ហាមលក់

ក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា

គណិតវិទ្យា

កំរិតមូលដ្ឋាន

១១

កំណែ

គ្រឹះស្ថានបោះពុម្ពនិងចែកផ្សាយ

ជំពូកទី1 ស្វ៊ីត

មេរៀនទី1 **ស្វ៊ីតចំនួនពិត**

លំហាត់

1.សរសេរបីតួបន្ទាប់នៃស្វ៊ីតខាងក្រោម:

ក, 5,10,15,20,... ខ, 1,5,14,30,55,...

2.សរសេរតួនៃស្វ៊ីតរាប់អស់ខាងក្រោម:

ក, $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$ ចំពោះ $1 \le n \le 8$

ខ, $b_n = (2)^{-n+2}$ ចំពោះ $1 \le n \le 5$

3.សរសេរបួនតួនៃស្វ៊ីតរាប់អស់ខាងក្រោម:

ក, $a_n = \dfrac{(-1)^{2n}}{n^2}$ ខ, $b_n = \dfrac{1}{n^2+n}$

គ, $c_n = (-1)^n (n-2)^2$ ឃ $d_n = (-1)^n 2^{n-1}$

4.កំណត់តួទី n ចំពោះគ្រប់ $n \in \mathbb{N}$ នៃស្វ៊ីតខាងក្រោម:

ក, 5,7,9,11,13,... ខ, $-3,-1,1,3,5,...$

គ, 16,13,10,7,4,... ឃ, $\dfrac{3}{2},\dfrac{3}{5},\dfrac{4}{7},\dfrac{5}{9},...$

5.បង្ហាញថាស្វ៊ីត (a_n) ដែល $a_n=\frac{1}{3+n}$ ជាស្វ៊ីតចុះ ។

6.បង្ហាញថាស្វ៊ីត (b_n) ដែល $b_n=\frac{2n+1}{n+3}$ ជាស្វ៊ីតកើន ។

7.សិក្សាភាពម៉ូណូតូននៃស្វ៊ីតដែលកំណត់ដូចខាងក្រោម:

ក, ស្វ៊ីត $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ដែល $a_n=\frac{1}{n}$ ខ, ស្វ៊ីត (a_n) ដែល $a_n=n^2-4n-5$

គ, ស្វ៊ីត $(a_n)\geq 4$ ដែល $a_n=n-4\ell n(n)$ ឃ, ស្វ៊ីត a_n ដែល $a_{n+1}=a_n^2$ និង $a_0=2$

8.បង្ហាញថាស្វ៊ីត (a_n) ដែល $a_n=\sqrt{n^2+1-n}$ ជាស្វ៊ីតទាល់ ។

9.តើស្វ៊ីតខាងក្រោមជាស្វ៊ីតទាល់ឬទេ ?

ក,ស្វ៊ីត $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ដែល $(a_n)=\frac{n^3+2n^2-1}{n^2+n}$

ខ, ស្វ៊ីត $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ដែល $b_n=\frac{\pi}{n}$

គ, ស្វ៊ីត (c_n) ដែល $c_n=\frac{n+1}{n+3}$

10.តើបណ្តាស្វ៊ីតខាងក្រោមមួយណាជាស្វ៊ីតទាល់លើ ទាល់ក្រោម និងជាស្វ៊ីតទាល់ ? រួចរកគោលនៃស្វ៊ីតនីមួយៗ ។

ក, $a_n = \dfrac{n^3+2n^2-1}{n^2+n}, n \geq 1$

ខ, $a_n = \dfrac{e^n}{n^2+3n-4}, n \geq 2$

11.គេមានស្វ៊ីត (a_n) ដែល n ជាចំនួនគត់ហើយ $a_0 = 0$ និង

$a_{n+1} = a_n^2 + a_n + 1$

ក,បង្ហាញថាស្វ៊ីត (a_n) ដែល n ជាចំនួនគត់ ជាស្វ៊ីតកើន ។

ខ, បង្ហាញថាចំពោះគ្រប់ $n, a_n \geq n$ ។

ដំណោះស្រាយ

1.សរសេរបីតួបន្ទាប់នៃស្វ៊ីតខាងក្រោម៖

ក, 5,10,15,20,25,30,35,...

ខ, 1,5,14,30,55,...

2.សរសេរតួនៃស្វ៊ីតរាប់អស់ខាងក្រោម៖

ក, $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$ ចំពោះ $1 \leq n \leq 8$ គេបាន៖

$a_1 = \dfrac{(-1)^1}{1} = -1$, $a_2 = \dfrac{(-1)^2}{2} = \dfrac{1}{2}$, $a_3 = \dfrac{(-1)^3}{1} = \dfrac{1}{3}$,

$a_4 = \dfrac{(-1)^4}{4} = \dfrac{1}{4}$

$a_5=-\frac{1}{5}, a_6=\frac{1}{6}, a_7=-\frac{1}{7}, a_8=\frac{1}{8}$

ខ, $b_1=2^{-1+2}=2, b_2=2^{-2+2}=1, b_3=2^{-3+2}=\frac{1}{2}$

$b_4=2^{-4+2}=2^{-2}=\frac{1}{4}, b_5=2^{-5+2}=2^{-3}=\frac{1}{8}$ ។

3.សរសេរបួនតួនៃស្វ៊ីតរាប់អស់ខាងក្រោមៈ

ក, $a_n=\frac{(-1)^{2n}}{n^2}$ គេបានៈ

$$a_1=\frac{(-1)2}{1^2}=1, a_2=\frac{(-1)^4}{2^2}=\frac{1}{4}, a_3=\frac{(-1)^6}{3^2}=\frac{1}{9}$$

និង $b_4=\frac{(-1)^8}{2^4}=\frac{1}{16}$

ខ, $b_n=\frac{1}{n^2+n}, n\in\mathbb{N}^*$ គេបានៈ

$$b_1=\frac{1}{1^2+1}=\frac{1}{2}, b_2=\frac{1}{2^2+2}=\frac{1}{6}, b_3=\frac{1}{3^2+3}=\frac{1}{12},$$

$$b_4=\frac{1}{4^2+4}=\frac{1}{20}$$

គ, $c_n=(-1)^n(n-2)^2$ គេបានៈ

ាង (V_n) ជាតួទី n នៃស្វ៊ីតនេះ

គមាន:

$V_1 = -3 = 2\times1-5$

$V_2 = -1 = 2\times2-5$

$V_3 = 1 = 2\times3-5$

$V_4 = 3 = 2\times4-5$

$V_5 = 5 = 2\times5-5$

....

....

ចនេះ: $\boxed{V_n = 2n-5; n \geq 1}$

$16, 13, 10, 7, 4, \ldots$

ង (W_n) ជាតួទី n នៃស្វ៊ីតនេះគេបាន

$W_1 = 16 = -3\times1+19$

$W_2 = 13 = -3\times2+19$

$W_3 = 10 = -3\times3+19$

$W_4 = 7 = -3\times4+19$

$W_5 = 4 = -3\times5+19$

....

....

ដូចនេះ $\boxed{W_n = -3n + 19, n \geq 1}$

ឃ, $\frac{2}{3}, \frac{3}{5}, \frac{4}{7}, \frac{5}{9}, \ldots$

តាង (T_n) ជាតួទី n នៃស្វ៊ីតនេះ

គេមាន:

$$T_1 = \frac{2}{3} = \frac{1+1}{2\times1+1}$$

$$T_2 = \frac{3}{5} = \frac{2+1}{2\times2+1}$$

$$T_3 = \frac{4}{7} = \frac{3+1}{2\times3+1}$$

$$T_4 = \frac{5}{90} = \frac{4+1}{2\times4+1}$$

....

....

ដូចនេះ $\boxed{T_n = \frac{n+1}{2n+1}, n \geq 1}$

5.បង្ហាញថា (a_n) ជាស្វ៊ីតចុះ

គេមាន: $a_n = \frac{1}{n+3} \Rightarrow a_{n+1} = \frac{1}{n+4}$

នោះគេបាន $a_{n+1}-a_n=\frac{1}{n+4}-\frac{1}{n+3}$

$$=\frac{n+3-n-4}{(n+4)(n+3)}=-\frac{1}{(n+4)(n+3)}<0, n\in\mathbb{N}$$

$$\Rightarrow a_{n+1}<a_n$$

ដូចនេះ (a_n) ជាស្វីតចុះ

6.បង្ហាញថា (b_n) ជាស្វីតកើន

គេមាន: $b_n=\frac{2n+1}{n+3}\Rightarrow b_{n+1}=\frac{2n+3}{n+4}$ គេបាន:

$$b_{n+1}-b_n=\frac{2n+3}{n+4}-\frac{2n+1}{n+3}$$

$$=\frac{(n+3)(2n+3)-(n+4)(2n+1)}{(n+4)(n+3)}$$

$$=\frac{2n^2+9n+9-2n^2-9n-4}{(n+4)(n+3)}$$

$$=\frac{5}{(n+4)(n+3)}>0, \forall n\in\mathbb{N}\Rightarrow b_{n+1}>b_n$$

ដូចនេះ (b_n) ជាស្វីតកើន

7.សិក្សាភាពម៉ូណូតូននៃស្វីត

$c_0=(-1)^0(-2)^2=4$, $c_1=-1(-1)^2=-1$,

$c_2=(-1)^2(2-2)^2=0, c_3=(-1)^3(3-2)^2=-1$

ឃ, $d_n=(-1)^n 2^{n-1}$ គេបាន:

$d_0=(-1)^0.2^{-1}=\frac{1}{2}, d_1=(-1)2^0=-1,$

$d_2=(-1)^2.2^{2-1}=2$, $d_3=(-1)^3.2^{3-1}=-4$

4.ក, $5,7,9,11,13,\ldots$

តាង (u_n) ជាស្ទីតតួទី n នៃស្ទីតនេះ

គេមាន:

$u_1=5=2\times2+1$

$u_2=7=2\times3+1$

$u_3=9=2\times4+1$

$u_4=11=2\times5+1$

$u_5=13=2\times6+1$

....

....

តាមលំនាំគំរូនេះគេបាន $\boxed{u_n=2(n+1)+1\ , n\geq1}$

ខ, $-3,-1,1,3,5,\ldots$

ក, ស្វ៊ីត $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ដែល $a_n=\dfrac{1}{n}$

$\Rightarrow a_{n+1}=\dfrac{1}{n+1}$ គេបាន:

$$a_{n+1}-a_n=\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}=\frac{n-n-1}{n(n+1)}=-\frac{1}{n(n+1)}<0;$$

$\forall n\geq 1\Rightarrow a_{n+1}<a_n$

ដូចនេះ (a_n) ជាស្វ៊ីតម៉ូណូតូន

ខ, $a_n=n^2-4n-5\Rightarrow a_{n+1}=(n+1)^2-4(n+1)-5$

$=n^2+2n+1-4n-4-5=n^2-2n-8$

គេបាន: $a_{n+1}-a_n=n^2-2n-8-n^2+4n+5$

$\Rightarrow a_{n+1}\geq a_n\ ;\forall n\in\mathbb{N}, n\geq 2$

ដូចនេះ (a_n) ជាស្វ៊ីតម៉ូណូតូនចំពោះ $n\geq 2$

ឃ, ស្វ៊ីត (a_n) ដែល $a_{n+1}=a_n^2$ និង $a_0=2$

គេបាន: $a_1=a_0^2=2^2=4$

$a_2=a_1^2=4^2=16$

$a_3=a_2^2=16^2=256$

....

$a_{n+1}=a_n^2$

គេសង្កតឃើញថា: $a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < \ldots < a_n$

ដូចនេះ (a_n) ជាស្វីតម៉ូណូតូន

8.បង្ហាញថា (a_n) ជាស្វីតទាល់

គេមាន $a_n = \sqrt{n^2+1} - n$

$\forall n \in \mathbb{N}$ គេបាន $a_n > 0 \ (1)$

ម្យ៉ាងទៀត $\sqrt{n^2+1} - n \le 1, \forall n \in \mathbb{N} \ (2)$

តាម (1) & (2) គេបាន $0 < a_n \le 1$

ដូចនេះ (a_n) ជាស្វីតទាល់

9.តើស្វីតខាងក្រោមជាស្វីតទាល់រឺ ទេ ?

ក, $a_n = \dfrac{n^3+2n^2-1}{n(n+1)}, \forall n \in \mathbb{N}^*$

$$= \frac{n^3+n^2+n^2-1}{n(n+1)} = \frac{n^2(n+1)+(n-1)(n+1)}{n(n+1)}$$

$$= \frac{(n+1)(n^2+n-1)}{n(n+1)} = \frac{n^2+n-1}{n} \ge 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

$\Rightarrow a_n \ge 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$

$\Rightarrow (a_n)$ ជាស្វីតទាល់ក្រោមតែ (a_n) មិនទាល់លើ

ដូចនេះ (a_n) ជាស្វ៊ីតមិនទាល់

ខ, $b_n = \frac{\pi}{n}, \forall n \in \mathbb{N}^*$

គេមាន $0 < \frac{\pi}{n} \leq \pi, \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow 0 < b_n \leq \pi, \forall n \in \mathbb{N}^*$

ដូចនេះ (b_n) ជាស្វ៊ីតទាល់

គ, $c_n = \frac{n+1}{n+3}, \forall n \in \mathbb{N}$

$+\forall n \in \mathbb{N}$ គេបាន $c_0 \geq 0$ (1)

$+\frac{n+1}{n+3} = \frac{n+3-2}{n+3} = 1 - \frac{2}{n+3} \leq 1, \forall n \in \mathbb{N}$ (2)

តាម(1)&(2) គេបាន $0 \leq c_n \leq 1, \forall n \in \mathbb{N}$

ដូចនេះ (c_n) ជាស្វ៊ីតទាល់

10.តើបណ្ដាស្វ៊ីតខាងក្រោមមួយណាជាស្វ៊ីតទាល់លើ ទាល់ក្រោម និងជាស្វ៊ីតទាល់ ? រួចរកគោលនៃស្វ៊ីតនីមួយៗ ។

ក, $a_n = \frac{n^3 + 2n^3 - 1}{n^2 + n}, \forall \in \mathbb{N}^*$

តាមលំហាត់លេខ (៩) សំនួរ (ក) គេបាន: $a_n \geq 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$

គេបាន (a_n) ជាស្វ៊ីតទាល់ក្រោមហើយចំនួនទាល់ក្រោមគឺ $N = 1$ ។

ខ, $a_n = \frac{e^n}{n^2+3n-4}, n \geq 2$

+$\forall n \geq 2$ គេបាន $\frac{e^n}{n^2+3n-4} \geq \frac{e^2}{6} \Rightarrow a_n \geq \frac{e}{6}$

ដូចនេះ (a_n)

ជាស៊ីតទាល់ក្រោមហើយចំនួនទាល់ក្រោមគឺ $\frac{e^2}{6}$ ។

11.ក,បង្ហាញថា (a_n) ជាស៊ីតកើន

គេមាន $a_{n+1} = a_n^2 + a_n + 1$ និង $a_0 = 1$

គេបាន $a_1 = a_0^2 + a_0 + 1 = 1+1+1 = 3$

$a_2 = a_1^2 + a_1 + 1 = 3^2 + 3 + 1 = 13$

$a_3 = a_2^2 + a_2 + 1 = 13^2 + 13 + 1 = 183$

$a_4 = a_3^2 + a_3 + 1 = 183^2 + 183 + 1 = 33673$

....

....

ដូចនេះ (a_n) ជាស៊ីតកើន

ខ,បង្ហាញថាចំពោះគ្រប់ $n, a_n \geq n$

យើងនឹងស្រាយបញ្ជាក់តាមវិធារកំណើន

+ចំពោះ $n=0$ គេបាន $a_0 = 1 > 0$ ពិត

+ឧបមាថាពិតដល់ $n=k$ គឺ $a_k \geq k$ ពិត

+យើងនឹងស្រាយថាពិតដល់ $n=k+1$

គេមាន: $a_k \geq k \Leftrightarrow a_k + a_k + 1 \geq a_k^2 + k + 1 \geq k$

$\Leftrightarrow a_{k+1} \geq k$ ពិត

ដូចនេះ: $a_n \geq n, \forall n \in \mathbb{N}$

មេរៀនទី2 ស្វ៊ីតនព្វន្ត

លំហាត់

1.សរសេររូបមន្តតួទី n នៃស្វ៊ីតនព្វន្តខាងក្រោម:

ក, 4, 15, 26, 37,... ខ, 5, 1, −3, −7, −11,...

គ, −2, −9, −16, −23,.... ឃ, 7, 12, 17, 22, 27,...

