illegible] ពិន្ទុ [illegible] ?

8. តើគេបានធ្វើសំណួរត្រួតពិនិត្យចំនួនប៉ុន្មានដងមកហើយ ? បើគេដឹងថាឥឡូវនេះ មធ្យមនៃពិន្ទុគឺ 13 ហើយបើសិនជាលើកសំណួរមួយដងទៀតបានពិន្ទុ 18 នោះគេបានមធ្យមនៃពិន្ទុ 14 ។

9. ក) គណនាមធ្យម $\overline{x}_1$ នៃទិន្នន័យខាងក្រោម ៖

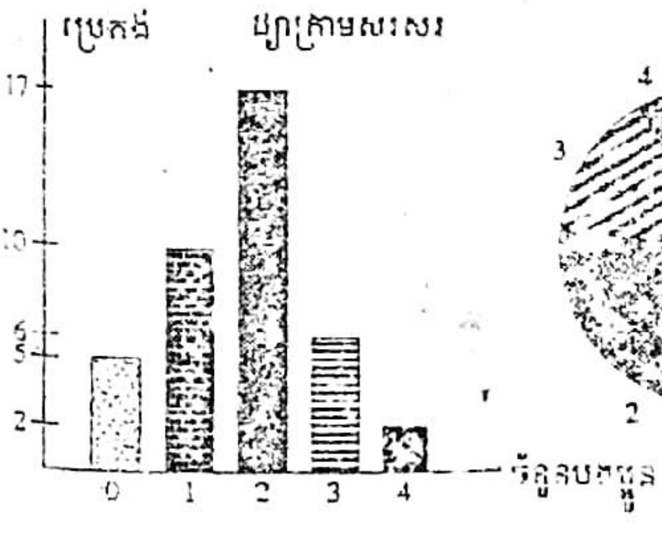
តម្លៃអថេរ x_i	3	7	20
ប្រេកង់ f_i	20	10	30

ខ) គណនាមធ្យម $\overline{x}_2$ បើគេបន្ថែម 10% នៅលើតម្លៃទិន្នន័យនីមួយៗ ។ ប្រៀបធៀប $\overline{x}_1$ និង $\overline{x}_2$ ។

គ) គណនាមធ្យម $\overline{x}_3$ បើប្រេកង់នីមួយៗកើនឡើង 10% ។ ប្រៀបធៀប $\overline{x}_1$ និង $\overline{x}_3$ ។

ដំណោះស្រាយ

1. ក)



ខ) 6 នាក់ 15% ។

គ) 8 នាក់ 32 នាក់

20% 80%

ឃ) តារាងបំណែងចែកប្រេកង់ធៀប ប្រេកង់កើន ថយ

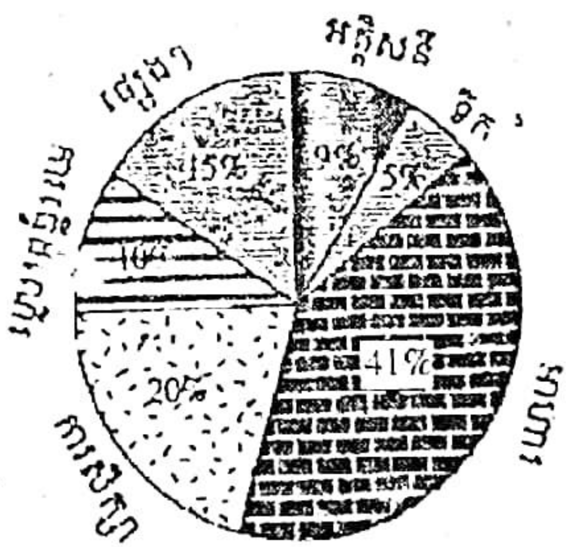
x_i	f_i	$f\%$	F_i	G_i
0	5	0.125	5	10
1	10	0.250	15	35
2	17	0.425	32	25
3	6	0.150	38	8
4	2	0.050	40	2

ង) $\overline{x} = 1.75$

$M_e = 2$

$M_0 = 2$

2. ក)

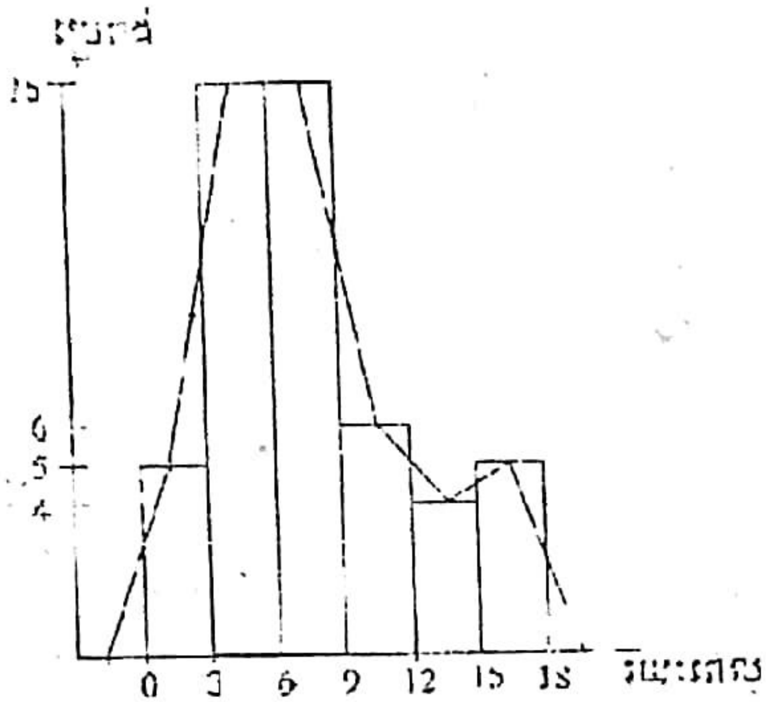


ខ) ម៉ូត $M_0 =$ អាហារ

១. ក) តារាងបំណែងចែកប្រេកង់

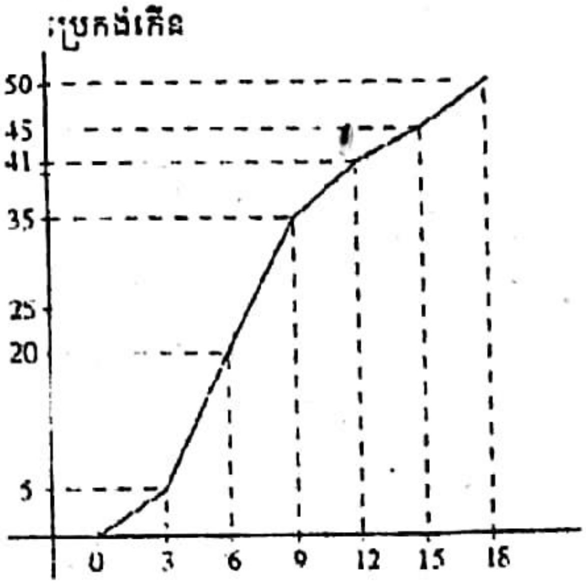
ចន្លោះថ្នាក់	0.3	3.6	6.9	9.12	12.15	15.18
ប្រេកង់	5	15	15	6	4	5

អ៊ីស្តូក្រាម និងពហុកោណប្រេកង់



ខ) តារាងបំណែងចែកប្រេកង់កើន

x_i	0.3	3.6	6.9	9.12	12.15	15.18
f_i	5	15	15	6	4	5
F_i	5	20	35	41	45	50



គ) $\bar{x} = 7.74$, $M_e = 7$,

$M_0 = 4.5$, $M_0 = 7.5$

4. $\bar{x} = \dfrac{x_1 + \ldots + x_N}{N} + \dfrac{5N}{N} = 45$

$M_e = 39 + 5 = 44$

5. ក) $\bar{x} = 52.8$

ខ) $M_0 = 47$

6. ក) $\bar{x}_1 = 28$ ម៉ឺនរៀល

$\bar{x}_2 = 41.34$ ម៉ឺនរៀល

ខ) $\bar{x} = \dfrac{\bar{x}_1 \times 80 + \bar{x}_2 \times 20}{100} = 30.66$ ម៉ឺនរៀល

7. $\dfrac{12.5 \times 8 + 20}{9} = 13.33$

8. $\dfrac{13N + 18}{N + 1} = 14$

$N = 4$

9. ក) $\bar{x}_1 = 6.166$

ខ) $\bar{x}_2 = 6.78$, $\bar{x}_2 = \bar{x}_1 + 10\%\bar{x}_1$

គ) $\bar{x}_3 = 6.166$, $\bar{x}_3 = \bar{x}_1$

មេរៀនទី 1

ចម្លាស់

មេរៀនសង្ខេប

☺គោលការណ៍ផលបូក

m ជាចំនួនធាតុក្នុងព្រឹត្តិការណ៍ A និង n ជាចំនួនធាតុក្នុងព្រឹត្តិការណ៍ B

+បើ A និង B គ្មានធាតុរួម នោះព្រឹត្តិការណ៍ A ឬ B មានធាតុ $m+n$ ។

+បើ A និង B មាន p ធាតុរួម នោះព្រឹត្តិការណ៍ A ឬ B មានធាតុ $m+n-p$ ។

☺គោលការណ៍ផលគុណ

បើ m ជាចំនួនធាតុនៃព្រឹត្តិការណ៍ A និង n ជាចំនួនធាតុនៃព្រឹត្តិការណ៍ B កើតឡើងបន្ទាប់ពីព្រឹត្តិការណ៍ EA កើតឡើងនោះព្រឹត្តិការណ៍ A និង B កើតឡើងមាន $m\times n$ របៀប ។

☺ចម្លាស់នៃ n ធាតុគឺជាការតម្រៀប n វត្ថុខុសៗគ្នាជាជួរមានលំដាប ។

ចំនួនចម្លាស់នៃ n ធាតុមាន $n!$ របៀប ។

☺ចម្លាស់នៃ r ធាតុយកពី n ធាតុគឺជាការតម្រៀប r វត្ថុខុសៗគ្នាជាជួរតាមលំដាប់ដែលធាតុនីមួយៗយកចេញពី n ធាតុខុសគ្នា ។

ចំនួនចម្លាស់នៃ r ធាតុយកពី n ធាតុមាន :

$$P(n,r)=n(n-1)(n-2)\cdots(n-1+r)$$ ឬ

$$P(n,r)=\frac{n!}{(n-r)!} n\in\mathbb{N}, r\in\mathbb{N}, r\le n$$ ។

◉ចម្លាស់ច្រំដែលនៃ r ធាតុយកពី n ធាតុគឺជាការតម្រៀប r ធាតុ ដែលធាតុនីមួយៗអាចជាធាតុដដែលយកចេញពី n ធាតុខុសគ្នា ។ ចំនួនចម្លាស់ច្រំដែលនៃ r ធាតុយកពី n ធាតុមាន n^r ។

◉ចំនួនចម្លាស់រង់នៃ n ធាតុមាន $(n-1)!$

$$n!=n(n-1)(n-2)........3\times2\times1=n(n-1)!$$ ។

លំហាត់

1. គេបោះគ្រាប់ឡុកឡាក់ 2 គ្រាប់ខុសគ្នា ។ រកចំនួនលទ្ធផលដែលអាចកើតឡើង បើលទ្ធផលនោះមានផលបូកស្មើនឹង 5 ឬ 6 ។

2. គេមានរថយន្តឈ្នួល 3 ប្រភេទសម្រាប់បំរើសេវាធ្វើដំណើរទៅ ឬមកពីក្នុងភូមិនៅទីប្រជុំជនមួយដែលនៅក្បែរគ្នា ។ ពេលធ្វើដំណើរទៅទីប្រជុំជន ពូសុខអាចជិះរថយន្តណាមួយ ឬក៏គាត់ដើរដោយខ្លួនឯង ។ ហេតុដូចនេះពេលត្រឡប់មកផ្ទះវិញគាត់សម្រេចចិត្តថាជិះរថយន្ត ។ តើការធ្វើដំណើរទៅ ឬ មករបស់គាត់មាន

ប៉ុន្មានរបៀប ?

3.មានបុរស 6 នាក់និងនារី 5 នាក់ចាប់ដៃគូគ្នារាំយសី ។ តើការចាប់ដៃគូស្រីប្រុសនេះមានប៉ុន្មានរបៀប ?

4.នៅថ្ងៃសម្រាកមួយ សុភីរៀបផែនការការងាររបស់ខ្លួន : ធ្វើកិច្ចការសាលារៀន បោកសម្លៀកបំពាក់ អានកាសែត ឬទស្សនាវដ្តី ស្រាវជ្រាវឯកសារតាមអ៊ីនធឺណែត ។ តើការបំពេញផែនការនេះតាមលំដាប់មុនក្រោយមានប៉ុន្មានរបៀប ?

5 រកចំនួនទាំងអស់នៃចំនួនដែលមានលេខ 4 ខ្ទង់ដោយប្រើគ្រប់លេខរបស់ចំនួន 4129 ។

6.ថ្នាក់រៀនមួយមានសិស្ស 40 នាក់គ្រូត្រូវការសិស្ស 2 នាក់ដើម្បីឡើងដោះស្រាយលំហាត់លេខ 2 និងលេខ 5 ដែលមាននៅក្នុងសៀវភៅលំហាត់ ។ តើគ្រូអាចហៅសិស្សបានប៉ុន្មានរបៀបដើម្បីដោះស្រាយលំហាត់ ។

7.តើជ័យលាភីមានចំនួនប៉ុន្មានរបៀប ដើម្បីចាប់យករង្វាន់លេខ 1 លេខ 2 និងលេខ 3 សម្រាប់មនុស្ស ១ ០នាក់ ។

៨.កាក់មួយមានមុខពីរគឺខាងរូប និងខាងលេខ ។ គេបោះកាក់នេះ 4 ដងបន្តបន្ទាប់គ្នា ។ រកចំនួនលទ្ធផលដែលកើតឡើងទាំងអស់ ។ សង់ដ្យាក្រាមដើមឈើ ។

9 កុមារិនយកឃ្លី ៦ ពណ៌ផ្សេងៗរៀបដាក់ជួរជុំវិញ ៗ ប្លែកពណ៌គ្នា ។

តើគេអាចរៀបបានប៉ុន្មានរបៀបផ្សេងៗគ្នា ។

10. ចូរគណនា ក.

$$\frac{4!}{3!},\frac{10!}{7!},\frac{9!}{5!3!},\frac{(n-1)!}{n!},\frac{n!}{(n-3)!},\frac{(n!)^2}{(n-1)!(n-2)!}$$ ។

ខ. $P(6,4),P(5,3),P(7,7)$ ។

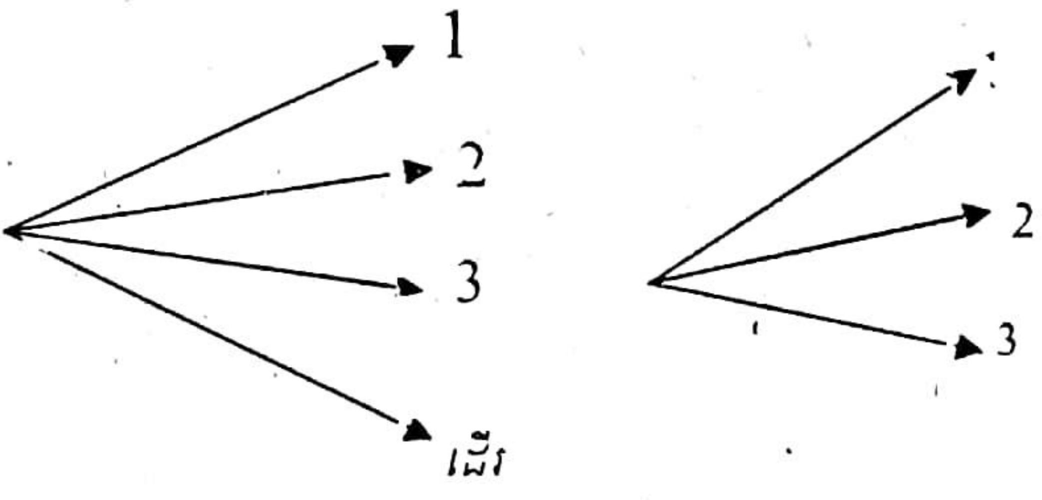
ដំណោះស្រាយ

1.5=1+4=2+3=3+2=4+1

6=1+5=3+3=4+2=5+1=2+4

ចំនួនលទ្ធផលដែលអាចកើតឡើងគឺ ៩

2. ទៅ មកវិញ



ការធ្វើដំណើររបស់គាត់មាន 12 របៀប ។

3.សំណុំបុរស និងសំណុំនារី

សំណុំនារីកើតឡើង បន្ទាប់មកសំណុំបុរសកើតឡើងទាំងអស់មាន $5\times6=30$ របៀប

4.កិច្ចការ បោកសំលៀកបំពាក់ អាន ស្រាវជ្រាវ ចំលាស់នៃ 4 ធាតុ :

$4!=4\times3\times2\times1=24$ របៀប

5.ចំលាស់នៃ 4 ធាតុ :4!

6.សិស្ស ក ធ្វើលំហាត់លេខ 2

សិស្ស ខ ធ្វើលំហាត់លេខ 5

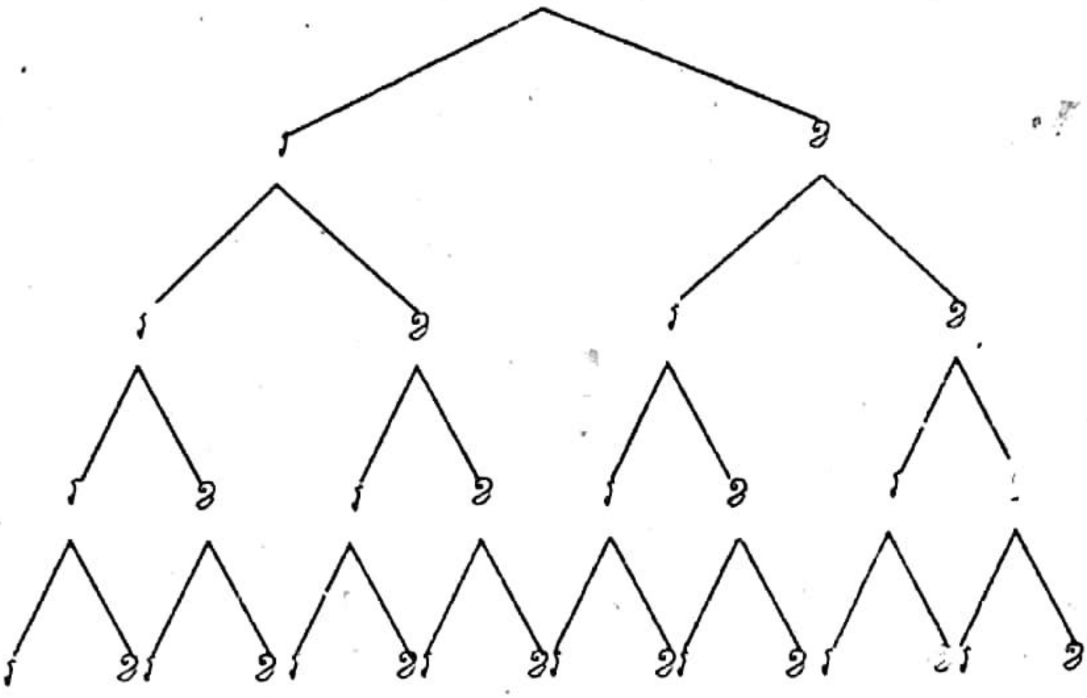
ឬ សិស្ស ក ធ្វើលំហាត់លេខ 5

សិស្ស ខ ធ្វើលំហាត់លេខ 2

$$P(40,2)=\frac{40!}{(40-2)!}=40\times39=1560$$

7. $P(9,3)=\frac{9!}{(9-3)!}=9\times8\times7=504$ របៀប

8. $2^4=16$



9. $\dfrac{6!}{6!}=5!=120$ របៀប

10. ក. 4 ,10×9×8=720

$$\frac{9\times8\times7\times6}{3!}=504$$

$$n(n-1)(n-2),n^2(n-1)$$

ខ. $P(6,4)=\dfrac{6!}{(6-4)!}=360$

$$P(5,3)=\frac{5!}{(5-3)!}=60$$

$$P(7,7)=\frac{7!}{(7-7)!}=5040$$

មេរៀនទី 2

បន្សំ

មេរៀនសង្ខេប

1. បន្សំនៃ r ធាតុយកពី n ធាតុ គឺជាការយក r វត្ថុចេញពី n វត្ថុ ដោយមិនគិតលំដាប់ ។ ចំនួនបន្សំនៃ r ធាតុយកពី n ធាតុគឺ

$$C(n,r)=\frac{n!}{(n-r)!r!}=\frac{n(n-1)\dots(n-r+1)}{r!}$$

2 ទ្រឹស្តីបទទ្វេធា :

$$(a+b)^n=C(n,0)a^n+C(n,1)a^{n-1}b+C(n,2)a^{n-2}b^2+\dots+C(n,n)b^n$$

- ផលបូកនេះមាន $(n+1)$ តួ
- ចំពោះតួបន្ទាប់គ្នា ស្វ័យគុណរបស់ a ចុះតាមលំដាប់ពី ពេលដែលស្វ័យគុណរបស់ b កើនតាមលំដាប់
- គ្រប់តួនីមួយៗផលបូកនៃស្វ័យគុណរបស់ a និង b ស្មើនឹង n
- មេគុណរបស់ $a^{n-k}b^k$ គឺ $C(n,k)$
- ករណី $b=1$ គេបាន

$$(1+a)^n=C(n,0)1+C(n,1)a+C(n,2)a^2+\dots+C(n,n)a^n$$

ហើយមេគុណរបស់ a^k គឺ $C(n,k)$

លំហាត់

1. គណនា : ក. $\frac{C(9,5)}{C(8,5)}$ ខ. $\frac{C(10,6)}{C(9,5)}$ គ. $\frac{C(n+1,p)}{C(n,p)}$

2. ក្នុងក្រុមពិសេសមានសមាជិក 14 នាក់គេបង្កើតគណៈប្រតិភូមានសមាជិក 5 នាក់រើសចេញពីក្រុមពិសេសនេះ ។ តើគេអាចបង្កើតគណៈប្រតិភូបានប៉ុន្មានរបៀប ?

3. គេរើសមនុស្សចាស់ 4 នាក់និងក្មេង 3 នាក់ចេញពីក្រុមមួយដែលមានមនុស្សចាស់ 9 នាក់និងក្មេង 5 នាក់ ។ តើគេអាចរើសបានប៉ុន្មានរបៀប ?

4. គេរើសអក្សរ 5 តួចេញពីអក្សរ $A, B, C, D, E, F, G, H, I$ និង J ។

ក. តើគេអាចរើសបានប៉ុន្មានរបៀប?

ខ. តើគេអាចរើសបានប៉ុន្មានរបៀប បើក្នុងចំណោម 5 តួអក្សរនោះ:

- មានព្យញ្ជនៈតែ 3 គត់
- គ្មានស្រៈសោះ
- យ៉ាងតិចមានស្រៈមួយ ។

5. តើគេអាចចែកសិស្សបានប៉ុន្មានរបៀបបើដឹងថាមាន:

ក. សិស្ស 5 នាក់ត្រូវចែកជា 2 ក្រុមដែលក្រុមមួយមាន 2 នាក់ និងមួយទៀតមាន 3 នាក់ ។

ខ.សិស្ស ៩ នាក់ចែកជា 2 ក្រុម ដែលមួយក្រុមមានសិស្ស 4 នាក់ និង 5 នាក់ ។

គ.សិស្ស ៩ នាក់ត្រូវចែកជា 3 ក្រុម ដែលមួយក្រុមមានសិស្ស 2 នាក់ 3 នាក់ និង 4 នាក់ ។

៦ ចូរសរសេរ 3តួដំបូងតាមស្វ័យគុណកើននៃ x ក្នុងការពន្លាតទ្វេធាតុនៃកន្សោមខាងក្រោម :ក. $(2-ax)^6$ ខ. $(3y+2x)^5$

7.ចូរបង្ហាញថា

$$\left(1+\sqrt{x}\right)^5-\left(1-\sqrt{x}\right)^5=10\sqrt{x}+20x\sqrt{x}+2x^2\sqrt{x}$$ ។

ទាញរកតម្លៃ $\left(1+\sqrt{2}\right)^5-\left(1-\sqrt{2}\right)^5$ ។

8.ចូរសរសេរ 4 តួដំបូងតាមស្វ័យគុណកើននៃ y ក្នុងការពន្លាតទ្វេធាតុនៃកន្សោម

ក. $(1+y)^{10}$ ខ. $(1-y)^{12}$ គ. $\left(1+y^2\right)^9$ ឃ. $\left(1-3y^2\right)^7$

9.គេពន្លាតទ្វេធាតុនៃកន្សោមនីមួយៗខាងក្រោម ។

ក.ក្នុងលទ្ធផលពន្លាតកន្សោម $\left(1-x^2\right)^{20}$ រកតួដែលមាន x^6

ខ.ក្នុងលទ្ធផលពន្លាត $(1+4x)^7$ រកតួដែលមាន x^2

ដំណោះស្រាយ

1.គណនា ,ក. $\frac{C(9,5)}{C(8,5)}=\frac{\frac{9!}{(9-5)!5!}}{\frac{8!}{(8-5)!5!}}$

$$=\frac{\frac{9\times8\times7\times6.5!}{4!\times5!}}{\frac{8\times7\times6\times5!}{3!\times5!}}$$

$$=\frac{9\times8\times7\times6}{4!}\times\frac{3!}{8\times7\times6}$$

$$\boxed{=\frac{9}{4}=2,25}$$

ខ. $\frac{C(10,6)}{C(9,5)}=\frac{\frac{10!}{(10-6)!.6!}}{\frac{9!}{(9-5)!5!}}$

$$=\frac{10\times9\times8\times7\times6!}{4!6!}\times\frac{4!\times5!}{9\times8\times7\times6.5!}$$

$$\boxed{=\frac{16}{6}=1,66}$$

គ. $$\frac{C(n+1,P)}{C(n+P)}=\frac{\dfrac{(n+1)!}{(n+1-P)!.P!}}{\dfrac{n!}{(n-P)!.P!}}$$

$$=\frac{(n+1).n!}{(n+1-P)!.P!}\times\frac{(n-P)!.P!}{n!}$$

$$=\frac{(n+1).(n-P)!}{(n+1-P)!}$$

$$=\frac{(n+1).(n-P)!}{(n+1-P).(n-P)!}$$

$$\boxed{=\frac{(n+1)}{n+1-P}}$$

2.គេអាចបង្កើតគណៈប្រតិភូបាន

តាម $C(14,5)=\dfrac{14!}{(14-5)!5!}$

$$=\frac{14\times13\times12\times11\times10\times9!}{9!\times5!}$$

$$=\frac{14\times13\times12\times11\times10}{120}=2002$$

ដូចនេះ: $\boxed{C(14,5)=2002}$

3.គេអាចរើសបាន $C(8,4)\times C(5,3)=700$

4.ក.គេអាចរៀបអក្សរបានរបៀបគឺ 252

ខ.គេអាចរើសបាន :

-មានព្យញ្ជនៈតែ 3 គត់គឺ $\boxed{105}$

-គ្មានស្រះសោះ $\boxed{21}$

-យ៉ាងតិចបានស្រះមួយ $\boxed{231}$

5. ក. $\boxed{\dfrac{5!}{2!3!}=10}$

ខ. $\boxed{\dfrac{9!}{4!5!}=126}$

គ. $\boxed{\dfrac{9!}{2!3!4!}=1260}$

6.សរសេរ 3 តួដំបូងតាមស្វ័យគុណកើន

តាម $(a+b)^n=C(n,o)a^n+C(n,1)a^{n-1}b$

$$+C(n,2)a^{n-2}b^2+...$$

ក. $(2-ax)^6=C(6,0)2^6+C(6,1).2^5.$

$$(-ax)+C(6,2)2^4.(-ax)^2$$

$$\boxed{=32-192ax+240a^2x^2+\ldots}$$

ខ. $(3y+2x)^5 = C(5,0)(3y)^5 + C(5,1)(3y)^4$

$$.2x + C(5,2).(3y)^3.(2x)^2$$

$$\boxed{=243y^5+810y^4x+1080y^3x^2+\ldots}$$

7.បង្ហាញថា

$$\left(1+\sqrt{x}\right)^5-\left(1-\sqrt{x}\right)^5=10\sqrt{x}+20x\sqrt{x}+2x^2\sqrt{x}$$

$$\otimes\left(1+\sqrt{x}\right)^5 = C(5,0)1^5 + C(5+1)1^4.\sqrt{x} +$$

$$C(5,2)1^3.\sqrt{x}^2 + C(5,3)1^2.\sqrt{x}^3 +$$

$$C(5,4)1^1.\sqrt{x}^4 + C(5,5)1.\sqrt{x}^5 \quad (1)$$

$$\otimes\left(1-\sqrt{x}\right)^5 = \left(1+\left(-\sqrt{x}\right)\right)^5$$

$$= C(5,0)1^5 + C(5,1)1^4.\left(-\sqrt{x}\right)$$

$$+C(5,2)1^3.\left(-\sqrt{x}\right)^2 + C(5,3)1^2\left(-\sqrt{x}\right)^3$$

$$+C(5,2)1^1.\left(-\sqrt{x}\right)^4 + C(5,3)1.\left(\sqrt{x}\right)^5 \quad (2)$$

យក $(1)-(2) \Rightarrow \left(1+\sqrt{x}\right)^5-\left(1-\sqrt{x}\right)^5$

$$\boxed{=10\sqrt{x}+20x\sqrt{x}+2x^2\sqrt{x}}$$

ទាញរកតំលៃ $\left(1+\sqrt{2}\right)^5-\left(1-\sqrt{2}\right)^5$

ដោយ $\left(1+\sqrt{x}\right)^5-\left(1-\sqrt{x}\right)^5$

$$=10\sqrt{x}+20\times x\sqrt{x}+2x^2\sqrt{x}$$

$$\Rightarrow\left(1+\sqrt{2}\right)^5-\left(1-\sqrt{2}\right)^5=10\sqrt{2}+20\times2\sqrt{2}$$

$$+2.2^2.\sqrt{2}=10\sqrt{2}+40\sqrt{2}+8\sqrt{2}$$

$$\boxed{=58\sqrt{2}}$$

៨.សរសេរ 4 តួដំបូងតាមស្វ័យគុណកើននៃ y

តាម $(a+b)^n=C(n,0)a^n+C(n,1)a^{n-1}b$

$$+C(n+2)a^{n-2}b^2+C(n,3)a^{n-3}b^3+\dots$$

ក. $\boxed{(1+y)^{10}=1+10y+45y^2+120y^3+\dots}$

ខ. $\boxed{(1-y)^{12}=1-12y+66y^2-220y^3+\dots}$

គ. $\boxed{\left(1+y^2\right)^9=1+9y^2+36y^4+86^4+\dots}$

ឃ $\boxed{\left(1-3y^2\right)^7=121y^2+189y^4-945y^6+\dots}$

៩.រកតួដែលមាន x^6,x^2

ក. $\boxed{\left(1-x^2\right)^{20}=-1140x^6}$

ខ. $\boxed{\left(1+4x\right)^7=336x^2}$

លំហាត់ជំពូក ៨

1.នៅអាហារដ្ឋានមានរៀបឈុតអាហារសំរាប់បំរើសេចក្តីត្រូវការរបស់ភ្ញៀវមួយពេល ។មួយឈុតអាហារមាន បាយ សាច់ បន្លែ និង គេសជ្ជ: ។ សំរាប់បាយមានបីប្រភេទគឺ បាយ មី និង ជំឡូងបារាំង សំរាប់សាច់មាន សាច់គោ ជ្រូក ត្រី មាន់ សំរាប់បន្លែមាន សណ្តែក ការ៉ុត ប៉េងប៉ោះ និង គេសជ្ជ: មាន កូកាកូឡា សាស៊ី ទឹកផ្លែឈើ សាប៉ៀរ ។ តើគេអាចបង្កើតឈុតម្ហូបបានប៉ុន្មានរបៀប ?

2.ចូររកចំនួនពាក្យ (ពាក្យមានន័យ ឬ ពាក្យគ្មានន័យ)ដែលកើតឡើងពីតួអក្សរនៃពាក្យ SIMPLE . SECONDARY ។

3.ក្នុងចំណោមសិស្សប្រុស 5នាក់ និងស្រី 8នាក់ ដែលមានស្នាដៃល្អក្នុងការតែងកំនាព្យ គ្រូជ្រើសរើសសិស្សប្រុស 3នាក់ និង សិស្សស្រី 4នាក់ ឡើងបង្ហាញស្នាដៃតាមលំដាប់មុនក្រោយ ។ តើគ្រូអាចជ្រើសរើសសិស្សទាំងនេះបានប៉ុន្មានរបៀប ?