2.សរសេរប្រាំតួដំបូងនៃស្វ៊ីតនព្វន្តដែលកំណត់ដោយតួ:

ក, $U_1 = 3$, $U_2 = 10$ ខ, $U_n = -7 + 3n$

3.គេមានស្វ៊ីតនព្វន្ត −8, −3, 2, 7,... ។

ក,គណនា U_{17} និង U_{43}

ខ,តើតួទីប៉ុន្មាននៃស្វ៊ីតស្មើនឹង 322 ។

4.កំណត់ចំនួនតួនៃស្វ៊ីតនព្វន្តខាងក្រោម:

ក, 18, 13, 8, ..., −102 ខ, −9, −4, 1, ..., 171

5.ក្នុងចំណោមស្វ៊ីតខាងក្រោម តើស្វ៊ីតមួយណាជាស្វ៊ីតនព្វន្ត ?

ក, $U_n = 13 + 6(n-1)$

ខ, $U_0 = 3, U_{n+1} = U_n - \frac{1}{4}U_n$

6.គេឲ្យ (U_n) ជាស្វ៊ីតនព្វន្ត បើដឹងថា

ក, $U_{35} = 9$, $U_{45} = 17$ ។ គណនា U_{40} ។

ខ, $U_7 = \frac{7}{2}$, $U_{13} = \frac{13}{2}$ ។ គណនា U_0 ។

គ, $U_2 = -12$, $U_{12} = 18$ ។ គណនា U_1 , d និង U_0 ។

7.គេឲ្យស្វ៊ីនព្វន្ត 2, 7, 12, ... និងស្វ៊ីតនព្វន្ត 2, 5, 8, ... ។

តើក្នុងចំណោម 121 តួនៃស្វ៊ីតទាំងពីរនេះមានប៉ុន្មានតួ

ដែលលមានតម្លៃស្មើៗគ្នា ?

8.បង្ហាញថាស្វ៊ីត (U_n) ដែលមានតួទី n កំណត់ដោយ

$U_n = \frac{2n+3}{4}$ ជាស្វ៊ីតនព្វន្តកើន ។

9.គេឲ្យប្រាំចំនួនជាស្វ៊ីតនព្វន្ត ។

គណនាចំនួនទាំងនោះបើគេដឹងថាផលបូកវាស្មើនឹង 125

ហើយផលបូកពីរតួដំបូងស្មើនឹង 38 ។

10.បើផលបូក9តួដំបូងនៃស្វ៊ីតនព្វន្តស្មើនឹង162ហើយផលបូក

12 តួដំបូងនៃស្វ៊ីតស្មើនឹង 288 ។ គណនាផលបូក 30

តួដំបូងនៃស្វីតនព្វន្ត ។

11.រកបីចំនួនតគ្នាជាស្វ៊ីតបព្វន្តដោយដឹងថាផលបូកលនៃបីចំនួននេះស្មើនឹង 36 និងផលគុណវាស្មើនឹង 1428 ។

12.គណនាផលបូកស្វ៊ីតនព្វន្តខាងក្រោមៈ

ក, $2+4+6+...+146$

ខ, $100+95+90+85+...-20$

គ, $-193-189-185-...-21-17$

ឃ, $5\frac{1}{4}+4\frac{1}{2}+3\frac{3}{4}+...-3$ ។

13.អ្នកជិះកង់ម្នាក់ធ្វើដំណើរតាមផ្លូវ A បានចម្ងាយ15 គីឡូម៉ែត្រក្នុង 1 ថ្ងៃ ។ប្រាំបីថ្ងៃក្រោយមក ទើបអ្នកជិះទីពីរចាប់ផ្តើមធ្វើដំណើរតាមផ្លូវ A ដូចគ្នាដោថ្ងៃទីមួយ គាត់ជិះកង់បានបម្ងាយ 14 ឡូម៉ែត្រក្នុង 1 ថ្ងៃ ហើយថ្ងៃបន្តបន្ទាប់មកទៀតគាត់ត្រូវជិះកើនបានចម្ងាយ 2 គីឡូម៉ែត្រក្នុង 1 ថ្ងៃជារៀងរាល់ថ្ងៃ ដើម្បីអោយទាន់អ្នកជិះកង់ទីមួយ A ។ តើអ្នកជិះកង់ទីពីរត្រូវចំណាយរយៈពេលអស់ប៉ុន្មានថ្ងៃ ដើម្បីអោយទៅទាន់អ្នកជិះកង់ទីមួយ ?

14.សាលប្រជុំមួយរាងចតុកោណព្នាយ ហើយតាមជ្រុងទ្រេតនៃសាលប្រជុំនោះ គេរៀបកៅអីជា 15 ជួរដែលជួរមុខគេបង្អស់

រៀបបាន 25 កៅអី ហើយជួរទីពីររៀបបាន27កៅអី ជួរទីបីរៀបបាន29កៅអី ។ គេរៀបកៅអីតាមលំនាំខាងលើរហូតដល់ជួរខាងក្រោយ។

គណនាកៅអីសម្រាប់អង្គុយទាំងអស់ដែលមានក្នុងសាលប្រជុំ ។

<u>ដំណោះស្រាយ</u>

1.សរសេររូបមន្តតួទី n នៃស្វីតនព្វន្តខាងក្រោម:

តាមរូបមន្ត: $U_n = U_1 + (n-1)d$

ក, $4, 15, 26, 37, \ldots$ គេបាន $u_1 = 4$ និង

$d = u_2 - u_1 = 15 - 4 = 11$

ដូចនេះ: $U_n = 4 + (n-1).11$

ខ, $5, 1, -3, -7, -11, \ldots$ គេបាន: $u_1 = 5, u_2 = 1$ និង

$d = u_2 - u_1 = 1 - 5 = -4$

ដូចនេះ: $U_n = 5 + (n-1)(-4) = -4n + 9$

គ, $-2, -9, -16, -23, \ldots$ គេបាន $u_1 = -2, u_2 = -9$ និង

$d = u_2 - u_1 = -9 - (-2) = -9 + 2 = -7$

$\Rightarrow U_n = -2 + (n-1)(-7)$

ដូចនេះ: $U_n = -7n + 5$

ឃ, $7, 12, 17, 22, 27, \ldots$ គេបាន $u_1 = 7, u_2 = 12$ និង

$d = u_2 - u_1 = 12 - 7 = 5 \Rightarrow U_n = 7 + (n-1).5$

ដូចនេះ: $U_n = 5n + 2$

2.សរសេរប្រាំតួដំបូងនៃស្វ៊ីតនព្វន្តដែលកំណត់ដោយតួ:

ក, $u_1 = 3, u_2 = 10$ ដោយផលសងរួម

$d = u_2 - u_1 = 10 - 3 = 7$

គេបាន ប្រាំតួដំបូងនៃស្វ៊ីត (U_n) គឺ:

$u_1 = 3, u_2 = 10, u_3 = 17, u_4 = 24$ និង $u_5 = 31$

ខ, $U_n = -7 + 3n \Rightarrow u_1 = -7 + 3 = -4$

$u_2 = -7 + 3\times2 = -1, u_3 = -7 + 3\times3 = 2,$

$u_4 = -7 + 3\times4 = 5, u_5 = -7 + 3\times5 = 8$

ដូចនេះ: ប្រាំតួដំបូងនៃស្វ៊ីតគឺ (U_n) គឺ $-4, -1, 2, 5, 8$

3.គេមានស្វ៊ីតនព្វន្ត $-8, -3, 2, 7, \ldots$

ក,គណនា U_{17} និង U_{43}

គេមាន $u_1 = -8, u_2 = -3$ និង $d = u_2 - u_1 = -3 + 8 = 5$

ដោយប្រើរូបមន្ត $U_n = u_1 + (n-1)d$ គេបាន

$U_{17} = -8 + (17-1).5 = -8 + 80 = 72$ ហើយ

$U_{43} = -8 + (43-1).5 = -8 + 210 = 202$

ដូចនេះ: $U_{17} = 72$ និង $U_{43} = 202$

ខ,តើតួទីប៉ុន្មាននៃស្វ៊ីតស្មើនឹង 322 ?

តាមរូបមន្ត $U_n = u_1 + (n-1)d$

$\Leftrightarrow 322 = -8 + (n-1).5 \Leftrightarrow 322 = 5n - 13$

$\Leftrightarrow 5n = 335 \Leftrightarrow n = \frac{335}{5} = 67$

ដូចនេះ: 322 ត្រូវនឹងតួទី 67 រឺ $U_{67} = 322$

4.កំណត់ចំនួនតួនៃស្វ៊ីតនព្វន្តខាងក្រោម:

ក, $18, 13, 8, \ldots, -102$

គេមាន $u_1 = 18, u_2 = 13, u_n = -102$ និង

$d = u_2 - u_1 = 13 - 18 = -5$

តាមរូបមន្ត $U_n = u_1 + (n-1).d$ គេបាន:

$-102 = 18 + (n-1)(-5) \Leftrightarrow -102 = -5n + 23$

$\Leftrightarrow 5n = 125$ នោះ: $n = \frac{125}{5} = 25$

ដូចនេះ: ស្វ៊ីតនព្វន្តនេះមាន 25 តួ

ខ, $-9, -4, 1, \ldots, 171$

គេមាន $u_1 = -9, u_2 = -4, u_n = 171$ និង

$d = u_2 - u_1 = -4 + 9 = 5$

ដោយប្រើរូបមន្ត $U_n = u_1 + (n-1).d$ គេបាន:

$171 = -9 + (n-1).5 \Leftrightarrow 171 = 5n - 14$

$5n = 185$ នោះ $n = \frac{185}{5} = 37$

ដូចនេះ ស្វ៊ីតនព្វន្តមាន 37 តួ

5.ក្នុងចំណោមស្វ៊ីតខាងក្រោម ស្វ៊ីតណាជាស្វ៊ីតនព្វន្ត ?

ក, $U_n = 13 + 6(n-1)$ គេបាន $U_{n+1} = 13 + 6n$

$\Rightarrow U_{n+1} - U_n = 13 + 16n - 13 - 6n + 6 = 6$ ថេរ

ដូចនេះ (U_n) ជាស្វ៊ីតនព្វន្ត

ខ,គេមាន $U_0 = 3$ និង $U_{n+1} = U_n - \frac{1}{4}U_n$ គេបាន

$u_1 = u_0 - \frac{1}{4}u_0 = 3 - \frac{3}{4} = \frac{9}{4}$

$, u_2 = u_1 - \frac{1}{4}u_1 = \frac{9}{4} - \frac{1}{4} \times \frac{9}{4} = \frac{27}{4}$

ដោយ $u_2 - u_1 = \frac{9}{2} \neq u_1 - u_0 = -\frac{3}{4}$ ។ ដូចនេះ (U_n) មិនមែនជាស្វ៊ីតនព្វន្ត

7.ក,គណនា U_{40}

គេមាន $\begin{cases} U_{35} = 9 \\ U_{45} = 17 \end{cases}$

ដោយប្រើរូបមន្ត $U_n = U_1 + (n-1).d$ គេបាន:

$$-\begin{cases} u_1 + 34d = 9 \ (1) \\ u_1 + 44d = 17 \ (2) \end{cases}$$

$$10 = 8d \Rightarrow d = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$$

ពី (1) : $u_1 = 9 - 34d = 9 - \frac{34\times 4}{5} = \frac{45-136}{5} = -\frac{91}{5}$

ដូចនេះ: $U_{40} = 13$

ខ,គណនា U_0

គេមាន: $\begin{cases} u_7 = \frac{7}{2} \\ u_{13} = \frac{13}{2} \end{cases} \Rightarrow U_0 = \frac{0}{2} = 0$ ដូចនេះ: $U_0 = 0$

គ,គណនា U_1, d និង U_6

គេមាន: $\begin{cases} u_2 = -12 \\ u_{12} = 18 \end{cases}$

ដោយប្រើរូបមន្ត $U_n = u_1 + (n-1).d$ គេបាន:

$$\begin{cases} u_1+(2-1)d=18 \\ u_1+(12-1)d=18 \end{cases} \Leftrightarrow -\begin{cases} u_1+d=-12 & (1) \\ u_1+11d=18 & (2) \end{cases}$$

$$0+10d=30 \Rightarrow d=\frac{30}{10}=3$$

ពី $(1): u_1=-12-d=-12-3=-15$ គេបាន

$U_6=-15+(6-1).3=-15+15=0$

ដូចនេះ: $u_1=1, d=3$ និង $u_6=0$

តើក្នុងចំណោម 121

តួនៃស្វ៊ីតទាំងពីរនេះមានប៉ុន្មានតួដែលមានតម្លៃស្មើគ្នា

តាង $(a_n): 2,7,12,17,22,27,32,...$

$(b_n): 2,5,11,14,17,20,23,26,29,32,...$

គេបាន: $a_1=b_1=2$, $a_4=b_6=17, a_7=b_{11}=32$

បើតាង $(c_n): 2,17,32,47,...$ គេបាន: (c_n)

ជាស្វ៊ីតនព្វន្តដែលមានផលសងរួម $d=15$

$\Rightarrow c_n=2+(n-1)15$ ដែល $c_n \le b_{121}$ (ព្រោះ (b_n) មាន

ផលសងរួមតូចជាងផលសងរួមនៃស្វ៊ីត (a_n) ដែល

$b_{121}=2+(121-1).3=362$

គេបាន: $c_n=2+(n-1)15 \le 362$

$$\Rightarrow n \le \frac{362+13}{15} = 25$$

ដូចនេះ ស្វីតទាំងពីរនេះមាន 25 តួដូចៗគ្នា

9.បង្ហាញថា (U_n) ជាស្វីតនព្វន្តកើន

គេមាន $U_n = \frac{2n+3}{4} \Rightarrow U_{n+1} = \frac{2n+5}{4}$

គេបាន៖ $U_{n+1} - U_n = \frac{2n+5}{4} - \frac{2n+3}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} > 0$

ដោយ $U_{n+1} - U_n > 0$ រឺ $U_{n+1} > U_n$

ដូចនេះ (U_n) ជាស្វីតនព្វន្តកើន

10.គណនាចំនួនទាំងប្រាំនេះ

តាង a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 ជាចំនួនត្រូវរក។ តាមបំរាប់ a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 ជាស្វីតនព្វន្ត

គេបាន: $a_1 + a_5 = a_2 + a_4 = 2a_3 \quad (*)$

តែ $\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 125 \\ a_1 + a_2 = 38 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (a_1 + a_5) + (a_2 + a_4) + a_3 = 125 \\ a_1 + a_2 = 38 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a_3 + 2a_3 + a_3 = 125 \\ a_1 + a_2 = 38 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5a_3 = 125 \\ a_1 + a_2 = 38 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_3 = 25 \\ a_1 + a_2 = 38 \end{cases}$$

ពី (*) គេបាន: $\begin{cases} a_1 + a_5 = 25 \times 2 \\ a_1 + a_2 = 38 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow - \begin{cases} 2a_1 + 4d = 50 & (1) \\ 2a_1 + d = 38 & (2) \end{cases}$$

$$0 + 3d = 12$$

$$\Rightarrow d = \frac{12}{3} = 4$$

ពី (1): $a_1 = \frac{50 - 4d}{2} = \frac{50 - 4 \times 4}{2} = 17$

ដូចនេះ ចំនួនទាំង 5 នោះគឺ 17, 21, 25, 29, 33

10.គណនាផលបូក 30 តួដំបូងនៃស្វ៊ីតនព្វន្ត

តាង (U_n) ជាស្វ៊ីតតួទី n នៃស្វ៊ីតនេះ

តាមបំរាប់គេបាន: $\begin{cases} s_9 = 162 \\ s_{12} = 288 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{9}{2}(u_1+u_9)=162\times\left(\frac{2}{9}\right) \\ \frac{12}{2}(u_1+u_{12})=288\times\left(\frac{2}{12}\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1+u_9=18 \\ u_1+u_{12}=48 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow -\begin{cases} 2u_1+u_{12}=18 & (1) \\ 2u_1+11d=48 & (2) \end{cases}$$

$$0+3d=30 \Rightarrow d=10$$

ពី $(1): u_1=\frac{18-8d}{2}=\frac{18-8\times10}{2}=-31$

$\Rightarrow u_{30}=-31+29\times10=259$

គេបាន $S_{30}=\frac{30}{2}(-31+256)=15\times228=3420$

ដូចនេះ: $S_{30}=3420$

11.រកបីចំនួនតគ្នា

តាង (a_n) ជាតួទី n នៃស្វ៊ីតនព្វន្តនេះ

ដោយ a_1,a_2,a_3 ជាបីតួតគ្នានៃស្វ៊ីតនព្វន្ត គេបាន:

$a_1+a_2=2a_3 \quad (*)$

តាមបំរាប់គេបាន: $\begin{cases} a_1+a_2+a_3=36 \\ a_1\times a_2\times a_3=1428 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3a_2 = 36 \\ a_1 \times a_2 \times a_3 = 1428 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_2 = 12 \\ a_1 \times a_3 = 119 \quad (**) \end{cases}$$

តាម $(*)\&(**)$ គេបាន: $\begin{cases} a_1 + a_3 = 24 \\ a_1 \times a_3 = 119 \end{cases}$

$\Rightarrow a_1$ និង a_3 ជាឫសនៃសមីការ $x^2 - 24x + 119 = 0 \quad (3)$

ដោះស្រាយសមីការ (3) គេបាន: $x_1 = 7, x_2 = 17$

ដូចនេះ បីចំនួននោះគឺ $7,12,17$ ឬ $17,12,7$

12.គណនាផលបូកស្ទីតនព្វន្តខាងក្រោម:

ក, $2+4+6+...+146 \Leftrightarrow 2(1+2+3+...+732)$

គេបាន $S_{73} = 2.\dfrac{73(73+1)}{2} = 73 \times 74 = 5402$

ដូចនេះ: $S_{73} = 5402$

ខ, $100+95+90+85+...-20$

តាង $a_n = 100+95+90+85+...-20$

$= (100+95+90+...+5) - (5+10+...+20) = b_n - c_n$

ដែល $b_n = 5(1+2+3+...+20)$

$= 5.\dfrac{20(20+1)}{2} = 50 \times 21 = 1050$

និង $c_n = 5(1+2+3+4) = 5\times 10 = 50$

$\Rightarrow a_n = 1050 - 50 = 1000$

ដូចនេះ: $100+95+90+\ldots-20=1000$

គ,គាង $(a_n) = -193, -189, -185, -\ldots, -21, 17$

ដោយ (a_n) ជាស្វ៊ីតនព្វន្តដែលមានតួទី 1ស្មើនឹង -193

ហើយតួទី 45 ស្មើនឹង -17

គេបាន $S_{45} = \frac{45}{2}(-193-17) = \frac{45}{2}(-210) = -4725$

ដូចនេះ: $-193-198-185-\ldots-21-17=-4725$

ឃ, $5\frac{1}{4}+4\frac{1}{2}+3\frac{3}{4}+\ldots-3$ ។

តាង $(b_n): 5\frac{1}{4}, 4\frac{1}{2}, 3\frac{3}{4}, \ldots, -3$

+កំណត់ចំនួនតួនៃស្វ៊ីត (b_n)

តាមរូបមន្ត $b_n = b_1 + (n-1).d$

ដែល $b_1 = 5\frac{1}{4} = \frac{21}{4}, b_n = -3$ ហើយ

$d = 4\frac{1}{2} - 5\frac{1}{4} = -\frac{3}{4}$ គេបាន:

$-3 = -\frac{21}{4} + (n-1)\left(-\frac{3}{4}\right) \Leftrightarrow -3 = -\frac{3n}{4} + \frac{24}{4}$

$\Leftrightarrow -12 = -3n + 24 \Leftrightarrow 3n = 36 \Rightarrow n = \frac{36}{3} = 12$

មានន័យថាស្ទីត (b_n) មាន 12 តួ

$\Rightarrow S_{12} = \frac{12}{2}\left(\frac{21}{4} - 3\right) = 6.\frac{9}{4} = \frac{27}{2}$

ដូចនេះ $5\frac{1}{4} + 4\frac{1}{2} + 3\frac{3}{4} + \ldots - 3 = \frac{27}{2}$

13.រករយៈពេលដែលអ្នកជិះកង់ទី 2 អាចទៅទាន់អ្នកទី 1

តាង x ជាចម្ងាយផ្លូវជួបគ្នា $(x > 0)$ ។តាង t ជាចំនួនថ្ងៃជួបគ្នា $(t > 0)$

+ចម្ងាយផ្លូវរយៈពេល t ថ្ងៃគឺ $15t$

+ចម្ងាយផ្លូវ 8 ថ្ងៃគឺ $16 \times 8 = 120$

-ចំពោះអ្នកជិះកង់ទី 1 ៖ $x = 120 + 15t$

-ចំពោះអ្នកជិះកង់ទី 2

តាមរូបមន្តផលបូកស្ទីតនព្វន្តដែលមាន t តួដែលតួទី1 ស្មើ 14 និងផលសងរួម $d = 2$

គេបាន: $x = \frac{t}{2}\left[2 \times 14 + 2(t-1)\right] = t^2 + 13t$

ដើម្បីអោយអ្នកជិះកង់ទី 2 តាមទាន់អ្នកជិះកង់ទី 1 លុះត្រាតែ

$t^2+13t=15t+120$

$\Leftrightarrow t^2-2t-120=0$

$\Delta'=1+120=121=11^2>0\Rightarrow t_1=1+11=12$

$t_2=1-11=-10<0$ (មិនយក)

ដូចនេះក្នុងរយៈពេល12ថ្ងៃអ្នកជិះកង់ទី 2 ជិះទាន់អ្នកជិះកង់ទី 1

14.គណនាចំនួនកៅអីទាំងអស់

សរុបចំនួននៃកៅអីដែលគេអោយតាមជួរមុខ និងជួរបន្ទាប់គេសង្កេតឃើញថាវាជាលំដាប់ស្វ៊ីត នព្វន្តមួយគឺ $25,27,29,31,\ldots$ ដើម្បីរកចំនួនកៅអីដែលមាន 15 ជួរ គេត្រូវកំណត់តួទី 15 នៃស្វ៊ីត។ តាមរូបមន្តៈ

$U_{15}=\frac{15}{2}(25+53)=585$

ដូចនេះ កៅអីទាំងអស់មានចំនួន 585 កៅអី

មេរៀនទី3 ស្វ៊ីតធរណីមាត្រ

លំហាត់

1.កំណត់ផលធៀបរួមនៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រ និងសរសេរបួនតួបន្ទាប់ទៀតនៃស្វ៊ីតនីមួយៗខាងក្រោមៈ

ក, 4, 20, 100, 500, ... ខ, $\sqrt{2}$, 2, $2\sqrt{2}$, 4, ...

2.គេមានស្វីតធរណីមាត្រ 2, 6, 18, 54,...

ក,គណនាតួទី 7

ខ,តើចំនួន 39366 ជាតួទីប៉ុន្មាននៃស្វីត ?

គ,គណនាផលបូក 15 តួដំបូងនៃស្វីតធរណីមាត្រ ?

3.កំណត់ចំនួនតួនៃស្វីតធរណីមាត្រខាងក្រោម:

ក, 1, 2, 4, 8, ..., 8192

ខ, 20, 10, 5, $\frac{5}{2}$, ..., $\frac{5}{256}$

4.បង្ហាញថាស្វីតខាងក្រោមជាស្វីតធរណីមាត្រដែលមានតួទី n កំណត់ដោយ

ក, $U_n = 7\times(3)^{n-1}$ ខ, $U_{n+1} = \frac{1}{8}\times(4)^n$

5.គេឲ្យ (U_n) ជាស្វីតធរណីមាត្រ បើគេដឹងថា:

ក, $U_3 = 18$, $U_7 = 1458$ ។ គណនា q និង U_{10}

ខ, $U_3 = 20$, $U_6 = 1280$ ។ គណនា q និង U_1

គ, $U_1 = 3$, $S_3 = 21$ ។ គណនា q និង S_1

6.គណនាផលបូកស្វីតធរណីមាត្រខាងក្រោម:

ក, $48+24+12+\ldots+\frac{8}{3}$ ខ, $\frac{1}{3}+1+3+\ldots+6561$ ។

គ, $9-6+4-...-\frac{128}{243}$

ឃ, $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^4}-\frac{1}{2^5}+...-\frac{1}{2^{2n-1}}+\frac{1}{3^{2n}}$

7.គណនាផលបូកស្ទីតធរណីមាត្រអន្តនតួដែលមាន $U_2=-9$ និង $U_5=\frac{1}{3}$

8.គណនាផលធៀបរួបនៃស្ទីតធរណីមាត្រអន្តនតួដែលមាន $U_1=5$ និង $S_\infty=15$ ។

9.ផលបូកពីរតួដំបូងនៃស្ទីតធរណីមាត្រស្មើនឹង 9 និងផលបូកនៃស្ទីតធរណីមាត្រអន្តនតួស្មើនឹង 25 ។

គណនា q និង U_1 បើផលធៀបរួម $q>0$

10.សរសេរជាចំនួនសនិទានដែលមានទម្រង់ $\frac{a}{b}$ នូវចំនួនទសភាគខួបខាងក្រោម

ក, $0.\overline{7}$ ខ, $2.\overline{34}$ គ, $0.\overline{452}$

ដំណោះស្រាយ

1.កំណត់ផលធៀបរួមនៃស្ទីតធរណីមាត្រ និងសរសេរបួនតួបន្ទាប់ទៀតនៃស្ទីតនីមួយៗខាងក្រោម:

ក, 4, 20, 100, 500, ...

គេមាន $u_1 = 4, u_2 = 20$ គេបាន: $q = \frac{u_2}{u_2} = \frac{20}{4} = 5$

ហើយបួនតួបន្ទាប់នៃស្វ៊ីតនេះគឺ

$\boxed{2500, 12500, 62500, 312500}$

ខ, $\sqrt{2}$, 2, $2\sqrt{2}$, 4, ...

គេបាន $u_1 = \sqrt{2}, u_2 = 2$ នោះ $q = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$

ហើយបួនតួបន្ទាប់នៃស្វ៊ីតនេះគឺ $\boxed{4\sqrt{2}, 8, 8\sqrt{2}, 16}$

2.គេមានស្វ៊ីតធរណីមាត្រ 2, 6, 18, 54,... ។

ក,គណនាតួទី 7។ តាង (U_n) ជាតួទី n នៃស្វ៊ីតនេះដែល $n \geq 1$

គេបាន $u_1 = 2, u_2 = 6$ នោះ $q = \frac{u_2}{u_1} = \frac{6}{2} = 3$ និង

$U_7 = u_1.q^6 = 2 \times 3^6 = 1458$

ដូចនេះ: $\boxed{U_7 = 1458}$

ខ,តើចំនួន 39366 ជាតួទីប៉ុន្មាននៃស្វ៊ីត ?

តាមរូបមន្តតួទី n នៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រ $U_n = u_1.q^{n-1}$ គេបាន:

$39366 = 2.3^{n-1} \Leftrightarrow 3^{n-1} = 19683 \Leftrightarrow 3^{n-1} = 3^9 \Rightarrow n-1 = 9 \Leftrightarrow n = 8$

ដូចនេះ: 39366 តួទី 8 នៃស្វ៊ីត

គ,គណនាផលបូក 15 តួដំបូងនៃស្ទីតនេះ។ តាមរូបមន្ត

$$S_n = \frac{U_1(q^n - 1)}{q - 1}, q = 3$$

គេបាន $S_{15} = \frac{2(3^{15} - 1)}{3 - 1} = 14348906$

ដូចនេះ: $S_{15} = 14348906$

3.កំណត់ចំនួនតួនៃស្ទីតធរណីមាត្រខាងក្រោម:

ក, $1, 2, 4, 8, \ldots, 8192$

គេមាន $u_1 = 1, u_2 = 2$ នោះ $q = \frac{u_2}{u_1} = 2$ តាមរូបមន្ត

$U_n = u_1 . q^{n-1}$ ដែល $U_n = 8192$

គេបាន $8192 = 2^{n-1} \Leftrightarrow 2^{n-1} = 2^{13}$

$\Rightarrow n - 1 = 13 \Leftrightarrow n = 14$

ខ, $20, 10, 5, \frac{5}{2}, \ldots, \frac{5}{256}$

គេមាន $u_1 = 20, u_2 = 10$ នោះ $q = \frac{u_2}{u_1} = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}$

តាមរូបមន្ត $U_n = u_1 . q^{n-1}$ ដែល $U_n = \frac{5}{256}$ គេបាន:

$$\frac{256}{5}=20.\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{1024}=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\left(\frac{1}{2}\right)^{10}$$

$$\Rightarrow n-1=10 \Leftrightarrow n=11$$

4.បង្ហាញថាស្វ៊ីតខាងក្រោមជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ

ក,គេមាន $U_n=7\times 3^{n-1} \Rightarrow U_{n+1}=7.3^n$

$\Leftrightarrow U_{n+1}=3\times 7.3^{n-1}=3U_n$

ដូចនេះ (U_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រដែលមានផលធៀបរួម $q=3$ និងតួទី 1គឺ $u_1=7$

ខ,$U_{n+1}=\frac{1}{8}\times 4^n \Leftrightarrow U_n=\frac{1}{8}\times 4^{n-1}$

$$\Leftrightarrow U_n=\frac{1}{4}\times\left(\frac{1}{8}\times 4^n\right) \Leftrightarrow U_n=\frac{1}{4}U_{n+1} \Leftrightarrow U_{n+1}=4U_n$$

ដូចនេះ (U_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រដែលមានផលធៀបរួម

$q=4$ និងតួទី 1គឺ $u_1=\frac{1}{8}$

5.គេអោយ (U_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ បើគេដឹងថា:

ក, $u_3=18, u_7=1458$ ។ គណនា q និង u_{10}

តាមរូបមន្ត $U_n = u_1.q^{n-1}$ គេបាន

$$\begin{cases} u_3 = 18 \\ u_7 = 1458 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1.q^2 = 18 \quad (1) \\ u_1.q^6 = 1458 \; (2) \end{cases}$$

យក (2) ចែកនឹង (1) គេបាន $q^4 = 81 = 3^4 \Leftrightarrow q = \pm 3$

ដោយ (U_n) ជាស្វីតធរណីមាត្រកើនគេយក $q = 3$

ជំនួស $q = 3$ ក្នុង (1) គេបាន $u_1 = 2$

នាំអោយ $u_{10} = u_1.q^9 = 2 \times 3^9 = 39366$

ដូចនេះ៖ $q = 3$ និង $u_{10} = 39366$

ខ, $u_3 = 20, u_6 = 1280$ ។ គណនា q និង u_1 ។

តាមរូបមន្ត $U_n = u_1.q^{n-1}$ $, n \geq 1$ គេបាន:

$$\begin{cases} u_3 = 20 \\ u_6 = 1280 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1.q^2 = 20 \;\; (1) \\ u_1.q^5 = 1280 \; (2) \end{cases}$$

យក (2) ចែកនឹង (1) គេបាន:

$$q^3 = 64 \Leftrightarrow q^3 = 4^3 \Rightarrow q = 4$$

ជំនួស $q = 4$ ក្នុង (1) គេបាន $u_1 = \frac{5}{4}$ ដូចនេះ៖ $q = 4$ និង

$u_1 = \frac{5}{4}$

គ, $u_1=3, s_3=21$ ។ គណនា q និង s_7

តាមរូបមន្ត $u_n=u_1.q^{n-1}$ និង $S_n=\dfrac{u_1\left(q^n-1\right)}{q-1}$

$$\Leftrightarrow s_3=21\Leftrightarrow\frac{u_1\left(q^3-1\right)}{q-1}=21;u_1=3\Leftrightarrow\frac{3(q-1)\left(q^2+q+1\right)}{q-1}=21$$

$$\Leftrightarrow q^2+q+1=7\Leftrightarrow q^2+q-6=0$$

$$\Delta=1+24=25=5^2>0\Rightarrow q_1=\frac{-1+5}{2}=\frac{4}{2}=2$$

$$\Rightarrow q_2=\frac{-1-5}{2}=-3<0$$ (មិនយក)

ចំពោះ $q=2$ គេបាន: $s_7=\dfrac{3\left(2^7-1\right)}{2-1}=3\times127=381$

ដូចនេះ $s_7=381$ និង $q=2$

6.គណនាផលបូកស្វ៊ីតធរណីមាត្រខាងក្រោមៈ

គេមាន $u_1=48, u_2=24$ នោះ $q=\dfrac{u_2}{u_1}=\dfrac{24}{48}=\dfrac{1}{2}$

ដោយស្វ៊ីតមាន 8 តួគេបាន

$$s_8=\frac{u_1.\left(1-q^8\right)}{1-q}=\frac{48\left(1-\frac{1}{2^8}\right)}{1-\frac{1}{2}}=\frac{48\left(2^8-1\right)}{2^7}=\frac{12240}{128}=\frac{765}{8}$$

ដូចនេះ $48+24+12+...+\frac{3}{8}=\frac{765}{8}$

ខ, $\frac{1}{3}+1+3+...+6561$

+កណាត់ចំនួនតួនៃស្វីតនេះ

តាមរូបមន្ត $U_n=u_1.q^{n-1}$ ដែល $u_1=\frac{1}{3}, q=3, U_n=6561$

គេបាន: $6561=\frac{1}{3}\times 3^{n-1} \Leftrightarrow 3^{n-2}=6561$

$\Leftrightarrow 3^{n-2}=3^8 \Rightarrow n-2=8$

$\Leftrightarrow n=10 \Rightarrow s_{10}=\frac{u_1(q-1)}{q-1}=\frac{1}{3}\times\frac{3^{10}-1}{2}=\frac{29524}{3}$

ដូចនេះ $\frac{1}{3}+1+3+...+6561=\frac{29524}{3}$

គ, $9-6+4-...-\frac{128}{243}$

+កំណត់ចំនួននៃស្វីតនេះ

គេមាន $U_n=u_1.q^{n-1}$ ដែល $u_1=9, q=-\frac{2}{3}$ និង

$U_n=-\frac{128}{243}$

គេបាន: $-\frac{128}{2187}=9\left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1} \Leftrightarrow -\frac{128}{2187}=\left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1}$

$$\Leftrightarrow\left(-\frac{2}{3}\right)^{7}=\left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1} \Leftrightarrow n=8 \Rightarrow S_8=\frac{9\left[1+\left(\frac{2}{3}\right)^{8}\right]}{1+\frac{1}{3}}=\frac{3^8+2^8}{5\times3^5}=\frac{6817}{5\times3^5}=\frac{6817}{1213}$$

ដូចនេះ: $9-6+4...-\frac{128}{243}=\frac{6817}{1215}$

ឃ, $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^4}-\frac{1}{2^5}-...-\frac{1}{2^{2n-1}}+\frac{1}{3^{2n}}$.

តាង

$$S_n=\left(1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^4}+...+\frac{1}{3^{2n}}\right)-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^5}+...+\frac{1}{2^{2n-1}}\right)$$

តាង $A=1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^4}+...+\frac{1}{3^{2n}}$

ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រដែលមានផលធៀបរួម

$q=\frac{1}{9}$ និងតួទី1ស្មើ1គេបាន $A=\frac{1}{8}.\frac{9^{n+1}-1}{9^n}$

តាង $B=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^5}+...+\frac{1}{2^{2n-1}}$

ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រដែលមានផលធៀបរួម

$q=\frac{1}{2^2}$ និងតួទី1ស្មើ $\frac{1}{2}$ គេបាន $B=\frac{2}{3}.\frac{4^n-1}{4^n}$

$$\Rightarrow S_n=\frac{1}{8}.\frac{9^{n+1}-1}{9^n}-\frac{2}{3}.\frac{4^n-1}{4^n}$$

7.គណនាផលបូកស្វ៊ីតធរណីមាត្រអនន្តតួ

គេមាន $\begin{cases}u_2=-9\\ u_5=\frac{1}{3}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u_1.q=-9 & (1)\\ u_1.q^4=\frac{1}{3} & (2)\end{cases}$

យក (2) ចែកនឹង (1) គេបាន: $q^3=-\frac{1}{27}$

$$\Leftrightarrow q^3=\left(-\frac{1}{3}\right)^3\Rightarrow q=-\frac{1}{3}$$

ពី (1) គេបាន $u_1=-\frac{9}{q}=27$

$$\Rightarrow S_\infty=\frac{u_1}{1-q}=\frac{27}{1+\frac{1}{3}}=\frac{81}{4}$$

8.គណនាផលធៀបរួមនៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រអនន្តតួ

គេមាន: $\begin{cases}u_1=5\\ s_\infty=15\end{cases}$

តាមរូបមន្ត $s_{\infty}=\frac{u_1}{1-q}$ គេបាន:

$$15=\frac{5}{1-q}\Leftrightarrow 15-15q=5\Leftrightarrow 15q=10\Leftrightarrow q=\frac{10}{15}=\frac{2}{3}$$

ៗដូចនេះ $q=\frac{2}{3}$

9.គណនា q និង u_1 $(q>0)$

គេមាន $\begin{cases} s_2=9 \\ s_{\infty}=25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{u_1(q^2-1)}{q-1}=9 \ (1) \\ \frac{u_1}{1-q}=25 \ (2) \end{cases}$

យក (1) ចែកនឹង (2) គេបាន:

$$\Leftrightarrow q^2-1=-\frac{9}{25}\Leftrightarrow q^2=1-\frac{9}{25}$$

$$\Leftrightarrow q^2=\frac{16}{25}\Rightarrow q=\frac{4}{5}$$ (ព្រោះ $q>0$)

ដូចនេះ $q=\frac{4}{5}$

10.សរសេរចំនួនទសភាគខួបជាទំរង់ $\frac{a}{b}$

ក, $\overline{0,7}=0,7+0,07+0,007+\ldots$

$$=\frac{7}{10}+\frac{7}{100}+\frac{7}{100}+\ldots$$

តាមលំដាប់នេះវាជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រមិនកំណត់ដែលមាន

$q=\frac{7}{10}$ និង $u_1=\frac{7}{10}$ គេបាន $s_\infty=\frac{u_1}{1-q}=\frac{\frac{7}{10}}{1-\frac{1}{10}}=\frac{7}{9}$

។ដូចនេះ $2,\overline{34}=2+\frac{34}{99}=\frac{232}{99}$

គ, $0,\overline{452}=0,452+0,000452+\ldots$

$=\frac{0,452}{1-0,001}=\frac{0,452}{0,999}=\frac{452}{999}$ ។ដូចនេះ $0,\overline{452}=\frac{452}{999}$

<u>លំហាត់ជំពូក</u>

1.តួទី 5 នៃស្វ៊ីតនព្វន្តស្មើ 14 និងតួទី 12 ស្មើ 35 ។
គណនាផលសងរួមតួទី 1 តួទី n ។

2.ផលបូកនៃ n តួដំបូងនៃស្វ៊ីតមួយកំណត់ដោយ $S_n=n^2+n$ ។ គណនាតួទី 5 នៃស្វ៊ីត និងបង្ហាញថាតួនៃស្វ៊ីតនេះជាស្វ៊ីតនព្វន្ត

3.តួទី 3 នៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រស្មើ 3 និងតួទី 6 ស្មើ $\frac{3}{8}$ ។
គណនាផលធៀបរួម តួទី និងផលបូក 8 តួដំបូង ។

4.គណនា a ដើម្បីឲ្យបីចំនួន $(a-3)$,$(a+1)$ និង $(4a-2)$ ជាតួតគ្នានៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រ ។

5.គេឲ្យបួនចំនួនជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ ។ គណនាតួទីពីរ និងទីបីនៃស្វ៊ីតបើគេដឹងថាតួទី 1 ស្មើនឹង 6 ហើយតួទីបួនស្មើនឹង 162 ។

6.គេទិញផ្ទះមួយតម្លៃ 30000 ដុល្លា ។ អ្នកទិញត្រូវបង់ប្រាក់ជា 6 ដំណាក់កាល ដែលបង្កើតបានជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រមានផលធៀបរួមស្មើ $\frac{9}{10}$ ។ កំណត់ប្រាក់ដែលត្រូវបង់តាមដំណាក់កាលនីមួយៗ ។

7.គេមានស្វ៊ីតនព្វន្ត (U_n) និង (V_n) កំណត់ដោយ $U_0 = 3$ និងផលសងរួមស្មើ 3 និង $V_0 = 3$ និងផលសងរួមស្មើ 2 ។

ក,កំណត់ U_n និង V_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

ខ,គេមានស្វ៊ីត (W_n) ជាស្វ៊ីតកើន ។

8.កំណត់ផលសងរួម និងតួទីមួយ U_1 នៃស្វ៊ីតនព្វន្ត $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ កើននិងដឹងថា

$$\begin{cases} U_1^2 + U_2^2 + U_3^2 = 98 \\ U_1 - U_2 + U_3 = 4 \end{cases}$$

គណនា U_{10} និងផលបូក 10 តួដំបូងនៃស្វ៊ី ។

9.តួដំបូងនៃស្ទីតធរណីមាត្រស្មើ 3 ហើយមានផលធៀបរួម r ដែលតម្លៃដាច់ខាតនៃ r តូចជាង 1 ។

ក.ផលបូក 3 តួដំបូង $\frac{8}{9}$ នៃផលបូក 6 តួដំបូង ។

ខ.គណនាផលបូកស្ទីតធរណីមាត្រអនន្តតួ ។

10.1,ដោះស្រាយក្នុង $\mathbb{R}$ សមីការ : $3x^2-8x+4=0 \quad (E)$ ។

2,គេមាន $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ជាស្ទីតធរណីមាត្រកើនដែលមាន U_3 និង U_4 នៃស្ទីតនេះជាចម្លើយនៃសមីការ (E)

ក,ទាញរកផលធៀបរួមនៃស្ទីតនេះ ។

ខ,គណនាតួទីមួយ U_1 នៃស្ទីត ។

ដំណោះស្រាយ

1.គណនាផលសងរួមតួទី 1 តួទី n ។

គេមាន $\begin{cases} u_5 = 14 \\ u_{12} = 35 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 4d = 14 \ (1) \\ u_1 + 11d = 35 \ (2) \end{cases}$

យក $(2)-(1)$ គេបាន $7d = 21 \Leftrightarrow d = 3$

$$\Rightarrow U_n = u_1 + (n-1) = 2 + (n-1).3 = 3n-1$$

ដូចនេះ $d = 3, u_1 = 2, U_n = 3n-1$

2.គណនាតួទី 5 នៃស្ទីត

តាង (a_n) ជាតួទី n នៃស្ទីតនេះ គេបាន:

$S_n = n^2 + n \Rightarrow s_{n-1} = n^2 - n$

$$\Rightarrow s_n - s_{n-1} = 2n \Leftrightarrow a_n = 2n \Rightarrow a_5 = 10$$

+បង្ហាញថាតួនៃស្ទីតនេះជាស្ទីតនព្វន្ត

យើងមាន: $a_n = 2n \Rightarrow a_{n+1} = 2n + 2$

យើងបាន $a_{n+1} - a_n = 2n + 2 - 2n = 2$ ថេរ ដូចនេះ (a_n) ជាស្ទីតនព្វន្ត

3.គណនាផលធៀបរួម និងតួទី 1

គេមាន $\begin{cases} u_3 = 3 \\ u_6 = \dfrac{3}{8} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1.q^2 = 3 \ (1) \\ u_1.q^5 = \dfrac{3}{8} \ (2) \end{cases}$

យក (2) ចែកនឹង (1) គេបាន:

$q^3 = \dfrac{3}{24} = \dfrac{1}{8} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^3 \Rightarrow q = \dfrac{1}{2}$ ជំនួស (1) គេបាន

$u_1 = \dfrac{3}{q^2} = 3 \times 4 = 12$

ដូចនេះ: $q = \dfrac{1}{2}, u_1 = 12$

+គណនាផលបូក 8 តួដំបូង

តាមរូបមន្ត $S_n=\dfrac{u_1\left(1-q^n\right)}{1-q}$

$$\Rightarrow s_8=\frac{12\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^8\right]}{1-\frac{1}{2}}=\frac{12\left(2^8-1\right)}{2^7}$$

ដូចនេះ $s_8=\dfrac{765}{32}$

4.គណនា a

គេមាន: $(a-3),(a+1),(4a-2)$

ដើម្បីអោយនបីចំនួននេះជាតួតគ្នានៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រលុះត្រាតែ

$$(a-3)(4a-2)=(a+1)^2$$

$$\Leftrightarrow 4a^2-14a+6=a^2+2a+1\Leftrightarrow 3a^2-16a+5=0$$

$$\Delta'=64-15=49=7^2>0\Rightarrow a_1=\frac{8+7}{3}=\frac{15}{3}=5,a_2=\frac{8+7}{3}=\frac{1}{3}$$

ដូចនេះ $a=5$ រឺ $a=\dfrac{1}{3}$

6.គណនាតួទី 2 និងតួទី 3 នៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រ

តាង u_1,u_2,u_3,u_4 ជាបួនតួនៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រ

ដែល $u_1 = 6$ និង $u_4 = 162$ គេបាន

$$u_2 \times u_3 = u_1 \times u_4 = 6 \times 162$$

$$\Leftrightarrow (u_1.q)(u_1.q^2) = 972 \Leftrightarrow 36q^3 = 972 \Leftrightarrow q^3 = 27 = 3^3$$

$$\Rightarrow u_2 = u_1.q = 6 \times 3 = 18, u_3 = u_2.q = 18 \times 3 = 54$$

ដូចនេះ: $u_2 = 18, u_3 = 54$

7.កំណត់ប្រាក់ដែលត្រូវបង់តាមដំណាក់កាលនីមួយៗ

តាង $u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6$

ជាទឹកប្រាក់ដែលត្រូវបង់រៀងគ្នាតាមដំណាក់កាលនីមួយៗ

គេបាន

$$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 + u_6 = 30000$$

$$u_1 + u_1q + u_1q^2 + u_1q^3 + u_1q^4 + u_1q^5 = 30000$$

$$u_1(1 + q + q^2 + q^3 + q^4 + q^5) = 30000$$

$$u_1(1 + q + q^2 + q^3 + q^4 + q^5) = 3000$$

$$u_1.\frac{1-q^6}{1-q} = 30000, q = \frac{9}{10}$$

$$u_1.\frac{1-\left(\frac{9}{10}\right)^6}{1-\frac{9}{10}} = 30000$$

$$u_1.4,68559 = 30000 \Leftrightarrow u_1 = \frac{30000}{4,68559} = 6402,60885$$

$$u_2 = 6402.60885 \times \frac{9}{10} = 5762.347965, u_3 = 5762.347965 \times \frac{9}{10} = 5186.113$$

$$u_4 = 5186.113 \times \frac{9}{10} = 4667.501, u_5 = 4667.501 \times \frac{9}{10} = 4200.751$$

$$u_6 = 4200.751 \times \frac{9}{10} = 3780.676$$

ដូចនេះ តម្លៃនៃ $u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6$
ខាងលើជាទឹកប្រាក់ត្រូវបង់រៀងគ្នាទាំង៦លើក ។

8.ក,កំណត់ (U_n) និង (V_n) ជាអនុគមន៍នៃ n

+គេមាន $u_0 = 3$ និង $d = 3$ គេបាន $U_n = u_0 + nd = 2$

+គេមាន $v = 0$ និង $d = 2$ គេបាន $V_n = v_0 + nd = 3 + 2n$

ខ,គេអោយ $(W_n) = \frac{U_n}{V_n}$

a)បង្ហាញថា (W_n) ជាស្វ៊ីតកើន។ គេមាន

$$W_n = \frac{3n+3}{2n+3} \Rightarrow W_{n+1} = \frac{3n+6}{2n+5}$$

$$\Rightarrow W_{n+1} - W_n = \frac{3n+6}{2n+5} \frac{3n+3}{2n+3} = \frac{3}{(2n+5)(2n+3)} > 0, \forall n \in \mathbb{N}$$

ដូនេះ: (W_n) ជាស្វ៊ីតកើន

២)កំណត់តម្លៃ n

គេមាន $W_{n+1}-W_n=W_n-W_{n-1}$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{(2n+5)}=\frac{1}{28}\Leftrightarrow 4n^2+16n-69=0$$

$$\Delta'=64+276=340>0\Rightarrow n=\frac{-8\pm\sqrt{340}}{4}\notin\mathbb{N}$$

ដូចនេះ គ្មានតម្លៃ n ណាដែលធ្វើអោយ $W_n-W_{n-1}=\dfrac{1}{28}$ ទេ ។

៩.កំណត់ផលសងរួមនិងតួទីមួយ u_1

គេមាន: $\begin{cases}u_1^2+u_2^2+u_3^2=98 & (1)\\ u_1-u_2+u_3=4 & (2)\end{cases}$ តែ $u_1+u_3=2u_2$

ពី (2) គេបាន $u_2=4$ ជំនួសក្នុង $(1)\&(2)$ គេបាន

$$\begin{cases}u_1^2+u_3^2=82 & (3)\\ u_1+u_3=8 & (4)\end{cases}$$

ពី (4): គេទាញបាន $u_3=8-u_1$ ជំនួស (3)

$$u_1^2+(8-u_1)^2=82\Leftrightarrow 2u_1^2-16u_1-18=0\Leftrightarrow u_1^2-8u_1-9=0$$

$$\Delta'=16+9=25=5^2>0$$

$\Rightarrow u_1' = 4+5 = 9 > u_2 = 4$ (មិនយក).