4.បងប្អូនប្រុស 3នាក់និងស្រី 2នាក់ឈរជាជួរថតរូប ។ តើគេឈរបានប៉ុន្មានរបៀបបើមាន ក្មេងប្រុស 2នាក់ឈរចុងសងខាង ។

5.រកចំនួននៃការតំរៀបតួអក្សររបស់ពាក្យ INCLUDE បើ

ក.គ្រប់ព្យញ្ជនៈនៅជាប់គ្នា

ខ.គ្មានព្យញ្ជនៈ 2 ណានៅជាប់គ្នា

គ.ការតំរៀបនីមួយៗ ចាប់ផ្តើមដោយព្យញ្ជនៈ និង បញ្ចប់ដោយស្រៈ ។

6.រកចំនួននៃចំនួនដែលនៅចន្លោះ 2000 និង 5000 ហើយមានលេខខុសៗគ្នា ដោយប្រើលេខ 1,2,4,5,7 និង 8 ។

7.នៅលើឥតទូមួយមានតំរៀបសៀវភៅ គណិតវិទ្យា 4 រូបវិទ្យា 3 និង គីមីវិទ្យា 2 ។ តើគេអាចរៀបបានប៉ុន្មានរបៀប បើ

ក.សៀវភៅរូបវិទ្យា 3 នៅជាប់គ្នា

ខ.សៀវភៅគីមីមិននៅជាប់គ្នា

គ.សៀវភៅរូបវិទ្យាមិននៅជាប់គ្នា ។

8.ក្មេងប្រុស 4នាក់ និងក្មេងស្រី 5នាក់ ឈរតំរៀបគ្នាជាជួរ ។

ក.រកចំនួនរបៀបដែលអាចឈរបាន

ខ.រកចំនួនរបៀបឈរបើ :

(a) 2នា ក់ដំបូងជាក្មេងស្រី

ក់ដំបូងជាក្មេងប្រុស និង ម្នាក់ខាងចុងជាក្មេងស្រី

ងប្រុសនៅឈរជិតគ្នា

(d) គ្មានក្មេងស្រីណាឈរជិតគ្នា ។

9.ហាងមួយមានអាវយឺត 7 ពណ៌សុទ្ធតែជាពណ៌ដែលបសុខចូលចិត្ត

ទាំងអស់ ប៉ុន្តែសុខមានប្រាក់ទិញបានតែត្រឹមតែអាវយឺត 3ប៉ុណ្ណោះ។ តើសុខមានជំរើសប៉ុន្មានរបៀប ដើម្បីយកអាវយឺត 3 នេះ ?

10.ក្រុមកីឡាករមានមនុស្ស 10 នាក់ដែលមានស្ត្រី 4នាក់ និង បុរស 6 នាក់ ។ គេរើសកីឡាករ 4 នាក់ដើម្បីធ្វើការប្រកួតគ្នា ។ រកចំនួនរបៀបដែលជ្រើសរើស បើ :

ក.កីឡាករត្រូវប្រកួតមានភេទដូចគ្នា

ខ.កីឡាករត្រូវប្រកួតមានចំនួនស្រីស្មើនឹងបុរស

11.គ.ក្រុមប្រកួតមានបុរសឈ្មោះ A ឬ ក្រុមមានបុរសឈ្មោះ B ប៉ុន្តែមិនមែនជាក្រុមមានបុរសឈ្មោះ A និង B ។

12.មានសិស្ស 10នាក់ស្ម័គ្រចិត្តចូលរួមក្នុងការងារសង្គមរបស់សហគមន៍ ។ ប្រធានសហគមន៍ចែកសិស្ស5នាក់ ចុះតាមភូមិដើម្បីផ្តល់ប្រឹក្សាដល់ប្រជាជន 3នាក់ជួយកិច្ចការរដ្ឋបាល និង 2នាក់ចុះស្រង់ព័ត៌មាន ។ តើប្រធានអាចចែកសិស្សតាមក្រុមបានប៉ុន្មានរបៀប ។

13.គេជ្រើសរើសសិស្ស 5នាក់ក្នុងចំណោមសិស្សស្រី 7នាក់ និង សិស្សប្រុស 10 នាក់ឲ្យចូលរួមប្រជុំការងារ ។ តើគេអាចរើសសិស្ស 5នាក់នេះបានប៉ុន្មានរបៀបបើ :

ក.គ្មានលក្ខខណ្ឌ ?

ខ.មានសិស្សស្រី 3 នាក់ និង សិស្សប្រុស 2នាក់ ?

គ.មានសិស្សស្រីយ៉ាងតិចម្នាក់ ?

14. ក្នុងកំរងសំណួរពហុជ្រើសរើសមាន 5 សំណួរដែលសំណួរនីមួយៗ មានចំលើយ 3 ។ គេអាចជ្រើសរើសយកចំលើយបានតែមួយគត់ក្នុងមួយសំណួរ ។

តើគេអាចបានកំរងចំលើយប៉ុន្មានរបៀបខុសគ្នា ?

15. ចូររកមេគុណរបស់ x^4 និង x ក្នុងការពន្លាតទ្វេធានៃ $\left(1-\frac{x}{2}\right)^{12}$

16. ចូររកមេគុ... របស់ x^2 ក្នុងការពន្លាតកន្សោម $(1-2x)^5(1+3x)^9$

17. បង្ហាញថា :

$$C(n,0)-C(n,1)+C(n,2)-C(n,3)+\ldots+(-1)^n C(n,r)=0$$

18. ចូរសរសេរ 4 តួដំបូងតាមស្វ័យគុណកើនៃ y ក្នុងការពន្លាតទ្វេធានៃកន្សោម ៖ ក. $(1-3y)^8$ ខ. $\left(1+\frac{2y}{3}\right)^8$

19. គេពន្លាតទ្វេធានៃកន្សោមនីមួយៗខាងក្រោម ។

ក. រកតួដែលមាន x^{12} ក្នុងលទ្ធផលពន្លាតកន្សោម $(1+2x^2)^8$

ខ. រកតួដែលមាន x^3 ក្នុងលទ្ធផលពន្លាតកន្សោម $\left(x-\frac{2}{x^2}\right)^{12}$ ។

20. រកមេគុណនៃ x^6 និង x^3 ក្នុងលទ្ធផលពន្លាតទ្វេធា $\left(1+\frac{1}{2}x^2\right)^{10}$

ទាញរកមេគុណ... x^6 ក្នុងលទ្ធផលពន្លាតទ្វេធានៃ

$(2x^2+3)\left(1+\frac{1}{2}x^2\right)^{10}$ ។

21.ក្នុងការពន្លាតទ្វេធាខាងក្រោមនេះ ចូរសរសេរតួទី 7 រាប់តាមលំដាប់ស្វ័យគុណកើននៃ x

ក. $\left(2+\frac{x^2}{2}\right)^{11}$ ខ. $\left(2x-\frac{1}{x^2}\right)^{12}$ ។

22.ក្នុងកម្រងបទចំរៀង 10 បទ ដែល 5 បទ ជាចំរៀងរបស់លោក ស៊ីន ស៊ីសាមុត 3 បទជារបស់លោកស្រី រស់ សេរីសុទ្ធា និង 2 បទ របស់អ្នកនាង ហួយ មាស ។ គេចង់ជ្រើសរើសចំរៀង 4បទ ដើម្បីច្រៀងកំដរអារម្មណ៍ក្នុងពិធីជប់លៀងមួយ ។

តើគេអាចជ្រើសរើសចំរៀង 4 បទនេះបានប៉ុន្មានរបៀបបើ :

ក.មិនប្រកាន់ជាបទរបស់អ្នកណា ?

ខ.2 បទជារបស់លោក ស៊ីន ស៊ីសាមុត 1បទរបស់លោកស្រី រស់ សេរីសុទ្ធា និង 1 បទរបស់អ្នកនាង ហួយ មាស ?

គ.យ៉ាងតិចមានមួយបទម្នាក់ ?

ឃ.ជាបទចំរៀងរបស់ម្ចាស់ដើមតែ 2 នាក់គត់ ?

ដំណោះស្រាយ

1. $3\times4\times3\times4=144$

2. $9!$

3. $P(5,3)\times P(8,4)=100800$

4. $P(3,2)\times3!=36$

5. ក. $4!4!=576$

   ខ. $4!\times3!=144$

   គ. $P(4,1)\times P(3,1)\times5!=1440$

6. $2\times P(5,3)=120$

7. ក. $7!\times3!=30240$

   ខ. $9!-8!2!=282240$

   គ. $9!-(7!3!+P(3,2)P(6,1)7!)$

8. ក. $9!=362800$

   ខ. (a). $P(5,2)\times7!=100800$ (b). $4\times5\times7!=100800$

   (c). $6!\times4!=17200$ (d). $9!-5!5!=348480$

9. $C(9,5)\times4!=3024$

10. $C(7,3)=35$

11. ក. $C(4,4)+C(6,4)=16$ ខ. $C(4,2)\times C(6,2)=90$

   គ. $1\times C(8,3)\times2=122$

12. $\dfrac{10!}{5!3!2!} = 2520$

13.ក. $C(17,5) = 6188$

ខ. (a). $C(10,2) \times C(7,3) = 11340$

(b). $C(17,5) - C(10,5) = 5936$

14. $3^5 = 243$

15.មេគុណរបស់ x^4 គឺ $\dfrac{495}{16}$

មេគុណរបស់ x^5 គឺ $-\dfrac{99}{4}$

16. $(1-2x)^5(1+3x)^9 = 1+17x+94x^2$

មេគុណនៃ $x^2 = 94$

17. $C_n^p = C_n^{n-p}$

18.ក. $(1-3y)^8 = 1-24y+252y^2-1512y^3+\dots$

ខ. $\left(1+\dfrac{2}{3}y\right)^8 = 1+\dfrac{16}{3}y+\dfrac{112}{9}y^2+\dfrac{168}{27}y^3+\dots$

19.ក. $1792x^{12}$

ខ. $-1760x^3$

20.មេគុណនៃ x^6 គឺ 15

មេគុណនៃ x^8 គឺ $\dfrac{105}{8}$

មេគុណនៃ x^8 ក្នុងការពន្លាត $(2x^2+3)\left(1+\frac{1}{2}x^2\right)^{10}$ គឺ $\frac{555}{8}$

21.ក. $231x^{12}$

ខ. $\frac{59136}{x^6}$

22.ក. $C(10,4)=210$

ខ. $P(5,2)\times 3\times 2=60$

គ. $5\times 3\times 1+5C(3,2)\times 2+C(5,2)\times 3\times 2=105$

ឃ. $5\times 1+C(5,2)\times C(3,2)+C(5,3)\times 3+C(5,2)\times 1$

$+C(5,3)\times 3+C(3,2)\times 1+1\times 2=100$

មេរៀនទី 1 ប្រមាណវិធីលើវ៉ិចទ័រ

មេរៀនសង្ខេប

វ៉ិចទ័រ និង ប្រមាណវិធីលើវ៉ិចទ័រ

•វ៉ិចទ័រជាអង្គត់មានទិសដៅ

វ៉ិចទ័រពីរស្មើគ្នា លុះត្រាតែ
- -វាមានទិសដៅដូចគ្នា
- -វាមានប្រវែងស្មើគ្នា

•វ៉ិចទ័រពីរផ្ទុយគ្នា លុះត្រាតែ
- -វាមានប្រវែងស្មើគ្នា
- -វាមានទិសដៅផ្ទុយគ្នា

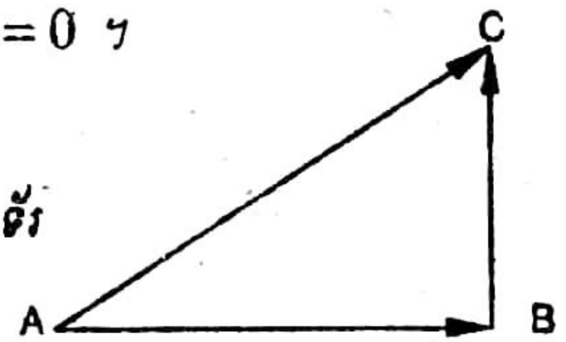
សម្គាល់ $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$

វ៉ិចទ័រ $\vec{a} = \vec{0}$ លុះត្រាតែ $\left|\vec{a}\right| = 0$ ។

ប្រមាណវិធីបូកវ៉ិចទ័រ

- ច្បាប់ត្រីកោណនៃវិធីបូកវ៉ិចទ័រ

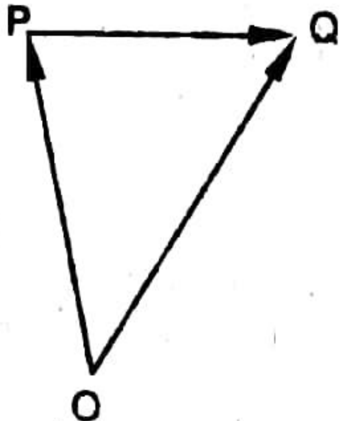
$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$



-ច្បាប់ប្រលេឡូក្រាមនៃវិធីបូកវ៉ិចទ័រ

$\overline{AB}+\overline{BC}=\overline{AD}$ ឬ $\vec{a}+\vec{b}=\vec{c}$ ។

-លក្ខណៈគ្រឹះនៃប្រមាណវិធីវ៉ិចទ័រ :



$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ លក្ខណៈត្រលប់

$\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\vec{c}=\vec{a}+\left(\vec{b}+\vec{c}\right)$ លក្ខណៈផ្តុំ

$\vec{a}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{a}=\vec{a}, \vec{a}+\left(-\vec{a}\right)=\vec{0}$

$\overline{PQ}=\overline{OQ}-\overline{OP}$ ចំពោះគ្រប់ចំនុច O នៃប្លង់

-លក្ខណៈគ្រឹះនៃវិធីគុណវ៉ិចទ័រនិងចំនួនពិត

-បើ $\vec{a}\neq\vec{0}$

(1) បើ $m>0$ វ៉ិចទ័រ $m\vec{a}$ និង $\vec{a}$ មានទិសដៅដូចគ្នា ហើយ

$\left|m\vec{a}\right|=\left|m\right|\left|\vec{a}\right|$

(2) បើ $m<0$ វ៉ិចទ័រ $m\vec{a}$ និង $\vec{a}$ មានទិសដៅផ្ទុយគ្នា ហើយ

$\left|m\vec{a}\right|=\left|m\right|\left|\vec{a}\right|$

(3) បើ $m=a$ នោះ $m\vec{a}$ និង $\vec{0}$ ។

-បើ $\vec{a}=\vec{0}$ នោះ $m\vec{a}$ ជាវ៉ិចទ័រ $\vec{0}$ ។

-វ៉ិចទ័រ $\vec{a}$ និង $\vec{b}$ ជាវ៉ិចទ័រកូលីនេអ៊ែ លុះត្រាតែ $\vec{a}//\vec{b}$ ។

លក្ខណៈត្រី៖

(1) $(mn)\vec{a} = m(n\vec{a})$ លក្ខណៈផ្តុំ

(2) $(m+n)\vec{a} = m\vec{a} + n\vec{a}$ លក្ខណៈបំបែក I

(3) $m(\vec{a}+\vec{b}) = m\vec{a} + m\vec{b}$ លក្ខណៈបំបែក II

-វ៉ិចទ័រដែលមានប្រវែងស្មើ 1 ហៅថា វ៉ិចទ័រឯកតា ។

-បើ $\vec{a} = (a_1, a_2)$ នោះ $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$

-វ៉ិចទ័រ $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j}$ តាងជាអនុគមន៍នៃវ៉ិចទ័រឯកតា

-វ៉ិចទ័រ $\vec{a} = (a_1, a_2)$ តាងកូអ័រដោនេ វ៉ិចទ័រ

ការគណនាតាមអត្ថន័យកូអ័រដោនេ

(1) $(a_1, a_2) + (b_1, b_2) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$

(2) $(a_1, a_2) - (b_1, b_2) = (a_1 - b_1, a_2 - b_2)$

(3) $m(a_1, a_2) = (ma_1, ma_2)$

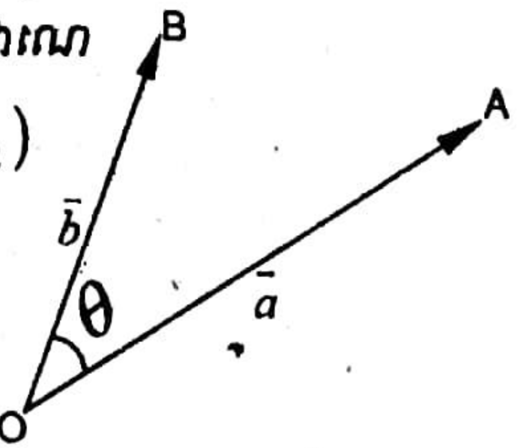
ផលគុណស្កាលែ

-បើ θ ជាមុំដែលកើតឡើងដោយវ៉ិចទ័រ $\vec{a}$ និង $\vec{b}$

គេបាន $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$

-ចំពោះ $\vec{a} = \vec{0}$ ឬ $\vec{b} = \vec{0}$ គេបាន $\vec{a}.\vec{b} = 0$ ។

ផលគុណស្កាលែ និងការតាង កូស៊ីនុសដោយណេ



បើ $\vec{a}=(a_1,a_2)$ និង $\vec{b}=(b_1,b_2)$

គេបាន $\vec{a}.\vec{b}=a_1b_2+a_2b_2$

ករណីពិសេស $\vec{a}\perp\vec{b}$ លុះត្រាតែ

$a_1b_1+a_2b_2=0$

ជាទូទៅ បើតាង θ ជាមុំដែលកើតឡើងដោយ $\vec{a}=(a_1,a_2)$ និង

$\vec{b}=(b_1,b_2)$ នោះ $\cos\theta=\dfrac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\dfrac{a_1b_1+a_2b_2}{\sqrt{c_1^2a_2^2}\sqrt{b_1^2b_2^2}}$

លក្ខណៈចំពោះគ្រប់វ៉ិចទ័រ $\vec{a},\vec{b}$ និង $\vec{c}$

(1) $\vec{a}.(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}.\vec{b}+\vec{a}.\vec{c}$

(2) $(\vec{a}+\vec{b}).\vec{c}=\vec{a}.\vec{c}+\vec{b}.\vec{c}$

(3) $(m\vec{a}).\vec{b}=m(\vec{a}.\vec{b})$

(4) $\vec{a}.(m\vec{a})=m(\vec{a}.\vec{b})$ ។

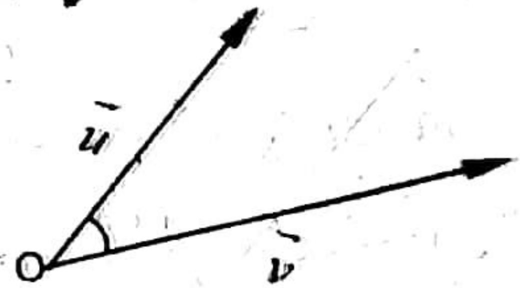
លំហាត់

1.គេឲ្យវ៉ិចទ័រ $\vec{u}$ និង $\vec{v}$ ដូចក្នុងរូបខាងស្ដាំ

គណនាតកន្សោមខាងក្រោម:

ក. $6\vec{u}-5\vec{v}-4\vec{u}+2\vec{v}$

ខ. $7\left(\vec{u}-2\vec{v}\right)-4\left(2\vec{u}+3\vec{v}\right)$



2.រកចំនួនពិត k និង l ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $\vec{c}=k\vec{a}+l\vec{b}$ បើ $\vec{a}=(-2,3),\vec{b}=(1,-4)$ និង $\vec{c}=(8,-17)$ ។

3.បង្ហាញសមភាពខាងក្រោម៖

ក. $\left(4\vec{a}+3\vec{b}\right).\left(4\vec{a}-3\vec{b}\right)=16\left|\vec{a}\right|^2-9\left|\vec{b}\right|^2$

ខ. $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|^2-\left|\vec{a}-\vec{b}\right|^2=4\vec{a}.\vec{b}$

4.រកមុំ θ ដែលកើតឡើងដោយវ៉ិចទ័រ $\vec{a}$ និង $\vec{b}$ ចំពោះករណីខាងក្រោម៖

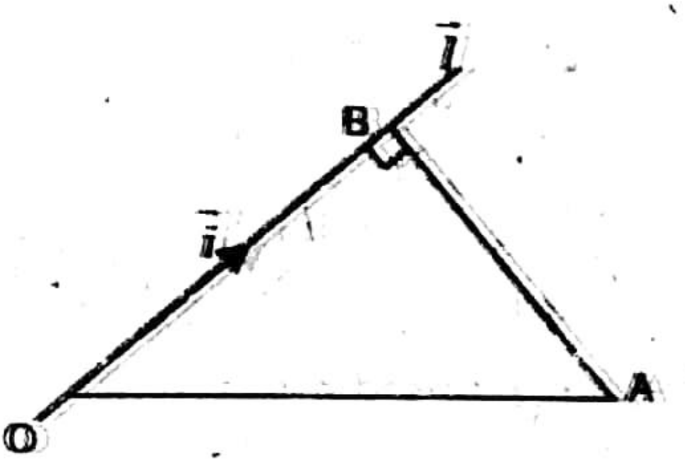
ក. $\left|\vec{a}\right|=3,\left|\vec{b}\right|=4,\vec{a}.\vec{b}=6$ ខ. $\left|\vec{a}\right|=\left|\vec{b}\right|=\vec{a}.\vec{b}=\sqrt{2}$

5.គេឲ្យវ៉ិចទ័រ $\vec{a}=(2,1)$ មាន $\vec{b}=(-1,2)$ ។ រកតំលៃនៃចំនួនពិត x ដែលថាវ៉ិចទ័រ $4x\vec{a}+\vec{b}$ និង $x\vec{a}-3\vec{b}$ កែងគ្នា ។

6.បង្ហាញថា ចំពោះវ៉ិចទ័រពីរ $\vec{a}$ និង $\vec{b}$ មិនស្មើ 0 ហើយបើ $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=\left|\vec{a}-\vec{b}\right|$ នោះ $\vec{a}\perp\vec{b}$ ។

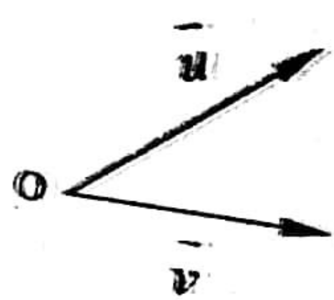
7.តាង $\vec{i}$ ជាវ៉ិចទ័រឯកតា ហើយស្របទៅនឹងបន្ទាត់ l ដែល l កាត់តាមចំណុច o និងតាង B ជាចំណុចដែលបន្ទាត់គូសចេញពី

A កាត់បន្ទាត់ l ហើយកែងគ្នា បង្ហាញថា $\left\|\overrightarrow{OA_l}\right\| = OB$ ។



ដំណោះស្រាយ

1.គណនាកន្សោម



ក. $6\vec{u}-5\vec{v}-4\vec{u}+2\vec{v}=2\vec{u}-3\vec{v}$

ខ. $7\left(\vec{u}-2\vec{v}\right)-4\left(2\vec{u}+3\vec{v}\right)=$

$7\vec{u}-14\vec{v}-8\vec{u}-12\vec{v}=-\vec{u}-26\vec{v}$

2.រកចំនួនពិត k និង l ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $\vec{c}=k\vec{a}+l\vec{b}$

គេមាន $\begin{cases}\vec{a}(-2,3)\\ \vec{b}(1,-4)\\ \vec{c}(8,-17)\end{cases}$ យើងបាន $\vec{c}=k\vec{a}+l\vec{b}$

$\Leftrightarrow 8\vec{i}-17\vec{j}=-2k\vec{i}+3k\vec{j}+l\vec{i}-4l\vec{j}$

$\Leftrightarrow 8\vec{i}-17\vec{j}=(-2k+l)\vec{i}+(3k-4l)\vec{j}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 8=-2k+l & (1) \\ -17=3k-4l & (2) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 32=-8k+4l & (1) \\ -17=3k-4l & (2) \end{cases} \qquad \boxed{\Rightarrow k=-3, l=2}$$

3.បង្ហាញសមភាព

ក $(4\vec{a}+3\vec{b})(4\vec{a}-3\vec{b})=16|\vec{a}|^2-9|\vec{b}|^2$

ដោយ $(4\vec{a}+3\vec{b})(4\vec{a}-3\vec{b})$

$=4\vec{a}(4\vec{a}-3\vec{b})+3\vec{b}(4\vec{a}-3\vec{b})$

$=16|\vec{a}|^2-12\vec{a}.\vec{b}+12\vec{a}\vec{b}-9|\vec{b}|^2$

$=16|\vec{a}|^2-9|\vec{b}|^2$ (ពិត)

ដូចនេះ $\boxed{(4\vec{a}+3\vec{b}).(4\vec{a}-3\vec{b})=16|\vec{a}|^2-9|\vec{b}|^2}$

ខ. $|\vec{a}+\vec{b}|^2-|\vec{a}-\vec{b}|^2=4\vec{a}\vec{b}$

ដោយ $|\vec{a}+\vec{b}|^2-|\vec{a}-\vec{b}|^2=(\vec{a}+\vec{b})(\vec{a}+\vec{b})-(\vec{a}-\vec{b})(\vec{a}-\vec{b})$

$=|\vec{a}|^2+\vec{a}\vec{b}+\vec{a}.\vec{b}+|\vec{b}|^2-\left(|\vec{a}|^2-\vec{a}.\vec{b}-\vec{a}.\vec{b}+|\vec{b}|^2\right)$

$= |\vec{a}|^2 + 2\vec{a}.\vec{b} - |\vec{a}|^2 + 2\vec{a}.\vec{b} - |\vec{b}|^2 + |\vec{b}|^2$

$= 2\vec{a}.\vec{b} + 2\vec{a}.\vec{b} = 4\vec{a}.\vec{b}$ (ពិត)

ដូចនេះ: $\boxed{|\vec{a}+\vec{b}|^2 - |\vec{a}-\vec{b}|^2 = 4\vec{a}.\vec{b}}$

4. រកមុំ θ ដែលកើតឡើង ដោយវ៉ិចទ័រ $\vec{a}$ និង $\vec{b}$

ក. $|\vec{a}| = 3, |\vec{b}| = 4, \vec{a}.\vec{b} = 6$

តាមរូបមន្ត $\cos\theta = \dfrac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}|.|\vec{b}|} \Rightarrow \cos\theta = \dfrac{6}{3.4} = \dfrac{1}{2} = \cos 60^\circ$

ដូចនេះ: $\boxed{\theta = 60^\circ}$

ខ. $|\vec{a}| = |\vec{b}| = \vec{a}.\vec{b} = \sqrt{2}$

គេបាន $\cos\theta = \dfrac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}|.|\vec{b}|} = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}.\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \cos 45^\circ$

ដូចនេះ: $\boxed{\theta = 45^\circ}$

5. រកតំលៃនៃចំនួនពិត x ដែលវ៉ិចទ័រ

$4x\vec{a}+\vec{b}$ និង $x\vec{a}-3\vec{b}$ កែងគ្នា

គេមាន $\vec{a} = (2,1), \vec{b} = (-1,2)$

គេបាន $4x\vec{a}+\vec{b} = 8x\vec{i} + 4x\vec{j} - \vec{j} + 2\vec{j}$

$= (8x-1)\vec{i} + (4x+2)\vec{j} + x\vec{a} - 3\vec{b}$ (1)

$=2x\vec{i}+x\vec{j}+3\vec{i}-6\vec{j}$

$=(2x+3)\vec{i}+(x-6)\vec{j} \qquad (2)$

ដោយ $(1)\perp(2)$

គេបាន $(8x-1)(2x+3)+(4x+2)(x-6)=0$

$\Leftrightarrow 16x^2+24x-2x+4x^2-24x+2x-12-3=0$

$\Leftrightarrow 20x^2-15=0$

$\Leftrightarrow 20x^2=15$

$\Leftrightarrow x=\pm\sqrt{\frac{15}{20}}=\pm\sqrt{\frac{15}{4.5}}=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$

ដូចនេះ $\boxed{x=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}}$

6.បង្ហាញថាចំពោះវ៉ិចទ័រពីរ $\vec{a}$ និង $\vec{b}$ មិនស្មើ 0 ហើយបើ $|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}-\vec{b}|$ នោះ $\vec{a}\perp\vec{b}$

យើងមាន $|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}-\vec{b}|$ លើកអង្គទាំងពីរជាការេ

គេបាន $|\vec{a}+\vec{b}|^2=|\vec{a}-\vec{b}|^2$

$\Leftrightarrow(\vec{a}+\vec{b})(\vec{a}+\vec{b})=(\vec{a}-\vec{b})(\vec{a}-\vec{b})$

$\Leftrightarrow|\vec{a}|^2+\vec{a}\vec{b}+\vec{a}\vec{b}+|\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2-2\vec{a}\vec{b}-|\vec{b}|^2$

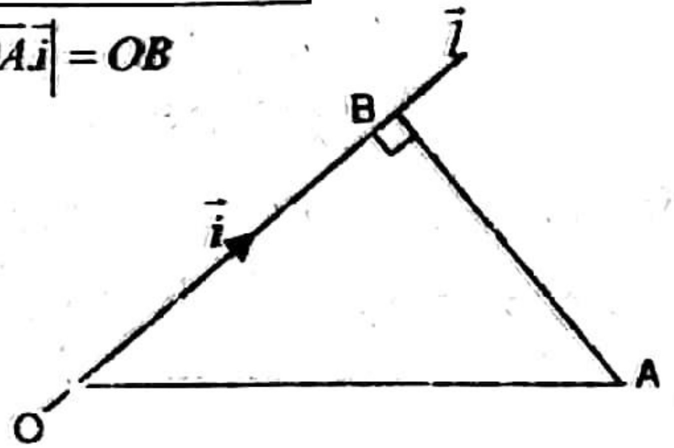
$\Leftrightarrow|\vec{a}|^2+2\vec{a}\vec{b}+|\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2-2\vec{a}\vec{b}-|\vec{b}|^2$

$\Leftrightarrow 4\vec{a}\vec{b}=0$

នោះ $\vec{a}\vec{b}=0$ នាំអោយ $\vec{a}\perp\vec{b}$

ដូចនេះ $\boxed{\vec{a}\vec{b}=0 \text{ នាំអោយ } \vec{a}\perp\vec{b}}$

7.បង្ហាញថា $\left|\overrightarrow{OA}.\vec{i}\right|=OB$



តាមរូប $\overrightarrow{OA}.\vec{i}=\vec{i}.\overrightarrow{OB}$ (ព្រោះ $\vec{i}$ ស្របនិងបន្ទាត់ l ដែល l កាត់តាម ចំនុច O និង $B\in l$)

គេបាន $\overrightarrow{OA}.\vec{i}=\vec{i}.\overrightarrow{OB}$ នាំអោយ $\left|\overrightarrow{OA}.\vec{i}\right|=\left|\vec{i}.\overrightarrow{OB}\right|$ $\left|\overrightarrow{OA}.\vec{i}\right|=\left|\vec{i}\right|.\left|\overrightarrow{OB}\right|$

ដោយ $\vec{i}$ ជាវ៉ិចទ័រឯកតានោះ គេបាន $\left|\vec{i}\right|=1$ ហើយ $\left|\overrightarrow{OB}\right|=OB$

នាំអោយ $\left|\overrightarrow{OA}.\vec{i}\right|=OB$

ដូចនេះ $\left|\overrightarrow{OA}.\vec{i}\right|=OB$

មេរៀនទី 2

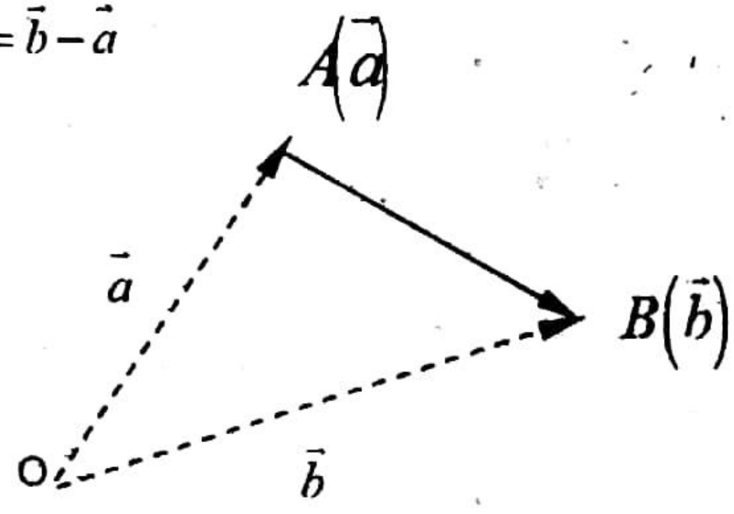
ការអនុវត្តវុចទ័រ

មេរៀនសង្ខេប

-វ៉ិចទ័រទីតាំងនៃចំណុច P គឺ $\overrightarrow{P}$ ដែលកំណត់ដោយ $P(\overline{p})$ ។

-វ៉ិចទ័រ $\vec{a}$ និង $\vec{b}$ ជាវ៉ិចទ័រទីតាំងនៃចំណុច A និង B រៀងគ្នា ។

គេបាន $\overline{AB}=\vec{b}-\vec{a}$

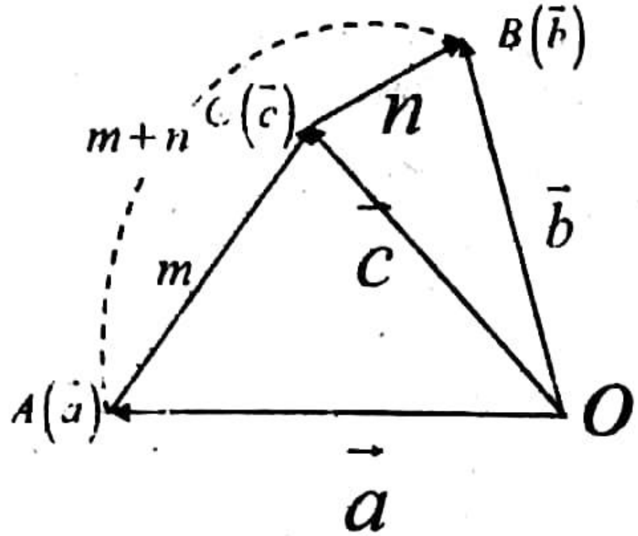


-វ៉ិចទ័រទីតាំង $\vec{c}$ នៃចំណុច C ចែកអង្កត់ AB ខាងក្នុង តាមផលធៀប

$m:n$ គឺ $\vec{c}=\dfrac{m\vec{a}+n\vec{a}}{m+n}$ ។

ករណីពិសេស វ៉ិចទ័រទីតាំងនៃចំណុចកណ្ដាលរបស់អង្កត់

AB គឺ $\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}$ ។



-កូអរដោនេនៃចំណុច C ដែលចែកអង្កត់ AB ខាងក្នុង $A(x_1,y_1)$ និង $B(x_2,y_2)$ តាមផលធៀប $m:n$ គឺ