$u_2'' = 4-5 = -1 < u_2$ យក

ពី $(4) \Rightarrow u_3 = 8 - u_1 = 8+1 = 9$

$d = u_2 - u_1 = 4+1 = 5$ ដូចនេះ: $\boxed{d = 5, u_1 = -1}$

+គណនា u_{10} និងផលបូក10តួដំបូងនៃស្វីតនេះ:

គេបាន $u_{10} = u_1 + (10-1)d = -1 + 9\times 5 = 44$

ហើយ $s_\infty = \dfrac{10}{2}(u_1 + u_{10}) = 5(-1+44) = 215$

$\boxed{\text{ដូចនេះ: } u_{10} = 44, s_\infty = 215}$

គណនាផលបូកស្វីតធរណីមាត្រអនន្តតួ

គេមាន $\begin{cases} u_1 = 3 \\ s_3 = \dfrac{8}{9}s_6 \quad (1) \end{cases}$

ពី $(1) \Leftrightarrow u_1 . \dfrac{1-r^3}{1-r} = u_1 . \dfrac{8}{9} \times \dfrac{1-r^6}{1-r}$

$\Leftrightarrow 1 - r^3 = \dfrac{8}{9}(1-r^6)$

$\Leftrightarrow \dfrac{8}{9}(1-r^3)(1+r^3) = 1 - r^3 \Leftrightarrow \dfrac{8}{9}(1+r^3) = 1$

$$\Leftrightarrow 8r^3+8=9 \Leftrightarrow r^3=\left(\frac{1}{2}\right)^3 \Leftrightarrow r=\frac{1}{2}$$

គេបាន $S_\infty=\frac{u_1}{1-r}=\frac{3}{1-\frac{1}{2}}=\frac{3}{1-\frac{1}{2}}=6$

ដូចនេះ: $S_\infty=6$

10.1.ដោះស្រាយសមីការក្នុង $\mathbb{R}$

គេមាន: $3x^2-8x+4=0 \ (E)$:

$\Delta'=16-12=4=2^2>0$

$$\Rightarrow x_1=\frac{4+2}{3}=2 \,\&\, x_2=\frac{4-2}{3}=\frac{2}{3}$$

ដូចនេះ: $x_1=2, x_2=\frac{2}{3}$

2.ក/ ទាញរកផលធៀបរួម q

ដោយ $u_3;u_4$ ជាចំលើយនៃសមីការ (E) គេបាន

$u_3=\frac{2}{3}, u_4=2$ (ព្រោះ (U_n) កើន)

$\Rightarrow q=\frac{u_4}{u_3}=\frac{2}{\frac{2}{3}}=3$ ដូចនេះ: $q=3$

ខ/គណនាតួទីមួយ u_1 នៃស្វ៊ីត

គេមាន $u_4 = u_1.q^3 \Leftrightarrow 2 = u_1.3^3 \Leftrightarrow u = \frac{2}{27}$

ដូចនេះ: $u_1 = \frac{2}{27}$

ជំពូកទី 2 អនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែលនិងអនុគមន៍លោការីត

មេរៀនទី 1 អនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែល

លំហាត់

1.គណនាតម្លៃកន្សោម:

ក. $\sqrt{16}$ ខ. $\sqrt{225}$ គ. $\sqrt{144}$

ឃ. $\sqrt[3]{0.008(y-2)^3}$ ង. $\sqrt{(-16x)^2}$

ច. $\sqrt[3]{27}$ ឆ. $-\sqrt[3]{64}$ ជ. $\sqrt[3]{-64x^3}$

2.សរសេរកន្សោមខាងក្រោមជាទម្រង់អិចស្ប៉ូណង់ស្យែលក. $x = \sqrt[4]{10}$ ខ. $\sqrt[5]{56} = z$

គ. $a = \sqrt[28]{500h}$ ឃ. $b = \sqrt[x]{y}$

3. សម្រួលកន្សោម

ក. $\sqrt[4]{625}$ ខ. $\sqrt[5]{-1}$ គ. $-\sqrt[5]{-32}$

ឃ. $\sqrt[5]{-\frac{1}{32}}$ ង. $\sqrt[6]{x^6}$ ច. $\sqrt[4]{(7b)^4}$

ឆ. $\sqrt[7]{y^7}$ ជ. $\sqrt[5]{(x-2)^5}$

4. រកដែនកំណត់នៃអនុគមន៍

ក. $f(x)=\sqrt{x}$ ខ. $f(x)=\sqrt[3]{x}$

គ. $f(x)=\sqrt{2x-8}$ ឃ. $f(x)=\sqrt{4-3x}$

ង. $f(x)=\sqrt{-3x^2}$ ច. $f(x)=\sqrt{x^2+1}$

ឆ. $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{2x^2-3x-5}$

ជ. $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+3}}{x^2-x-2}$ ឈ. $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+1}}{x+|x|}$

5. គណនាកន្សោមខាងក្រោម:

ក. $\sqrt{2}.\sqrt{3}$ ខ. $\sqrt[3]{3}.\sqrt[3]{5}$ គ. $\sqrt[4]{8}.\sqrt[4]{9}.\sqrt[4]{72}$

ឃ. $\sqrt{3a}.\sqrt{10b}$ ង. $\sqrt{x-a}.\sqrt{x+a}$ ច. $\sqrt{\dfrac{6}{x}}.\sqrt{\dfrac{y}{5}}$

6. សម្រួលកន្សោម ក. $\dfrac{2}{3}\sqrt{4.5}+\dfrac{3}{2}\sqrt[3]{16}+\dfrac{1}{4}\sqrt{72}$

ខ. $x^3\sqrt{2y}-\sqrt[3]{16x^3y}+\dfrac{x}{3}\sqrt[3]{54y}$

7. ប្រៀបធៀប

ក. $5\sqrt[3]{2}$ និង $2\sqrt[3]{31}$ ខ. $\sqrt[3]{2}$ និង $\sqrt[12]{45}$ គ. $\sqrt[6]{5}$ និង $\sqrt[8]{8}$

៣. សម្រួលកន្សោម៖

ក. $\dfrac{\sqrt[3]{c^3+3c^2d+3cd^2+d^3}}{\sqrt{c^2-d^2}.\sqrt{c^2-d^2}}$ ខ. $\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-\sqrt{x+1}}$

$$\frac{\sqrt{p}}{\sqrt{3q^2+4pq+p^2}}.\frac{\sqrt{p+3q}}{\sqrt{p^2+6pq+8p^2}}+\frac{1}{\sqrt{q^2+3pq+2q^2}}$$

៩.សរសេរកន្សោមខាងក្រោមជាទម្រង់រ៉ាឌីកាល់

ក. $8^{\frac{1}{3}}$ ខ. $x^{\frac{1}{x}}$ គ. $y^{\frac{1}{5}}$ ឃ. $\left(a^5t^3\right)^{\frac{1}{2}}$

ង. $\left(x^3y^3\right)^{\frac{1}{4}}$ ច. $\left(x^3y^5\right)^{\frac{1}{4}}$

10. ដោះស្រាយសមីការ

ក. $2^x=32$ ខ. $(x+1)^{x^2-4x+3}=1$

គ. $\left(2-\sqrt{3}\right)^x+\left(2+\sqrt{3}\right)^x=2$ ឃ. $3^{\left(2^x\right)}=6561$

ង. $81^{\left(4^x\right)}=9$ ច. $3\left(4^x\right)+2\left(9^x\right)-5\left(6^x\right)=0$

ឆ. $3^{\left(3^x\right)}=1$ ជ. $\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x+\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x=4$

11. ដោះស្រាយសមីការ

ក. $2^x>1$ ខ. $3^x\le 1$ គ. $2^{2x}\le\dfrac{1}{16}$

ឃ. $16^x < 8^{x+1}$ ង. $32^{5x+2} \geq 16^{5x}$ ច. $4^{3x-1} > \frac{1}{256}$

12. ដោះស្រាយសមីការ

ក. $16^x > 0.125$ ខ. $2^x > -8$ គ. $(02.)^x \leq 25$

ង. $3^x \leq \sqrt[3]{9}$ ច. $\left(\frac{1}{2}\right)^x > \sqrt[3]{\frac{1}{4}}$

13. មីងសយបានយកប្រាក់មួយចំនួនទៅផ្ញើនៅធនាគារមួយ ដោយទទួលបានអត្រាការប្រាក់ 6% ក្នុងមួយឆ្នាំ ។ រយៈពេល 7 ឆ្នាំក្រោយមក គាត់បានដកប្រាក់ពីធនាគារនោះវិញ ដោយទទួលបានប្រាក់សរុបចំនួន 300 ដុល្លារ។ តើមីងសយមានប្រាក់ដើមចំនួនប៉ុន្មាន ?

14. មនុស្សម្នាក់មានអាយុ 30 ឆ្នាំ បានយកប្រាក់ 5 000 រៀល ទៅផ្ញើនៅធនាគារមួយ ដោយទទួលបានអត្រាការប្រាក់ 4%ក្នុងមួយឆ្នាំ ។ តើគាត់មានប្រាក់សរុបចំនួនឱប៉ុន្មានបើបច្ចុប្បគាត់មានអាយុ 65 ឆ្នាំ ។

15. មនុស្សបានទិញរថយន្តថ្មីមួយគ្រឿងក្នុងតម្លៃ 45 000 ដុល្លារ ។រថយន្តចុះថ្លៃ 15%ជារៀលរាល់ឆ្នាំ ។

រកតម្លៃរថយន្តក្នុងរយៈពេល 7 ឆ្នាំក្រោយ ។

<u>ដំណោះស្រាយ</u>

1.គណនាតំលៃកន្សោមៈ

ក. $\sqrt{16}=4$ ខ, $\sqrt{225}=\sqrt{(15)^2}=15$

គ. $\sqrt{144}=\sqrt{(12)^2}=12$

ឃ. $\sqrt[3]{0,008(y-2)^3}=\sqrt[3]{\left[0,2(y-2)^3\right]}=0,2(y-2)$

ង. $\sqrt{(-6x)^2}=|6x|$ ច. $\sqrt[3]{27}=\sqrt[3]{3^3}=3$

ឆ. $-\sqrt[3]{64}=-\sqrt[3]{4^3}=-4$

ជ. $\sqrt[3]{64x^3}=\sqrt[3]{(-4x^3)}=-4x$

2.សរសេរកន្សោមខាងក្រោមជាទម្រង់អ៊ិចស្ប៉ូ

ក. $x=\sqrt[4]{10}=10^{\frac{1}{4}}$ ខ. $\sqrt[8]{56}=k\Leftrightarrow k=(56)^{\frac{1}{8}}$

គ. $a=\sqrt[28]{500h}=(500h)^{\frac{1}{28}}$ ឃ. $b=\sqrt[x]{y}=y^{\frac{1}{x}}$

3.សំរួលកន្សោម

ក. $\sqrt[4]{625}=\sqrt[4]{5^4}=5$ ខ. $\sqrt[5]{-1}=\sqrt[5]{(-1)^5}=-1$

គ. $-\sqrt[5]{-32}=-\sqrt[5]{(-2)^5}=2$

ឃ. $\sqrt[5]{-\frac{1}{32}}=-\sqrt[5]{\left(-\frac{1}{2}\right)^5}=-\frac{1}{2}$ ង. $\sqrt[6]{x^6}=|x|$

ច. $\sqrt[4]{(7b)^4}=7|b|$ ឆ. $\sqrt[7]{y^7}=y$ ជ. $\sqrt[5]{(x-2)^5}=x-2$

4.រកដែនកំណត់នៃអនុគមន៍

ក. $f(x)=\sqrt{x}$, $D=[0,+\infty)$

ខ. $f(x)=\sqrt[3]{x}$, $D=(-\infty;+\infty)$

គ. $f(x)=\sqrt{2x+8}$

អនុគមន៍ f មានន័យកាលណា $4-3x\geq 0$ រឺ $x\geq -\dfrac{8}{2}$

$$\Rightarrow D=\left[-\frac{8}{2};+\infty\right)$$

ង. $f(x)=\sqrt{-3x^2}$

អនុគមន៍ f មានន័យកាលណា $-3x^2\geq 0$ តែ $x^2\geq 0$

$$\Rightarrow -3x^2\leq 0\Rightarrow -3x^2=0\Leftrightarrow x=0$$
$$\Rightarrow D=\{0\}$$

ច. $f(x)=\sqrt{x^2+1}$ មានន័យកាលណា $\forall x\in\mathbb{R}$

$$\Rightarrow D=\mathbb{R}=(-\infty;+\infty)$$

ឆ. $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{2x^2-3x-5}$

អនុគមន៍ f មានន័យកាលណា $\begin{cases} x \geq 0 \\ 2x^2 - 3x - 5 \neq 0 \ (1) \end{cases}$

(1) សរសេរជាសមីការ $2x^2 - 3x - 5 = 0$

$x_1 = -1, x_2 = \frac{5}{2}$ (ព្រោះ $b = a + c$)

ដូចនេះ $D = [0, +\infty) \setminus \left\{\frac{5}{2}\right\}$

ជ. $f(x) = \frac{\sqrt{x+3}}{x^2 - x - 2}$

អនុគមន៍ f មានន័យកាលណា $\begin{cases} x + 3 \geq 0 \ (1) \\ x^2 - x - 2 \neq 0 \ (2) \end{cases}$

ពី $(1): x + 3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -3$

+សរសេរ $(2): x^2 - x - 2 = 0$ មានរឹស $x_1 = -1, x_2 = 2$

ដូចនេះ: $D = [-3, +\infty) - \{-1, 2\}$

ឈ. $f(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{x + |x|}$

អនុគមន៍ f មានន័យកាលណា $\begin{cases} x + 1 \geq 0 \\ x + |x| \neq 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x > 0 \end{cases}$$

ដូចនេះ: $D = (0, +\infty)$

5.គណនាកន្សោមខាងក្រោម:

ក. $\sqrt{2}.\sqrt{3} = \sqrt{2\times 3} = \sqrt{6}$ ខ. $\sqrt[3]{3}.\sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{3\times 5} = \sqrt[3]{15}$

គ. $\sqrt[4]{8}.\sqrt[4]{9}.\sqrt[4]{72} = \sqrt[4]{8\times 9\times 72} = \sqrt[4]{(72)^2} = \sqrt{72}$

ឃ. $\sqrt{3a}.\sqrt{10b} = \sqrt{3a\times 10b} = \sqrt{30ab}$

ង. $\sqrt{x-a}.\sqrt{x+a} = \sqrt{(x-a)(a+a)} = \sqrt{(x-a)^2} = |x-a|$

ច. $\sqrt{\frac{6}{x}}.\sqrt{\frac{y}{5}} = \sqrt{\frac{6}{x}\times\frac{y}{5}} = \sqrt{\frac{6y}{5x}}$

6.សំរួលកន្សោម:

ក. $\frac{2}{3}\sqrt{4,5} + \frac{3}{2}\sqrt[3]{16} + \frac{1}{4}\sqrt{72}$

$= \frac{2}{3}\sqrt{\frac{3^2}{2}} + \frac{3}{2}\sqrt[3]{2^3\times 2} + \frac{1}{4}.\sqrt{6^2\times 2} = \frac{2\sqrt{2}}{2} + 3\sqrt[3]{2} + \frac{3\sqrt{2}}{2}$

$= \frac{5\sqrt{2}}{2} + 3\sqrt[3]{2}$

ខ. $x\sqrt[3]{2y} - \sqrt[3]{16x^3y} + \frac{x}{3}\sqrt[3]{54y}$

$= x\sqrt[3]{2y} - \sqrt[3]{(2x)^3 2y} + \frac{x}{3}\sqrt[3]{3^3.2y}$

$= x\sqrt[3]{2y} - 2x\sqrt[3]{2y} + x\sqrt[3]{2y} = 0$

7.ប្រៀបធៀប

ក. $5\sqrt[3]{2}$ និង $2\sqrt[3]{31}$

តាង $A = 5\sqrt[3]{2} \Rightarrow A^3 = 125\times 2 = 250$

តាង $B = 2\sqrt[3]{31} \Rightarrow B^3 = 8\times 31 = 248$

គេបាន $A^3 > B^3 \Leftrightarrow A > B \Leftrightarrow 5\sqrt[3]{2} > 2\sqrt[3]{31}$

ខ. $\sqrt[3]{2}$ និង $\sqrt[12]{45}$

តាង $A = \sqrt[3]{2} \Rightarrow A^{12} = 2^4 = 16$

តាង $B = \sqrt[12]{45} \Rightarrow B^{12} = 45$

គេបាន $A^{12} < B^{12} \Leftrightarrow A < B \Leftrightarrow \sqrt[3]{2} < \sqrt[12]{45}$