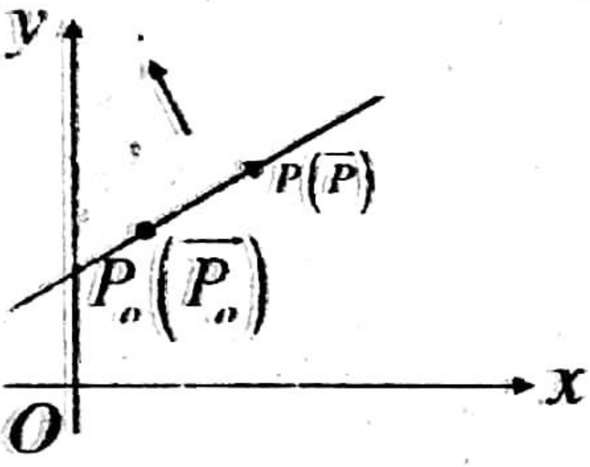
$$x=\frac{mx_2+nx_1}{m+n} \quad , y=\frac{my_2+my_1}{m+n} \quad ។$$

-សមីការវ៉ិចទ័រនៃបន្ទាត់ L កាត់តាមចំណុចនិង $P_0(\vec{p_0})$ ហើយស្របទៅនឹងវ៉ិចទ័រ $\vec{u}$ ដែល $\vec{u}\neq\vec{0}$ គឺ $\vec{p}=\vec{po}+t\vec{u}$ (1)

-សមីការប៉ារ៉ាម៉ែតនៃបន្ទាត់កាត់តាមចំណុច $P_0(x_0,y_0)$ ជាសមីការបន្ទាត់កាត់តាមចំណុច $\vec{u}=(a,b)$ គឺ $\begin{cases} x=x_0+ta \\ y=y_0+ta \end{cases}$

-បើ $a\neq 0$ និង $b\neq 0$ គេបាន $y-y_0=\frac{b}{a}(x-x_0)$ ជាសមីការបន្ទាត់កាត់តាមចំណុច (x_0,y_0) ដែលមានមេគុណប្រាប់ទិសស្មើ $\frac{b}{a}$ ។

-សមីការប៉ារ៉ាម៉ែតនៃបន្ទាត់ L កាត់តាមពីរចំណុច $A(\vec{a})$ និង $B(\vec{b})$ គឺ $L: \vec{p} = \vec{a} + t(\vec{b} - \vec{a})$ គេមានបន្ទាត់ $L, \vec{n} \neq \vec{o}$ ហើយបន្ទាត់ L កែងទៅនឹងវុិចទ័រណរម៉ាល់ $\vec{n}$ ។ តាង $P(\vec{p})$ ជាចំណុចចល័តលើបន្ទាត់ L ។



-សមីការវុិចទ័រនៃបន្ទាត់ L កាត់តាមចំណុចនឹង $P_o(\vec{p_o})$ ហើយកែងនឹងវុិចទ័រណរម៉ាល់ $\vec{n}$ គឺ $L: \vec{n}.(\vec{p} - \vec{p_o}) = 0$ (1) ។

បើ $\vec{p} = (x, y), \vec{p_o} = (x_o, y_o), \vec{n} = (a, b)$

សមីការស្តង់ដានៃបន្ទាត់គឺ $L: a(x - x_o) + b(y - y_o) = 0$ ។

វុិចទ័រ $\vec{n} = (a, b)$ ហៅថា វុិចទ័រណរម៉ាល់ នៃបន្ទាត់នេះ ។

-ចម្ងាយរវាងចំណុច $P(x_1, y_1)$ និងបន្ទាត់ $L: ax + by + c = o$ គឺ

$$d = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

សមីការវ៉ិចទ័រនៃរង្វង់ដែលមានផ្ចិតត្រង់ចំណុច $C(\vec{c})$ និងកាំ r មាន $\left|\overrightarrow{CP}\right|=r$ នាំឲ្យ $\left|\vec{p}-\vec{c}\right|=r$ ។

បើតាង $\vec{p}=(x,y)$ និង $\vec{c}=(x_0,y_0)$ នោះគេបានរង្វង់ផ្ចិត $C(x_0,y_0)$ និងកាំ r មានសមីការ $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$ ។

-សមីការរង្វង់ផ្ចិត $O(0,0)$ និងកាំ r មានរាង $x^2+y^2=r^2$ ។

លំហាត់

1.តាង $\vec{a}$ និង $\vec{b}$ ជាវ៉ិចទ័រទីតាំងនៃពីរចំណុច A និង B ។ បង្ហាញវ៉ិចទ័រទីតាំងនៃចំណុចខាងក្រោមជាអនុគមន៍នៃ $\vec{a}$ និង $\vec{b}$:

ក.ចំណុចចែកអង្កត់ AB ខាងក្នុងតាមផលធៀប $3:2$ ។

ខ.ចំណុចចែកអង្កត់ AB ខាងក្រៅតាមផលធៀប $1:2$ ។

គ.ចំណុចស៊ីមេទ្រីទៅនឹង A ធៀបទៅនឹង B ។

2. $\vec{a}$ និង $\vec{b}$ ជាវ៉ិចទ័រមិនស្របគ្នា ហើយវ៉ិចទ័រទីតាំង $\vec{p},\vec{q}$ និង $\vec{r}$ នៃបីចំណុច P,Q និង R រៀងគ្នា ត្រូវគ្នាបានបង្ហាញដូចខាងក្រោម :

$\vec{p}=2\vec{a}+2\vec{b},\vec{q}=-6\vec{a}+6\vec{b},\vec{r}=6\vec{a}$

ក.បង្ហាញ $\overrightarrow{PQ}$ និង $\overrightarrow{PR}$ ជាអនុគមន៍នៃ $\vec{a}$ និង $\vec{b}$ ។

ខ.តើទំនាក់ទំនងក្នុងចំណោមបីចំណុច P,Q និង R ជាទំនាក់ទំនងអ្វី?

3.តាង $\vec{a}$ និង $\vec{b}$ ជាវ៉ិចទ័រទីតាំងនៃពីរចំណុច A និង B ដែលចំណុច O ជាចំណុចគល់ ។ចូររកសមីការវ៉ិចទ័រនៃកន្ទះបន្ទាត់ពុះមុំ $\angle AOB$ ចំពោះ ក. $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$, ខ. $|\vec{a}| = 2$ $|\vec{b}| = 3$

4. L_1 ជាបន្ទាត់កាត់តាមចំណុច $(1,1)$ ដែលមានវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិស $\overline{u_1} = (1,2)$ ហើយ L_2 ជាបន្ទាត់កាត់តាមចំណុច $(1,5)$ ដែលមានវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិស $\overrightarrow{u_2} = (3,-4)$

ក.រកសមីការប៉ារ៉ាម៉ែតនៃ L_1 និង L_2 ជាអនុគមន៍ប៉ារ៉ាម៉ែត s និង t ។

ខ.រកកូអរដោនេនៃចំណុចដែល L_1 ប្រសព្វ L_2 ។

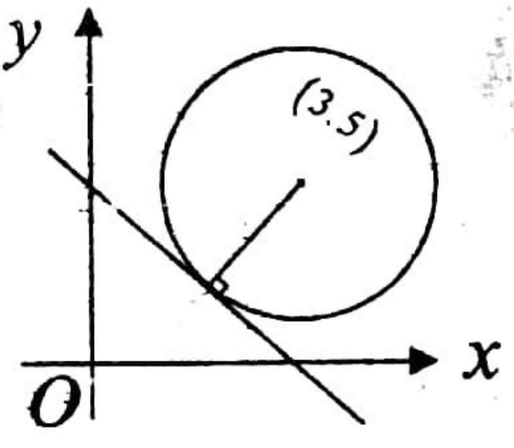
5.តើប្រភេទចតុកោណ $ABCD$ ជាចតុកោណអ្វី បើទំនាក់ទំនងខាងក្រោមពិត ក. $\overline{AC} + \overline{BD} = 2\overline{AD}$

ខ. $\overline{AD} = \overline{AC} - \overline{AB}$ និង $\left(\overline{AB} - \overline{AD}\right).\left(\overline{AD} - \overline{CD}\right) = 0$

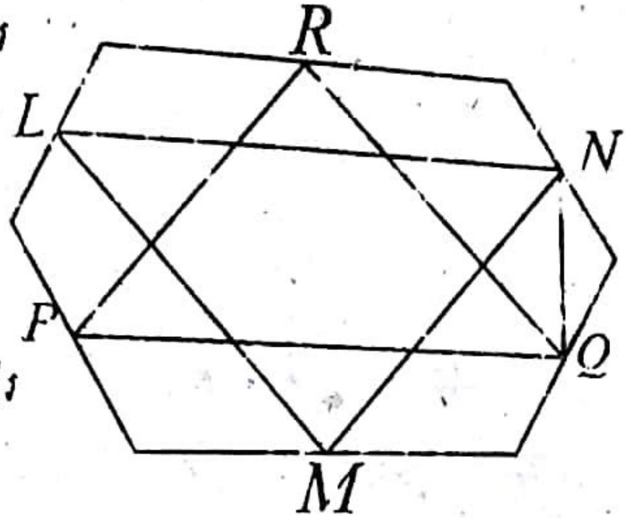
6.រកចម្ងាយរវាងបន្ទាត់ $3x + 4y + 5 = 0$ និងចំណុចខាងក្រោម :

ក. $(2,1)$ ខ $(-8,1)$ គ. $(0,0)$

7.រកចម្ងាយរវាងចំណុច $(5,3)$ $x + 2y = 6$ ។ ករកសមីការរង្វង់មានផ្ចិត $(5,3)$ និងបន្ទាត់ប៉ះ $x + 2y = 6$ ។



8. បើយើងបង្កើតត្រីកោណពីរ ΔLMN និង ΔPQR ដោយភ្ជាប់រវាងចំណុចកណ្តាលនៃជ្រុងឆកោណ ដូចបង្ហាញក្នុងរូប នោះត្រីកោណទាំងពីរនេះ មានទ្រាសង់តែមួយ ។



បង្ហាញដោយប្រើវ៉ិចទ័រទីតាំងនៃកំពូលឆកោណ ។

ដំណោះស្រាយ

1. បង្ហាញរកវ៉ិចទ័រទីតាំងនៃចំណុចខាងក្រោមជាអនុគមន៍ $\vec{a}$ និង $\vec{b}$

ក. ចំណុចចែកអង្កត់ AB ខាងក្នុងតាមផលធៀប $3:2$

តាមវ៉ិចទ័រទីតាំងនៃចំណុច A និង B គឺ $\frac{m\vec{b}+n\vec{a}}{m+n}$ ដែល $m=3$

$n=2$ នាំអោយ $\frac{m\vec{b}+n\vec{a}}{m+n}=\frac{3\vec{b}+2\vec{a}}{5}$

ដូចនេះ វ៉ិចទ័រទីតាំងគឺ $\frac{3\vec{b}+2\vec{a}}{5}$

ខ. ចំណុចចែកអង្កត់ AB ខាងក្រៅតាមផលធៀប $1:2$

តាមរូបមន្តវ៉ិចទ័រទីតាំងនៃចំណុច A និង B គឺ $\dfrac{m\vec{b}-n\vec{a}}{m-n}$ ដែល

$m=1, n=2$

នាំអោយ $\dfrac{m\vec{b}-n\vec{a}}{m-n}=\dfrac{\vec{b}-2\vec{a}}{1-2}=2\vec{a}-\vec{b}$

ដូចនេះ វ៉ិចទ័រទីតាំងគឺ $\boxed{2\vec{a}-\vec{b}}$

ខ.ចំណុចស៊ីមេទ្រីទៅនឹង A ធៀបនឹង B

ដោយៈ ចំណុចស៊ីមេទ្រីទៅនឹង A ធៀបនឹង B នោះវ៉ិចទ័រទីតាំង

នៃចំណុចកណ្តាលរបស់អង្កត់ AB គឺ $\dfrac{\vec{a}+\vec{b}}{2}$

ដូចនេះវ៉ិចទ័រទីតាំងគឺ $\boxed{\dfrac{\vec{a}+\vec{b}}{2}}$

2.ក.បង្ហាញថា $\overline{PQ}$ និង $\overline{PR}$ ជាអនុគមន៍នៃ $\vec{a}$ និង $\vec{b}$

យើងមាន $\vec{p}=2\vec{a}+2\vec{b}$

$\vec{q}=-6\vec{a}+6\vec{b}$

$\vec{r}=6\vec{a}$

គេបាន $\overline{PQ}=-6\vec{a}+6\vec{b}-\left(2\vec{a}+2\vec{b}\right)=-8\vec{a}+4\vec{b}$

$=-2\left(4\vec{a}-2\vec{b}\right)$

ដូចនេះ $\boxed{\overline{PQ}=-2\left(4\vec{a}-2\vec{b}\right)}$

$$\overline{PR} = 6\vec{a} - \left(2\vec{a} + 2\vec{b}\right) = 4\vec{a} - 2\vec{b}$$

ដូចនេះ $\boxed{\overline{PR} = 4\vec{a} - 2\vec{b}}$

ខ.តើទំនាក់ទំនងក្នុងចំណោមបីចំណុច P, Q និង R ជាទំនាក់ទំនងអ្វី?

គេមាន $\begin{cases} \overline{PQ} = -2\left(4\vec{a} - 2\vec{b}\right) & (1) \\ \overline{PR} = 4\vec{a} - 2\vec{b} & (2) \end{cases}$

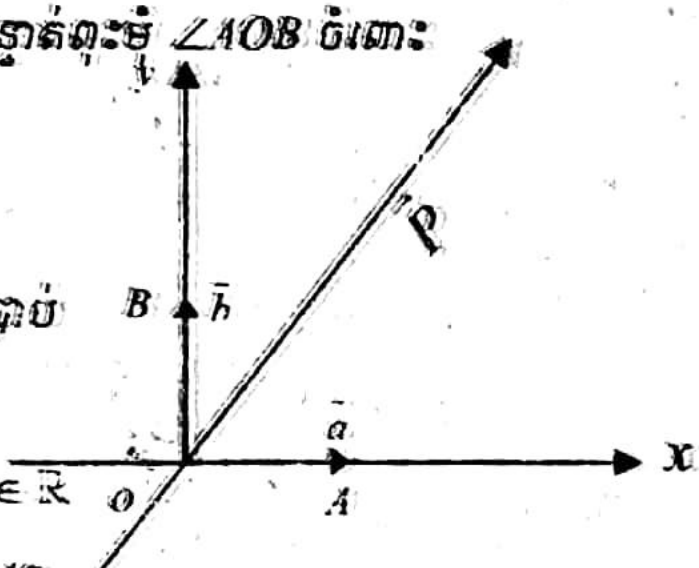
តាម (1) និង (2), គេបាន

$\overline{PQ} = -2\overline{PR}$ នាំអោយ $\overline{PQ}$ និង $\overline{PR}$ ជាវ៉ិចទ័រស្ថិតនៅលើបន្ទាត់តែមួយ

ដូចនេះ $\boxed{P, Q \text{ និង } R \text{ ជាចំណុចរត់ត្រង់ជួរគ្នា}}$

3.រកសមីការវ៉ិចទ័រនៃកន្ទះបន្ទាត់ពុះមុំ $\angle AOB$ ចំពោះ

ក. $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$



សមីការបន្ទាត់ ដែលកាត់តាមចំណុច $P_0(0,0)$ មានវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិស $\vec{u} = (a,b)$

កំណត់ដោយ $\overline{P} = \overline{P}_0 + t\vec{u}, t \in \mathbb{R}$

$$= \begin{cases} x = x_0 + ta \\ y = y_0 + tb \end{cases}$$

$$= \begin{cases} x = at \\ y = bt \end{cases} \text{ តែ } a = b = |\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$$

ដូចនេះ $\boxed{\vec{P} = t(\vec{a} + \vec{b})}$

ខ. $|\vec{a}| = 2, |\vec{b}| = 3$

សមីការបន្ទាត់ដែលកាត់តាមចំណុច $P_o(0,0)$ មានវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិស $\vec{u} = (a,b)$.

កំណត់ដោយ $\vec{P} = \begin{cases} x = at \\ y = bt \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$

$$= \begin{cases} x = \dfrac{\vec{a}}{2} t \\ y = \dfrac{\vec{b}}{3} t \end{cases}$$

ដូចនេះ $\boxed{\vec{P} = t\left(\dfrac{\vec{a}}{2} + \dfrac{\vec{b}}{3}\right)}$

4.ក.រកសមីការប៉ារ៉ាម៉ែតនៃ L_1 និង L_2 ជាអនុគមន៍ប៉ារ៉ាម៉ែត s និង t

+សមីការប៉ារ៉ាម៉ែតនៃបន្ទាត់ (L_1) កាត់តាមចំណុច $(1,1)$ ដែលមានវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិស $\vec{u_1} = (1,2)$ គឺ $(L_1) : \begin{cases} x = x_o + as \\ y = y_o + bs \end{cases}$

$$\boxed{(L_1) \begin{cases} x = 1 + s \\ y = 1 + 2s \end{cases} \quad s \in \mathbb{R}}$$

+សមីការប៉ារ៉ាម៉ែតនៃបន្ទាត់ (L_2) កាត់តាមចំណុច $(1,5)$ ដែលមានវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិស $\overrightarrow{u_2}=(3,-4)$ គឺ

$$(L_2):\begin{cases} x=x_0+at \\ y=y_0+bt \end{cases} \quad t\in\mathbb{R}$$

$$\boxed{(L_2):\begin{cases} x=1+3t \\ y=5-4t \end{cases} \quad t\in\mathbb{R}}$$

ខ.រកកូអរដោនេនៃចំណុចប្រសព្វ (L_1) និង (L_2) តាង

$\{A\}=(L_1)\cap(L_2)$

គេបាន $\begin{cases} 1+S=1+3t & (1) \\ 1+2S=5-4t & (2) \end{cases}$

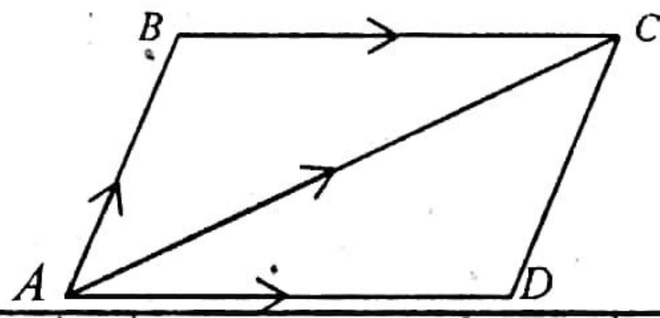
តាម $(1)\Rightarrow s=3t$ ជំនួស (2)

គេបាន $1+6t=5-4t$

$\Leftrightarrow 10t=4\Rightarrow t=\dfrac{2}{5}$ ជំនួសចូល (L_2)

ដូចនេះ $\boxed{A\left(\dfrac{11}{5},\dfrac{17}{5}\right)}$

5.ប្រភេទចតុកោណ $ABCD$ ជាចតុកោណអ្វី បើទំនាក់ទំនងខាងក្រោមពិត



ក. $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{AD}$

ដោយ $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}$

$\Rightarrow \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AD}$ តែ $\overrightarrow{BC} // \overrightarrow{AD}$

$\Rightarrow \overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AD}$

ដូចនេះ $\boxed{\text{ចតុកោណ } ABCD \text{ ជាប្រលេឡូក្រាម}}$

ខ. $\begin{cases} \overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB} & (1) \\ \left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}\right).\left(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{CD}\right)=0 & (2) \end{cases}$

តាម (1) $\quad \Rightarrow \overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}$

តាម (2) $\quad \left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}\right).\left(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{CD}\right)=0$

$\Leftrightarrow -\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}\right).\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}\right)=0$

$\Leftrightarrow -\overrightarrow{BD}.\overrightarrow{AC}=0$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{DB}.\overrightarrow{AC}=0$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{DB}\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}\right)=0$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{DB}.\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DB}.\overrightarrow{AB}=0$

$\Leftrightarrow 0+0=0$ (ពិត) (ព្រោះ $\overrightarrow{DB}\perp\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{DB}\perp\overrightarrow{AB}$)

ដូចនេះ $\boxed{\text{ចតុកោណ } ABCD \text{ ជាការេ}}$

6.រកចំងាយរវាងបន្ទាត់ទៅចំណុច

តាមរូបមន្ត $d=\dfrac{|ax_o+by_o+d|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

ក. $(2,1)$ និងបន្ទាត់ $3x+4y+5=0$

$$\Rightarrow d=\frac{|3\times 2+4\times 1+5|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{|15|}{\sqrt{25}}=\frac{15}{5}=3$$

ដូចនេះ $\boxed{d=3}$

ខ. $(-8,1)$

$$\Rightarrow d=\frac{|3\times(-8)+4\times 1+5|}{5}=\frac{|-24+9|}{5}=3$$

ដូចនេះ $\boxed{d=3}$

គ. $(0,0)$

$$d=\frac{|0+0+5|}{5}=1$$

ដូចនេះ $\boxed{d=0}$

7.រកចំងាយរវាងចំណុច $(5,3)$ និងបន្ទាត់ $x+2y=6$

តាម $d=\frac{|ax_0+by_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{|5+6-6|}{\sqrt{1+2^2}}=\frac{5}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$

ដូចនេះ $\boxed{d=\sqrt{5}}$

-រកសមីការរង្វង់

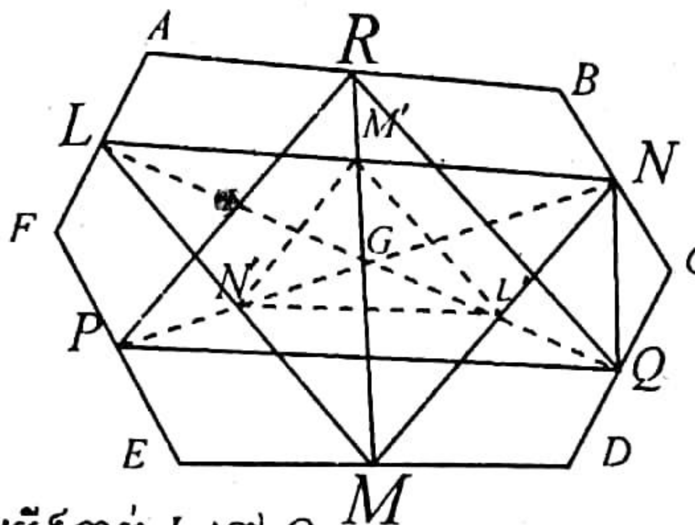
យើងមាន ផ្ចិត $(5,3)$ ប៉ះនិងបន្ទាត់ $x+2y=6$

រង្វង់ $(x-a)^2+(y-6)^2=R^2$

$(x-5)^2+(y-3)^2=5$

ដូចនេះ រង្វង់គឺ $\boxed{(x-5)^2+(y-3)^2=5}$

8.បង្ហាញថា ត្រីកោណ ΔLMN និង ΔPQR មានបារីសង់រួមដោយប្រើវ៉ិចទ័រទីតាំងនៃកំពូលត្រីកោណ



តាមរូប :យើងភ្ជាប់ L ទៅ Q

គេបាន $\overrightarrow{LL'} \parallel \overrightarrow{LQ}$ (ព្រោះ L, L' និង Q ស្ថិតនៅលើបន្ទាត់តែ1)

+យើងភ្ជាប់ M ទៅ R

គេបាន $\overrightarrow{MM'} \parallel \overrightarrow{MR}$ (ព្រោះ M, M' និង R ស្ថិតនៅលើបន្ទាត់តែ1)

+យើងភ្ជាប់ N ទៅ P

គេបាន $\overrightarrow{NN'} \parallel \overrightarrow{NP}$ (ព្រោះ N, N' និង P ស្ថិតនៅលើបន្ទាត់តែ1)

ដោយ R កណ្ដាល AB, N កណ្ដាល BC, Q កណ្ដាល EF

និង L កណ្ដាល FA នោះ $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{LM}$

$\Rightarrow M'$ កណ្ដាល LM

$\overrightarrow{CD} \parallel \overrightarrow{LM}$

$\Rightarrow L'$ កណ្ដាល NM

$\overrightarrow{EF} // \overrightarrow{ML}$

$\Rightarrow N'$ កណ្ដាល MN

គេបាន ΔLMN ដែល L', M' និង N' ជាចំណុចកណ្ដាលរៀងគ្នា នៃ MN, LM និង ML

យើងត្រូវស្រាយ ΔABC និង $\Delta L'M'N'$ មានប្រជុំរួមគ្នាគឺត្រូវ ស្រាយថា : $\overrightarrow{LL'} + \overrightarrow{MM'} + \overrightarrow{NN'} = 0$

គេបាន $\overrightarrow{LN} + \overrightarrow{NL'} + \overrightarrow{ML} + \overrightarrow{LM'} + \overrightarrow{NL'} + \overrightarrow{LN'}$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{LN} - \overrightarrow{LM} + \overrightarrow{NL'} + \overrightarrow{ML} + \overrightarrow{LM'} + \overrightarrow{LN'}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\overrightarrow{NM}}{2} + \overrightarrow{ML} + \frac{\overrightarrow{LN}}{2} + \frac{\overrightarrow{LM}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{LN} + \overrightarrow{NM}\right) - \overrightarrow{LM} + \frac{\overrightarrow{LM}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\overrightarrow{LM} - \frac{1}{2}\overrightarrow{LM} = \vec{0} \qquad \text{(ពិត)}$$

ដូចនេះ $\boxed{\Delta LMN \text{ និង } \Delta PQR \text{ មានបារីសង់រួម}}$

ជំហាត់ជំពូកទី ៩

1.រកកូអរដោនេនៃចំណុច P និង Q ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌខាងក្រោម ហើយគេឲ្យពីរចំណុច $A(-3,4)$ និង $B(2,-1)$ និង O ជាគល់

ក. $\overrightarrow{PO}=\overrightarrow{AB}$ ខ. $\overrightarrow{AQ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ ។

2.គេឲ្យ $\overrightarrow{OA}=2\vec{a},\overrightarrow{OB}=3\vec{b},\overrightarrow{OC}=6\vec{a}-6\vec{b}$ និង $\overrightarrow{OD}=6\vec{b}-4\vec{a}$

បង្ហាញថា:ក.បីចំណុច A,B និង C ស្ថិតនៅលើបន្ទាត់តែមួយ

ខ. $AB\,//\,OD$ ។

3.គេឲ្យ $|\vec{a}|=\sqrt{3},|\vec{b}|=2$ និង $|\vec{a}+\vec{b}|=1$ រក

ក. $\vec{a}.\vec{b}$ ខ. $(\vec{a}-\vec{b})(\vec{a}+2\vec{b})$ ។

4.គេឲ្យ $\overrightarrow{OP}=(1,1)$ និង $\overrightarrow{OQ}=(1-\sqrt{3},1+\sqrt{3})$

ក.រកមុំដែលកើតឡើងដោយ $\overrightarrow{OP}$ និង $\overrightarrow{OQ}$ ។

ខ.រកក្រឡាផ្ទៃនៃ ΔOPQ ។

5.រកវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់នៃបន្ទាត់ $\sqrt{3}x+y-1$ និង $x+\sqrt{3}y+2=0$ ហើយរកមុំដែលកើតឡើងដោយបន្ទាត់ ។

6.វ៉ិចទ័រ $\vec{p}$ និង $\vec{q}$ ចល័តហើយ $|\vec{p}.\vec{q}|\le|\vec{p}||\vec{q}|$ ពិត ។

ប្រើវិសមភាពនេះដើម្បីបង្ហាញវិសមភាពខាងក្រោម ដោយសន្មតថា

$\overline{p}=(a,b)$ និង $\vec{q}=(x,y):(ax+by)^2\le(a^2+b^2)(x^2+y^2)$

7.ចំណុច P ផ្លាស់ទីលើប្លង់ ដែលមានវ៉ិចទ័រល្បឿន $\vec{v}=(2,5)$ ។ ពេល $t=0$ ហើយ P ស្ថិតនៅទីតាំងត្រង់ចំណុច $A(-6,-2)$ ហើយឯកតានៃរយៈពេលគឺ 1 វិនាទី ។

ក.រកវ៉ិចទ័រទីតាំង $\overline{p}$ នៃចំណុច P បន្ទាប់ពី t វិនាទី ។

ខ.តើពេលណាដែល P ខិតទៅជិតចំណុច $(0,2)$?

8.ប្រលេឡូក្រាម $ABCD$ គេតាង E ជាចំណុចចែកជ្រុង AB ខាងក្នុងតាមផលធៀប $2:1$ ហើយតាង F ជាចំណុចចែកអង្កត់ទ្រូង BD ខាងក្នុងតាមផលធៀប $1:3$ ។

ក.តាង $\overline{BA}=\vec{a}$ និង $\overline{BC}=\vec{b}$ ។ បង្ហាញថា $\overline{CE}$ និង $\overline{CF}$ ជាអនុគមន៍នៃ $\vec{a}$ និង $\vec{b}$ ។

ខ.បង្ហាញថា បីចំណុច C,E និង F ស្ថិតនៅលើបន្ទាត់តែមួយ ។

9 នៅក្នុង ΔABC ដែលកំពូលទាំងបី $A(\vec{a}),B(\vec{b})$ និង $C(\vec{c})$ ហើយតាង $P(\overline{p})$ ជាចំណុចចែក AB ខាងក្នុងផលធៀប $1:2$ និង $Q(\vec{q})$ ជាចំណុចកណ្ដាលនៃ AC ហើយ $R(\vec{r})$ ជាចំណុចចែក B[illegible]ក្រៅតាមផលធៀប $2:1$ ។ បង្ហាញថា $\vec{q}=\frac{3}{4}\overline{p}+\frac{1}{4}\vec{r}$ និងបង្ហាញចំណុចទាំងបី P,Q និង R ស្ថិតនៅលើបន្ទាត់តែមួយ ។

10.តាង S ជាក្រឡាផ្ទៃប្រលេឡូក្រាម ដែលពីរវ៉ិចទ័រ $\vec{a}$ និង $\vec{b}$ មិន

ស្របគ្នា ដែលកើតឡើងដោយជ្រុងពីរ ។ បង្ហាញថា

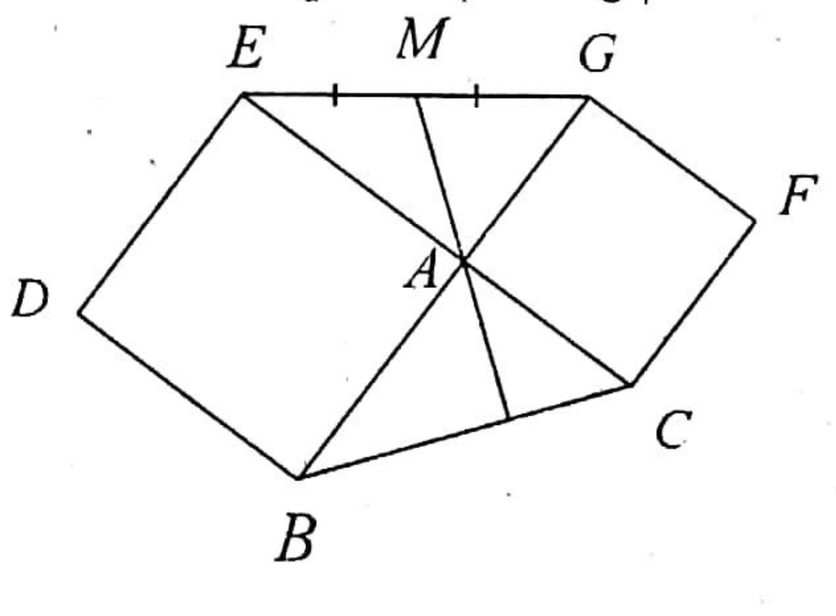
$S^2 = \left|\vec{a}\right|^2 \left|\vec{b}\right|^2 - \left(\vec{a}.\vec{b}\right)$ ។ ហើយបង្ហាញផងដែរថា $S = \left|a_1 b_2 - a_2 b_1\right|$

ដោយតាង $\vec{a} = \left(a_1, a_2\right)$ និង $\vec{b} = \left(b_1, b_2\right)$ ។

11.គេឲ្យ $\vec{a} \neq 0, \left|\vec{b}\right| = 2\left|\vec{a}\right|$ ហើយវ៉ិចទ័រ $\vec{a} + \vec{b}$ និង $5\vec{a} - 2\vec{b}$ កែងគ្នា រកមុំដែលកើតឡើងដោយវ៉ិចទ័រ $\vec{a}$ និង $\vec{b}$ ។

12. O ជាចំណុចគល់ និងវ៉ិចទ័រ $A\left(\vec{a}\right)$ និង $B\left(\vec{b}\right)$ មិនស្ថិតនៅលើបន្ទាត់តែមួយ ។ បង្ហាញថាវ៉ិចទ័រទីតាំង $\vec{c}$ នៃចំណុច C ដែលមិនស្ថិតនៅក្នុង ΔABC គឺ $\vec{c} = m\vec{a} + n\vec{b}, m > 0\ n > 0, m + n < 1$ ។

13.នៅក្នុងរូបខាងក្រោម គេមានចតុកោណ $ABDE$ និង $ACFG$ ជាការេ ។ តាង M ជាចំណុចកណ្ដាលនៃអង្កត់ EG ។ បង្ហាញថា បន្ទាត់ MA កែងទៅនឹងបន្ទាត់ BC ដោយប្រើវ៉ិចទ័រ ។



ដំណោះស្រាយ

1.រកកូអរដោនេនៃចំណុច P និង Q

គេអោយ $A(-3,4), B(2,-1), O$ ជាគល់តាង

$$P(x,y), Q(x',y')$$

ក. $\overrightarrow{PO}=\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow (-x,-y)=(5,-5)$

ដូចនេះ $\boxed{P(-5,5)}$

ខ. $\overrightarrow{AQ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

$$\Leftrightarrow (x'+3, y'-4)=\frac{1}{2}(-5,5)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x'+3=\frac{5}{2} \\ y'-4=-\frac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x'=\frac{5}{2}-3=-\frac{1}{2} \\ y'=-\frac{5}{2}+4=\frac{3}{2} \end{cases}$$

ដូចនេះ $\boxed{Q\left(-\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)}$

2.ក.បង្ហាញថាបីចំណុច A, B និង C ស្ថិតលើបន្ទាត់តែ1

គេអោយ $\begin{cases} \overrightarrow{OA}=2\vec{a}, \overrightarrow{OB}=3\vec{b} \\ \overrightarrow{OC}=6\vec{a}-6\vec{b} \\ \overrightarrow{OD}=6\vec{b}-4\vec{a} \end{cases}$

គេបាន $\overrightarrow{AB} = 3\vec{b} - 2\vec{a}$

$$\overrightarrow{AC} = 6\vec{a} - 6\vec{b} - 2\vec{a}$$

$$= 4\vec{a} - 6\vec{b}$$

$$= 2\left(3\vec{b} - 2\vec{a}\right)$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AB}$$

នាំអោយ វ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB}$ និង $\overrightarrow{AC}$ ជាវ៉ិចទ័រកូលីនេអ៊ែ

ដូចនេះ $\boxed{\text{ចំណុច } A, B \text{ និង } C \text{ ស្ថិតនៅលើបន្ទាត់}}$ ។

១.បង្ហាញថា $AB // OD$

ដោយ $\overrightarrow{OD} = 6\vec{b} - 4\vec{a}$

$$= 2\left(3\vec{b} - 2\vec{a}\right)$$

$$\overrightarrow{OD} = 2\overrightarrow{AB}$$

នាំអោយ វ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{OD}$ និង $\overrightarrow{AB}$ កូលីនេអ៊ែគ្នា

ដូចនេះ $\boxed{AB // OD}$

3.ក.រក $\vec{a}.\vec{b}$

គេអោយ $\left|\vec{a}\right| = \sqrt{3}, \left|\vec{b}\right| = 2, \left|\vec{a} + \vec{b}\right| = 1$

តាម $\left|\vec{a} + \vec{b}\right|^2 = \left(\vec{a} + \vec{b}\right)\left(\vec{a} + \vec{b}\right)$

$$= \left|\vec{a}\right|^2 + 2\vec{a}.\vec{b} + \left|\vec{b}\right|^2$$

$\Leftrightarrow 1^2 = \left(\sqrt{3}\right)^2 + 2\vec{a}.\vec{b} + 2^2$

$\Leftrightarrow 1 - 4 - 3 = 2\vec{a}.\vec{b}$

$\Leftrightarrow -6 = 2\vec{a}.\vec{b} \Rightarrow \vec{a}.\vec{b} = -3$

ដូចនេះ $\boxed{\vec{a}.\vec{b} = -3}$

ខ.រក $\left(\vec{a} - \vec{b}\right)\left(\vec{a} + 2\vec{b}\right)$

គេបាន $\left(\vec{a} - \vec{b}\right).\left(\vec{a} + 2\vec{b}\right)$

$= \vec{a}\left(\vec{a} + 2\vec{b}\right) - \vec{b}.\left(\vec{a} + 2\vec{b}\right)$

$= \left|\vec{a}\right|^2 + 2\vec{a}.\vec{b} - \vec{a}.\vec{b} - 2\left|\vec{b}\right|^2$

$= 3 + 2(-3) - (-3) - 2 \times 4$

$= 3 - 6 + 3 - 8$

ដូចនេះ $\boxed{\left(\vec{a} - \vec{b}\right)\left(\vec{a} + 2\vec{b}\right) = -8}$

4.ក.រកមុំដែលកើតឡើងដោយ

$\overrightarrow{OP} = (1,1), \overrightarrow{OQ} = \left(1 - \sqrt{3}, 1 + \sqrt{3}\right)$

$\cos\theta = \dfrac{\overrightarrow{OP}.\overrightarrow{OQ}}{\left|\overrightarrow{OP}\right|.\left|\overrightarrow{OQ}\right|} = \dfrac{1 - \sqrt{3} + 1 + \sqrt{3}}{\sqrt{1+1}.\sqrt{\left(1 - \sqrt{3}\right)^2 + \left(1 + \sqrt{3}\right)^2}}$

$= \dfrac{2}{\sqrt{2}\sqrt{8}} = \dfrac{1}{2} = \cos 60^\circ$

ដូចនេះ $\boxed{\theta = 60^\circ}$

ខ.រកក្រឡាផ្ទៃ ΔOPQ

តាម $S_{\Delta OPQ}=\frac{1}{2}\left|a_1.b_2-a_2.b_1\right|=\frac{1}{2}\left|1+\sqrt{3}-1+\sqrt{3}\right|=\frac{2\sqrt{3}}{2}$

ដូចនេះ $\boxed{S_{\Delta OPQ}=\sqrt{3}}$

5.រកវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់នៃបន្ទាត់

+ $\sqrt{3}x+y-1=0$ គឺ $\vec{U}=\left(\sqrt{3},1\right)$

+ $x+\sqrt{3}y+2=0$ គឺ $\vec{V}=\left(1.\sqrt{3}\right)$

-រកមុំដែលផ្គុំឡើងដោយបន្ទាត់ទាំងពីរ

តាម $\cos\theta=\frac{\vec{U}.\vec{V}}{\left|\vec{U}\right|.\left|\vec{V}\right|}$

$=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{3}}{\sqrt{4}+\sqrt{4}}=\frac{2\sqrt{3}}{4}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$=\cos 30°$

ដូចនេះ $\boxed{\theta=30°}$

6.បង្ហាញថា $(ax+by)\le\left(a^2+b^2\right)\left(x^2+y^2\right)$

យើងមាន $\left|\vec{p}.\vec{q}\right|\le\left|\vec{p}\right|.\left|\vec{q}\right|$ ពិត

$\Rightarrow\left|\vec{p}.\vec{q}\right|^2\le\left|\vec{p}\right|^2.\left|\vec{q}\right|^2$ ពិត (1)

តែ $\vec{p}=(a,b),\vec{q}=(x,y)$

$\Rightarrow \overrightarrow{p}.\overrightarrow{q} = (ax, by)$

$\Leftrightarrow \left|\overrightarrow{p}.\overrightarrow{q}\right| = (ax+by)^2$

ដោយ $\left|\overrightarrow{p}\right|^2.\left|\overrightarrow{q}\right|^2 = (a^2+b^2)(x^2+y^2)$ (2)

តាម (1) និង (2) ,គេបាន

$$\boxed{(ax+by) \le (a^2+b^2)(x^2+y^2)}$$ (ពិត)

7.ក.រកវ៉ិចទ័រទីតាំង $\overrightarrow{p}$ នៃចំណុច P

តាម $\vec{h} = \vec{a} + t\overrightarrow{p}$

$= (-6,-2) + t(2,5)$

$= (-6,-2) + (2t,5t)$

$= (-6+2t,-2+5t)$

ខ.រករយៈពេល t

ដោយ $\vec{h} = (-6+2t,-2+5t)$

$\Rightarrow \left|\vec{h}\right|^2 = (-6+2t)^2 + (-2+5t)^2$

តែ $p = h^2$ ខិតទៅរក 0

$\Rightarrow (-6+2t)^2 + (-2+5t^2) = 0$

$\Leftrightarrow 29t^2 + 64t + 52 = 0$

$\Leftrightarrow 29\left(t - \frac{32}{29}\right) + \frac{484}{29} = 0$

$\Rightarrow t = \frac{32}{29}$

ដូចនេះ $\boxed{t = 1,1 \text{ វិនាទី}}$

ឧ.បង្ហាញថា $\overrightarrow{CE}$ និង $\overrightarrow{CF}$ ជាអនុមន់នៃ $\vec{a}$ និង $\vec{b}$

ដោយ $\overrightarrow{E} = \dfrac{2\vec{b}+\vec{a}}{3}, \overrightarrow{BA} = \vec{a}, \overrightarrow{BC} = \vec{b}$

$\Rightarrow \overrightarrow{CE} = \dfrac{\vec{a}-3\vec{b}}{3}$

$\overrightarrow{F} = \dfrac{\vec{b}+3\vec{a}}{4}$

$\Rightarrow \overrightarrow{CF} = \dfrac{\vec{a}-3\vec{b}}{4}$

ដូចនេះ $\boxed{\overrightarrow{CE} = \dfrac{\vec{a}-3\vec{b}}{3}, \ \overrightarrow{CF} = \dfrac{\vec{a}-3\vec{b}}{4}}$

ខ.បង្ហាញថាបីចំណុច C, E និង F ស្ថិតលើបន្ទាត់តែ1

តាមសំនួរ ក: $\begin{cases} \overrightarrow{CE} = \dfrac{\vec{a}-3\vec{b}}{3} & (1) \\ \overrightarrow{CF} = \dfrac{\vec{a}-3\vec{b}}{4} & (2) \end{cases}$

យក $^{(1)}/_{(2)}$ គេបាន : $\dfrac{\overrightarrow{CE}}{\overrightarrow{CF}} = \dfrac{4}{3}$

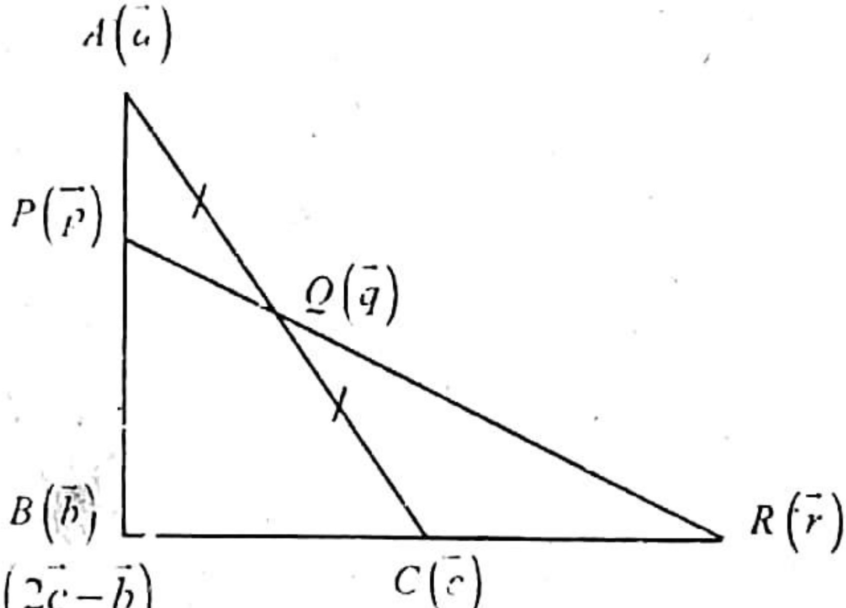
$\Leftrightarrow 4\overrightarrow{CF} = 3\overrightarrow{CE}$ នោះ៖

គេបាន $\overrightarrow{CE}$ និង $\overrightarrow{CF}$ ជាវ៉ិចទ័រតែ 1

ដូចនេះ $\boxed{C, E \text{ និង } F \text{ នៅលើបន្ទាត់តែ 1}}$

9.បង្ហាញថា $\vec{q} = \frac{3}{4}\vec{p} + \frac{1}{4}\vec{r}$

ដោយ $\vec{q}$ ជាចំនុចកណ្តាលនៃ AC



$$\Rightarrow \vec{q} = \frac{\vec{a}+\vec{c}}{2}$$

$$\vec{r} = 2\vec{c} - \vec{b}$$

$$\vec{p} = \frac{\vec{b}+2\vec{a}}{3}$$

គេបាន $\frac{3}{4}\vec{p} + \frac{1}{4}\vec{r}$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{4}\cdot\left(\frac{\vec{b}+2\vec{a}}{3}\right) + \frac{1}{4}\cdot\left(2\vec{c} - \vec{b}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4}\left(\vec{b} + 2\vec{a} + 2\vec{c} - \vec{b}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4}\left(2\vec{a} + 2\vec{c}\right) = \frac{\vec{a}+\vec{c}}{2} = \vec{q} \qquad (\text{ពិត})$$

ដូចនេះ $\boxed{\vec{q} = \frac{3}{4}\vec{p} + \frac{1}{4}\vec{r}}$

-បង្ហាញថាចំណុច P, Q និង R ស្ថិតលើបន្ទាត់តែ 1

តាមរូប គេឃើញថា $\overrightarrow{PR} = \frac{2}{3}\overrightarrow{PQ}$ នោះ $\overrightarrow{PR}$ និង $\overrightarrow{PQ}$ ជាវ៉ិចទ័រតែ1

ដូចនេះ $\boxed{P, Q \text{ និង } R \text{ ស្ថិតនៅលើបន្ទាត់តែ } 1}$

10.បង្ហាញថា $S^2 = |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 - (\vec{a}.\vec{b})$

ដោយក្រលាផ្ទៃប្រលេឡូក្រាម

$S = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta$ តែ $\sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta}$

នាំអោយ $S = |\vec{a}||\vec{b}|.\sqrt{1-\cos^2\theta} = \sqrt{|\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 - |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 \cos^2\theta}$

តែ $\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$

$\Leftrightarrow (\vec{a}.\vec{b})^2 = |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 \cos^2\theta$

$\Rightarrow S = \sqrt{|\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 - (\vec{a}.\vec{b})^2}$

$\Rightarrow S^2 = |\vec{a}|^2 . |\vec{b}|^2 - (\vec{a}.\vec{b})$

ដូចនេះ $\boxed{S^2 = |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 - (\vec{a}.\vec{b})}$

-បង្ហាញថា $S = |a_1b_2 - a_2b_1|$

តាម $S = \det(\vec{a}, \vec{b}) = \left\|\begin{matrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{matrix}\right\| = |a_1b_2 - a_2b_1|$

ដូចនេះ $\boxed{S = |a_1b_2 - a_2b_1|}$

11.រកមុំដែលកើតឡើងដោយវ៉ិចទ័រ $\vec{a}$ និង $\vec{b}$

យើងមាន វ៉ិចទ័រ $\begin{cases}\vec{a}+\vec{b}\\ 5\vec{a}-2\vec{b}\end{cases}$ កែងគ្នា

គេបាន $\left(\vec{a}+\vec{b}\right).\left(5\vec{a}-2\vec{b}\right)=0$

$\Leftrightarrow \vec{a}\left(5\vec{a}-2\vec{b}\right)+\vec{b}\left(5\vec{a}-2\vec{b}\right)=0$

$\Leftrightarrow 5\left|\vec{a}\right|^2-2\vec{a}.\vec{b}+5\vec{a}.\vec{b}-2\left|\vec{b}\right|^2=0$

$\Leftrightarrow 5\left|\vec{a}\right|^2+3\vec{a}.\vec{b}-2\left(2|a|\right)^2=0$

$\Leftrightarrow 5\left|\vec{a}\right|^2+3\vec{a}.\vec{b}-8\left|\vec{a}\right|^2=0$

$\Leftrightarrow -3\left|\vec{a}\right|^2+3\vec{a}.\vec{b}=0$

តែ $\vec{a}.\vec{b}=\left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|\cos\theta$

គេបាន $3\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\cos\theta=3\left|\vec{a}\right|^2$

$$\Rightarrow \cos\theta=\frac{3\left|\vec{a}\right|^2}{3\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|}=\frac{\left|\vec{a}\right|^2}{\left|\vec{a}\right|.2\left|\vec{a}\right|}$$

$$=\frac{\left|\vec{a}\right|^2}{\left|\vec{a}\right|^2 2}=\frac{1}{2}=\cos 60^\circ$$

ដូចនេះ $\boxed{\theta=60^\circ}$

12.បង្ហាញថាវ៉ិចទ័រទីតាំង $\overline{C}$ នៃចំណុច C ដែលមិនស្ថិតនៅក្នុង

ΔABC គឺ $\vec{C}=m\vec{a}+n\vec{b}$

ដោយ $\vec{C}=\vec{a}+t_o(\vec{b}-\vec{a})=\vec{a}+\vec{b}t_o-\vec{a}t_o$

$\Leftarrow (1-t_o)\vec{a}+\vec{b}.t_o$ (1)

តាង $m=1-t_o$ $t_o=n$

ដែល $m>0, n>0$, ហើយ $m+n>1$

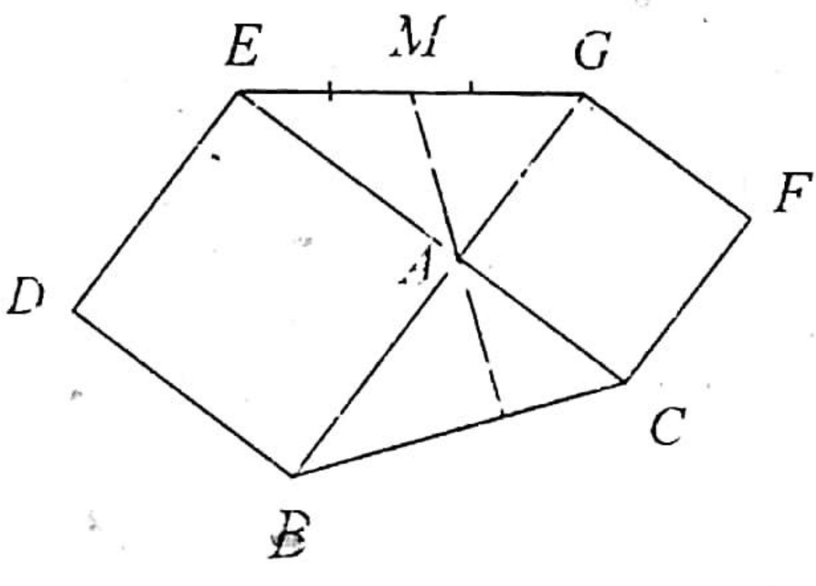
$\Rightarrow t_o=1-m, t_o=n$

តាម (1) $\Rightarrow \vec{C}=[1-(1-m)]\vec{a}+n\vec{b}$

$$\vec{C}=m\vec{a}+n\vec{b}$$

ដូចនេះ $\boxed{C=m\vec{a}+n\vec{b}}$

13. ស្រាយបញ្ជាក់ $MI\perp BC$ ដោយប្រើវ៉ិចទ័រ



ត្រូវស្រាយថា $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{BC} = 0$

គេបាន $\overrightarrow{MA}\,\overrightarrow{BC} = \left(\overrightarrow{EA} - \overrightarrow{EM}\right)\overrightarrow{BC}$

$$= \left(\overrightarrow{EA} - \frac{\overrightarrow{EG}}{2}\right)\overrightarrow{BC}$$

$$= \left(\overrightarrow{EA} - \frac{\overrightarrow{EG}}{2}\right).\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\right)$$

$$= \overrightarrow{EA}.\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\right) - \frac{\overrightarrow{EG}}{2}.\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\right)$$

$$= \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{EA}.\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{EG}\,\overrightarrow{BA}\right) - \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{EG}.\overrightarrow{AC}\right)$$

$$= O + \overrightarrow{EA}.\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{EG}.\overrightarrow{BA}\right) - \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{EG}.\overrightarrow{AC}\right)$$

$$= \overrightarrow{EA}.\overrightarrow{AC} - \frac{\overrightarrow{BA}}{2}\left(\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AG}\right) - \frac{\overrightarrow{AC}}{2}\left(\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AG}\right)$$

$$= \overrightarrow{EA}.\overrightarrow{AC} - \frac{\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{EA}}{2} - \frac{\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AG}}{2} - \frac{\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{EA}}{2} - \frac{\overrightarrow{AG}.\overrightarrow{AC}}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{EA}.\overrightarrow{AC}\right) - 0 - \frac{\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AG}}{2} - 0$$

$$= \frac{1}{2}\left[\left(\overrightarrow{EA}.\overrightarrow{AC}\right) - \left(\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AG}\right)\right]$$

[illegible]

[illegible]

$\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AG}$ ស្ថិតលើបន្ទាត់តែ 1

$\Rightarrow \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AG} = \left|\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AG}\right|$ (2)

តាម (1) និង (2)៖

$$\Rightarrow \begin{cases} EC = \left|\overrightarrow{EA}.\overrightarrow{AC}\right| \\ BG = \left|\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AG}\right| \end{cases}$$

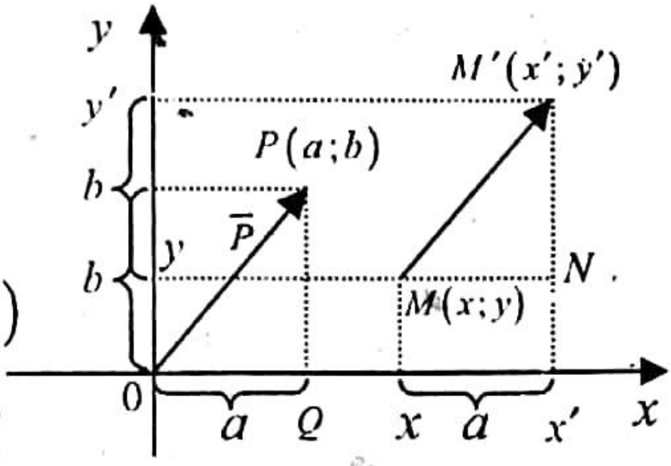
តែ $BG = EC$

$\Rightarrow \frac{1}{2}(EC - EC) = 0$ ពិត

ដូចនេះ $\boxed{\overrightarrow{MA} \perp \overrightarrow{BC}}$

មេរៀនទី១ បំលែងកិល

មេរៀនសង្ខេប



រូបភាពនៃចំណុច $M(x;y)$ តាមបំលែងកិលនៃវ៉ិចទ័រ $\vec{P}=(a;b)$ គឺចំណុច $M'(x+a;y+b)$ គេកំណត់ដោយ

$M(x;y)\xrightarrow{t_{\vec{P}}} M'(x+a;y+b)$ ។

ចំពោះបំលែងកិល

- រូបភាពនៃអង្កត់មួយ ជាអង្កត់មួយទៀតដែលអង្កត់ទាំងពីរស្របគ្នា និងមានប្រវែងស្មើគ្នា ។

- រូបភាពនៃបន្ទាត់មួយ ជាបន្ទាត់មួយទៀតដែលបន្ទាត់ពីរនេះស្របគ្នា ។

- រូបភាពនៃមុំមួយ ជាមុំមួយទៀត ហើយមុំទាំងពីរមានរង្វាស់ស្មើគ្នា ។

- រូបភាពនៃរូប F មួយ ជារូប F មួយទៀត ដែលប៉ុនគ្នានឹងរូប F ។

លំហាត់

1. *រករូបភាពនៃចំណុចខាងក្រោម តាមបំលែងកិលនៃវ៉ិចទ័រ* $\vec{P}=(3;5)$

   ក) $(6;6)$ ខ) $(-1;3)$

   គ) $(0;0)$ ឃ) $(-3;5)$

2. *កំណត់កូអរដោនេនៃរូបភាពរបស់ចំណុច* $(-1;2)$ *តាមបំលែងកិលខាងក្រោម ៖*

   ក) បំលែងកិលតាម $\vec{a}=(3;0)$

   ខ) បំលែងកិលតាម $\vec{b}=(0;-3)$

   គ) បំលែងកិលតាម $\vec{c}=(4;-2)$

   ឃ) បំលែងកិលតាម $\vec{d}=(1;-5)$

   ង) បំលែងកិលតាម $\vec{e}=(-2;-4)$

3. *រកកូអរដោនេនៃវ៉ិចទ័រ* $\vec{P}$ *កំណត់ដោយបំលែងកិលខាងក្រោម ៖*

   ក) $(5;3)\xrightarrow{t_{\vec{P}}}(8;7)$

   ខ) $(1;1)\xrightarrow{t_{\vec{P}}}(9;11)$

   គ) $(-5;-4)\xrightarrow{t_{\vec{P}}}(4;-1)$

   ឃ) $(-2;-7)\xrightarrow{t_{\vec{P}}}(-8;-5)$

4. បើរូបភាពនៃចំណុច $(-1,5)$ តាមបំលែងកិលគឺ $(2,1)$ រកកូអរដោនេនៃរូបភាពរបស់ចំណុចនីមួយៗតាមបំលែងកិលដូចគ្នា៖

ក) $(-1;2)$ ខ) $(1;-2)$

គ) $(3,4)$ ឃ) $(4;3)$ ង) $(-6;-2)$

5 គេមានបីចំណុច $A(2,1)$; $B(1,6)$ និង $C(3,5)$

ក) រករូបភាពនៃត្រីកោណ ABC តាមបំលែងកិល

$(x;y)\xrightarrow{t}(x+4;y+2)$ ។

ខ) គណនាប្រវែង $AB, AC, BC, A'B', B'C'$ និង $A'C'$ ។

6. ករូបភាពបន្ទាត់ដែលមានសមីការ $2x+y=5$ តាមបំលែងកិល $(x;y)\xrightarrow{t}(x-1;y+3)$ ។

7. រកកំពូលនៃរូបភាពរបស់រូបធរណីមាត្រតាមបំលែងកិលខាងក្រោម ព្រមទាំងសង់ក្រាបរបស់វា ។

ក) ΔEFG ដែលមានកំពូល $E(-5;-2)$; $F(-2,3)$ និង $G(2;-3)$ បំលែងកិលតាម $\vec{u}=(6,3)$ ។

ខ) ΔPQR ដែលមានកំពូល $P(0,0)$; $Q(-3,-4)$ និង $R(1;3)$ បំលែងកិលតាម $\vec{v}=(-6;3)$ ។

គ) ការេ $SQAR$ ដែលមានកំពូល $S(2;1)$; $Q(4;3)$; $A(2;5)$ និង $R(0;3)$ បំលែងកិលតាម $\vec{w}=(-1;3)$ ។

ឃ) ចតុកោណកែង $WXYZ$ ដែលមានកំពូល $W(-4;1)$; $X(2;4)$; $Y(3;2)$ និង $Z(-3;-1)$ បំលែងកិលតាម $\vec{p}=(-1;4)$ ។

ង) ប្រលេឡូក្រាម $FGHJ$ ដែលមានកំពូល $F(7;5)$; $G(5;2)$; $H(7;0)$ និង $J(9;3)$ បំលែងកិលតាម $\vec{a}=(-4;-2)$ ។

ច) បញ្ចកោណ $ABCDE$ ដែលមានកំពូល $A(-1;-2)$; $B(0;-1)$; $C(1;1)$; $D(-1;3)$ និង $E(-3;1)$ បំលែងកិលតាម $(-2;1)$ ។

8. ΔMNP មានកំពូល $M(4;2)$; $N(-8;0)$ និង $P(6;7)$ ។ គេធ្វើបំលែងកិលបាន M' ដែលមានកូអរដោនេ $(-2;4)$:

ក) បកស្រាយបំលែងកិល ដោយប្រើគូលំដាប់ ។

ខ) រកកូអរដោនេនៃ N' និង P' ។

9. កូអរដោនេនៃកំពូលរបស់ប្រលេឡូក្រាម $QRST$ គឺ $Q(-10;2)$

$;R(-4;0);S(6;2)$ និង $T(0;4)$ ។ S' មាន

កូអរដោនេ $(8;-3)$ ។

ក) បកស្រាយបំលែងកិល ដោយប្រើគូលំដាប់ ។

ខ) រកកូអរដោនេនៃ $Q';R'$ និង T' ។

10. ឆកោណ $ABCDEF$ មានកំពូល $A(0;2);B(-5;0)$ $;C(-4;-4);D(0;-4);E(6;-2)$ និង $F(3;1)$ ។ គេធ្វើបំលែងកិល E បានកូអរដោនេ $(8;-5)$ ។

ក) បកស្រាយបំលែងកិល ដោយប្រើគូលំដាប់ ។

ខ) រកកូអរដោនេនៃ $A';B';C';D'$ និង F' ។

ដំណោះស្រាយ

1. រករូបភាពនៃចំណុចខាងក្រោម តាមបំលែងកិលនៃវ៉ិចទ័រ $\vec{P}=(3;5)$

ក) $(6;6)$

តាមរូបមន្ត $M(x;y)\xrightarrow{t_{\vec{P}}}M'(x+a;y+b)$

គេបាន $M(6;6)\xrightarrow{t_{\vec{P}}}M'(6+3;6+5)$

ដូចនេះ $\boxed{M(6;6)\xrightarrow{t_{\vec{P}}}M'(9;11)\text{ រឺ }M'(9;11)}$

ខ) $(-1:3)$

$$\Rightarrow M(-1,3)\xrightarrow{t_{\vec{p}}} M'(-1+3,3+5)$$

ដូចនេះ $\boxed{M'(2,8)}$

គ) $(0,0)$

$$\Rightarrow M(0,0)\xrightarrow{t_{\vec{p}}} M'(0+3,0+5)$$

ដូចនេះ $\boxed{M'(3,5)}$

ឃ) $(-3,5)$

$$\Rightarrow M(-3,5)\xrightarrow{t_{\vec{p}}} M'(-3+3,5+5)$$

ដូចនេះ $\boxed{M'(0,10)}$

2. រកកូអរដោនេនៃចំនុចរូបភាពរបស់ចំនុច $(-1,2)$

ក) បំលែងកិលតាម $\vec{a}=(3,0)$

តាម $$M(x;y)\xrightarrow{t_{\vec{u}}} M'(x+a,y+b)$$

$$M(-1;2)\xrightarrow{t_{\vec{a}}} M'(2,2)$$

ដូចនេះ $\boxed{M'(2,2)}$

ខ) បំលែងកិលតាម $\vec{b}=(0;-3)$

$$\Rightarrow M(-1,2)\xrightarrow{t_{\vec{b}}} M'(-1;-1)$$

ដូចនេះ $\boxed{M'(-1,-1)}$

សំរាយដូចគ្នាចំពោះ គ) ; ឃ) ;ង)

ដែល ក) $(3;0)$; ឃ) $(0;-3)$; ង) $(-3;-2)$

3. រកកូអរដោនេវ៉ិចទ័រ $\overline{P}$

តាម $M(x;y)\xrightarrow{t_{\overline{P}}}M'(x+a;y+b)$

ក) $(5,3)\xrightarrow{t_{\overline{P}}}(8;7)$

គេបាន $\begin{cases}x+a=8\\y+b=7\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=8-x\\b=7-y\end{cases}$

$\Rightarrow\begin{cases}a=3\\b=4\end{cases}$

ដូចនេះ $\boxed{\overline{P}=(3,4)}$

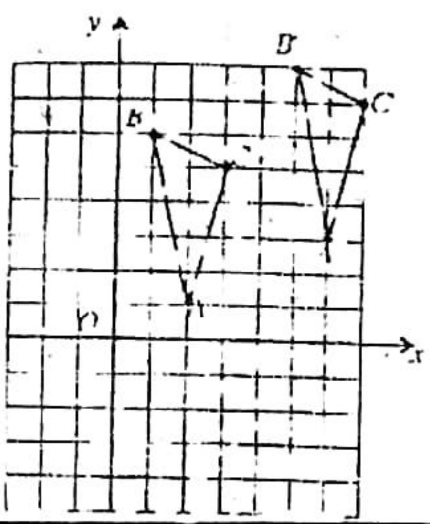
លំហាត់ដូចគ្នាដែរ ខ) ; គ) ; ឃ)

ខ) $\overline{P}=(8,10)$; គ) $\overline{P}=(9,3)$; ឃ) $\overline{P}=(-6,2)$

4. រកកូអរដោនេរូបភាពរបស់ចំនុច (តាមលំនាំលំហាត់ $1\to3$)

ក) $(2;-2)$ ខ) $(4,-6)$ គ) $(6;0)$ ឃ) $(7;-1)$ ង) $(-3,6)$

5. ក) រករូបភាពនៃត្រីកោណ ABC



តាមបំលែងកិល

$(x;y)\xrightarrow{t_{\overline{P}}}(x+4;y+2)$

ខ) គណនាប្រវែង

គេអោយ $A(2;1)$; $B(1,6)$, $C(3;5)$

$\overline{AB}(1,5)$; $\overline{AC}(1,4)$, $\overline{BC}(2;-1)$

$$\Rightarrow AB = \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{1+25} = \sqrt{26}$$

$$AC = \left|\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{1+16} = \sqrt{17}$$

$$BC = \left|\overrightarrow{BC}\right| = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$$