គ. $\sqrt[6]{5}$ និង $\sqrt[8]{8}$

តាង $A = \sqrt[6]{5} \Rightarrow A^{24} = 5^4 = 625$

តាង $B = \sqrt[8]{8} \Rightarrow B^{24} = 8^3 = 512$

គេបាន $A^{24} > B^{24} \Leftrightarrow A > B \Leftrightarrow \sqrt[6]{5} > \sqrt[8]{8}$

8.សំរួលកន្សោម

ខ. $\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-\sqrt{x+1}}=\dfrac{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+1}\right)}{\left(\sqrt{x}-\sqrt{x+1}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+1}\right)}$

$$\frac{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+1}\right)}{x-x-1}=-\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+1}\right)$$

គ. $\dfrac{\sqrt{p}}{\sqrt{3q^2+4pq+p^2}}\cdot\dfrac{\sqrt{p+3q}}{\sqrt{p^2+6pq+8q^2}}\div\dfrac{1}{\sqrt{q^2+3pq+2q^2}}$

$$=\frac{\sqrt{p(p+3q).(3q^2+3pq)}}{\sqrt{3q^2+4pq+p^2}.\sqrt{p^2+6pq+8q^2}}$$

$$=\frac{\sqrt{9pq^3+12p^2q^2+3p^3q+p^2}}{\sqrt{3q^2+4pq+p^2}.\sqrt{p^2+6pq+8q^2}}$$

$$=\frac{\sqrt{3qp}}{\sqrt{p^2+6pq+q^2}}$$

៩.សរសេរកន្សោមខាងក្រោមជាទម្រង់រ៉ាឌីកាល់

ក. $8^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{8}$ ខ. $x^{\frac{1}{4}}=\sqrt[4]{x}$ គ. $y^{\frac{1}{5}}=\sqrt[5]{y}$

ឃ. $\left(x^3t^3\right)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{a^5t^3}$ ង. $\left(x^3y^3\right)^{\frac{1}{4}}=\sqrt[4]{x^3y^3}$

ច. $\left(x^3y^5\right)^{\frac{1}{4}}=\sqrt[4]{x^3y^5}$

10.ដោះស្រាយសមីការ

ក. $2^x = 31 \Leftrightarrow 2^x = 2^5 \Rightarrow x = 5$ ខ. $(x+1)^{x^2-4x+3} = 1$

$\Leftrightarrow (x+1)^{x^2-4x+3} = (x+1)^0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0$

$\Rightarrow x_1 = 1, x_2 = 3$

ង. $81^{(4^x)} = 9 \Leftrightarrow 9^{2.(4^x)} = 9$

$\Leftrightarrow 2.4^x = 1 \Leftrightarrow 2^{2x} = \frac{1}{2} = 2^{-1} \Rightarrow 2x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$

ច. $3.(4^x) + 2(9^x) - 5(6^x) = 0$ ចែកនឹង (4^x)

$\Leftrightarrow 3 + 2\left(\frac{9}{4}\right)^x - 5\left(\frac{6}{4}\right)^x = 0 \Leftrightarrow 3 + 2\left(\frac{9}{4}\right)^x - 5\left(\frac{3}{2}\right)^x + 3 = 0$

តាង $u = \left(\frac{2}{3}\right)^x, u > 0$ គេបាន:

$2u^2 - 5u + 3 = 0 \Rightarrow u_1 = 1, u_2 = 3$

+ចំពោះ $u = 1 \Rightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$

+ចំពោះ $u = 3 \Rightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^x = 3 \Leftrightarrow x = \ell og_{\frac{3}{2}}^{3}$

ឆ. $3^{(3^x)} = 1 \Leftrightarrow 3^x = 0$ (មិនពិត)

ដូចនេះ សមីការគ្មានចម្លើយ

ជ.ចម្លើយក្នុងសៀវភៅពុម្ព ។

11.ដោះស្រាយសមីការ

ក. $2^x > 1 \Leftrightarrow 2^x > 2^0 \Rightarrow x > 0$

ខ. $3^x \leq 1 \Leftrightarrow 3^x \leq 3^0 \Rightarrow x \leq 0$

គ. $2^{2x} \leq \frac{1}{16} \Leftrightarrow 4^x \leq \frac{1}{4^2} \Leftrightarrow x \leq -2$

ឃ. $16^x < 8^{x+1} \Leftrightarrow 2^{4x} < 2^{3(x+1)}$

$\Rightarrow 4x < 3x + 3 \Leftrightarrow x < 3$

ង. $32^{5x+2} \geq 16^{5x} \Leftrightarrow 2^{5(5x+2)} \geq 2^{20x}$

$\Rightarrow 5x + 10 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -2$

ច. $4^{3x-1} > \frac{1}{256} \Leftrightarrow 2^{2(3x-1)} > \frac{1}{2^8}$

$\Leftrightarrow 2^{6x-2} > 2^{-8} \Rightarrow 6x - 2 > -8 \Leftrightarrow 6x > -6 \Leftrightarrow x > -1$

12.ដោះស្រាយសមីការ

ក. $16^x > 0,125 \Leftrightarrow 2^{4x} > \frac{1}{8}$

$\Leftrightarrow 2^{4x} > \frac{1}{2^3} = 2^{-3} \Rightarrow 4x > -3 \Leftrightarrow x > -\frac{3}{4}$

ខ. $2^x > -8$ ពិតចំពោះ $\forall x \in \mathbb{R}$

លំហាត់(គ)ដល់(ច)មានចំលើយក្នុងសៀវភៅពុម្ព

13.រកប្រាក់ដើមរបស់មីងសយ

តាមរូបមន្ត: $A = P(1+i)^t$ ដែល

$A = 300$ ដុល្លា ;$i = 0,06, t = 7$ ឆ្នាំ

គេបាន $300 = P(1+0,06)^7$

$$\Leftrightarrow 300 = P(1,06)^7 \Leftrightarrow P = \frac{300}{(1,06)^7} = 199,5$$

ដូចនេះ មីងសយមានប្រាក់ដើម 199,5 ដុល្លា

14.រកប្រាក់ដែលគាត់មានបច្ចុប្បន្ន

តាមរូបមន្ត $A = P(1+i)^t$ ដែល

$P = 50000$ រៀល $i = 0,04,\ t = 65 - 30 = 35$ ឆ្នាំ

គេបាន: $A = 50000(1+0,04)^{35}$

$= 50000 \times 3,9460 = 197300$

ដូចនេះនៅអាយុ 65ឆ្នាំគាត់មានប្រាក់សរុប 197300រៀល

15.រកតម្លៃរថយន្តក្នុងរយៈពេល 7 ឆ្នាំក្រោយ

តាមរូបមន្ត $A = P(1+i)^t$ ដែល

$P = 45000$ ដុល្លា ,$i = -0,15, t = 7$ ឆ្នាំ

គេបាន: $A = 45(1-0,15)^7 = 45000\times(0,85)^7$

$= 14426$

ដូចនេះ: 7 ឆ្នាំក្រោយថេយន្តថ្លៃ 14426 ដុល្លា

មេរៀនទី 2 អនុគមន៍លោការីត

លំហាត់

1.រកសមីការនៃអនុគមន៍ច្រាសរបស់អនុគមន៍

ក. $y = 4x-3y$ ខ. $y = 3x^2+1$ គ. $x^2-3y = 3$

ង. $xy^2 = 1$ ច. $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4} = 1$ ឆ. $y = \frac{5}{x}$ ជ. $y = \sqrt{x-2}$

2.គេឲ្យអនុគមន៍ $f(x) = x-2$ ។ ចូរកំណត់អនុមន៍ច្រាស $f^{-1}(x)$ រួចសង់ក្រាបរបស់វា។

3.សង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម:

ក. $y = \log_{5^x}$ ខ. $y = \log_{7^x}$ គ. $y = \log_{10^x}$

ឃ. $y = \log_{1.5^x}$ ង. $y = \log_{0.5^x}$ ច. $y = \log_{0.3^x}$

4.បំលែងជាទំរង់លោការីត

ក. $10^4 = 10000$ ខ. $8^{\frac{1}{3}} = 2$ គ. $16^{\frac{1}{4}} = 2$

ឃ. $5^{-2} = \frac{1}{25}$ ង. $4^{-3} = \frac{1}{64}$ ច. $10^{0.3010} = 2$

ឆ. $x^{-a} = y$ ជ. $A = k^c$

5.សម្រួល ក. $3^{\log_3 2}$ ខ. $5^{\log_5 10}$ គ. $\log_a a^{10}$

ឃ. $\log_q q^a$ ង. $\log_4 64$ ច. $\log_{10} 0.1$

ឆ. $\log_{\sqrt{2}} 16$ ជ. $\log_{10} 1$

6.ដោះស្រាយសមីការលោការីត

ក. $\log_{3^x} = 3$ ខ. $\log_x 16 = 2$

គ. $\log x + \log(x+9) = 1$ ឃ. $\log_{2^x} = -1$

ង. $\log_{9^x} = \frac{1}{2}$ ច. $\log_{8^x} = \frac{1}{3}$ ឆ. $\log \sqrt[3]{x} = \sqrt{\log x}$

ជ. $\log_4(x+3) + \log_4(x-3) = 2$

ឈ. $\log 5\sqrt{x^2+1} = \sqrt{1}$

ញ. $\log \sqrt[3]{x^2} + + \log \sqrt[3]{x^4} = \log 2^{-3}$

7.ដោះស្រាយវិសមីការលោការីត

ក. $\log_2 2 \le \log_4(x+3)$

ខ. $\log_3(3x-5) \ge \log_3(x+7)$ គ. $\log \frac{x^2-2}{x^2-1} < 0$

ឃ. $\log_{0.5^{x^2}} < \log_{0.5} 3x$ ង. $\log_5 12 < \log_5(5x-3)$

ច. $\log(x^2-2x+3) \ge 0$

ឆ. $\log_8(3x-1)<\log_8(x+5)$

8.ពូសេងយកប្រាក់4000000រៀល ទៅធ្វើវិនិយោគខុន ដោយទទួលបានអត្រាការប្រាក់6%ក្នុងមួយឆ្នាំ ។តើប៉ុន្មានឆ្នាំក្រោយមក ទើបប្រាក់របស់គាត់កើនឡើងពីរដង ?

9.មីងសុខាបានទិញរថយន្តថ្មីមួយគ្រឿងថ្លៃ38500ដុល្លា។ បើរថយន្តចុះថ្លៃក្នុងអត្រា 15% ក្នុងមួយឆ្នាំ ។ តើរយៈពេល 7 ឆ្នាំក្រោយ រថយន្តគាត់នៅសល់ថ្លៃប៉ុន្មាន ?

<u>ដំណោះស្រាយ</u>

1.រកសមីការនៃអនុគមន៍ច្រាសរបស់អនុគមន៍

ដើម្បីកំណត់អនុគមន៍ច្រាស គេគណនាតំលៃ x ជាអនុគមន៍នៃ y

ក. $y=4x-3 \Leftrightarrow x=\dfrac{y+3}{4}$ ហេតុនេះ $f^{-1}(x)=\dfrac{x+3}{4}$

ខ. $y=3x^2+1$ គ្មានអនុគមន៍ច្រាស

គ. $x^2-3y^2=3$ គ្មានអនុគមន៍ច្រាស

ឃ. $xy=-6 \Leftrightarrow x=-\dfrac{6}{y}$ ហេតុនេះ $f^{-1}(x)=-\dfrac{6}{x}$

ង. $xy^2=1$ គ្មានអនុគមន៍ច្រាស

ឆ. $y=\dfrac{5}{x} \Leftrightarrow x=\dfrac{5}{y}$ ដូចនេះ $f^{-1}(x)=\dfrac{5}{x}$

ឃ. $y=\sqrt{x-2} \Leftrightarrow y^2=x-2 \Leftrightarrow x=y^2+2$

ដូចនេះ: $f^{-1}(x)=x^2+2$

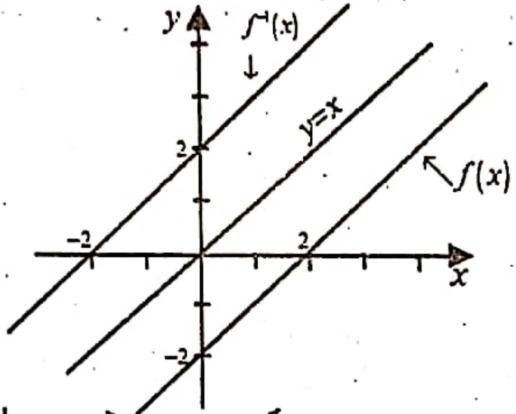
2.កំណត់អនុគមន៍ច្រាស់នៃ $f(x)$

គេមាន $f(x)=x-2$ រឺ $y=x-2 \Leftrightarrow x=y+2$

ដូចនេះ: $f^{-1}(x)=x+2$

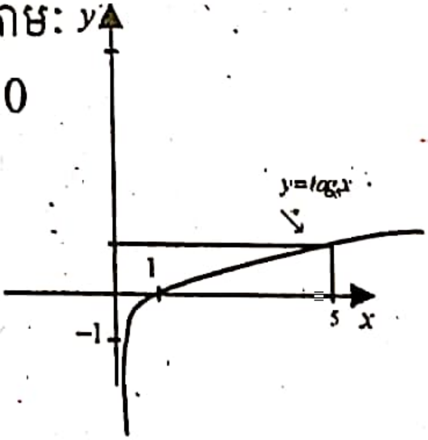
+សង់ក្រាបនៃ

x	0	1	2	−2
y	2	3	4	0



១.សង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម:

ក. $y=\ell og_5 x, x>0$



4.បលែងជាទម្រង់លោការីត

ក. $10^4=10000 \Leftrightarrow \log 10000=4$

ខ. $8^{\frac{1}{3}}=2 \Leftrightarrow \log_8 2=\frac{1}{3}$ គ. $16^{\frac{1}{4}}=2 \Leftrightarrow \log_{16} 2=\frac{1}{4}$

ឃ. $5^{-2}=\frac{1}{25} \Leftrightarrow \log_5 \frac{1}{25}=-2$

ង. $4^{-3}=\frac{1}{64} \Leftrightarrow \log_4 \frac{1}{64}=-3$

ច. $10^{0.3010}=2 \Leftrightarrow \log 2=0.3010$

ឆ. $x^{-a}=y \Leftrightarrow \log_x y=-a$ ជ. $A=k^c \Leftrightarrow \log_k y=c$

5.សម្រួល

ក. $3^{\log_3 2}=2$ ខ. $5^{\log_5 10}=10$ គ. $\log_a a^{10}=10$

ឃ. $\log_q q^a=a$ ង. $\log_4 64=\log_4 4^3=3\log_4 4=3$

ច. $\log_{10} 0.1=\log_{10} 10^{-1}=-1$

ឆ. $\log_{\sqrt{2}} 16=\log_{2^{\frac{1}{2}}} 2^4=8$ ជ. $\log_{10} 1=0$

6.ដោះស្រាយសមីការលោការីត

ក. $\log_3 x=3 \Leftrightarrow x=27$ ខ. $\log_x 16=2 \Leftrightarrow x^2=16$

$\Leftrightarrow x=\pm 4$ តែ $x>0 \Rightarrow x=4$

គ. $\log x+\log(x+9)=1$ សមីការនេះមានន័យកាលណា $x>0$.សមីការខាងលើសមមូលនឹង

$\log[x(x+9)] = \log 10 \Leftrightarrow x^2 + 9x - 10 = 0$ មានរឹស

$x_1 = 1, x_2 = -10$ តែ $x > 0$ គេយក $x = 1$

ឃ. $\log_2 x = -1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$

ង. $\log_9 x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = 9^{\frac{1}{2}} = 3$

ច. $\log_8 x = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x = 8^{\frac{1}{3}} = 2$ ឆ. $\log \sqrt[3]{x} = \sqrt{\log x}$

សមីការនេះមានន័យលើ $\log x \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 10^0 = 1$

សមីការខាងលើអាចសរសេរជា

$$\log x^{\frac{1}{3}} = \sqrt{\log x} \Leftrightarrow \frac{1}{3}\log x = \sqrt{\log x}$$

$\Leftrightarrow \log^2 x - 9\log x = 0 \Leftrightarrow \log x(\log x - 9) = 0$

$\log x = 0$ រឺ $\log x - 9 = 0 \Rightarrow x = 10^0 = 1$ រឺ $x = 10^9$

ដូចនេះ $x = 1$, រឺ $x = 10^9$

ជ. $\log_4(x+3) + \log(x-3) = 2$

សមីការនេះ មានន័យបើ $x+3 > 0$ និង $x-3 > 0$ នោះ

$x > 3$ សមីការខាងលើអាចសរសេរជា

$\log_4(x+3)(x-3) = 2 \Leftrightarrow x^2 - 9 = 16 \Leftrightarrow x^2 = 25$

$x=\pm 5$ តែ $x>3$ គេយក $x=5$

ឈ. $\log 5\sqrt{x^2+1}=\sqrt{1}$

$5\sqrt{x^2+1}=10^1 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+1}=2$

$\Leftrightarrow x^2+1=4 \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{3}$