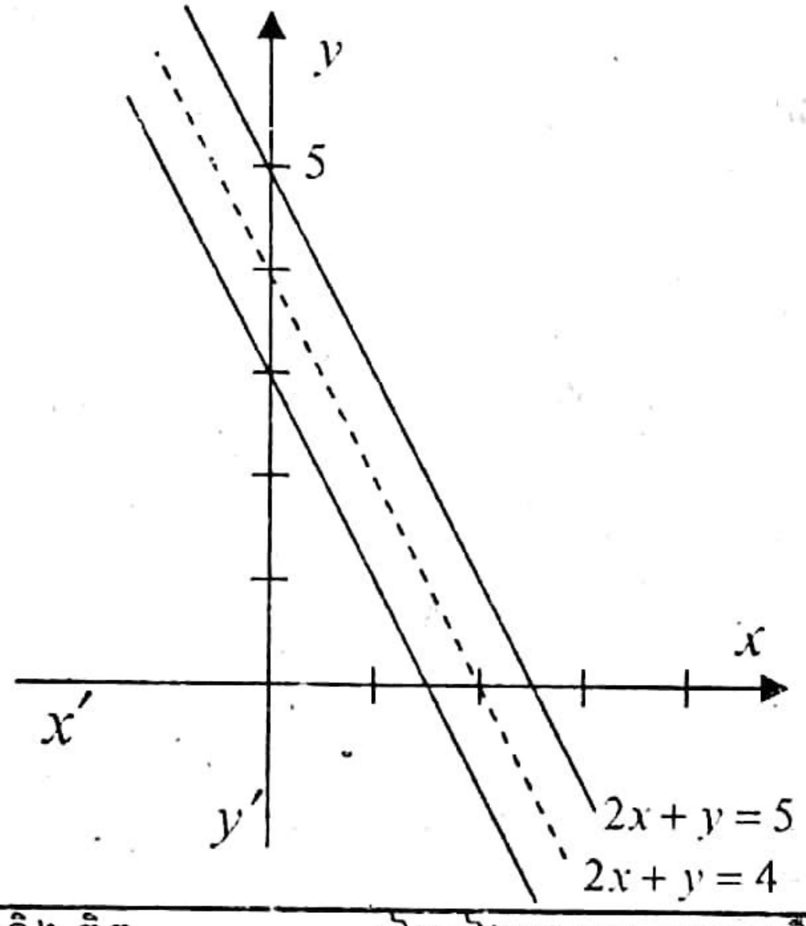
តាមរូបភាពនៃត្រីកោណ $A'B'C'$

គេបាន $A'(6;3)$; $B'(5;8);C'(7;7)$

ដូចនេះ $\boxed{A'B' = \sqrt{26}\,; A'C' = \sqrt{17}\,; B'C' = \sqrt{5}}$

6. រករូបភាពនៃបន្ទាត់ដែលមានសមីការ $2x + y = 5$ តាម

បំលែងកិល $(x;y) \xrightarrow{t_{\vec{v}}} (x-1;y+3)$



ដូចនេះ $\boxed{\text{រូបភាពបន្ទាត់គឺ } 2x+y=4}$

7. ខ) $P=(0;0)\xrightarrow{t_{\vec{u}}}P'(-6;3)$

$Q=(-3;-4)\xrightarrow{t_{\vec{u}}}Q'(-9;-1)$

$R=(1;3)\xrightarrow{t_{\vec{u}}}R'(-5;6)$

ង) $F=(7;5)\xrightarrow{t_{\vec{u}}}F'(3;3)$

$G=(5;2)\xrightarrow{t_{\vec{u}}}G'(1;0)$

$H=(7;0)\xrightarrow{t_{\vec{u}}}H'(3;-2)$

$J=(9;3)\xrightarrow{t_{\vec{u}}}J'(5;1)$

ទី(8); ទី(9); និងទី(10) ធ្វើដូចលំហាត់ទី(7) ដែរ ។

មេរៀនទី២ បំលែងឆ្លុះ

មេរៀនសង្ខេប

បំលែងឆ្លុះចំណុច

បំលែងឆ្លុះចំណុច $M \xrightarrow{S} M'$ គេបាន

- $(x;y) \xrightarrow{S_x} (x;-y)$ ធៀបនឹងអ័ក្សអរដោនេ ។
- $(x;y) \xrightarrow{S_y} (-x;y)$ ធៀបនឹងអ័ក្សអរដោនេ ។

បំលែងឆ្លុះធៀបនឹងបន្ទាត់

- រូបភាពនៃអង្កត់មួយជាអង្កត់មួយទៀតដែលអង្កត់ទាំងពីរមានប្រវែងស្មើគ្នាហើយឆ្លុះគ្នាធៀប ហើយនឹងអ័ក្សបំលែងឆ្លុះ ។
- រូបភាពនៃរូប F មួយជារូប F មួយទៀត ដែលប៉ុនគ្នានឹងរូប F ឆ្លុះគ្នាធៀបនឹងអ័ក្សបំលែងឆ្លុះ ។

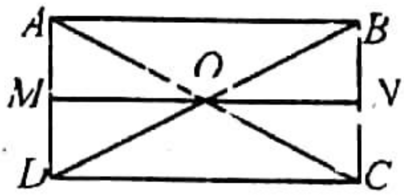
លំហាត់

1. កំណត់រូបភាពនៃចំណុចខាងក្រោម តាមបំលែងឆ្លុះធៀបនឹងអ័ក្សអាប់ស៊ីស ៖

ក) $(7,4)$ ខ) $(9,-2)$ គ) $(0,6)$ ង) $(-5,0)$

ច) $(-1;-1)$ ឆ) $(-3,6)$ ជ) $(1,8)$ ឈ) $(0,0)$

2. គេឲ្យរូបខាងស្ដាំ។ ជ្រើសរើសចំលើយត្រឹមត្រូវដោយគូសសញ្ញា ✓ ក្នុងប្រអប់ចំពោះបំលែងឆ្លុះធៀបនឹង MN ។



ក) □ $A \to C$ ខ) □ $D \to B$ គ) □ $A \to D$

3. រករូបភាពនៃចំណុចខាងក្រោម តាមបំលែងឆ្លុះធៀបនឹងអ័ក្សអរដោនេ៖

ក) $(5;2)$ ខ) $(-4;2)$ គ) $(3,4)$

ឃ) $(6,-8)$ ង) $(2;-1)$ ច) $(11;7)$

4. រករូបភាពនៃចំណុច $P(7,2)$ តាមបំលែងឆ្លុះធៀបនឹងបន្ទាត់ខាងក្រោម៖

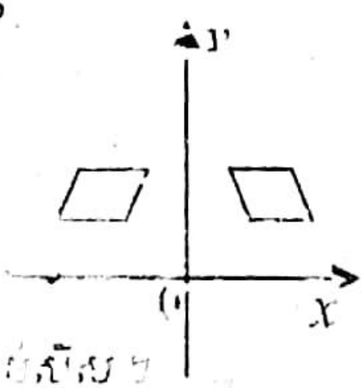
ក) $x=4$ ខ) $y=4$ គ) $y=x$ ឃ) $x+y=0$ ។

5. គេឲ្យ ΔABC ដែល $A(-1,-1)$, $B(-1,6)$ និង $C(5,6)$ ។

ក) រករូបភាពនៃ ΔABC តាមបំលែងឆ្លុះធៀបនឹងអ័ក្សអាប់ស៊ីស ។

ខ) តើត្រីកោណទាំងពីរនេះប៉ុនគ្នាឬទេ?

6. រកបន្ទាត់បំលែងឆ្លុះចំពោះរូបខាងស្ដាំ



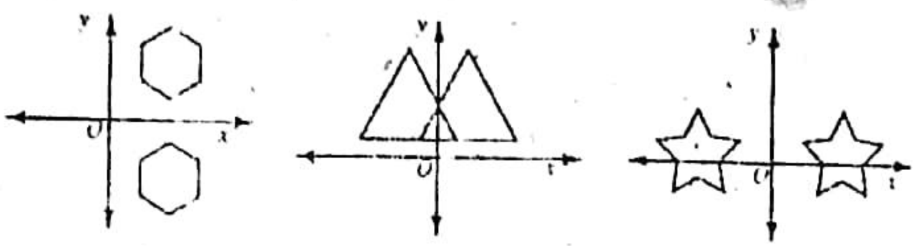
7. គេមាន ΔABC ដែលមានកំពូល $A(-2,3)$, $B(5,1)$ និង $C(4,5)$ ។

ក) ធ្វើបំលែងឆ្លុះ ΔABC ធៀបអ័ក្សអាប់ស៊ីស ។

ខ) ធ្វើបំលែងឆ្លុះ ΔABC ធៀបអ័ក្សអរដោនេ ។

គ) តើ ΔABC ប៉ុនទៅនឹងបំលែងឆ្លុះរបស់វាឬទេ ?

8. រកបន្ទាត់បំលែងឆ្លុះចំពោះរូបខាងក្រោម ៖



9. គូសរូបនីមួយៗ រួចគូសរូបភាពបំលែងឆ្លុះរបស់វាធៀបនឹងអ័ក្សអាប់ស៊ីស និងអ័ក្សអរដោនេ ។

ក) ΔMNP មានកំពូល $M(-8;4); N(-3;8)$ និង $P(-2;2)$ ។

ខ) ការេ $WXYZ$ មានកំពូល $W(-3;2); X(1;-2); Y(-3;-6)$ និង $Z(-7;-2)$ ។

គ) ចតុកោណព្នាយ $PQRS$ មានកំពូល $P(4;-2)$ $;Q(8;-2); R(8;5)$ និង $S(2;5)$ ។

10. មានចតុកោណកែង $RECT$ ដែលមានកំពូល $R(-3;3)$ $;E(3;3); C(3;-3)$ និង $T(-3;-3)$ ។

ក) ធ្វើបំលែងឆ្លុះ $RECT$ ធៀបនឹងអ័ក្សអាប់ស៊ីស ។

ខ) ធ្វើបំលែងឆ្លុះ $RECT$ ធៀបនឹងអ័ក្សអរដោនេ ។

គ) តើគេសង្កេតឃើញរូបទាំងបីយ៉ាងដូចម្តេច ?

11. មាន $A(2;6)$ និង $B(5;5)$ ។

ក) ចូរធ្វើបំលែងធ្លុះ A និង B ធៀបនឹងអ័ក្សអរដោនេ ។

ខ) តើចតុកោណ $A'ABB'$ ជាចតុកោណអ្វី ?

ដំណោះស្រាយ

1. កំណត់រូបភាពនៃចំនុច តាមបំលែងធ្លុះធៀបនឹងអ័ក្សអាប់ស៊ីស

តាមរូបមន្ត បំលែងធ្លុះចំនុច $M \xrightarrow{S} M'$

គេបាន $(x;y) \xrightarrow{S_x} (x;-y)$ ធៀបនឹងអ័ក្សអាប់ស៊ីស

ដូចនេះ ក) $(7;4) \to (7;-4)$

ខ) $(9;-2) \to (9;2)$

គ) $(0;6) \to (0;-6)$

ឃ) $(-5;0) \to (-5;0)$

ង) $(-1;-1) \to (-1;1)$

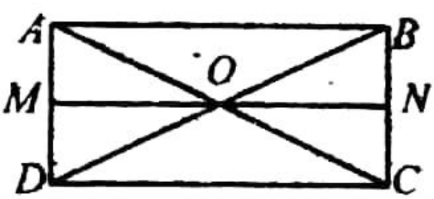
ច) $(-3;6) \to (-3;-6)$

ឆ) $(1;8) \to (1;-8)$

ជ) $(0;0) \to (0;0)$

2. ជ្រើសរើសចំលើយត្រឹមត្រូវ

គឺ គ) ☑ $A \to D$



3. រករូបភាពនៃចំនុច តាមបំលែងឆ្លុះធៀប និងអ័ក្សអរដោនេ

តាម $(x;y)\xrightarrow{S_y}(-x;y)$

ក) $(5;2)\rightarrow(-5;2)$

ខ) $(-4;2)\rightarrow(4;2)$

គ) $(3;4)\rightarrow(-3;4)$

ឃ) $(6;-8)\rightarrow(-6;-8)$

ង) $(2;-1)\rightarrow(-2;-1)$

ច) $(11;7)\rightarrow(-11;7)$

5. ក) រករូបភាពនៃ ΔABC តាមបំលែងឆ្លុះធៀបនឹងអ័ក្សអាប់ស៊ីស

$+A(-1;-1)\rightarrow A_1(-1;1)$

$+B(-1;6)\rightarrow B_1(-1;-6)$

$+C(5;6)\rightarrow C_1(5;-6)$

ខ) ត្រីកោណទាំងពីរនេះប៉ុនគ្នា

គឺ $\Delta ABC\equiv\Delta A_1B_1C_1$ (ព្រោះវាជារូបភាពនៃបំលែងកិល)

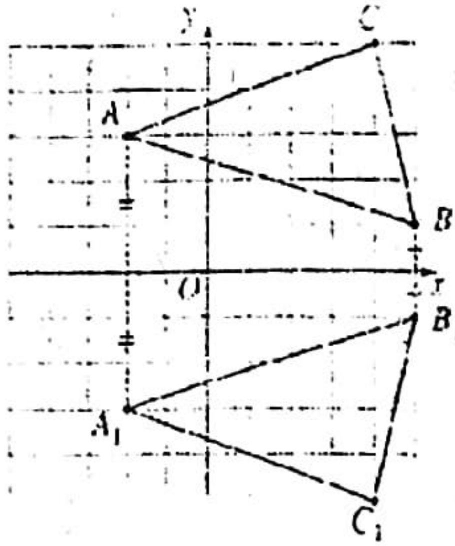
6. រកបន្ទាត់បំលែងឆ្លុះបំពោះរូបខាងស្តាំគឺ អ័ក្សអរដោនេជាអ័ក្សឆ្លុះ ។

7. ក) ត្រីកោណ $A_1B_1C_1$ ជារូបភាពនៃត្រីកោណ ABC ដែល

$A_1(-2;-3);B_1(5;-1)$ និង $C_1(4;-5)$ ឆ្លុះគ្នាធៀប

នឹងអ័ក្ស x ។

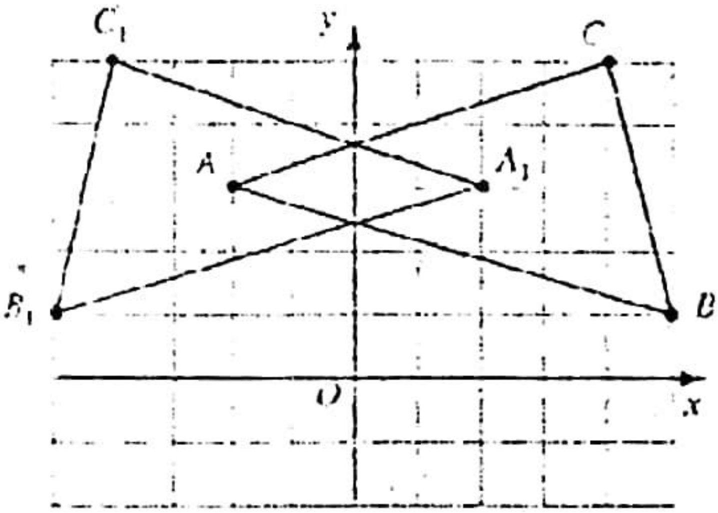
$+ \ \overrightarrow{AB}(7;-2) \Rightarrow AB = \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{49+4} = \sqrt{53}$



$AB = A_1B_1 = \sqrt{53}$; $BC = B_1C_1 = \sqrt{15}$; $CA = C_1A_1 = 2\sqrt{10}$

នាំឲ្យ $\boxed{\Delta ABC \cong \Delta A_1B_1C_1}$

ខ) ត្រីកោណ $A_1B_1C_1$ ជារូបភាពនៃត្រីកោណ ABC ដែល $A_1(2;3)$; $B_1(-5;1)$ និង $C_1(-4;5)$ ធៀបនឹងអ័ក្ស y ។



7. គ) ត្រីកោណ ប៉ុនទៅនឹងរូបភាពរបស់វាបានមានន័យ

ថា $\Delta ABC \cong \Delta A_1B_1C_1$ ។

8. ក) អ័ក្សអាប់ស៊ីស ជាអ័ក្សបំលែងធ្លុះ ។

ខ) អ័ក្សអរដោនេ ជាអ័ក្សបំលែងធ្លុះ ។

9. ក) ធៀបអ័ក្សអាប់ស៊ីស $M'(-8;-4);N'(-3;-8)$ $;P'(-2;-2)$ ។

ខ) ធៀបអ័ក្សអរដោនេ $M''(8;4);N''(3;8)\ ;P''(2;2)$ ។

10. ក) $F'(-3;-3);E'(3;-3)\ ,C'(3;3)\ ;T'(-3;3)$

ខ) $F''(3;3);E''(-3;3)\ ,C''(-3;-3)\ ;T''(3;-3)$

គ) រូបដើម និងរូបភាពរបស់វាប៉ុនគ្នា ។

11. ក) $A'(-2;6)\ ;B'(-5;5)$

ខ) ជាចតុកោណព្នាយសមបាត ។

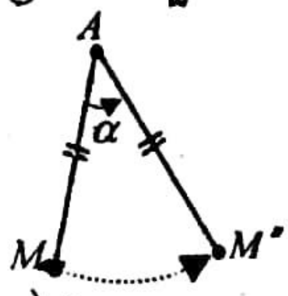
មេរៀនទី៣ បំលែងចល

មេរៀនសង្ខេប

បំលែងវិល

រូបភាពនៃចំណុច M តាមបំលែងវិលមុំ α ជុំវិញផ្ចិត A គឺចំនុច M' ដែល

$$\begin{cases} AM = AM' \\ \angle MAM' = |\alpha| \text{ មានពីរករណី } \begin{cases} \alpha>0 \text{ មានទិសដៅច្រាសទ្រនិចនាឡិកា} \\ \alpha<0 \text{ មានទិសដៅដូចទ្រនិចនាឡិកា} \end{cases} \\ \text{ធ្នូ } MM' \text{ ជាទិសដៅនិងរូបភាពនៃ } A \text{ គឺ } A \text{ ។} \end{cases}$$



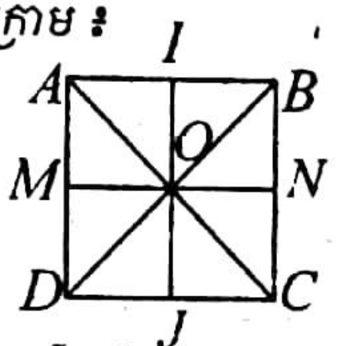
ចំពោះបំលែងវិល

- *រូបភាពកូអរដោនេនៃចំនុចនីមួយៗតាមបំលែងវិលផ្ចិត O មុំ $\alpha = 90°$ គឺ $P(x;y) \to P'(-y;x)$ ។*
- *រូបភាពកូអរដោនេនៃចំនុចនីមួយៗតាមបំលែងវិលផ្ចិត O មុំ $\theta = 180°$ គឺ $P(x;y) \to P'(-x;-y)$ ។*
- *រូបភាពកូអរដោនេនៃចំនុចនីមួយៗតាមបំលែងវិលផ្ចិត O មុំ $\theta = -90°$ ឬ $\theta = 270°$ គឺ $P(x;y) \to P'(y;-x)$ ។*
- *រូបភាពនៃអង្កត់មួយជាអង្កត់មួយទៀត ដែលអង្កត់ទាំងពីរមានប្រវែងស្មើគ្នា ។*

• រូបភាពនៃរូប F មួយ ជារូប F មួយទៀត ដែលប៉ុនគ្នានឹងរូប F ។

លំហាត់

1. គេមានបំលែងវិលផ្ចិត O ដូចរូបខាងស្តាំ ។ គេធ្វើបំលែងវិលពី $1 \to N$ ។ ចូរជ្រើសរើសចំលើយត្រឹមត្រូវ ដោយគ្រាន់តែគូសសញ្ញា -✓- ក្នុងប្រអប់នៃបំលែងខាងក្រោម ៖



ក) $A \to B$ ☐

ខ) $N \to D$ ☐

គ) $A \to B$ ☐

2. រករូបភាពនៃចំណុច $P(5;7)$ ដោយបំលែងវិលផ្ចិត $O(0;0)$ និងមុំបំលែងវិលខាងក្រោម ៖

ក) $90°$ ខ) $180°$ គ) $270°$ ។

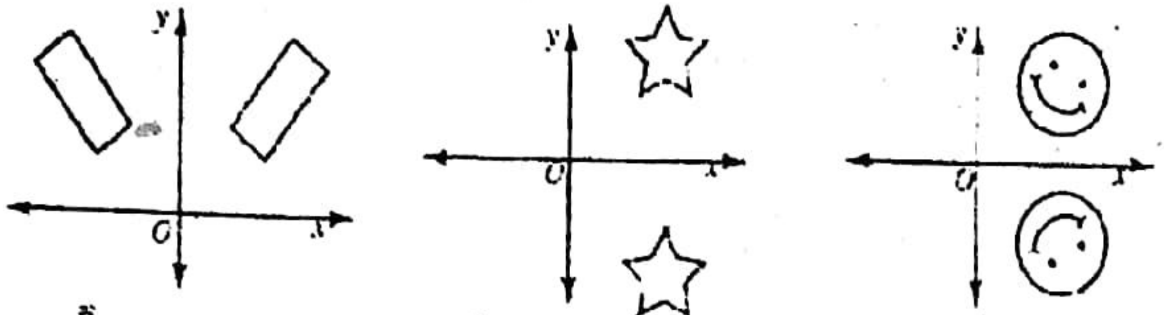
3. រករូបភាពនៃ ΔABC ដែល $A(2;7)$; $B(3;4)$ និង $C(7;5)$ តាមបំលែងវិលផ្ចិត $O(0;0)$ មុំ $\alpha = 90°$ ។

4. រករូបភាពនៃបន្ទាត់ ដែលមានសមីការ $y = x + 2$ តាមបំលែងវិលមុំ $\alpha = -90°$ ហើយមានផ្ចិតបំលែងវិលខាងក្រោម ៖

ក) ចំណុច $O(0;0)$ ខ) ចំណុច $P(0;2)$

គ) ចំណុច $Q(-2;0)$ ។

5. កំណត់គូនីមួយៗនៃរូបភាពដែលឲ្យបំលែងវិលមានផ្ចិតខាងក្រោមគ្រាន់តែសរសេរ "បំលែងវិល" និង "មិនបំលែងវិល"



ក .... ខ .... គ. ....

6. មាន ΔXYZ មានកំពូល $X(-6;-9)$; $Y(-1;-3)$ និង $Z(-8;-5)$ ។

ក) រករូបភាព $\Delta X'Y'Z'$ នៃ ΔXYZ តាមបំលែងវិលមុំ $90°$ ។

ខ) រករូបភាព $\Delta X''Y''Z''$ នៃ $\Delta X'Y'Z'$ តាមបំលែងវិលមុំ $180°$ ។

ដំណោះស្រាយ

1. ចំលើយត្រឹមត្រូវគឺ

ខ) $N \to D$ ☑

2. រករូបភាពនៃចំនុច $P(5;7)$

ដោយ បំលែងវិលផ្ចិត $O(0;0)$

ក) $90°$

តាម $P(x;y) \to P'(-y;x) \Rightarrow P(5;7) \to P'(-7;5)$

ខ) $180°$

តាម $P(x;y) \to P'(-x;-y) \Rightarrow P(5;7) \to P'(-5;-7)$

គ) 270°

តាម $P(x;y) \to P'(y;-x) \Rightarrow P(5;7) \to P'(7;-5)$

3. រករូបភាពនៃ ΔABC

តាម $P(x;y) \to P'(-y;x)$

គេបាន $A(2;7) \to A'(-7;2)$

$B(3;4) \to B'(-4;3)$

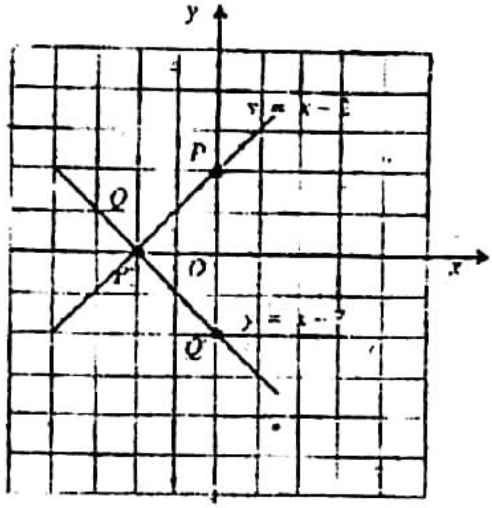
$C(7;5) \to C'(-5;7)$

4. ក) $O'(0;0)$

ខ) $P'(-2;0)$

គ) $Q'(0;-2)$

រូបភាពនៃបន្ទាត់ $y=-x-2$ ។

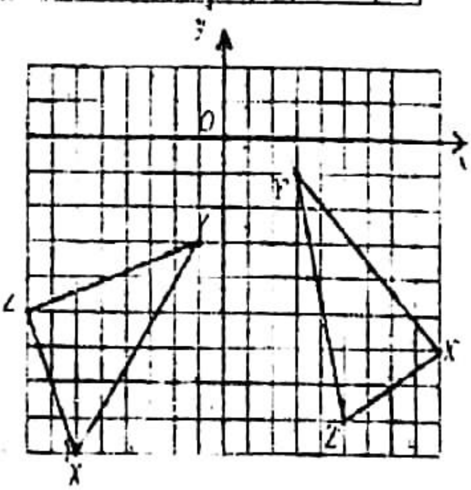


5. ក) និង គ) បំលែងរឹល ។

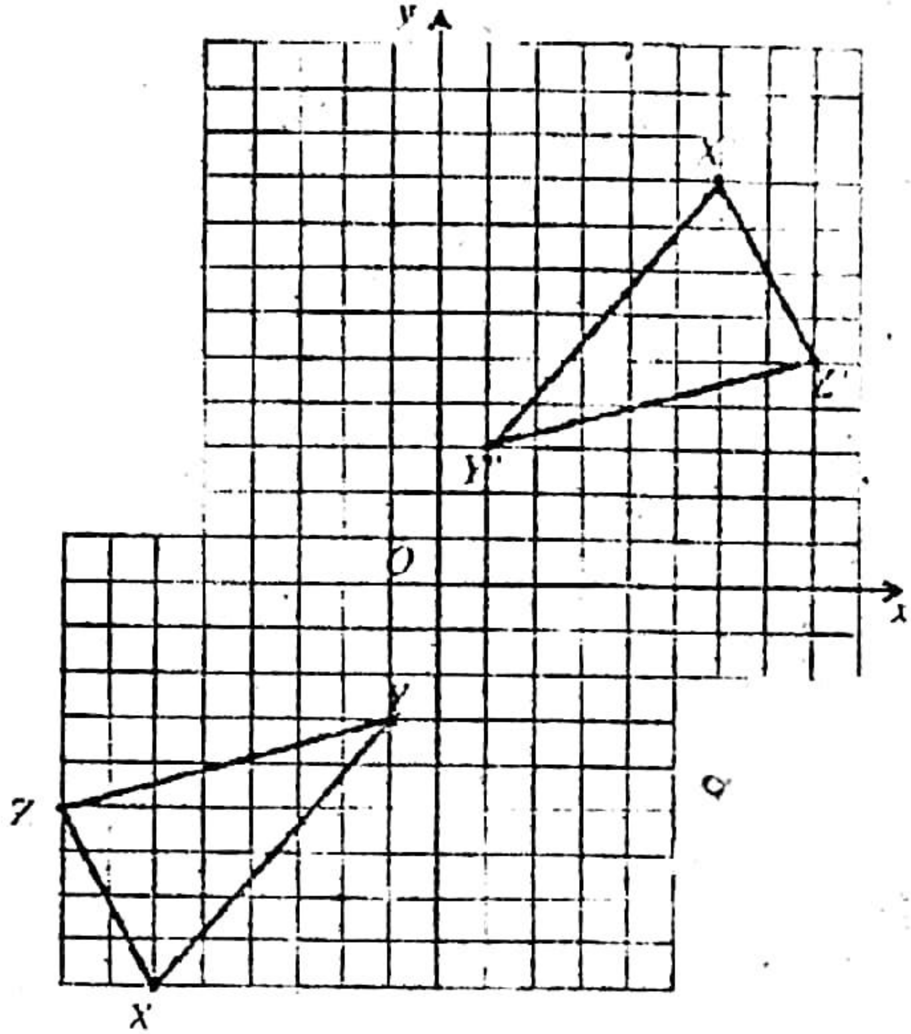
ខ) មិនមែនបំលែងរឹលទេ ។

6. ក)

$X'(9;-6)$; $Y'(3;-1)$; $Z'(5;-8)$



ខ) $X''(6;9)$; $Y''(1;3)$; $Z''(8;5)$

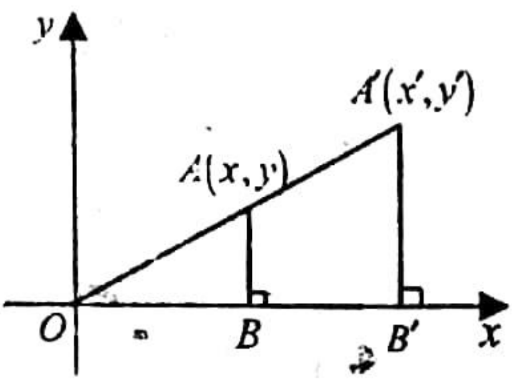


មេរៀនទី៤ បំលែងចាំង

មេរៀនសង្ខេប

បំលែងចាំង

បំលែងចាំងចំណុច $A(x;y)$ ផ្ចិត $O(0;0)$ ផលធៀប $c\neq 0$ កំណត់ដោយ $(x;y)\xrightarrow{h}(cx;cy)$ ។



ចំពោះបំលែងចាំង

- បើ $c>0$ រូបភាព និងរូបពិតនៅតែម្ខាងនៃផ្ចិតបំលែងចាំង ។
- បើ $c<0$ រូបភាព និងរូបពិតនៅម្ខាងម្នាក់នៃផ្ចិតបំលែងចាំង ។
- រូបភាពនៃមុំមួយ ជាមុំមួយទៀត ដែលមុំទាំងពីរប៉ុនគ្នា ។
- រូបភាពនៃរូប F មួយ ជារូប F មួយទៀត ដែលដូចគ្នានឹងរូប F ។

លំហាត់

1. កំណត់រូបភាពនៃចំណុចខាងក្រោមតាមបំលែងចាំងផ្ចិត $O(0;0)$ ផលធៀប $c=3$

   ក) $(-1;3)$ ខ) $(-2;-5)$

គ) $\left(-1;\frac{1}{3}\right)$ ឃ) $(p;q)$ ។

2. គេមានបំលែងចាំង $(x;y)\rightarrow\left(\frac{1}{2}x;\frac{1}{2}y\right)$។ កំណត់រូបភាពនៃចំណុចខាងក្រោម៖

ក) $(2;6)$, ខ) $(-3;2)$, គ) $(-4;-8)$, ឃ) $(p;q)$ ។

3. គេមានត្រីកោណ LMN ដែល $L(1;1)$; $M(6;1)$ និង $N(6;5)$ ។ រករូបភាពនៃ ΔLMN តាមបំលែងចាំងផ្ចិត $O(0;0)$ ផលធៀប -2 ។

4. រករូបភាពនៃត្រីកោណ ABC ដែល $A(-2;-1)$, $B(-2;2)$ និង $C(4;-1)$ តាមបំលែងចាំងផ្ចិត $O(0;0)$ ផលធៀប $c=3$ ហើយបង្ហាញថាផលធៀបផ្ទៃក្រលានៃរូបភាពនិងត្រីកោណ ABC ស្មើនឹង 9 ។

5. រកកូអរដោនេនៃរូបភាពរបស់ $(-3;1)$ តាមបំលែងចាំង $c=2$ ។

6. តាមបំលែងចាំងផ្ចិត O ផលធៀប c នៃចំណុច $(9;3)$ មានរូបភាព $(6;2)$ ។ រកតំលៃចំនួនថេរ c ។

7. រកកូអរដោនេនៃរូបភាពរបស់ $(-8;-6)$ តាមបំលែងចាំងផ្ចិត O ផលធៀប c នីមួយៗខាងក្រោម៖

ក) $c=2$ ខ) $c=\frac{1}{2}$ គ) $c=1$ ឃ) $c=-3$ ។

8. បើរូបភាពនៃ $(4;6)$ តាមបំលែងចាំងគឺ $(6;9)$ ។ រកគូអរដោនេនៃរូបភាពចំនុចនីមួយៗតាមបំលែងដូចគ្នា ៖

ក) $(0;2)$ ខ) $(8;0)$ គ) $(10;4)$

ឃ) $(-2;-4)$ ង) $(6;9)$ ។

ដំណោះស្រាយ

1. កំណត់រូបភាពនៃចំនុចខាងក្រោម

តាមបំលែងចាំងផ្ចិត $O(0;0)$ ផលធៀប $c=3$

តាម $P(x;y)\xrightarrow{h}P'(cx;cy)$

ក) $P(-1;3)\rightarrow P'(-3;9)$

ខ) $P(-2;-5)\rightarrow P'(-6;-15)$

គ) $P\left(-1;\frac{1}{3}\right)\rightarrow P'(-3;1)$

ឃ) $P(p;q)\rightarrow P'(3p;1q)$

2. កំណត់រូបភាពនៃចំណុចខាងក្រោម

គេមានៈបំលែងចាំង $(x;y)\rightarrow\left(\frac{1}{2}x;\frac{1}{2}y\right)$

ក) $(2;6)$

តាម $P(x;y)\xrightarrow{h}P'(cx;cy)$

គេបាន $(2;6) \to \left(\frac{1}{2}.2;\frac{1}{2}.6\right)$

$$\boxed{\Rightarrow (2;6) \to (1;3)}$$

ខ) $(-3;2) \to \left(\frac{1}{2}\times(-3);\frac{1}{2}\times 2\right)$

$$\boxed{\Rightarrow (-3;2) \to \left(-\frac{3}{2};1\right)}$$

គ) $\boxed{(-4;-8) \to (-2;-4)}$

ឃ) $\boxed{(p;q) \to \left(\frac{p}{2};\frac{q}{2}\right)}$

3. $L(1;1) \xrightarrow{h} L'(-2;2)$

$M(6;1) \xrightarrow{h} M'(-12;-2)$

$N(6;1) \xrightarrow{h} N'(-12;10)$

4. $A(-2;-1) \xrightarrow{h} A'(-6;-3)$

$B(-2;2) \xrightarrow{h} B'(-6;6)$

$C(4:-1) \xrightarrow{h} C'(12;-3)$

ដោយ $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AB \,.\, AC = \frac{1}{2}\times 6\times 3 = 9$ ឯកតាផ្ទៃ

$$S_{\Delta A'B'C'} = \frac{1}{2} A'B' \cdot A'C' = \frac{1}{2} \times 18 \times 9 = 9 \times 9$$

នាំឲ្យ $\quad \dfrac{S_{\Delta A'B'C'}}{S_{\Delta ABC}} = \dfrac{9 \times 9}{9} = 9$ ពិត ។

5. $\boxed{(-6;2)}$

6. $\boxed{c = \frac{2}{3}}$ (ព្រោះ $Cx = 6$, តែ $x = 9 \Rightarrow C = \frac{2}{3}$)

7. ក) $(-16;-12)$ ខ) $(-4;-3)$

គ) $(-8;-6)$ ឃ) $(24;18)$

8. រកកូអរដោនេនៃចំនុចរូបភាព

បំភាប់ បើរូបភាពនៃ $(4;6)$

តាមបំលែងតាំងគឺ $(6;9)$

រី $(4;6) \to (6;9)$

ក) $(0;2) \to (x;y)$?

គេបាន តាមប្រព័ន្ធសមាមាត្រ

$$\left.\begin{matrix} 4 \to 6 \\ 0 \to x \end{matrix}\right| \Rightarrow x = 0$$

$$\left.\begin{matrix} 6 \to 9 \\ 2 \to y \end{matrix}\right| \Rightarrow y = \frac{18}{6} = 3$$

$$\boxed{\Rightarrow (0;2) \to (0;3)}$$

ស្រាយដូចគ្នាដែរចំពោះ ខ) , គ) , ឃ) , ង)

គេបាន ខ) $(8;0)\to(12;0)$

គ) $(10;4)\to(15;6)$

ឃ) $(-2;-4)\to(-3;-6)$

ង) $(6;9)\to\left(9:\frac{27}{2}\right)$

លំហាត់ជំពូក

1. រករូបភាពនៃបំលែងឆ្លុះរបស់ $P(-1:3)$ ចំពោះករណីខាងក្រោមនីមួយៗ៖

   ក) $y=-x$ ខ) អ័ក្សអាប់ស៊ីស គ) អ័ក្សអរដោនេ

   ឃ) $y=x$ ង) $y=-1$ ច) $x=-1$

2. រករូបភាពនៃបំលែងឆ្លុះរបស់ $A(1:4)$ ចំពោះបន្ទាត់នីមួយៗខាងក្រោម ៖

   ក) $x=0$ ខ) $y=0$ គ) $y=x$

   ឃ) $y=-x$ ង) $y=2$ ច) $x=-1$

3. រករូបភាពនៃចំណុចនីមួយៗខាងក្រោម បន្ទាប់ពីបំលែងឆ្លុះចំពោះបន្ទាត់ $x=3$ តាមបំលែងឆ្លុះគល់ $O(0;0)$

   ក) $(1;1)$ ខ) $(-1;2)$ គ) $(3;-1)$

   ឃ) $(2;0)$ ង) $(0;0)$ ។

4. រករូបភាពនៃចំណុចនីមួយៗ បន្ទាប់ពីបំលែងឆ្លុះខាងក្រោម

ចំពោះបន្ទាត់ $y=1$ តាមបំលែងឆ្លុះបន្ទាត់ $y=x$

ក) $(3;3)$ ខ) $(2;-1)$ គ) $(-1;4)$

ឃ) $(0;1)$ ង) $(0;0)$ ។

5. តើបំលែងខាងក្រោមមួយណា ដែលមិនផ្តល់រូបភាពប៉ុនទៅនឹងរូបភាពដើម ?

ក) បំលែងឆ្លុះចំណុច ខ) បំលែងចាំង

គ) បំលែងកិល ឃ) បំលែងឆ្លុះបន្ទាត់ ។

6. តើបំលែងខាងក្រោមមួយណា ដែលមិនរក្សាចម្ងាយ ?

ក) បំលែងចាំង ខ) បំលែងកិល

គ) បំលែងវិល ឃ) បំលែងឆ្លុះ ។

7. តើបំលែងមួយណានៃ $P(x;y)$ មិនសមមូលទៅនឹងបំលែងផ្សេងទៀតខាងក្រោម ?

ក) បំលែងឆ្លុះនៃ $P(x;y)$ តាមគល់ O

ខ) បំលែងកិលនៃ $P(x;y) \to P'(x-1;y-1)$

គ) បំលែងចាំងនៃ $P(x;y)$ ដែលមានផ្ចិតនៅត្រង់គល់ O ផលធៀប -1 ។

ឃ) បំលែងវិលនៃ $P(x;y)$ $180°$ ពីគល់ O ។

8. តើសមីការនៃបន្ទាត់កាត់តាមចំណុចគល់ ហើយមានរូបភាពបំលែងកិល $\vec{a}=(2;3)$ នៃចំណុច $(1;3)$ ។

9. មានចតុកោណព្នាយកែង $ABCD$ ដែលមានកំពូល $A(3;-2)$, $B(7;-2)$, $C(9;-7)$ និង $D(3;-7)$ ។

ក) រករូបភាពនៃចតុកោណព្នាយកែងតាមបំលែងវិលផ្ចិត O មុំ $90°$ ។

ខ) រករូបភាពនៃចតុកោណព្នាយកែងតាមបំលែងវិលផ្ចិត O មុំ $-90°$

10. រូបភាពរបស់ត្រីកោណ ABC តាមបំលែងវិលផ្ចិត O មុំ $180°$ និងកំពូលរបស់រូបភាពគឺ $A'(-4;1)$, $B'(-1;4)$ និង $C'(-5;-8)$ ។ រកកូអរដោនេកំពូលមុនពេលធ្វើបំលែងវិល ។

11. ចតុកោណកែង $RECT$ មានកំពូល $R(-5;4), E(-5;-2)$, $C(-3;-2)$ និង $T(-3;4)$ ។ ក) សង់ចតុកោណកែង $R'E'C'T'$ ជារូបភាពនៃចតុកោណកែង $RECT$ តាមបំលែងវិលផ្ចិត O មុំ $\theta = -90°$ ។

ខ) រករូបភាពនៃចតុកោណកែង $R'E'C'T'$ តាមបំលែងវិលផ្ចិត O មុំ $\theta = 180°$ ។

ដំណោះស្រាយ

1. រករូបភាពនៃបំលែងឆ្លុះរបស់ $p(-1;3)$ ចំពោះករណីខាងក្រោម

ក) $y = -x$

តាម អ័ក្សបំលែងឆ្លុះ $y=-x$

នាំឲ្យ រូបភាព $(a;b)\to(-b;-a)$

ដូចនេះ $\boxed{P(-1;3)\to P'(-3;1)}$

ខ) អ័ក្សអាប់ស៊ីស

$(a;b)\to(a;-b)\boxed{\Rightarrow P(-1;3)\to P'(1;-3)}$

គ) អ័ក្សអរដោនេ

$(a;b)\to(-a;b)\boxed{\Rightarrow P(-1;3)\to P'(1;3)}$

ឃ) $y=x$

$(a;b)\to(b;a)\boxed{\Rightarrow P(-1;3)\to P'(3;-1)}$

ង) $y=-1$

$(a;b)\to(a;2k-b)\boxed{\Rightarrow P(-1;3)\to P'(-1;-5)}$

ច) $x=-1$

$(a;b)\to(2h-a;b)\boxed{\Rightarrow P(-1;3)\to P'(-1;3)}$

2. រករូបភាពនៃចំនុចនីមួយខាងក្រោម (តាមលំនាំ (1))

ក) $x=0\Rightarrow A(1;4)\to A'(-1:4)$

ខ) $A(1;4)\to A'(1;-4)$, គ) $A(1;4)\to A'(4;1)$

ឃ) $A(1;4)\to A'(-4;-1)$, ង) $A(1;4)\to A'(1;0)$

ច) $A(1;4)\to A'(-3;4)$

3. រករូបភាពនៃចំណុច បំលែងឆ្លុះបំពោះបន្ទាត់ $x=3$ តាម

បំលែងឆ្លុះគល់ $O(0;0)$ តាម $(-a;-b)\to(2h-a;b)$

ក) $(1;1)$

គេបាន $(-a;-b)\to(2\times3-1;1)$

$(-a;-b)\to(5;1)\boxed{\Rightarrow(1;1)\to(-5;-1)}$

ដូចគ្នាដែរ

ខ) $(-1;2)\to(-7;-2)$, គ) $(3;-1)\to(-3;-1)$

ឃ) $(2;0)\to(-4;0)$, ង) $(0;0)\to(-6;0)$

4. រករូបភាពនៃចំនុចនីមួយៗ

គេឲ្យ បន្ទាត់ $y=1$ តាមបំលែងឆ្លុះបន្ទាត់ $y=x$

ក) $(3;3)$

តាម $(a;b)\to(a;2k-b), k=1$

$\Leftrightarrow(3;3)\to(3;-1)$

តាម $(a;b)\to(b;a)$

$\boxed{\Rightarrow(3;-1)\to(-1;3)}$

ដូចគ្នាដែរចំពោះ ខ) , គ) , ឃ) ; ង)

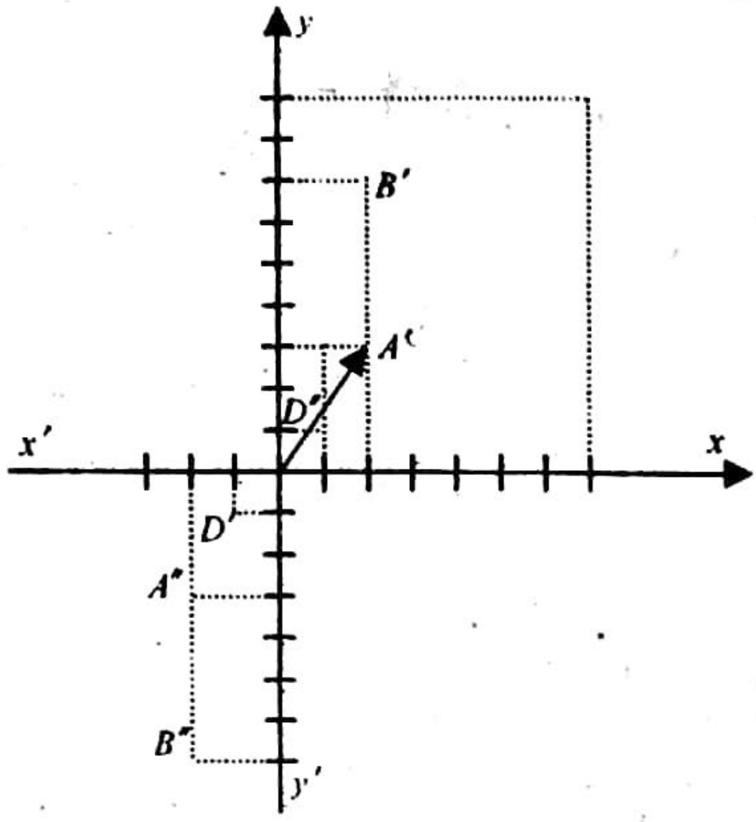
ខ) $(3;2)$; គ) $(-2;-1)$; ឃ) $(1;0)$; ង) $(2;0)$ ។

5. ខ) បំលែងចាំង ។

6. ក) បំលែងចាំង ។

7. ខ) បំលែងកិលនៃ $P(x;y)\xrightarrow{t_{\vec{v}}}P'(x-1;y-1)$ ។

8. សមីការនៃបន្ទាត់កាត់តាមចំនុចតល់ ហើយមានរូបភាព
បំលែតកិល $\vec{a}=(2;3)$ នៃចំនុច $(1;3)$ ។



8. ក) $A'(2;3)$, $B'(2;7)$ $C'(7;9)$, $D'(-1;-1)$

ខ) $A''(-2;-3)$, $B''(-2;-7)$, $C''(-7;-9)$, $D''(1;1)$

9. ក) រករូបភាពនៃចតុកោណព្នាយកែងតាមបំលែងវិល
ផ្ចិត O មុំ $90°$ ។ស្រាយតាម :
ក) វិលផ្ចិត O មុំ $\alpha=90°$ គឺ $P(x;y)\to P'(-y;x)$
ខ) វិលផ្ចិត O មុំ $\theta=-90°$ គឺ $P(x;y)\to P'(y;-x)$

លំហាត់ទី (10)និង(11) លំនាំទី (9) ។

មេរៀនទី ១ រូបធរណីមាត្រក្នុងលំហ

មេរៀនសង្ខេប

- ដើម្បីតាងរូបក្នុងលំហ គេត្រូវស្គាល់ច្បាស់អំពីទ្រង់ទ្រាយដើម ។
- បន្ទាត់ស្របគ្នាក្នុងលំហ តាងដោយបន្ទាត់ស្របគ្នាក្នុងប្លង់ ។
- អង្កត់ពីរដែលមានប្រវែងស្មើគ្នានៅក្នុងលំហអាចមិនចាំបាច់តាងដោយអង្កត់ពីរ ដែលមានប្រវែងស្មើគ្នានៅក្នុងប្លង់ទេ ។
- តាមពីរចំណុចផ្សេងគ្នា គេអាចគូសបន្ទាត់ត្រង់បានតែមួយគត់ ។
- តាមបីចំណុចមិនស្ថិតលើបន្ទាត់តែមួយ គេអាចគូសបានប្លង់តែមួយគត់ដែលកាត់តាមបីចំណុចនោះ ។
- បន្ទាត់មួយ និងចំណុចមួយមិនស្ថិតលើបន្ទាត់មួយ កំណត់បានប្លង់មួយគត់ ។
- បន្ទាត់ពីរប្រសព្វគ្នា កំណត់បានប្លង់មួយ ។
- បន្ទាត់ពីរស្របគ្នាកំណត់បានប្លង់មួយ ។
- បើបន្ទាត់មួយ និងប្លង់មួយមានចំណុចរួមពីរផ្សេងគ្នា នោះបន្ទាត់ទាំងមូលស្ថិតក្នុងប្លង់នោះ ។
- បើប្លង់ពីរមានចំណុចរួមមួយ វាប្រសព្វគ្នាតាមបន្ទាត់មួយដែលកាត់តាមចំណុចរួមនោះ ។

លំហាត់

ក្នុងលំហាត់ទី 1 ដល់ លំហាត់ទី 3 ចូរជ្រើសរើសចម្លើយដែលត្រូវ

1.មានបន្ទាត់តែមួយគត់ដែលកាត់តាម

ក.មួយចំណុច ខ.ពីរចំណុច គ.បីចំណុច

2.គេតាងបន្ទាត់ស្របពីរក្នុងលំហគឺជាបន្ទាត់

ក.ប៉ុនគ្នាក្នុងប្លង់ ខ.កាត់គ្នាក្នុងប្លង់

គ.កែងគ្នាក្នុងប្លង់ ឃ.ស្របពីរក្នុងប្លង់

3.មានប្លង់តែមួយគត់ដែលកាត់តាម

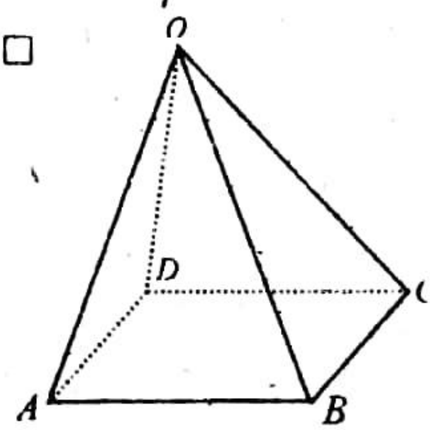
ក.បន្ទាត់មួយ និងចំណុចមួយនៅលើបន្ទាត់នោះ

ខ.បួនចំណុចផ្សេងគ្នា

គ.បន្ទាត់មួយ និងចំណុចមួយនៅក្រៅបន្ទាត់នោះ

ឃ.បន្ទាត់ពីរមិនកាត់ ហើយមិនស្របគ្នា ។

4.មើលរូបខាងស្តាំរួចសរសេរចម្លើយត្រូវ ឬខុសនៅក្នុងប្រអប់



ក.ប្លង់ OAB និងប្លង់ ABC កាត់គ្នា □

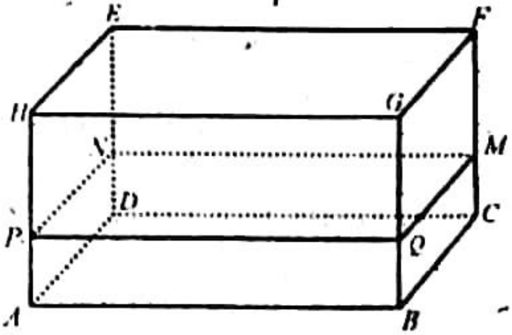
ខ.បន្ទាត់ OA និង AB កែងគ្នា □

គ.បន្ទាត់ OD និង AB ប្រសព្វគ្នា □

ឃ.បួនចំណុច O, A, B និង C ឋិតក្នុងប្លង់តែមួយ □

ង.ប្លង់ OAB និងប្លង់ OBC មានចំណុចរួមមួយ □

5. $ABCDEFGH$ ជាប្រលេពីប៉ែតកែង ហើយបួន $MNPQ$ ស្របនឹងមុខ $ABCD$ ដូចរូបខាងស្តាំ ។ បំពេញចម្លើយក្នុងចន្លោះ



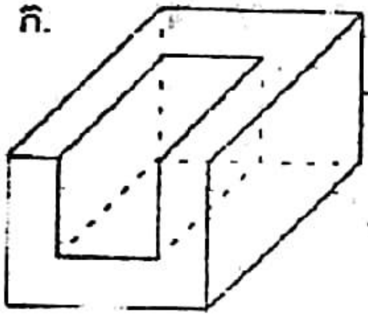
ក.បួង MPQ ប្រសព្វនឹងបួង ABG បានបន្ទាត់......។

ខ.បន្ទាត់ QM និង BC ស្របគ្នាកាលណា M និង Q ជាចំណុចកណ្តាលនៃជ្រុង..........និង..........រៀងគ្នា ។

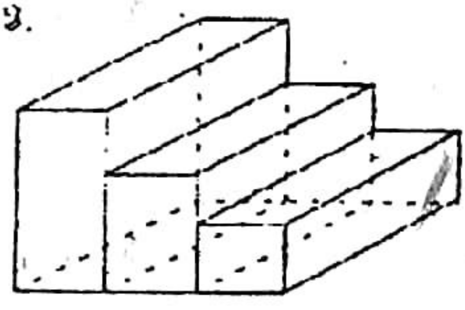
គ.បន្ទាត់ PN និង QM ស្របគ្នាកាលណា M, N, P និង Q ជាចំណុចកណ្តាលនៃជ្រុង..........,..........,..........និង..........រៀងគ្នា ។

6.សង់រូបទីមួយៗឡើងវិញ រួចដាក់អង្កត់ដាច់ៗនៃរូបខាងក្រោម៖

6. ក.



ខ.



7.ចូរសង់រូបៈ ក.ស្វ៊ែមួយ

ខ.គ្រីសត្រង់មួយដែលមានមុខខាងចំនួន 7

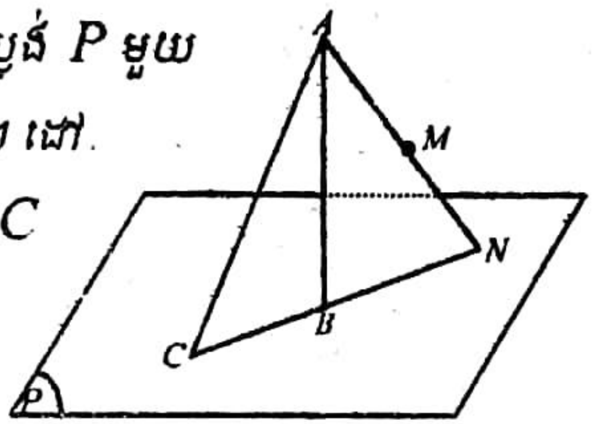
គ.ស៊ីឡាំងចារឹកក្នុងស្វ៊ែរមួយ ដែលអង្កត់ផ្ចិតនៃស៊ីឡាំងនេះមានប្រវែងស្មើនឹងកម្ពស់របស់វា ។

8.គេឲ្យចតុមុខ $OABC$ មួយ ដែល M ជាចំណុចកណ្តាលនៃជ្រុង OC និង N ,P ជាទីប្រជុំទម្ងន់នៃត្រីកោណ $\triangle OAC$, $\triangle OBC$ រៀងគ្នា ។

ក.បង្ហាញថា BM ប្រសព្វជាមួយនឹង AP

ខ.រកលក្ខខណ្ឌនៃចំណុច S ក្នុងត្រីកោណ $\triangle ABC$ ដើម្បីឲ្យ OS ប្រសព្វជាមួយនឹង NP

9.គេមានចំណុច B ,C ឋិតក្នុងប្លង់ P មួយ និងចំណុច A មិនឋិតក្នុងប្លង់ P ។ ដៅចំណុច M មួយជារបស់ប្លង់ ABC រួចបន្ទាយ AM កាត់ប្លង់ P ត្រង់ N ដូចរូបខាងស្តាំ ។

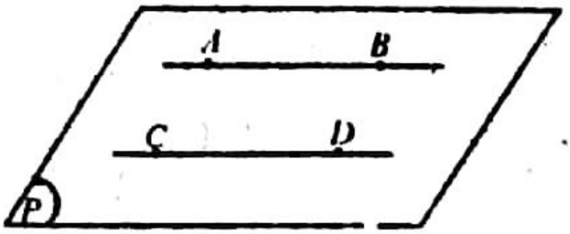


បង្ហាញថា B ,C ,N ឋិតលើបន្ទាត់តែមួយ ។

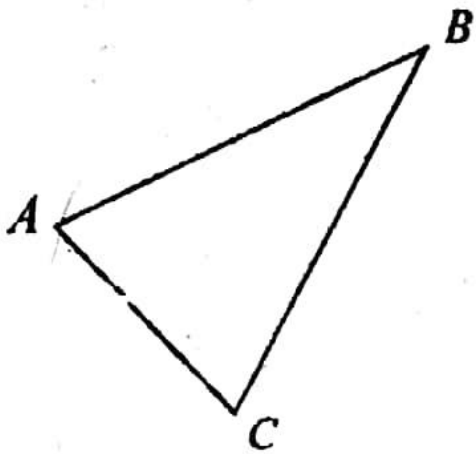
ដំណោះស្រាយ

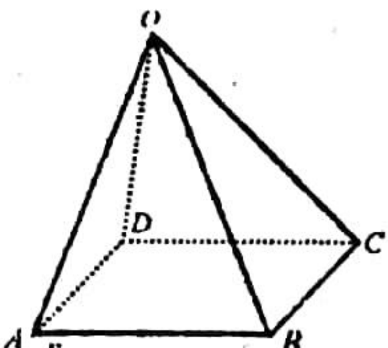
1.ខ រូប

2.ឃ រូប



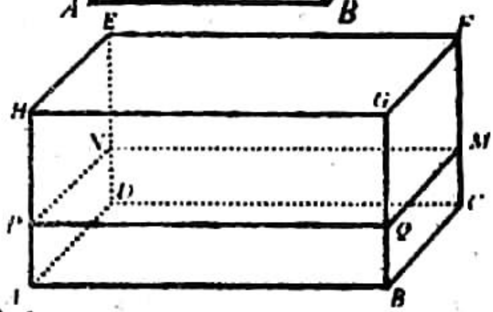
3.គ រូប





4.ក.ត្រូវ, ខ.ខុស, គ.ខុស, ឃ.ខុស, ង.ខុស

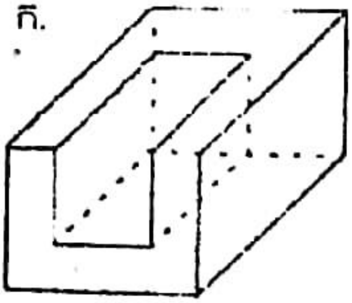
5.ក. ប្លង់ MPQ ប្រសព្វនឹងប្លង់ ABG បានបន្ទាត់ $\underline{PQ}$ ។



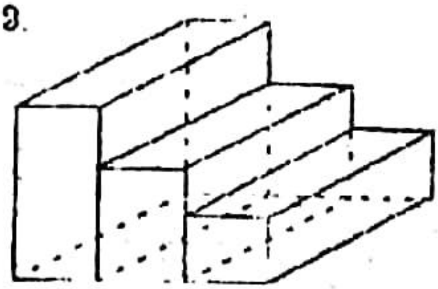
ខ. បន្ទាត់ QM និង BC ស្របគ្នា កាលណា M និង Q ជាចំណុចកណ្ដាលនៃជ្រុង $\underline{CF}$ និង $\underline{BG}$ រៀងគ្នា ។

គ. បន្ទាត់ PN និង QM ស្របគ្នាកាលណា M, N, P និង Q ជាចំណុចកណ្ដាលនៃជ្រុង $\underline{CF}$, $\underline{DE}$, $\underline{AH}$ និង $\underline{BG}$ រៀងគ្នា ។

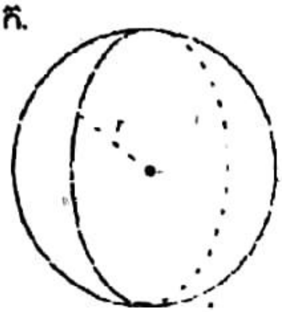
៦. ក.



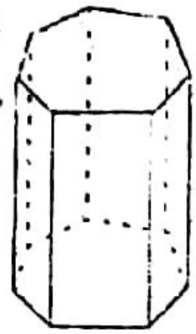
ខ.



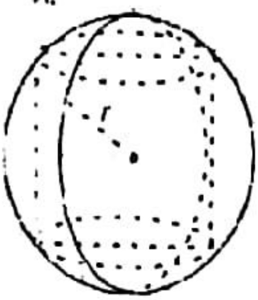
7. ក.



ខ



គ.



ស្វ៊ែ ព្រីសត្រង់ ស៊ីឡាំងចារឹកក្នុងស្វ៊ែ 1

8.ក.បង្ហាញថា BM ប្រសព្វជាមួយ AP រូបទី (8)

ដោយពីរគឺ BM និង AP ប្រសព្វគ្នាត្រង់មួយចំណុចនៅក្នុង

ប្លង់ (ABM) តែមួយ ។នោះ P ស្ថិតនៅលើ BM

គេបាន $\boxed{BM \cap AP = \{P\}}$

ខ.រកលក្ខខណ្ឌនៃចំណុច S ក្នុងត្រីកោណ $\triangle ABC$

ដើម្បីឲ្យ OS ប្រសព្វជាមួយនឹង NP

តាង E កណ្ដាល BC, F កណ្ដាល AC

<u>គេបាន</u> ប្លង់ (OFE) ដែល $F \in (AC)$, $E \in (BC)$

នាំឲ្យ $(FE)\in(ABC)$

ដោយ N ជាទីប្រជុំទំងន់នៃត្រីកោណ $\triangle OAC$

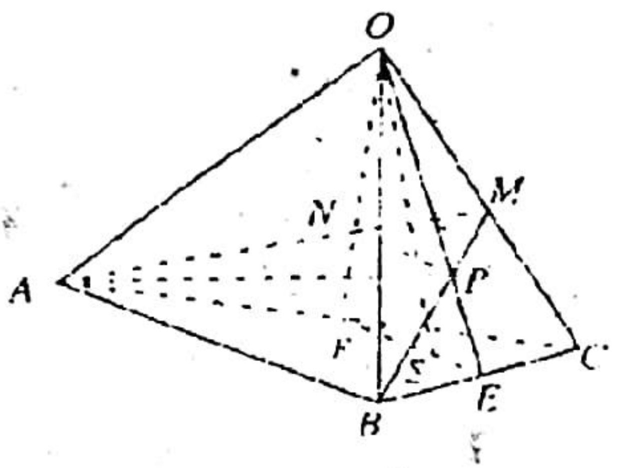
និង P ជាទីប្រជុំទំងន់នៃត្រីកោណ $\triangle OBC$

ទាញបាន N, P ស្ថិតលើបន្ទាត់តែ 1 ។

ម្យ៉ាងទៀត $S\subset\triangle ABC$ តែ $OS\cap NP$ ត្រង់ចំណុច 1 ។

នាំឲ្យ F, E និង S ស្ថិតក្នុងប្លង់ $\triangle ABC$,

គេបាន S នៅលើ EF



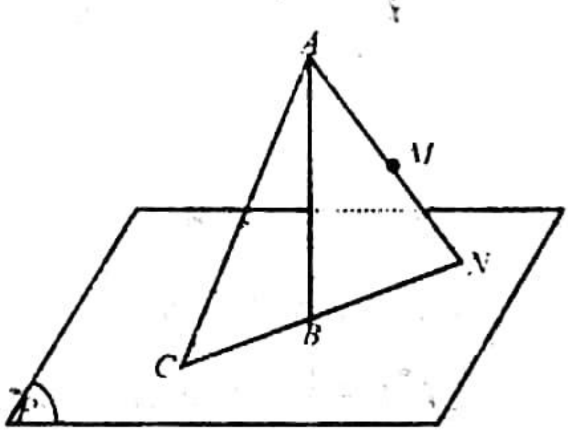
ដូចនេះ $\boxed{S \text{ នៅលើ } EF}$

9.បង្ហាញតាមប្រសព្វរវាង ប្លង់ពីរតាមបន្ទាត់មួយ ។

ប្លង់ $ABC\cap P=BC$

$N\in ABC$ និង $N\in P$ ។

គេបាន $N\in BC$



មេរៀនទី ២ បន្ទាត់និងប្លង់ស្របក្នុងលំហ

មេរៀនសង្ខេប

1.បន្ទាត់ស្របគ្នា

• បន្ទាត់ពីរស្របគ្នា គឺជាបន្ទាត់ពីរស្ថិតនៅក្នុងប្លង់តែមួយ ហើយគ្មានចំណុចរួម ។

• តាមចំណុចមួយដែលនៅក្រៅបន្ទាត់មួយ គេអាចគូសបន្ទាត់បានតែមួយគត់ ដែលស្របទៅនឹងបន្ទាត់នោះ ។

• បើបន្ទាត់ពីរផ្សេងគ្នាស្របទៅនឹងបន្ទាត់ទីបីតែមួយ នោះបន្ទាត់ទាំងពីរនេះស្របគ្នា ។

• បើបន្ទាត់ពីរស្របគ្នា គ្រប់ប្លង់ដែលកាត់បន្ទាត់ទីមួយ ត្រូវកាត់បន្ទាត់ទីពីរ ។

2.បន្ទាត់ស្របនឹងប្លង់

• បន្ទាត់ស្របនឹងប្លង់កាលណាវាគ្មានចំណុចរួម ។

• បើបន្ទាត់មួយស្របនឹងប្លង់ពីរប្រសព្វគ្នា នោះប្លង់នេះស្របទៅនឹងបន្ទាត់ប្រសព្វនៃប្លង់ទាំងពីរនេះ ។

3.ប្លង់ស្របគ្នា

● ប្លង់ពីរស្របគ្នា កាលណាវាគ្មានចំណុចប្រសព្វ ។

● តាមចំណុចមួយនៅក្រៅប្លង់មួយ គេអាចគូសបានប្លង់តែមួយគត់ដែលស្របទៅនឹងប្លង់នោះ ។

● ប្លង់ពីរស្របគ្នា គ្រប់ប្លង់ដែលស្របនឹងប្លង់មួយ ត្រូវស្របនឹងប្លង់មួយទៀត ។

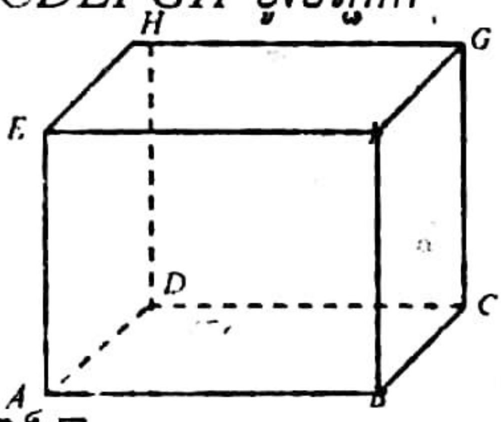
● ប្លង់ពីរស្របគ្នា គ្រប់ប្លង់ដែលប្រសព្វនឹងប្លង់មួយ ត្រូវប្រសព្វនឹងប្លង់មួយទៀត ហើយបន្ទាត់ប្រសព្វពីរនោះជាបន្ទាត់ស្របគ្នា ។