ញ. $\log\sqrt[3]{x^2}+\log\sqrt[3]{x^4}=\log 2^{-3}$

$\Leftrightarrow \log\left(\sqrt[3]{x^2}.\sqrt[3]{x^4}\right)=\log 2^{-3} \Leftrightarrow \sqrt[3]{x^6}=2^{-3} \Leftrightarrow x^2=2^{-3}$

$\Rightarrow x=\pm\sqrt{2^{-3}}$

7.ដោះស្រាយវិសមីការលោការីត

ក. $\log_2 2x \le \log_4(x+3)$

$\Leftrightarrow \log_2 2x \le \log_{2^2}(x+3)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x \ge 0 \\ 2x \le \sqrt{x+3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ 4x^2-x-3\le 0 \quad (1) \end{cases}$$

ដោះស្រាយវិសមីការ (1) គេបាន $-\frac{3}{4}\le x\le 1$

ដូចនេះ $x\in(0,1]$ រឺ $0<x\le 1$

ខ. $\log_3(3x-5)\ge\log_3(x+7)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+7>0 \\ 3x-5 \geq x+7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-7 \\ 2x \geq 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-7 \\ x \geq 6 \end{cases} \Rightarrow x \geq 6$$

គ. $\log \frac{x^2-x}{x^2-1} < 0 \Leftrightarrow \log \frac{x^2-x}{x^2-1} < \log 1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2-x}{x^2-1} > 0 \\ \frac{x^2-x}{x^2-1} < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-\infty;-1) \cup (0;+\infty) \\ x \in (-1,+\infty) \end{cases}$$

$$x \in (0,1) \cup (1,+\infty)$$

ឃ. $\log_{0.5} x^2 < \log_{0.5} 3x$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ x^2 > 3x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ x^2-3x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ 0<x<3 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (0,3)$$

ង. $\log_5 12 < \log_5 (5x-3)$

$\Leftrightarrow 5x-3>12>12 \Leftrightarrow 5x>15 \Leftrightarrow x>3$ រឺ

$x \in (3,+\infty)$

ច. $\log(x^2-2x+3) \geq 0 \Leftrightarrow \log(x^2-2x+3) \geq \log 1$

$\Leftrightarrow x^2-2x+3 \geq 1 \Leftrightarrow x^2-2x+2 \geq 0$

$\Leftrightarrow (x-1)^2+1 \geq 0$ ពិតគ្រប់ $x \in \mathbb{R}$

ដូចនេះ: $x \in (-\infty,+\infty)$

ឆ. $\log_8(3x-1) < \log_8(x+5)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x-1>0 \\ x+5>3x-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>\frac{1}{3} \\ x<3 \end{cases}$$

ដូចនេះ: $\frac{1}{3}<x<3$ រឺ $x\in\left(\frac{1}{3},3\right)$

ខ.រកចំនួនឆ្នាំដែលធ្វើអោយប្រាក់របស់ពូសេងកើនឡើងពីរដង

ដោយអនុវត្តន៍តាមរូបមន្ត $A=P(1+i)^t$ ដែល

$A=2P, i=6\%=0,06$ គេបាន

$$2P=P(1+0,06)^t \Leftrightarrow 2=(1,06)^t \Leftrightarrow \log 2 = t.\log(1,06)$$

$$\Leftrightarrow t=\frac{\log 2}{\log(1,06)}=11,89$$

ដូចនេះ: $t=11,89$ ឆ្នាំ

9.រកតំលៃរថយន្តក្នុងរយះពេល 7 ឆ្នាំក្រោយ

ដោយអនុវត្តន៍រូបមន្ត $A=P(1-i)^t$

ដែល $P=38500, i=15\%=0,15, t=7$ ឆ្នាំ

នាំអោយ $A=38500(1-0,15)^7$

$\doteq 38500(0,85)^7 = 12342$

ដូចនេះ 7 ឆ្នាំក្រោយមករថយន្តថ្លៃ 12342 ដុល្លា

លំហាត់ជំពូក 2

1.ដោះស្រាយសមីការអិចស្ប៉ូណង់ស្យែល

ក. $3^{x^2} = 81^{x-1}$ ខ. $9^{(2x-1)^2} = 3^{x+3}$

គ. $2(3)^{2x+3} = 3 - 7(3^x)$ ឃ. $2^{2x+3} - 2^x = 1 - 2^{x+3}$

2.បើ $a^x = b^y = (ab)^z$ ។ បង្ហាញថា $xy = z(x+y)$

3.បើ $2^a = 3^b = 12^c$ ។ បង្ហាញថា $ab = c(a+2b)$

4.បើ $a = \sqrt{3} + \sqrt{2}$ និង $b = \sqrt{3} - \sqrt{2}$ ។ បង្ហាញថា

$$\frac{1}{1+a} + \frac{1}{a+b} = 1$$

5.បើ $a^2 + b^2 = 11ab$ ។បង្ហាញថា

$$\log a + \log b = 2\log\left(\frac{a-b}{3}\right)$$

6.បើ $\log_x M = a$ និង $\log_y M = b$ ។បង្ហាញថា

$$\log_{xy} M = \frac{ab}{a+b}$$

7.ដោះស្រាយសមីការលោការីត

ក. $2 + \log_{10}(2x-3) = \log_{10} x^2 + \log_{10} 25$

ខ. $6\left(\log_x 8+\log_8 x\right)=13$ គ. $\log_x 9+\log_9 x=\frac{5}{2}$

ឃ. $\log_9 x+\log_{x^2} 9=1$

8.ដោះស្រាយសមីការអិចស្ប៉ូណង់ស្យែល

ក. $25^x \geq 125^{3x-2}$ ខ. $3^x > 27$ គ. $4^x-6\left(2^x\right)+8>0$

ឃ. $15^x \geq \frac{1}{\sqrt[4]{15^3}}$ ង. $\left(\frac{1}{5}\right)^x < \sqrt[3]{0.04}$ ច. $(0.3)^x \leq \frac{100}{9}$

9.ដោះស្រាយសមីការលោការីត

ក. $\log_{3x-2} x \leq 1$ ខ. $\log_4^2 x-\log_2 x-15<0$

គ. $\log_4\left(3^x-1\right).\log_{\frac{1}{4}}\frac{3^x-1}{16}<\frac{3}{4}$

ឃ. $x.\log_{0.1}\left(x^2+x+1\right)\geq 0$

ង. $\log_{\frac{x}{5}}\left(x^2-8x+16\right)\leq 0$

ច. $\log_{x-\frac{9}{2}}\frac{x+4}{2x-6}\leq \log_{x-\frac{9}{2}}(x-5)$

10.មនុស្សម្នាក់បានយកប្រាក់ទៅផ្ញើរនៅធនាគារអេស៊ីលីដា ដោយទទួលបានអត្រាការប្រាក់ 4% ក្នុងមួយឆ្នាំ ។ បើគាត់វិនិយោគប្រាក់នេះតាំងពីឆ្នាំ 1996 មក តើបច្ចុប្បន្ននេះឆ្នាំ 2007 គាត់មានប្រាក់សរុបទាំងអស់

ប៉ុន្មាននៅក្នុងធនាគារ ។

11.គេឲ្យអនុគមន៍ $f(x)=a^x$ និងអនុគមន៍ច្រាស $f^{-1}(x)=\log_a x$ ដែល a ជាចំនួនវិជ្ជមាន ។

ក.រកតំលៃ a ដើម្បីអោយក្រាបនៃអនុគមន៍ $f(x)$ និង $f^{-1}(x)$ កាត់គ្នា ។

ខ.រកគ្រប់ចំនុចដែលក្រាបនៃអនុគមន៍ទាំងពីរកាត់គ្នា (ក្នុងសំណួរ ក) ។

ដំណោះស្រាយ

1.ដោះស្រាយសមីការអិចស្ប៉ូណង់ស្យែល

ក. $3^{x^2}=81^{x-1}\Leftrightarrow 3^{x^2}=3^{4(x-1)}$

$\Leftrightarrow x^2=4(x-1)\Leftrightarrow x^2-4x+4=0$

$\Delta'=4-4=0$ សមីការមានឫសឌុប $x_1=x_2=2$

ដូចនេះ $x=2$

ខ. $9^{(2x-1)^2}=3^{x+3}\Leftrightarrow 3^{2(2x-1)^2}=3^{x+3}$

$\Leftrightarrow 2(2x-1)^2=x+3\Leftrightarrow 8x^2-9x-1=0$

$\Delta'=81+32=113\Rightarrow x=\dfrac{9\pm\sqrt{113}}{16}$

គ. $2(3)^{2x+3}=3-7(3^x)$

$\Leftrightarrow 2.(3)^{2x}.3^3 = 3 - 7(3^x) \Leftrightarrow 54(3)^{2x} + 7(3^x) - 3 = 0$

តាង $u = 3^x$ ដែល $u > 0$ គេបាន:

$54u^2 + 7u - 3 = 0$

$\Delta = 49 + 648 = 697 > 0$ $\Rightarrow u = \dfrac{-7 \pm \sqrt{697}}{108}$

តែ $u > 0 \Rightarrow u = \dfrac{-7 + \sqrt{697}}{108} \Leftrightarrow 3^x = \dfrac{-7 + \sqrt{697}}{108}$

$\Leftrightarrow x = \log_3\left(\dfrac{-7 + \sqrt{697}}{108}\right)$

ឃ. $2^{2x+3} - 2^x = 1 - 2^{x+3} \Leftrightarrow 2^{2x}.2^3 - 2^x = 1 - 2^x.2^3$

$\Leftrightarrow 8.2^{2x} + 8.2^x - 2^x - 1 = 0 \Leftrightarrow 8.2^{2x} + 7.2^x - 1 = 0$

តាង $u = 2^x$ ដែល $u > 0$ គេបាន $8u^2 + 7u - 1 = 0$

$\Leftrightarrow 8u^2 + 8u - u - 1 = 0 \Leftrightarrow 8u(u+1) - (u+1) = 0$

$\Leftrightarrow (u+1)(8u-1) = 0$

$\Leftrightarrow u = -1$ (មិនយក) រឺ $u = \dfrac{1}{8}$

$\Rightarrow 2^x = \dfrac{1}{8} \Leftrightarrow 2^x = 2^{-3} \Leftrightarrow x = -3$

2.បង្ហាញថា $xy = z(x+y)$

គេមាន $a^x = b^y = (ab)^z$ គេទាញបាន:

$$\begin{cases} a^x = (ab)^z \\ b^y = (ab)^z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ell na = z\ell nab \\ y\ell nb = z\ell nab \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{x} = \dfrac{\ell na}{z\ell nab} & (1) \\ \dfrac{1}{y} = \dfrac{\ell nb}{z\ell nab} & (2) \end{cases}$$

យក $(1)+(2)$ គេបាន:

$$\frac{x+y}{xy} = \frac{1}{z}\left(\frac{\ell na + \ell nb}{\ell nab}\right) = \frac{1}{z}.\left(\frac{\ell nab}{\ell nab}\right)$$

$$\Rightarrow xy = z(x+y) \text{ (ពិត)}$$

3.បង្ហាញថា $ab = c(a+2b)$

គេមាន: $2^a = 3^b = 12^c$ គេទាញបាន

$$\begin{cases} 2^a = 12^c \\ 3^b = 12^c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a\ell n2 = c\ell n12 \\ b\ell n3 = c\ell n12 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{a} = \dfrac{\ell n2}{c\ell n12} \\ \dfrac{1}{b} = \dfrac{\ell n3}{c\ell n12} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{2}{a} = \dfrac{2\ell n2}{c\ell n12} & (1) \\ \dfrac{1}{b} = \dfrac{\ell n3}{\ell n12} & (2) \end{cases}$$

យក $(1)+(2)$ គេបាន:

$$\frac{a+2b}{ab} = \frac{1}{c}\left(\frac{\ell n4 + \ell n3}{\ell n4 + \ell n3}\right) = \frac{1}{c} \Rightarrow ab = c(a+2b)$$

4.បង្ហាញថា $\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}=1$

គេមាន: $a=\sqrt{3}+\sqrt{2}, b=\sqrt{3}-\sqrt{2}$

$\Rightarrow a+b=2\sqrt{3}$ និង $ab=3-2=1$

គេបាន: $\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}=\frac{(a+b)+2}{(1+a)(1+b)}$

$=\frac{(a+b)+2}{(a+b)+ab+1}=\frac{2\sqrt{3}+2}{2\sqrt{3}+1+1}=\frac{2\sqrt{3}+2}{2\sqrt{3}+2}=1$ ពិត

ដូចនេះ: $\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}=1$

5.បង្ហាញថា $\log a+\log b=2\log\left(\frac{a-b}{2}\right)$

គេមាន: $a^2+b^2=11ab \Leftrightarrow (a-b)^2=9ab$

$\Leftrightarrow \left(\frac{a-b}{3}\right)^2=ab \Leftrightarrow \log ab=\log\left(\frac{a-b}{3}\right)^2$

$\Leftrightarrow \log a+\log b=2\log\left(\frac{a-b}{3}\right)$ ពិត

ដូចនេះ: $\log a+\log b=2\log\left(\frac{a-b}{3}\right)$

៦.បង្ហាញថា $\log_{xy} M = \dfrac{ab}{a+b}$

គេមាន: $\log_x M = a \Leftrightarrow x = M^{\frac{1}{a}}$

$\log_y M = b \Leftrightarrow y = M^{\frac{1}{b}}$

$\Rightarrow xy = M^{\frac{1}{a}}.M^{\frac{1}{b}} = M^{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$

$\Leftrightarrow xy = M^{\frac{a+b}{ab}} \Rightarrow \log_{xy} xy = \log_{xy} (M)^{\frac{a+b}{ab}}$

$\Leftrightarrow \dfrac{a+b}{ab}.\log_{xy} M = 1$

$\Leftrightarrow \log_{xy} M = \dfrac{ab}{a+b}$ (ពិត)

7.ដោះស្រាយសមីការលោការីត

ក. $2 + \log_{10}(2x-3) = \log_{10} x^2 + \log_{10} 25$

សមីការនេះ មានន័យកាលណា $x > \dfrac{3}{2}$

$\Leftrightarrow \log 100 + \log(2x-3) = \log x^2 + \log 25$

$\Leftrightarrow \log\left[100(2x-3)\right] = \log\left(x^2.25\right)$

$\Leftrightarrow 200x-300=25x^2 \Leftrightarrow 25x^2-200x+300=0$

$\Leftrightarrow x^2-8x+12=0$

$\Delta'=16-12=4=2^2>0$

$x_1=4+2=6, x_2=4-2=2$

ដូចនេះ សមីការមានរឹសពីរគឺ $x_1=6, x_2=2$

ខ. $6(\log_x 8+\log_8 x)=13 \quad (1)$

សមីការមានន័យកាលណា $x>0, x\neq 1$

$$(1) \Leftrightarrow 6\left(\frac{1}{\log_8 x}+\log_8 x\right)=13$$

$$\Leftrightarrow 6\left(\log_8^2 x-13\log_8 x+1\right)=0$$

តាង $u=\log_8 x$ គេបាន: $6u^2-13u+1=0$

$\Delta=169-24=145>0$

$$\Rightarrow u=\frac{13\pm\sqrt{145}}{12}$$

$$\Leftrightarrow \log_8 x=\frac{13\pm\sqrt{145}}{12} \Rightarrow x=8^{\frac{13\pm\sqrt{145}}{12}}$$

គ. $\log_x 9+\log_9 x=\frac{5}{2} \quad (2)$

សមីការនេះ មានន័យកាលណា $x>0, x\neq 1$

$$(2) \Leftrightarrow \frac{1}{\log_9 x} + \log_9 x = \frac{5}{2} \Leftrightarrow \log_9^2 x - \frac{5}{2}\log_9 x + 1 = 0$$

តាង $u = \log_9 x$ យើងបាន: $u^2 - \frac{5}{2}u + 1 = 0$

$$\Delta = \frac{25}{4} - 4 = \frac{9}{4} = \left(\frac{3}{2}\right)^2 > 0$$

$$\Rightarrow u_1 = \frac{\frac{5}{2} + \frac{3}{2}}{2} = \frac{8}{4} = 2 \ \& u_2 = \frac{\frac{5}{2} - \frac{3}{2}}{2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

+ចំពោះ: $u_1 = 2 \Leftrightarrow \log_9 x = 2 \Leftrightarrow x = 9^2 = 81$

+ចំពោះ: $u = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \log_9 x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \quad = 3$