● បើប្លង់ពីរស្របគ្នា នោះគ្រប់បន្ទាត់ដែលកាត់ប្លង់ទី 1 ត្រូវកាត់នឹងប្លង់ទី 2 ។

● ប្លង់ច្រើនស្របគ្នា កំណត់នៅលើខ្នាត់ពីរបានអង្កត់ត្រូវគ្នាសមាមាត្រគ្នា ។

លំហាត់

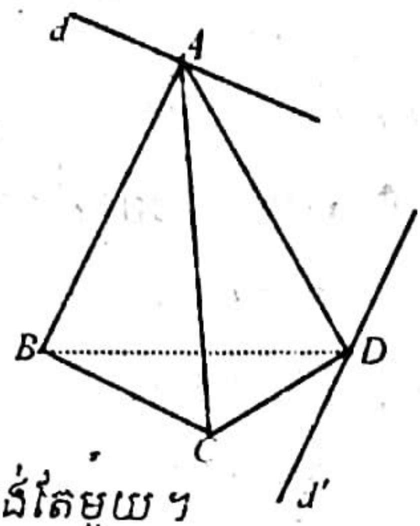
លំហាត់ទី 1 ដល់ទី 5 នៃគូប $ABCDEFGH$ ចូរបញ្ជាក់ពាក្យខុស ឬត្រូវក្នុងប្រអប់ខាងក្រោម៖



1. បន្ទាត់ AG និង DF ស្របគ្នា □
2. បន្ទាត់ BF និង HD ស្របគ្នា □
3. ត្រីកោណ $\triangle AFH$ ជាត្រីកោណកែង □
4. បន្ទាត់ AG ស្របនឹងប្លង់ CDF □

5.ប្លង់ ACF ស្របទីងប្លង់ EFH □

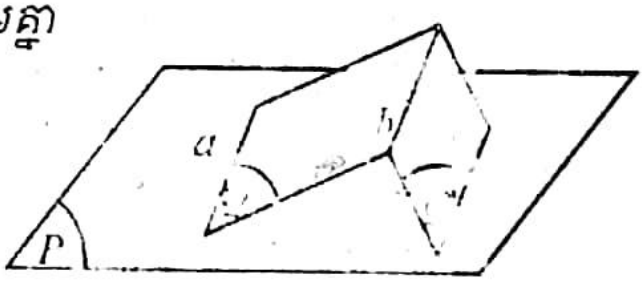
6.គេឲ្យតេត្រាអែត $ABCD$ មួយដូចក្នុងរូប ។ បន្ទាត់ d មួយកាត់តាម A ស្របទៅនឹង BC និង d' ជាបន្ទាត់កាត់តាម D ស្របទៅនឹង AB ។ បង្ហាញថា d និង d' មិនឋិតក្នុងប្លង់តែមួយ ។



7.គេមានបន្ទាត់ពីរ a និង a' មិនឋិតក្នុងប្លង់តែមួយ ។ បង្ហាញថាគ្មានបន្ទាត់ស្របគ្នាដែរកាត់តាម a និង a' ។

8.គេមានបន្ទាត់ d និង d' ស្របគ្នានៅក្នុងប្លង់ P និង P' រៀងគ្នា ។ បន្ទាត់ a ជាប្រសព្វរវាងប្លង់ P និង P' ។ បង្ហាញថា $a // d$ និង $a // d'$

9.គេឲ្យបន្ទាត់ a និង a' ស្របគ្នានៅក្នុងប្លង់ P មួយ ។ ប្លង់ Q និង Q' កើតឡើងដោយបន្ទាត់ a និង a' ជាមួយនឹងបន្ទាត់ b រៀងគ្នា ។ បង្ហាញថា b ស្របនឹងប្លង់ P ។



10.គេមានតេត្រាអែត $OABC$ មួយដែលចំណុច M, N, P ជាចំណុចកណ្ដាលរៀងគ្នានៃជ្រុង OA, OB, OC បង្ហាញថាប្លង់ ABC ស្របនឹងប្លង់ MNP

11.គេមានតេត្រាអែត $ABCD$ មួយដែលចំណុច M ឋិតនៅលើជ្រុង AB ខុសពី A និង B។ បន្ទាត់កាត់តាមចំណុច M មួយស្របទៅនឹង AC រួចកាត់ BC ត្រង់ N ។ បន្ទាត់កាត់តាមចំណុច N ស្របទៅនឹង BD រួចកាត់ CD ត្រង់ P និងបន្ទាត់កាត់តាមចំណុច P ស្របទៅនឹង [illegible]កាត់ AC រួចកាត់ AD ត្រង់ Q ។

[illegible] $MNPQ$ ជាប្រលេឡូក្រាម

ខ.បង្ហាញថា[illegible]បន្ទាត់ AC ស្របនឹងប្លង់ $MNPQ$ ។

ដំណោះស្រាយ

1.ខុស, 2.ត្រូវ, 3.ត្រូវ, 4.ខុស, 5.ត្រូវ, 6.ណែនាំ

d នៅក្នុងប្លង់ ABC, d' នៅក្នុងប្លង់ ABD

តែប្លង់ $ABC \cap ABD = AB$ មានពីរករណី៖

+ឧបមាថា $d \cap d' = \{I\} \Rightarrow I \in AB$

$$\left.\begin{array}{l} I \in AB \\ I \in d' \end{array}\right\} \Rightarrow AB \cap d' = \{I\} \ (1)$$

ឬចំណុច I និងចំណុច A ជាចំណុចតែមួយ ពីព្រោះ

$d \cap AB = A$ គេបាន $A \in d'$ (2) ។

(1) និង (2) គឺផ្ទុយពីសម្មតិកម្មដែលថា $d' \| AB$, $A \in d'$ ។

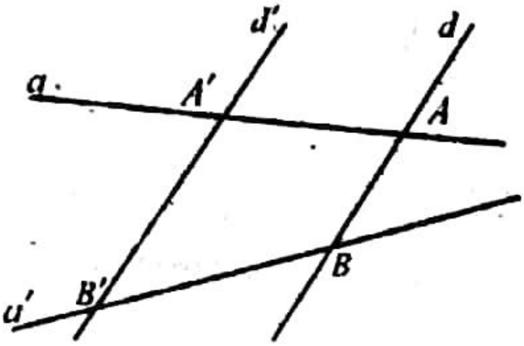
ដូច្នេះ d មិនកាត់ d' ។

+ឧបមាថា $d \| d'$ មានន័យថា AB ស្របនឹង BC គឺមិនអាច

មាន ។ ពោលគឺ $AB \cap BC = \{B\}$ ។

ដូចនេះ d និង d' មិនស្ថិតនៅក្នុងប្លង់តែមួយ ។

7.ឧបមាថា មានបន្ទាត់ស្របគ្នាពីរ d និង d' កាត់ a និង a' ដូចក្នុងរូប ។



ដូចនេះបន្ទាត់ d' និង d ស្ថិតក្នុងប្លង់តែមួយមានន័យថាបួនចំណុច A, B, B', A' ស្ថិតក្នុងប្លង់តែមួយ ។ មានន័យថា a និង a' ស្ថិតនៅក្នុងប្លង់តែមួយ ពោលគឺផ្ទុយពីសម្មតិកម្មដែលថា a និង a' មិនស្ថិតក្នុងប្លង់តែមួយ ។

8.ដោយបន្ទាត់ $d // d'$ កំណត់បានប្លង់ Q មួយ ។ ឧបមាថា $a \cap d = \{A\}$ គេបាន $A \in a$ នោះ $A \in P'$ ។

$A \in d$ នោះ $A \in Q$ ។

ដូចនេះ $A \in P \cap Q$ នោះ $A \in d'$ ពោលគឺ d និង d' មានចំណុចរួម A មួយមានន័យថា $d \cap d' = \{A\}$ ផ្ទុយពីសម្មតិកម្ម ។ ដូចនេះ $a // d$ ។ ស្រាយដូចគ្នាដែរចំពោះ $a // d'$ ។

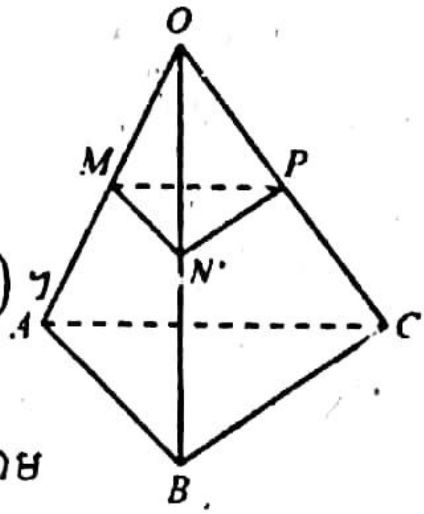
9.សំរាយដូចលំហាត់ទី ៤

10.នៅក្នុងត្រីកោណ OAB គេបាន

$MN \,//\, AB \Rightarrow MN \,//\, ABC$ (1)

ដូចគ្នាដែរចំពោះត្រីកោណ OBC

គេបាន $NP \,//\, BC \Rightarrow NP \,//\, ABC$ (2) ។



និង (2) គេបានប្លង់ $MNP \,//\, ABC$ ។

11.ក.ចតុកោណ $MNPQ$ ជាប្រលេឡូក្រាម

$$\left.\begin{array}{l} MN \,//\, AC \\ PQ \,//\, AC \end{array}\right\} \Rightarrow NP \,//\, MQ$$

គេបាន M, N, P, Q ស្ថិតក្នុងប្លង់តែមួយ ។

$BD \,//\, NP \Rightarrow NP \,//\, ABD$

$$\left.\begin{array}{l} NP \,//\, ABD \\ NP \subset MNPQ \\ ABD \cap MNPQ = MQ \end{array}\right\} \Rightarrow NP \,//\, MQ$$

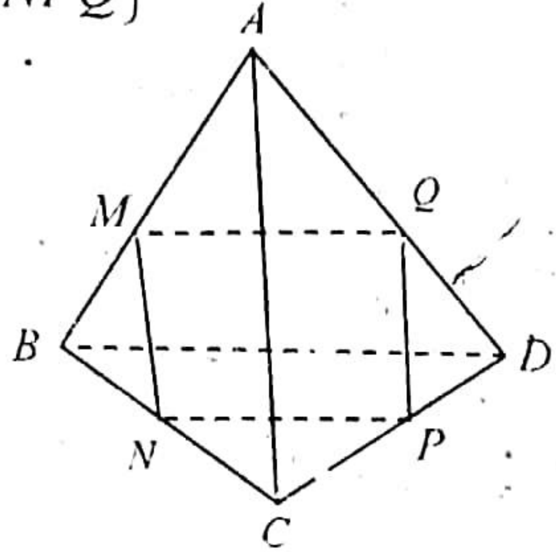
(តាមលក្ខណៈទី 2 នៃបន្ទាត់ស្របនឹងប្លង់)

ចតុកោណ $MNPW$ មាន $MN \,//\, PQ, NP \,//\, MQ$

ដូចនេះ $MNPQ$ ជាប្រលេឡូក្រាម ។

ខ. $AC // MNPQ$

$$\left.\begin{array}{l} AC // MN \\ MN \subset MNPQ \end{array}\right\} \Rightarrow AC // MNPQ$$



មេរៀនទី ៣ ភាពអរតូកូណាល់ក្នុងលំហ

មេរៀនសង្ខេប

បន្ទាត់អរតូកូណាល់

*បន្ទាត់ពីរនៅក្នុងលំហ **អរតូកូណាល់** គ្នា កាលណាមុំរវាងបន្ទាត់ទាំងពីរជាមុំកែង ។*

បន្ទាត់កែងនឹងប្លង់

*● បន្ទាត់មួយ **កែង** នឹងប្លង់មួយ កាលណាបន្ទាត់នោះអរតូកូណាល់ នឹងគ្រប់បន្ទាត់ក្នុងប្លង់ P ។*

*● បើបន្ទាត់មួយ **អរតូកូណាល់** (ឬកែង)នឹងបន្ទាត់ពីរប្រសព្វគ្នានៅក្នុងប្លង់ នោះវាកែងនឹងប្លង់ ។*

ទ្រឹស្តីបទបីបន្ទាត់កែង

បើបន្ទាត់ AB កែងនឹងប្លង់ P ត្រង់ B ហើយ BO កែងនឹងបន្ទាត់ a នៃប្លង់ P ត្រង់ O នោះបន្ទាត់ AO កែងនឹងបន្ទាត់ a ។

$$\left.\begin{array}{l} AB \perp P \\ BO \perp a \\ a \subset P \end{array}\right\} \text{នោះ } AO \perp a$$

ទ្រឹស្តីបទបីបន្ទាត់កែង

បើបន្ទាត់ AB កែងនឹងប្លង់ P ត្រង់ B ហើយ AO កែងនឹងបន្ទាត់ a នៃប្លង់ P ត្រង់ O នោះបន្ទាត់ BO កែងនឹងបន្ទាត់ a ។

$$\left.\begin{array}{l} AB \perp P \\ AO \perp a \\ a \subset P \end{array}\right\} \text{នោះ: } AO \perp a$$

ប្លង់មេដ្យាទ័រ

• ប្លង់មេដ្យាទ័រនៃអង្កត់មួយគឺជាប្លង់ដែលកែងនឹងអង្កត់នោះ ត្រង់ចំណុចកណ្តាល ។

• គេមានចំណុច A, B ស្ថិតនៅសងខាងនៃប្លង់ P ចំណុចផ្សេងគ្នា C, D, E ស្ថិតនៅក្នុងប្លង់ P ដែល

$$\left.\begin{array}{l} AC = BC \\ AD = BD \\ AE = BE \end{array}\right\} \Leftrightarrow P \text{ ប្លង់មេដ្យាទ័រនៃអង្កត់ } AB$$

ប្លង់កែង

គេថាប្លង់ P កែងនឹង Q កាលណាប្លង់ P មានបន្ទាត់មួយកែងនឹងប្លង់ Q (ឬប្លង់ Q មានបន្ទាត់មួយកែងនឹងប្លង់ P) ។

ចំណោលកែង

ចំណោលកែងនៃចំណុចមួយមកលើប្លង់មួយ គឺជាចំណុចប្រសព្វរវាងបន្ទាត់កែងដែលគូសចេញពីចំណុចនោះទីងប្លង់ ។

លំហាត់

1.ចូរបញ្ជាក់ ត្រូវ ឬខុស នៅក្នុងប្រអប់ខាងចុងសំណួរនីមួយៗដូចខាងក្រោម៖

ក.នៅក្នុងលំហ បើគេមានបន្ទាត់ពីរ a និង a' អរតូកូណាល់ៈទៅនឹងបន្ទាត់ (b) នោះគេបាន $a // a'$ ☐

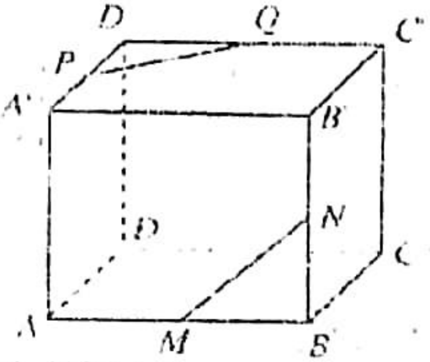
ខ.បន្ទាត់ d និង d' អរតូកូណាល់ទៅនឹងប្លង់ P មួយ នោះគេបាន $d // d'$ ☐

គ.គេមានបន្ទាត់ពីរ a និង a' ។ បើ a អរតូកូណាល់ទៅនឹងប្លង់ P និង a' ស្របទៅនឹងប្លង់ P នោះ a អរតូកូណាល់ទៅនឹង a'

ឃ.បន្ទាត់មួយអរតូកូណាល់ទៅនឹងបន្ទាត់ពីរផ្សេងគ្នា ដែលស្ថិតនៅក្នុងប្លង់ P មួយ នោះវាអរតូកូណាល់ទៅនឹងប្លង់ ☐

ង.បើគេមានបន្ទាត់ពីរ d និង d' មិនស្របគ្នាហើយអរតូកូណាល់រៀងគ្នាទៅនឹងប្លង់ P និង P' នោះគេបាន P និង P' ប្រសព្វគ្នា ☐

2.គេមានគូប $ABCDA'B'C'D'$ មួយដែល M, N, P, Q ជាចំណុចកណ្ដាលនៃទ្រនុងរបស់គូបនេះដូចរូប ។ ចូរបញ្ជាក់ ត្រូវ ឬខុស នៅខាងចុងនៃសំណួរនីមួយៗខាងក្រោម៖



ក.បន្ទាត់ $MN // PN$ □

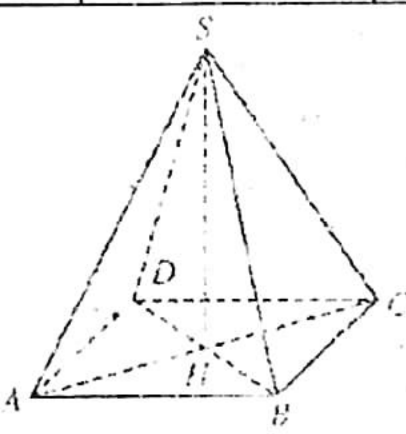
ខ.បន្ទាត់ MN អរតូកូណាល់ នឹង PN □

គ.បន្ទាត់ MN មិនកាត់ និងមិនស្របនឹង PN □

ឃ.ប្លង់មេដ្យាទ័រនៃអង្កត់ MN គឺជាប្លង់ BDA' □

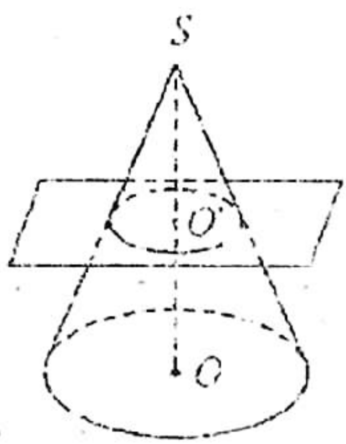
3.ជាពីរ៉ាមីតនិយ័តមួយដែលមានបាតជាការេចូរបំពេញក្នុងតារាងខាងក្រោម៖

កម្ពស់	$1.5m$		$0.6m$	
ជ្រុងការេ	$0.5m$			$3m$
ផ្ទៃក្រលាបាត		$144dm^2$		
មាឌ		$0.624dm^3$	$242m^5$	

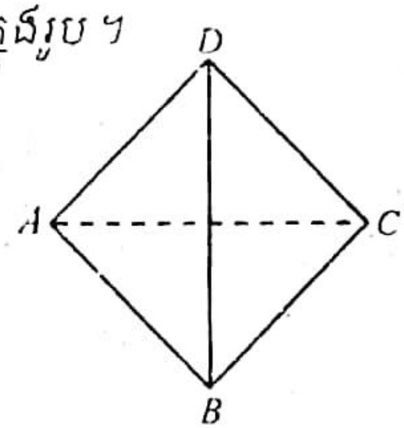


4.គេមានកោណមួយនឹងប្លង់មួយកាត់តាមចំណុចកណ្តាលនៃកម្ពស់រួចស្របទៅនឹងប្លង់បាតដូចក្នុងរូប ។ ចូរបំពេញចម្លើយក្នុងតារាងខាងក្រោម៖

	កម្ពស់	កាំនៃបាត	ជនេត្រ	ផ្ទៃក្រឡាបាត	មាឌ
កោណមិនទាន់កាត់	h		a	πr^2	v
កោណបានកាត់រួច		$\frac{r}{2}$			



5.គេមានចតុមុខនិយ័ត $ABCD$ មួយដូចក្នុងរូប ។ បង្ហាញថា CD ស្ថិតនៅក្នុងប្លង់មេដ្យាទ័រនៃអង្កត់ AB ។



6.បន្ទាត់ d និង ℓ មិនស្ថិតនៅក្នុងប្លង់តែមួយ ប៉ុន្តែអរតូកូណាល់នឹងគ្នា ។ ចំណុច A និង H ស្ថិតនៅលើ ℓ និង d រៀងគ្នាដែល H ជាចំណោលកែងនៃ A មកលើ D ។ បង្ហាញថា d កែងនឹងប្លង់ដែលកំណត់ដោយ H និង ℓ ។

7.គេឲ្យពីរ៉ាមីត $SABCD$ ដែល $ABCD$ ជាការេ និង SB កែងនឹងប្លង់ $ABCD$ ។

ក.បង្ហាញថា AD កែងនឹង ABS

ខ.បើ $AB = BS = a$ គណនា BD, DS, SA ជាអនុគមន៍នៃ a ។ រកមាឌនៃពីរ៉ាមីត $SABCD$ ជាអនុគមន៍នៃ a ។

8.គេឲ្យបន្ទាត់ d ជាប្រសព្វរវាងប្លង់ P និង P' និងចំណុច A មួយមិនស្ថិតនៅក្នុងប្លង់ទាំងពីរ ។ បន្ទាត់ពីរប្រសព្វគ្នាត្រង់ A កែងនឹងប្លង់ P និង P' ត្រង់ H និង H' រៀងគ្នា ។

ក.បង្ហាញថា d អរតូកូណាល់នឹងប្លង់ AHH'

ខ.តាងចំណុច k ជាប្រសព្វរវាង d និង AHH' ។ បង្ហាញថា AK កែងនឹង d

គ.ឧបមាថា $AH = AH'$ បង្ហាញថា $KH = KH'$

9.គេមានត្រីកោណកែង ABC កែងត្រង់ A និង $AB = a, AC = 2a$ ។ យក d ជាបន្ទាត់មួយកែងនឹងប្លង់

ABC ត្រង់ ... ត្រូវសរើសចំណុច D មួយនៅលើ d ដែល $AD=2a$ ។

ក.បង្ហាញ ... AC អរត្តូកូណាល់នឹង BD និង AB អរត្តូកូណាល់នឹង CD ។

ខ. I ជាចំ... កណ្តាលនៃ CD ។ បង្ហាញថាប្លង់ ABI ជាប្លង់មេដ្យាទ័រនៃអង្គ... CD

គ.គណនាចា... $ABCD$ ជាអនុគមន៍នៃ a

10.រង្វង់ផ្ចិត O ... ស្ថិតនៅក្នុងប្លង់ P ដែលមានអង្កត់ផ្ចិត AB ។ C ជាចំណុចមួយ...នៅលើរង្វង់ផ្សេងពីចំណុច A និង B និង d ជាបន្ទាត់កាត់តាម A ហើយអរត្តូកូណាល់នឹងប្លង់ P ។ យកចំណុច D នៅលើ d ... ពី A ។

ក.បង្ហាញថា BC កែងនឹងប្លង់ ACD

ខ. H ជាចំណុចមួយនៅលើ CD ដែល AH កែងនឹង CD ។ បង្ហាញថា AH ... ងនឹង BCD

គ.បង្ហាញថា $AB^2 = AH^2 + HC^2 + CB^2$

ដំណោះស្រាយ

1.ក.ខុស, ខ.ត្រូវ, ...ត្រូវ, ឃ ត្រូវ,

2.ក.ខុស,ខ.ខុស,គ.ត្រូវ, ឃ.ត្រូវ.

3.

កម្ពស់	$1.5m$	$\frac{13}{1000}m$	$0.6m$	$12m$
ជ្រុងការេ	$0.5m$	$12dm$	$11\sqrt{10m}$	$3m$
ផ្ទៃក្រលាបាត	$\frac{1}{4}m^2$	$144dm^2$	$1210m^3$	$9m^2$
មាឌ	$\frac{1}{8}m^2$	$0.624dm^3$	$242m^5$	$36m^3$

4.

	កម្ពស់	កាំនៃបាត	ជនេត្រ	ផ្ទៃក្រឡាបាត	មាឌ
កោណមិនទាន់កាត់	h	r	a	πr^2	v
កោណបានកាត់រួច	$\frac{h}{2}$	$\frac{r}{2}$	$\frac{a}{2}$	$\frac{\pi r^2}{4}$	$\frac{v}{8}$

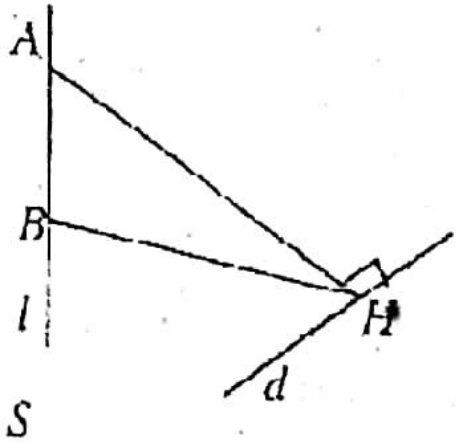
5. $AD = BD$, $AC = BC$ នោះ C, D ស្ថិតនៅក្នុងបួងមេដ្យាទ័រនៃអង្កត់ AB ។

6. យក B ផ្សេងពី A នៅលើ l

$$\left.\begin{array}{l} d \perp AB \\ d \perp AH \end{array}\right\} \Rightarrow d \perp ABH$$

ABH គឺជាប្លង់ដែលបង្កើតឡើង

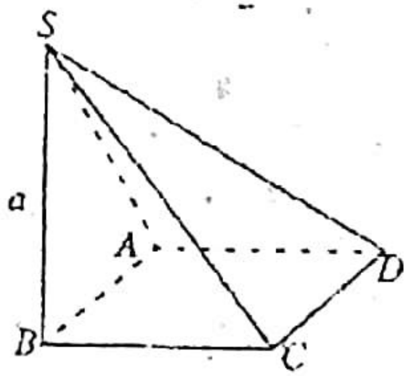
ដោយចំណុច H និងបន្ទាត់ l ។



7.ក.បង្ហាញថា AD កែងនឹង ABS

<u>យើងមាន</u> បាត $ABCD$

ជាការេហើយ $SB \perp ABCD$



<u>គេបាន</u> $\left.\begin{array}{l} AD \perp SB \\ AD \perp AB \end{array}\right\} \Rightarrow AD \perp ABS$

<u>ដូចនេះ</u> $\boxed{AD \perp ABS}$

ខ.គណនា BD, DS, SA ជាអនុគមន៍នៃ a

ដោយ $ABCD$ ជាការេ

<u>គេបាន</u> BD ជាអង្កត់ទ្រូងការេហើយជ្រុងការេនីមួយៗស្មើ a.

<u>គេបាន</u> $\boxed{BD = a\sqrt{2}}$

<u>តាម</u> $DS^2 = BS^2 + BD^2 = a^2 + a^2 + 2 = 3a^2$

<u>គេបាន</u> $\boxed{DS = a\sqrt{3}}$

តាម $SA^2 = BS^2 + AB^2 = 2a^2$

<u>គេបាន</u> $\boxed{SA = A\sqrt{2}}$

+រកមាឌនៃពីរ៉ាមីត $SABCD$ ជាអនុគមន៍នៃ a

តាម $V=\frac{1}{3}Bh$ តែ $B=a\cdot a=a^2$ (ផ្ទៃបាត) $h=a$ (កំពស់)

$\Rightarrow V=\frac{1}{3}a\cdot a^2$ ដូចនេះ: $\boxed{V=\frac{1}{3}a^3}$

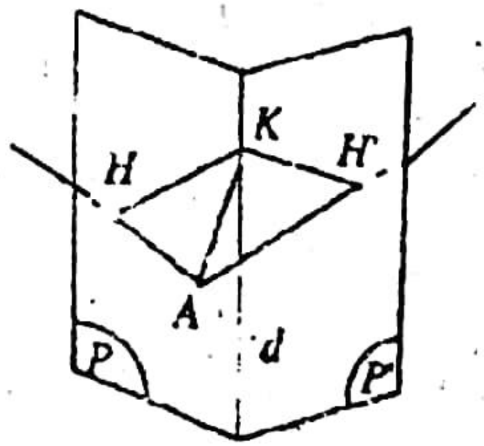
8.ក.បង្ហាញថា d អរតូកូណាល់និងប្លង់ AHH'

<u>គេមាន</u> $AH\perp P$ តែ $d\in P$

$\Rightarrow AH\perp d$ (1)

$AH'\perp P$ តែ $d\in P$

$\Rightarrow AH'\perp d$ (2)



តាម (1) និង (2) $\Rightarrow d\perp AHH'$

ដូចនេះ: $\boxed{d\perp AHH'}$

ខ.បង្ហាញថា AK កែងនឹង d

<u>ដោយ</u> $\left.\begin{array}{l} d\perp AHH' \\ AK\subset AHH' \end{array}\right\}\Rightarrow d\perp AK$

<u>ដូចនេះ:</u> $\boxed{AK\perp d}$

គ.បង្ហាញថា $AH=AH'$

ដោះត្រីកោណកែង $AHK=AH'K$ គេបាន $AK=HH'$

$\Rightarrow AHKH'$

ដូចនេះ: $\boxed{KH=KH'}$

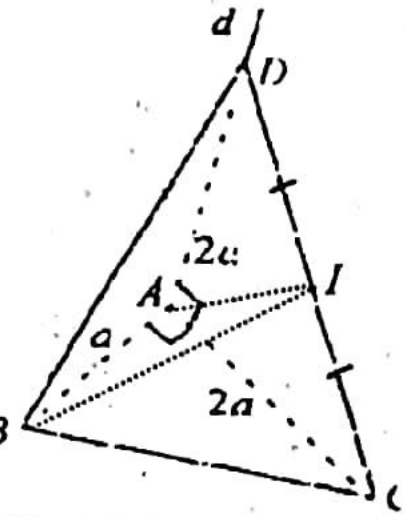
១.ក.បង្ហាញថា $AC \perp BD, AB \perp CD$

+ដោយ $\left.\begin{array}{l} AC \perp AD \\ AC \perp AB \end{array}\right| \Rightarrow AC \perp ABD$

$\Rightarrow AC \perp BD$

+ដោយ $\left.\begin{array}{l} AB \perp AD \\ AB \perp AC \end{array}\right\} \Rightarrow AB \perp ACD$

$\Rightarrow AB \perp CD$



ខ.ត្រីកោណកែង $ABD = ABC$ នាំ៖ $BD = BC$

គេបាន $\left.\begin{array}{l} CB = DB \\ CA = DA \\ CI = DI \end{array}\right\} \Rightarrow ABI$ ជាប្លង់មេដ្យាទ័រនៃអង្កត់ CD ។

គ.គណនាមាឌ $ABCD$ ជាអនុគមន៍ a

តាម $V = \dfrac{1}{3}Bh$ តែ $B = S_{ABC} = a \cdot a = a^2$ (ការេ)

$h = 2a$ (កំពស់) $\Rightarrow V = \dfrac{1}{3} \times a^2 \cdot a \cdot 2$

ដូចនេះ $\boxed{V = \dfrac{2a^2}{3}}$

10.

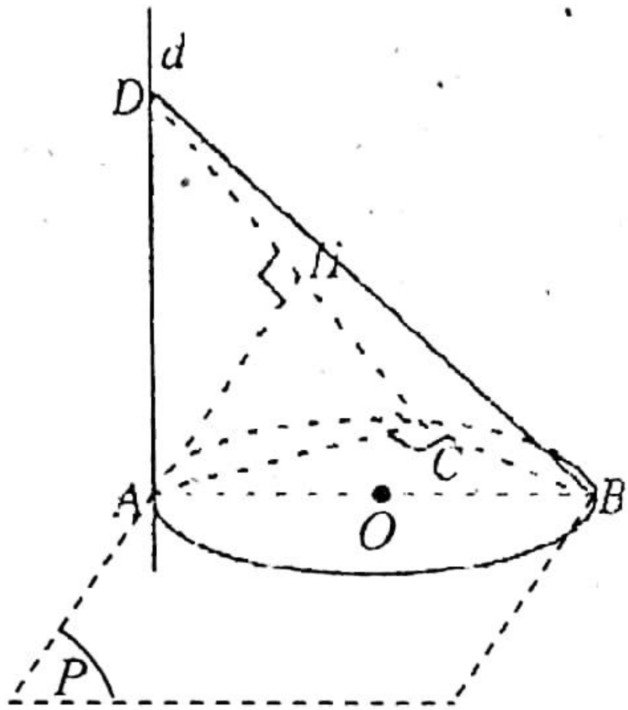
ក. $\left.\begin{array}{l} BC \perp AC \\ BC \perp AD \end{array}\right\} \Rightarrow BC \perp ACD$

ខ.តាមសំណួរ ក គេបាន

$\left.\begin{array}{l} BC \perp ACD \\ AH \subset ACD \end{array}\right\} \Rightarrow AH \perp BC$, $\left.\begin{array}{l} AH \perp BC \\ AH \perp CD \end{array}\right\} \Rightarrow AH \perp BCD$

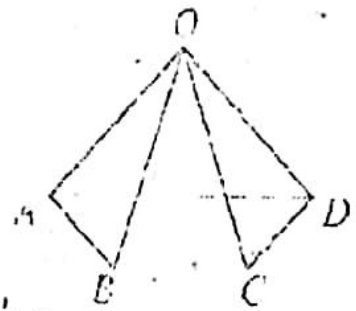
គ. $AB^2 = AC^2 + BC^2$ (ពីតាករ) $= AH^2 + HC^2 + CB^2$

(ព្រោះ $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HC}$ និង $\overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{CB}$)

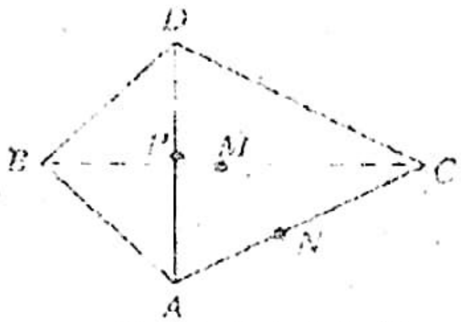


លំហាត់ជំពូក

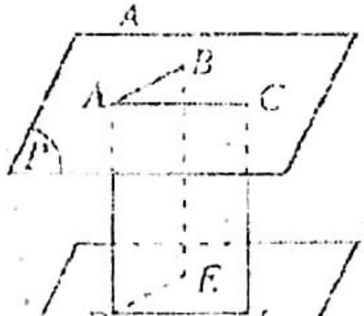
កំរិត 1



1. $OABCD$ ជាពីរ៉ាមីតកំពូល O ដូចក្នុងរូប ។ បន្ទាត់ដែលជាប្រសព្វរវាងប្លង់ OAB និង OCD កាត់ប្លង់ $ABCD$ ត្រង់ H ។ ចូរសង់រូប ដោយបំពេញបន្ថែមតាមសម្មតិកម្មដែលបានប្រាប់ ។



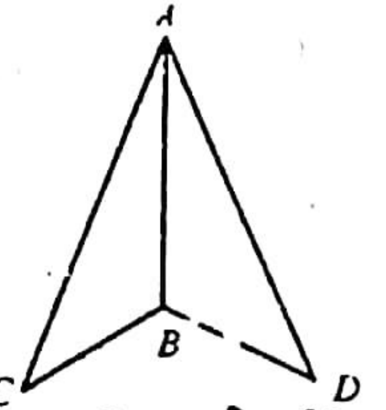
2. គេឲ្យចតុមុខ $ABCD$ មួយ ។ M, N និង P ជាចំណុចកណ្តាលរៀងគ្នានៃ BD, DC និង CA ។ កំណត់ប្រសព្វរវាងប្លង់ MNP និង DBC, DCA, ABD ។



3. ក្នុងរូបខាងស្តាំគេឲ្យប្លង់ P ស្រប នឹងប្លង់ Q $AD \parallel BE, CF \parallel BE$ បង្ហាញថា $\angle BAC = \angle EDF$ ។

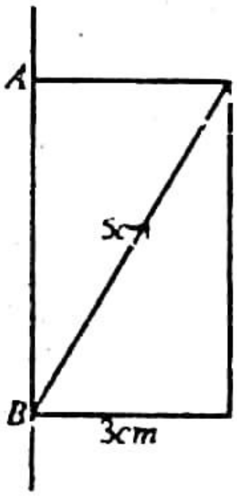
4. គេមានចតុមុខ $ABCD$ មួយ ។ I និង J ជាចំណុចកណ្តាលរៀងគ្នានៃទ្រនុង AB និង AC, K ស្ថិតនៅលើ AD ដែល $AK = \frac{2}{3}AD$ ។ បន្ទាត់ JK និង CD ប្រសព្វគ្នាត្រង់ E បន្ទាត់ IK និង BD ប្រសព្វគ្នាត្រង់ F ។ បង្ហាញថា $EF \parallel IJ$ ។

5.បើ $AB \perp BD$, $\angle ABD = \frac{2}{3}x + 56$, $\angle ABC = 2x - 10$ ។ តើ AB កែងនឹងប្លង់ BCD ឬទេ ?

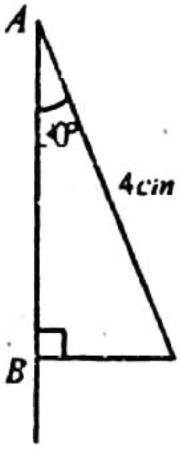


6.គណនាមាឌនៃសូលីដដែលបានមកពីការបង្វិលជុំវិញ AB ក្នុងរូបនីមួយៗខាងក្រោម ៖

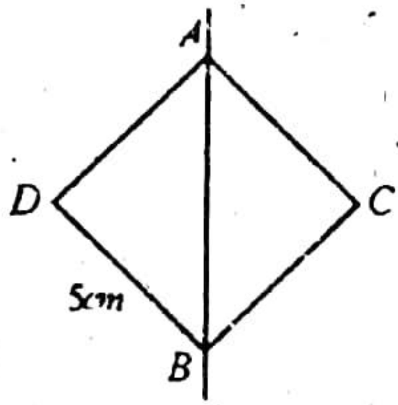
ក)



ខ)



គ) $ACBD$ ជាការេ



7. $OABC$ ជាតេត្រាអែតដែលមានមុំ AOB, BOC និង COA ជាមុំកែង ។ ក្នុងប្លង់ OBC យក I ជាចំណោលកែងនៃ O លើ BC ។ ក្នុងប្លង់ OAI យក H ជាចំណោលកែងនៃ O លើ AI ។ បង្ហាញថា៖ ក. AI ជាកម្ពស់មួយរបស់ត្រីកោណ ABC

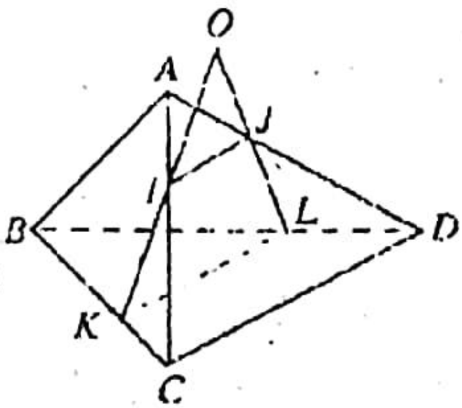
ខ. OH កែងនឹងប្លង់ ABC

កម្រិត 2

1.គេមានបន្ទាត់បី d_1, d_2, d_3 ដែលពីរមិនស្ថិតក្នុងប្លង់តែមួយ ។ បង្ហាញថាមានបន្ទាត់មួយកាត់តាមបន្ទាត់ទាំងបីនេះ ។

2.គេឲ្យបន្ទាត់ d ជាបន្ទាត់ប្រសព្វរវាងប្លង់ P និងប្លង់ Q ។ យក A ជាចំណុចនៅក្នុងប្លង់ P ។ B និង C ពីរចំណុចផ្សេងគ្នានៅក្នុងប្លង់ Q ។ ឧបមាថាចំណុច A, B, C មិនស្ថិតនៅលើបន្ទាត់ d ។ បង្ហាញថា A, B, C មិនរត់ត្រង់គ្នា ។

3.គេមានតេត្រាអែត $ABCD$ ហើយ I, J, K, L ជាចំណុចដែល $AI = \frac{1}{3}AC$, $AJ = \frac{1}{3}AD$, $BK = \frac{2}{3}BC$, $BL = \frac{2}{3}BD$ ដូចក្នុងរូប ។



ក.បង្ហាញថា ចតុកោណ $IJKL$ ជាចតុកោណព្នាញ

ខ.ចំណុច O ជាចំណុចប្រសព្វរវាងបន្ទាត់ KI និង LJ ។ បង្ហាញថា A, B, O ស្ថិតនៅលើបន្ទាត់តែមួយ ។

4.គេឲ្យបន្ទាត់ពីរ AB និង CD មិនស្ថិតនៅក្នុងប្លង់តែមួយ និងចំណុច M និង N ស្ថិតនៅលើ AB និង CD រៀងគ្នា ដែល $\frac{MA}{MB} = \frac{NC}{ND}$ ។ បង្ហាញថា MN ស្របនឹងប្លង់នឹងមួយ ។

5.គេឲ្យបន្ទាត់ AB នៃប្រលេឡូក្រាម $ABCD$ មួយស្ថិតនៅក្នុងប្លង់ P ។ តាមកំពូល D គេគូសបន្ទាត់ d ស្របនឹងប្លង់ P ។ បង្ហាញថា

ក.ប្លង់ P ស្របនឹងប្លង់ដែលកំណត់ដោយបន្ទាត់ d និង ចំណុច C

ខ.បង្ហាញថា d ស្របនឹងប្រសព្វនៃប្លង់ P និងប្លង់ដែលកំណត់ដោយបន្ទាត់ d និងចំណុច B ។

6.គេឲ្យ $ABCD$ ជាប្រលេឡូក្រាមនៅក្នុងប្លង់ P មួយ ។ O ជាចំណុចស្ថិតនៅក្រៅប្លង់ P ។

ក.កំណត់ប្រសព្វរវាងប្លង់ OAD និង OBC , OAC និង OBD ។

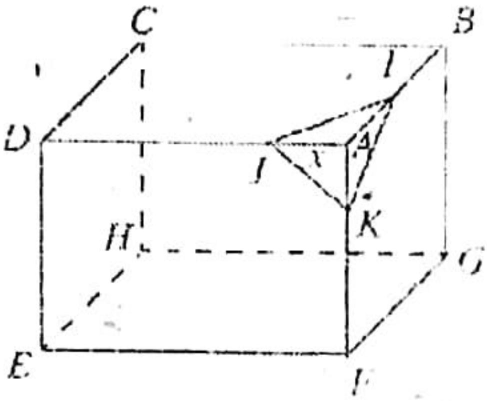
ខ. A' កណ្ដាល OA កំណត់ប្រសព្វរវាងប្លង់ $A'BC$ និង OAD , $A'BC$ និង ODC

7.គេឲ្យតេត្រាអែត $ABCD$ យក I, J, K, L, M និង N ជាចំណុចកណ្ដាលរៀងគ្នានៃ AC, AD, BC, BD, AB និង CD ។

ក.បង្ហាញថា $IJKL$ និង $MJNK$ ជាប្រលេឡូក្រាម ។ ទាញបង្ហាញថា អង្កត់ទ្រូងនៃប្រលេឡូក្រាមទាំងពីរនេះកាត់ត្រង់ចំណុច G មួយ ។

ខ. A_1 ជាទីប្រជុំទម្ងន់នៃត្រីកោណ BCD ។ បង្ហាញថា ABN , ACL និង ADK កាត់គ្នាតាមបន្ទាត់ AA_1 ដែលកាត់តាម G

8.គេមានគូបមួយដូចក្នុងរូប ដែល $AI = AJ = AK = x$ ។



ក.ប្រាប់ឈ្មោះត្រីកោណ IJK

ខ.គណនាមាឌនៃ $AIJK$ ជាអនុគមន៍នៃ x ។

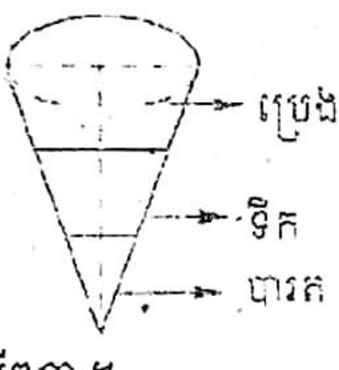
9.នៅក្នុងប្លង់ P មួយមានបន្ទាត់ស្របពីរ d និង d' ។ A ជាចំណុចស្ថិតនៅក្រៅប្លង់ P ដែលចំណោលកែងរបស់វាមកលើបន្ទាត់ d' បានចំណុច H' និងមកលើ D បានចំណុច H ។

ក.បង្ហាញថា d អរតូកូណាល់ទៅនឹងប្លង់ AHH'

ខ.បង្ហាញថា HH' កែងនឹង d

គ.បើ K ជាចំណោលនៃ A មកលើបន្ទាត់ HH' បង្ហាញថា AK កែងនឹងប្លង់ P ។

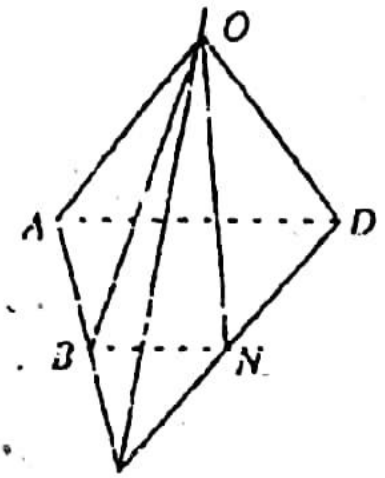
10.គេមានកែវមួយមានរាងកោន គេចាក់បារត (ដង់ស៊ីតេ 13.59) ទឹក (ដង់ស៊ីតេ 1) និងប្រេង (ដង់ស៊ីតេ 0.915) បន្តបន្ទាប់គ្នា ។ អង្គធាតុរាវទាំងបីចាក់បំពេញកែវដោយមិនចូលគ្នា ដែលបង្កើតនូវស្រទាប់បីផ្សេងគ្នា ហើយមានកម្រាស់ស្មើៗគ្នា ។ តើម៉ាសនៃអង្គធាតុមួយណាធំជាងគេ ។



ដំណោះស្រាយ

កំរិត 1

1.

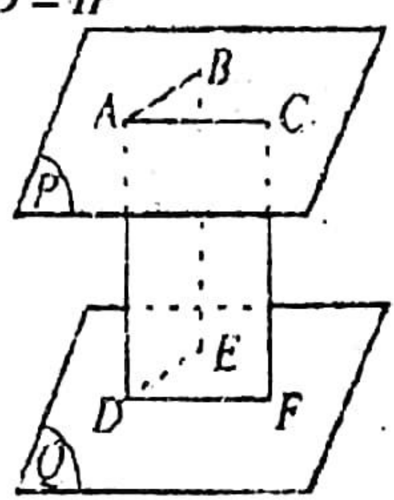


2.កំណត់ប្រសព្វរវាងប្លង់ MNP និង DBC, DCA, ABD

+ដោយ $\left.\begin{matrix} MI \in MNP \\ MI \in DBC \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow MNP \cap DBC = MI$

+ដោយ $\left.\begin{matrix} NP \in MNP \\ NP \in DCA \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow MNP \cap DCA = NP$

+ដោយ $\left.\begin{matrix} IP \in MNP \\ IP \in ABD \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow MNP \cap ABD = IP$



3.បង្ហាញថា $\angle BAC = \angle EDF$

ដោយ $AD // BE \Rightarrow AD = BE$

គេបាន $AB // DE$ (1)

$CF // BE \Rightarrow CF = BE$

គេបាន $AC // DF$ (2)

តាម $(1) \& (2) \Rightarrow \angle BAC = \angle EDF$

ដូចនេះ: $\boxed{\angle BAC = \angle EDF}$

4.បង្ហាញថា $EF // IJ$

ដោយ $ABCD$ ជាចតុមុខ នាំអោយ J ជាចំនោលកែងលើ I

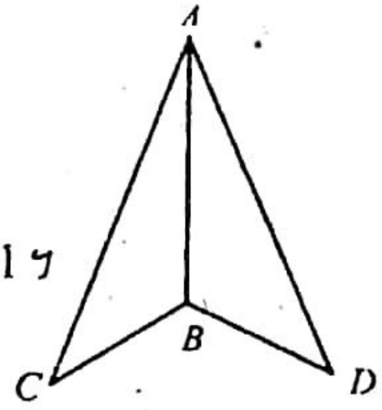
គេបាន $IJ \perp ABCD$ នោះ $IJ // BC$ (1)

$$\left.\begin{array}{l} EF \in KFE \\ EF \in DFE \end{array}\right\} \Rightarrow KFE \cap DFE = EF$$

តែ $EF // BC$ (2)

តាម $(1) \& (2): \left\{\begin{array}{l} IJ // BC \\ EF // BC \end{array}\right| \Rightarrow IJ // EF$

ដូចនេះ: $\boxed{IJ // EF}$



5. AB មិនកែងទីងបួង់ BCD ទេ ។

ព្រោះ: $\left.\begin{array}{l} ABD = \dfrac{2}{3}x + 56 \\ \angle ABC = 2x - 10 \end{array}\right| \Rightarrow \dfrac{2}{3} = \dfrac{4}{3} \neq -1$ ។

6.គណនាមាឌនៃស៊ីឡាំង

ក.តាម $V = \pi r^2 h$

តែ $h = AB = \sqrt{25-9} = 4$, $r = 3cm$

$\Rightarrow V = \pi \cdot 9 \cdot 4 = 36\pi$ ដូចនេះ: $\boxed{V = 36\pi}$

ខ.តាម $V=\frac{1}{3}\pi r^2 h$

តែ $h=AB=\cos 30^\circ\cdot 4=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 4=2\sqrt{3}$

$r^2=4^2-\left(2\sqrt{3}\right)^2=16-12=4$

$\Rightarrow V=\frac{1}{3}\cdot\pi\cdot 4\cdot 2\sqrt{3}$ ដូចនេះ $\boxed{V=\frac{1}{3}8\pi\sqrt{3}}$

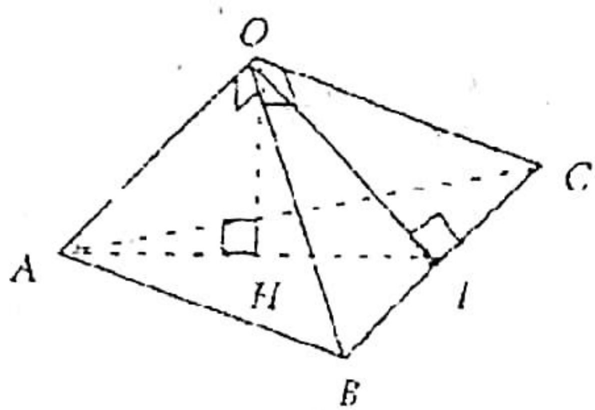
គ.តាម $V=\frac{1}{3}\pi r^2 h$ ដោយ $ABCD$ ជាការេ

$\Rightarrow h=AB=5\sqrt{2}$ (អង្កត់ទ្រូងការេ), $r=\frac{DC}{2}=\frac{AB}{2}=\frac{5\sqrt{6}}{2}$

$\Rightarrow r^2=\frac{25\cdot 2}{4}=\frac{25}{2}$ គេបាន $V=\frac{1}{3}\pi\cdot\frac{25}{2}\cdot 5\sqrt{2}$

$\boxed{V=\frac{125\pi\sqrt{2}}{6}}$

7.



ក. $\left.\begin{array}{l}AO\perp OB\\ AO\perp OC\end{array}\right\}\Rightarrow AO\perp OBC$ $\left.\begin{array}{l}AO\perp OBC\\ BC\perp OBC\end{array}\right\}\Rightarrow AO\perp BC$

$\left.\begin{array}{l}BC\perp AO\\ BC\perp OI\end{array}\right\}\Rightarrow BC\perp AOI$ $\left.\begin{array}{l}BC\perp AOI\\ AI\perp AOI\end{array}\right\}\Rightarrow AI\perp BC$

ខ. $\left.\begin{array}{l} BC \perp AOI \\ BC \perp AOI \end{array}\right\} \Rightarrow OH \perp BC$ $\left.\begin{array}{r} OH \perp BC \\ OH \perp AI \\ AI \subset ABC \end{array}\right\} \Rightarrow OH \perp ABC$

កំរតិ 2

1.តាមសម្មតិកម្មនាំឲ្យមានប្លង់ P មួយកាត់តាមបន្ទាត់ d_1 តែមិនស្របទៅនឹងបន្ទាត់ d_2, d_3 នោះ P ត្រូវកាត់ d_2 និង d_3 តាមពីរចំណុចដែលតាងដោយ A និង B រៀងគ្នា ។ ដូចនេះគេបានបន្ទាត់ AB ស្ថិតនៅក្នុងប្លង់ P ហើយកាត់តាម d_1 ។

2.តាមសម្មតិកម្ម គេបានបន្ទាត់ BC ស្ថិតនៅក្នុងប្លង់ Q ។ ឧបមាថា A, B និង C ស្ថិតនៅលើបន្ទាត់តែមួយ នោះ A ក៏នៅក្នុងប្លង់ Q ដែរ គឺផ្ទុយពីសម្មតិកម្មដែលថា A មិនស្ថិតនៅក្នុងប្លង់ Q ។
ដូច្នេះ A, B និង C មិនស្ថិតនៅលើបន្ទាត់តែមួយ ។

3.ក.បង្ហាញថាចតុកោណ $IJKL$ ជាចតុកោណព្នាយ

គេបាន $\begin{cases} AI = \dfrac{1}{3}AC \ (1) \ ; \ AJ = \dfrac{1}{3}AD \ (2) \\ BK = \dfrac{2}{3}BC \ (3) \ ; \ BL = \dfrac{2}{3}BD \ (4) \end{cases}$

យក $\dfrac{(1)}{(2)} \Leftrightarrow \dfrac{AI}{AJ} = \dfrac{\frac{1}{3}AC}{\frac{1}{3}AD} \Leftrightarrow \dfrac{AI}{AJ} = \dfrac{AJ}{AD} \Rightarrow IJ \,//\, CD \ (*)$

$$\frac{(3)}{(4)} \Leftrightarrow \frac{BK}{BL} = \frac{\frac{2}{3}BC}{\frac{2}{3}BD} \Leftrightarrow \frac{BK}{BC} = \frac{BL}{BD} \Rightarrow KL // CD \ (**)$$

តាម $(*) \& (**) \left.\begin{matrix} IJ // CD \\ KL // CD \end{matrix}\right\} \Rightarrow IJ // KL$

ម្យ៉ាងទៀត $\frac{CI}{CA} \neq \frac{CK}{CB} \Rightarrow IK$ មិនស្របទៅនឹង AB ។

ដូចគ្នាដែរ JL មិនស្របទៅនឹង AB ។ គេបាន IK មិនស្របទៅនឹង JL ។

ដូចនេះ: $\boxed{IJKL \text{ ជាចតុកោណព្នាយ}}$

ខ. $JL \in ABD \Rightarrow O \in ABD$,

$IK \in ABC \Rightarrow O \in ABC$ ។

ដូចនេះ: ប្លង់ ABD និង ABC មាន A, B, O ជាចំណុចរួម ។

គេបានបីចំណុចនេះស្ថិតនៅលើបន្ទាត់តែមួយ ដែលជាប្រសព្វរវាងប្លង់ ABD និង ABC ។

4. $\frac{MA}{MB} = \frac{NC}{ND} \Rightarrow \frac{MA}{NC} = \frac{MB}{ND} = \frac{MA+MB}{NC+ND} = \frac{AB}{CD}$

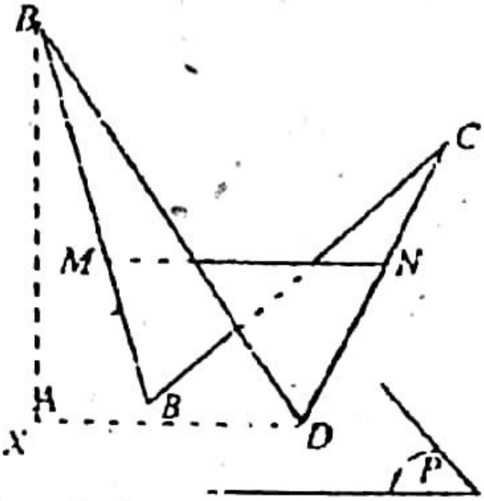
ដោយ AB និង CD មិនស្ថិតនៅក្នុងប្លង់តែមួយ និង $\frac{AM}{CN} = \frac{MB}{ND} = \frac{AB}{CD}$ នាំឲ្យមានប្លង់ P មួយដែលស្របទៅនឹង AC, MN, BD ។

តាម D គូសបន្ទាត់ DX ដែល $DX \parallel AC$ ហើយ DX ទីង

ពីព្រោះ AC នឹង ។ គេបានប្លង់ BDX ជាប្លង់នឹងមួយ ។

$\left.\begin{matrix} DX \parallel AC \\ P \parallel AC \end{matrix}\right\} \Rightarrow DX \parallel P$, $\left.\begin{matrix} MN \parallel P \\ P \parallel BDX \end{matrix}\right\} \Rightarrow P \parallel BDX$

$\left.\begin{matrix} DX \parallel AC \\ P \parallel AC \end{matrix}\right\} \Rightarrow MN \parallel BDX$



5.ក. $\left.\begin{matrix} CD \parallel AB \\ AB \subset P \end{matrix}\right\} \Rightarrow CD \parallel P$

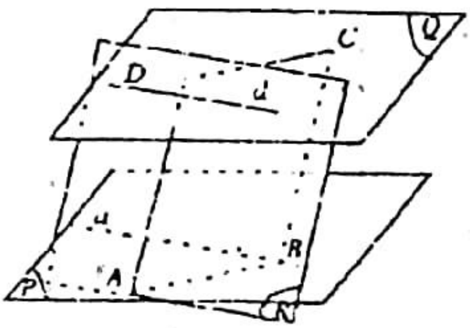
$\left.\begin{matrix} CD \parallel P \\ d \parallel P \end{matrix}\right\} \Rightarrow Q \parallel P$

ដែល Q ជាប្លង់ដែលកំណត់ដោយបន្ទាត់ d និង c

ខ.ឧបមាថា d និង B កំណត់បាន $\mathbb{R}$ មួយ

$Q \cap R = d$ និង $Q \cap P = a$ ដែល a កាត់តាម B

$\left.\begin{matrix} Q \cap R = d \\ R \cap P = a \\ Q \parallel P \end{matrix}\right\} \Rightarrow a \parallel d$



ដូចនេះ: $\boxed{d \parallel P}$

6.ក.កំណត់ប្រសព្វរវាងប្លង់ OAD និង OBC , OAC និង OBD

+រក $OAD \cap OBC$ តាម $\left.\begin{matrix} a \in OAD \\ a \in OBC \end{matrix}\right\} \Rightarrow OAD \cap OBC = a$

ដែល a កាត់តាម O រួចស្របទៅនឹង BC

+រក $OAC \cap OBD$ ដោយ $\left.\begin{matrix} OI \in OAC \\ OI \in OBD \end{matrix}\right\} \Rightarrow OAC \cap OBD = OI$

ដែល I ជាចំនុចប្រសព្វរវាង AC និង BD

ខ.កំនត់ប្រសព្វរវាងប្លង់

+ $A'BC \cap OAD$ តាង D' កណ្ដាល OD

ដោយ A' កណ្ដាល OA

គេបាន $\left.\begin{matrix} A'D' \in A'BC \\ A'D' \in OAD \end{matrix}\right\} \Rightarrow A'BC \cap OAD = A'D'$

+ $A'BC \cap ODC$ គេបាន $\left.\begin{matrix} CD' \in A'BC \\ CD' \in ODC \end{matrix}\right\} A'BC \cap ODC = CD'$

ដូចនេះ $\boxed{\begin{matrix} A'BC \cap OAD = A'D' \\ A'BC \cap ODC = CD' \end{matrix}}$

7.ក. $IJ \parallel CD, KL \parallel CD \Rightarrow IJ \parallel KL$

$KI \parallel AB, LJ \parallel AB \Rightarrow KI \parallel LJ$

ចតុកោណព្នាយ $IJLK$ ជាប្រលេឡូក្រាម ។ដូចគ្នាដែរគេបាន

$NJ \parallel AC, MK \parallel AC \Rightarrow NJ \parallel MK$

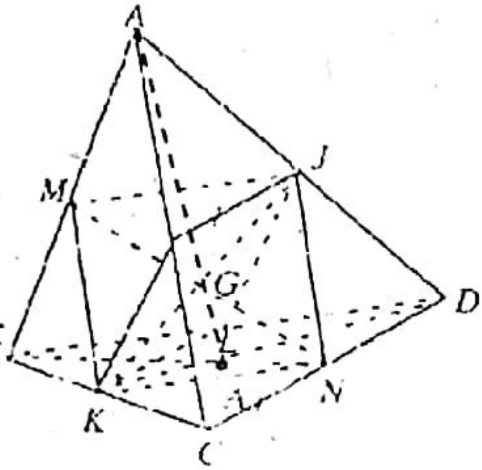
$MJ \parallel BD, KN \parallel BD \Rightarrow MJ \parallel KN$

+ចតុកោណ $MJNK$ ជាប្រលេឡូក្រាម ។

ក្នុងប្រលេឡូក្រាម $MJNK$ មានចំណុចកណ្ដាលមួយតាងដោយ G ។ ឧបមាថាប្រលេឡូក្រាម $IJLK$ មានចំណុចកណ្ដាលមួយផ្សេង

ទៀតតាង់ដោយ G នោះគេបាន G' កណ្ដាល KJ តែ G កណ្ដាល KJ ។ដូច្នេះ G និង G' ជាចំណុចតែមួយ ។

ខ.នៅក្នុងប្លង់ ABN ; ACL និង ADK មានចំណុច A_1, A, G ដូចគ្នា ដូចនេះចំណុចទាំងបីនេះជាចំណុចរួមនៃបង់ទាំងបី ។



8.ក.ប្រាប់ឈ្មោះ ΔIJK

តាមរូបមន្តយើងមាន $AI = AJ = AK = x$

ដូចនេះ $\boxed{IJK \text{ ជាត្រីកោណសម័ង្ស}}$

ខ.គណនាមាឌនៃ $AIJK$ ជាអនុគមន៍នៃ x

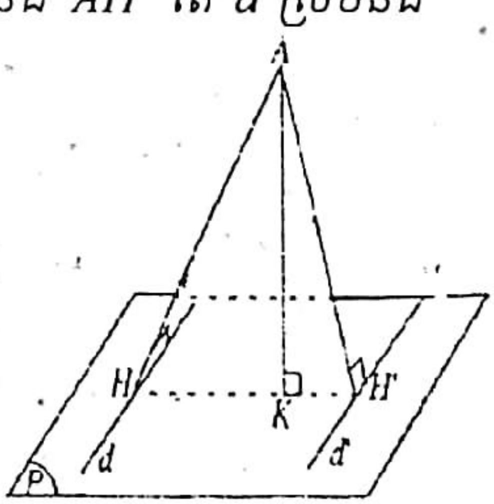
តាម $V = \dfrac{1}{3}Bh$ តែ $h = AI = x$

$B = S_{AKJ} = \dfrac{x \cdot x}{2} = \dfrac{x^2}{2}$ (ព្រោះ AKJ ត្រីកោណកែងត្រង់ A)

$\Rightarrow V = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{x^2}{2} \cdot x$ ដូចនេះ $\boxed{V = \dfrac{x^3}{6}}$

9.ក. d កែងទៅនឹង AH ,d' កែងទៅនឹង AH' តែ d ស្របនឹង d' នោះ d កែងនឹង AH' ។

ដូច្នេះ d កែងនឹង AH' ។



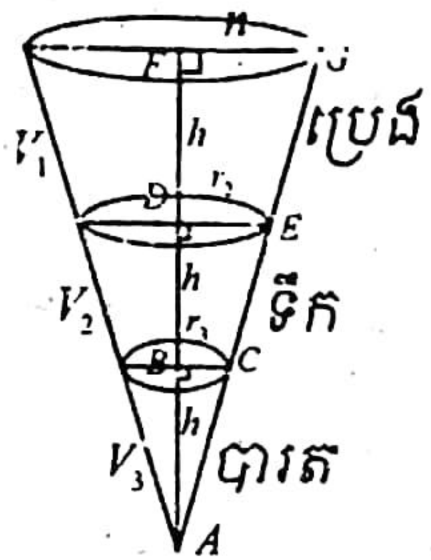
ខ. $\left.\begin{array}{l} d \perp AHH' \\ HH' \subset AHH' \end{array}\right\} \Rightarrow d \perp HH'$

គ. $\left.\begin{array}{l} d \perp AHH' \\ AK \subset AHH' \end{array}\right\} \Rightarrow d \perp AK$

តាមសំនួរ ក គេបាន d' កែងនឹងប្លង់ AH'

គេបាន $\left.\begin{array}{l} d' \perp AHH' \\ AK \subset AHH' \end{array}\right\} \Rightarrow d \perp AK$

ដូច្នេះ $\boxed{AK \perp P}$ ។



10.រកម៉ាសនៃអង្គធាតុដែលជំវាងគេ

តាង V_m, V_e, V_h ជាមាឌបារត.

មាឌទឹកនិងមាឌប្រេងរៀងគ្នា

ក្នុងត្រីកោណ AFG កែងត្រង់ F

ហើយ $[FG]//[DE]//[BC]$

តាមតាលែសគេបាន៖

$+\ \dfrac{AB}{AD}=\dfrac{BC}{DE}$ នោះ $\dfrac{h}{2h}=\dfrac{r_3}{r_2}$ នាំឲ្យ $r_2=2r_3$ (1)

$+\dfrac{AB}{AF}=\dfrac{BC}{FG}$ នោះ $\dfrac{h}{3h}=\dfrac{r_3}{r_1}$ នាំឲ្យ $r_1=3r_3$. (2)

គេបាន $V_m=\dfrac{1}{3}\pi r_3^2 h$ ដោយ $V_m+V_e=V_2=\dfrac{1}{3}\pi r_2^2\cdot(2h)$

$$V_m+V_e=\frac{1}{3}\pi(2r_3)^2\cdot 2h$$

$$V_m+V_e=8\cdot\frac{1}{3}\pi r_3^2 h$$

$V_m+V_e=8V_m$ គេបាន $V_e=7V_m$

ហើយ $V_m + V_c + V_h = V_1 = \frac{1}{3}\pi r_1^2 \cdot (3h)$

$$V_m + V_c + V_h = V_1 = \frac{1}{3}\pi (3r_3)^2 \cdot (3h)$$

$$V_m + V_c + V_h = 27 \cdot \frac{1}{3}\pi r_3^2 h$$

$$V_m + V_c + V_h = 27V_m$$

$$V_c + V_h = 26V_m$$

$$V_h = 26V_m - 7V_m$$

$$V_h = 19V_m$$

ដោយ $V_c = 7V_m , V_h = 19V_m$

ម៉ាសបារត=ដង់ស៊ីតេ $\times V_m = 13,59V_m$

ម៉ាសទឹក=ដង់ស៊ីតេទឹក $\times V_c = 1 \cdot V_c = 7V_m$

ម៉ាសប្រេង=ដង់ស៊ីតេប្រេង $\times V_h = 0,915 \times 19V_m = 17,385V_m$

ដូចនេះ ម៉ាសប្រេងជាអង្គធាតុដែលមានម៉ាសធំជាគេ