- ដូចនេះ: សមីការមានរឹសពីរគឺ $x_1 = 81 \quad = 3$

ឃ. $\log_9 x + \log_{x^2} 9 = 1 \quad (3)$

សមីការនេះ មានន័យកាលណា $x > 0, x \neq 1$

$$(3) \Leftrightarrow \log_9 x + \frac{1}{\log_9 x^2} = 1 \Leftrightarrow 2\log_9^2 x - 2\log_9 x + 1 =$$

តាង $u = \log_9 x$ គេបាន: $2u^2 - 2u + 1 = 0$

$\Delta' = 1 - 2 = -1 < 0$ សមីការគ្មានរឹស

8.ដោះស្រាយវិសមីការអិចស្ប៉ូណង់ស្យែល

ក. $25^x \ge 125^{3x-2} \Leftrightarrow 5^{2x} \ge 5^{3(3x-2)}$

$\Leftrightarrow 2x \ge 9x-6 \Leftrightarrow x \le \frac{6}{7}$

ខ. $3^x > 27 \Leftrightarrow 3^x > 3^3 \Leftrightarrow x > 3$

គ. $4^x - 6(2^x) + 8 > 0 \Leftrightarrow 2^{2x} - 6(2^x) + 8 > 0$

តាង $u = 2^x$ ដែល $u > 0$ គេបាន: $u^2 - 6u + 8 > 0$

គេដោះស្រាយសមីការ $u^2 - 6u + 8 = 0$

$\Delta' = 9 - 8 = 1 > 0$

$\Rightarrow u_1 = 3 + 1 = 4, u_2 = 3 - 1 = 2$

តាមតារាងសញ្ញានៃ $u^2 - 6u + 8 > 0$

តាមតារាងគេបាន $u \in (-\infty, 2) \cup (4, +\infty)$

តែ $u > 0$ នោះ $u \in (0, 2) \cup (4, +\infty)$

$\Leftrightarrow 2^x \in (0, 2) \cup (4, +\infty) \Leftrightarrow x \in (-\infty, 1) \cup (2, +\infty)$

ឃ. $15^x \ge \frac{1}{\sqrt[4]{15^x}} \Leftrightarrow 15^x \ge 15^{\frac{-3}{4}}$

ង. $\left(\frac{1}{5}\right)^x < \sqrt[3]{0,04} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{5}\right)^x < \sqrt[3]{\left(\frac{1}{2}\right)^2}$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{1}{5}\right)^{x}<\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{2}{3}}\Leftrightarrow x>\frac{2}{3}$$

ច. $(0,3)^{x}\le\frac{100}{9}\Leftrightarrow(0,3)^{x}\le(0,3)^{-2}\Leftrightarrow x\ge-2$

៩.ដោះស្រាយវិសមីការលោការីត

ក. $\log_{3x-2}x\le1\Leftrightarrow\log_{3x-2}x\le\log_{3x-2}(3x-2)$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x>0\\3x-2\ge x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>0\\x\ge1\end{cases}\Leftrightarrow x\ge1$$

ខ. $\log_4^2 x-\log_2^x-15<0$

$\Leftrightarrow\log_2^2\sqrt{x}-2\log_2\sqrt{x}-15<0$

តាង $u=\log_x\sqrt{x}$ គេបានវិសមីការថ្មីគឺ

$u^2-2u-15<0$ (1)

សមីការ $u^2-2u-15=0$ មានរឹស $u_1=5,u_2=-3$

+បើ $u=5\Leftrightarrow\log_2\sqrt{x}=5\Leftrightarrow x=1024$

+បើ $u=-3\Leftrightarrow\log_2\sqrt{x}=-3\Leftrightarrow x=\frac{1}{64}$

វិសមីការ (1) មានចំលើយ $-3<u<5$

$$\Leftrightarrow-3<\log_2\sqrt{x}<5\Leftrightarrow\frac{1}{64}<x<1024$$

ដូចនេះ $\boxed{\frac{1}{64} < x < 1024}$

គ. $\log_4\left(3^x-1\right).\log_{\frac{1}{4}}\frac{3^x-1}{16} < \frac{3}{4}$ (2)

គេមាន: $\log_{\frac{1}{4}}\frac{3^x-1}{16} = \log_{\frac{1}{4}}\left(3^x-1\right) - \log_{\frac{1}{4}}16$

$= -\log_4\left(3^x-1\right)+2$

$(2) \Leftrightarrow \log_4\left(3^x-1\right)\left[2-\log_4\left(3^x-1\right)\right] < \frac{3}{4}$

$\Leftrightarrow -\log_4^2\left(3^x-1\right)+2\log_4\left(3^x-1\right)-\frac{3}{4} < 0$

$\Leftrightarrow \log_4\left(3^x-1\right) \in \left(-\infty,\frac{1}{2}\right)\cup\left(2,+\infty\right)$

$\Leftrightarrow x \in \left(0,1\right)\cup\left(2,+\infty\right)$

ឃ. $x\log_{0,1}\left(x^2+x+1\right)^x \geq \log_{0,1}1$

$\Leftrightarrow \log_{0,1}\left(x^2+x+1\right)^x \leq 1 \Leftrightarrow \left(x^2+x+1\right)^x \leq \left(x^2+x+1\right)^0$

$\Leftrightarrow \left(x^2+x\right)\left(0-x\right) \geq 0 \Leftrightarrow x\left(x^2+x\right) \leq 0$

$\Leftrightarrow x \in \left[-\infty,-1\right]$

ង. $\log_{\frac{x}{5}}\left(x^2-8x+16\right)\le 0$

$\Leftrightarrow \log_{\frac{5}{x}}\left(x^2-8x+16\right)\le \log_{\frac{5}{x}} 1$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-8x+16>0 & (1) \\ x^2-8x+16<0 & (2) \end{cases}$

• វិសមីការ (1) មានចំលើយ $x\in(4,+\infty)$

វិសមីការ (2) មានចំលើយ $x\in(3,5)$

សរុប $u<x<5$

ច. $\log_{x-\frac{9}{2}}\frac{x+4}{2x-6}\le \log_{x-\frac{9}{2}}(x-5)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x+4}{2x-6}>0 \\ \frac{x+4}{2x-6}\le x-5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x+4}{2x-6}>0 & (1) \\ \frac{x+4}{2x-6}-x+5\le & (2) \end{cases}$

វិសមីការ (1) មានសំនុំចំលើយ $x\in\,]-\infty,4[\cup]\,]3,+\infty[$

វិសមីការ (2) : $x\in[-16,3]\cup\left[\frac{49}{2},+\infty\right[$

10. រកប្រាក់សរុបដែលគាត់មាននៅធនាគារឆ្នាំ 2007

ដោយអនុវត្តន៍រូបមន្ត $P=(1+i)^t$

$i = 4\% = 0,04, t = 2007 - 1996 = 11$ ឆ្នាំ

គេបាន $A = P(1+0,04)^{11} = P(1,04)^{11} = 1,5P$

ដូចនេះ ប្រាក់ដែលគាត់មាននៅធនាគារឆ្នាំ 2007 មានចំនួន $1,5$ ដងនៃប្រាក់ដើមរបស់គាត់

11. ក.រកតម្លៃ a

ដើម្បីអោយក្រាបនៃ $f(x)$ និង $f^{-1}(x)$ កាត់គ្នាលុះត្រាតែ $0 < a < 1$

ខ.រកគ្រប់ចំនុចដែលក្រាបនៃអនុគមន៍ទាំងពីរកាត់គ្នា

ក្រាបនៃអនុគមន៍ទាំងពីរកាត់គ្នាលើបន្ទាត់ $y = x, x \in (0,1)$

តាង $A(x_0, x_0)$ ជាចំនុចនៃក្រាបទាំងពីរកាត់គ្នា យើងបាន

$c_1 \cap c_2 = A(x_0, x_0), x_0 \in (0,1)$

ដូចនេះ ក្រាបនៃអនុគមន៍ទាំងពីរកាត់គ្នាលើបន្ទាត់ $y = x, x \in (0,1)$

ជំពូកទី 3 **អនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រ**

មេរៀនទី 1 **អនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រ**

<u>លំហាត់</u>

1.បំប្លែងជារ៉ាដ្យង់នៃមុំ

$200^0, -100^0, 225^0, -240, -135^0, 330^0; 570, 630^0$

2. បំប្លែងជាដឺក្រេនៃមុំ

$\frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}, \frac{5\pi}{7}, \frac{7\pi}{4}, \frac{-11\pi}{6}, \frac{5\pi}{2}, \frac{-7\pi}{2}, \frac{\pi}{9}$

3.គេមាន $\sin\theta + \cos\theta = -\frac{1}{2}$ ហើយ $\pi < \theta < 2\pi$ ។

គណនា ក. $\sin\theta\cos\theta$ ខ. $\tan\theta + \frac{1}{\tan\theta}$

គ. $\sin^3\theta + \cos^3\theta$

4.រកតម្លៃកន្សោមខាងក្រោម:

$A = \frac{8\cos^3\alpha - 2\sin^3\alpha + \cos\alpha}{2\cos\alpha - \sin^3\alpha}$ ដោយស្គាល់ $\tan\alpha = 2$

$B = \frac{\sin\alpha + \cos\alpha}{\cos\alpha - \sin\alpha}$ ដោយស្គាល់ $\tan\alpha = -2$

$C = \frac{\sin^2\alpha - \cos^2\alpha}{\sin^2\alpha - 2\cos^2\alpha}$ ដោយស្គាល់ $\cot\alpha = 3$

5.សម្រួលកន្សោមខាងក្រោម:

ក. $\sqrt{\tan^2\alpha + \cot^2\alpha + 2}$ ខ. $\frac{\sin^2\alpha - \tan^2\alpha}{\cos^2\alpha - \cot^2\alpha}$

គ. $\sqrt{\sin^2\alpha(1+\cos\alpha) + \cos^2\alpha(1+\tan\alpha)}$

ឃ. $\dfrac{\cos^2\alpha+\cos^2\alpha\cot^2\alpha}{\sin^2\alpha+\sin^2\alpha\tan^2\alpha}$

6.ផ្ទៀងផ្ទាត់សមភាពខាងក្រោម:

ក. $\dfrac{\sin x+\cos x-1}{\sin x-\cos x+1}=\dfrac{\cos x}{1+\sin x}$

ខ. $\dfrac{\cos x\cot x-\sin x\tan x}{\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{\cos x}}=1+\sin x\cos x$

គ. $(\tan\theta-\sin\theta)^2+(1-\cos\theta)^2=\left(\dfrac{1}{\cos\theta}-1\right)^2$

ឃ. $\dfrac{2\sin\theta\cos\theta-\cos\theta}{1-\sin\theta+\sin^2\theta-\cos^2\theta}=\dfrac{1}{\sin\theta}$

7.រកខួបនៃអនុគន៍ខាងក្រោម:

ក. $y=\sin\dfrac{2}{3}x$ ខ. $y=-\sin\dfrac{1}{4}x$ គ. $y=2\cos\dfrac{1}{4}x$

ឃ. $y=\tan\dfrac{1}{4}x$ ង. $y=\cot\dfrac{1}{3}x$ ច. $y=\sin 2x+\cos x$

8.រកភាពគូនិងសេសនៃអនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រខាងក្រោម:ក. $y=x-\sin 2x$ ខ. $y=x^2\cos^2 x$

គ. $y=\tan x\cos^2 x$

ឃ. $y=\sin 5x+\sin 3x+5\sin x\cos 2x\ (x\in\mathbb{R})$

ង. $y=\sin x+\tan x+\cot 3x\left(x\in\frac{k\pi}{2}\right)$

ច. $y=\cos x+\sin\frac{x}{2}\sin x+5x^2$

10.ដោយប្រើក្រាប $y=\sin x$ សង់ក្រាបនៃអនុគមន៍

ខាងក្រោម: ក. $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$ ខ. $y=2+\sin x$

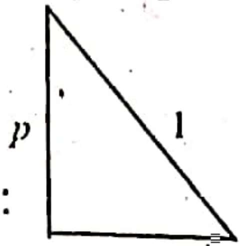
គ. $y=\cos x+2$

11.ដោយប្រើក្រាប $y=\cos x$ សង់ក្រាបនៃអនុគមន៍:

ក. $y=\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$ ខ. $y=2-\cos x$ គ. $y=\cos x+2$

12.គេមានត្រីកោណដូចរូបខាងស្តាំដែលមាន $\sin\beta=p$,

ហើយ β ជាមុំស្រួច ។



ចូរគណនាកន្សោមខាងក្រោមជាអនុគមន៍ p:

ក. $\tan\beta$ ខ. $\sin\left(90^0-\beta\right)$ គ. $\sin\left(180^0+\beta\right)$

13.តាមរូបខាងស្តាំនេះ QRS ជាបន្ទាត់ត្រង់ ហើយ

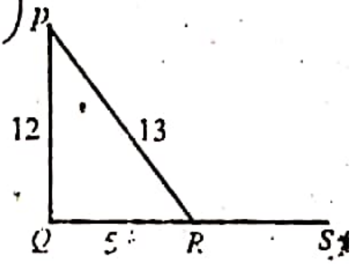
$PQ=12cm$,$QR=5cm$ និង $RP=13cm$ ។

ក.ចូរពន្យល់ថាហេតុអ្វីបានជា $P\hat{Q}R$ ជាមុំកែង ។

ខ.ទាញរកតម្លៃ $P\hat{Q}R$ និង $\cos P\hat{R}S$ ។

14.បង្ហាញថា $\cos\theta\left(\frac{1}{1-\sin\theta}-\frac{1}{1+\sin\theta}\right)$

អាចសរសេរក្នុងទម្រង់ $k\tan\theta$ និងតម្លៃនៃ k



ដំណោះស្រាយ

1.បំប្លែងជារ៉ាដ្យង់នៃមុំ:

$$.200^0=\frac{\pi}{180}\times200^0=\frac{10\pi}{9}$$

$$.-100^0=\frac{\pi}{180}\times\left(-100^0\right)=-\frac{5\pi}{9}$$

$$.225^0=\frac{\pi}{180}\times225^0=\frac{45\pi}{36}=\frac{5\pi}{4}$$

$$.-240^0=\frac{\pi}{180}\times\left(-240^0\right)=-\frac{12\pi}{9}=-\frac{4\pi}{3}$$

$$.-135^0=\frac{\pi}{182}\times\left(135^0\right)=-\frac{3\pi}{4}$$

$$.330^0=\frac{\pi}{180}\times330^0=\frac{11\pi}{6}$$

$$.570^0=\frac{\pi}{180}\times570^0=\frac{57\pi}{18}=\frac{19\pi}{6}$$

$$.630^0=\frac{\pi180}{}\times630^0=\frac{63\pi}{18}=\frac{7\pi}{2}$$

២.បំប្លែងជាដឺក្រេនៃមុំ:

$$.\frac{2\pi}{3}=\frac{180^0}{\pi}\times\frac{2\pi}{3}=120^0,\frac{5\pi}{4}=\frac{180^0}{\pi}\times\frac{5\pi}{4}=225^0$$

$$.\frac{5\pi}{6}=\frac{180^0}{\pi}\times\frac{5\pi}{6}=150^0,\frac{5\pi}{7}=\frac{180^0}{\pi}\times\frac{5\pi}{7}=128^057'$$

$$.\frac{7\pi}{4}=\frac{180^0}{\pi}\times\frac{7\pi}{4}=315^0,\frac{-11\pi}{6}=\frac{180^0}{\pi}\times\frac{(-11\pi)}{6}=-330^0$$

$$.\frac{-5\pi}{2}=\frac{180^0}{\pi}\times\frac{(-5\pi)}{2}=-450^0$$

$$-\frac{7\pi}{2}=\frac{180^0}{\pi}\times\frac{(-7\pi)}{2}=-630^0,\frac{\pi}{9}=\frac{180^0}{\pi}\times\frac{\pi}{9}=20^0$$

3.គេមាន $\sin\theta+\cos\theta=-\frac{1}{2},\pi<\theta<2\pi$

គណនា៖ ក. $\sin\theta\cos\theta$ គេមាន: $\sin\theta+\cos\theta=-\frac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow(\sin\theta+\cos\theta)^2=\frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow 2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{4}-1=-\frac{3}{4}\Rightarrow\sin\theta\cos\theta=-\frac{3}{8}$$

ខ. $\tan\theta+\dfrac{1}{\tan\theta}=\tan\theta+\cot\theta$

$$=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}=\frac{1}{-\frac{3}{8}}$$

ដូចនេះ: $\tan\theta+\dfrac{1}{\tan\theta}=-\dfrac{8}{3}$

គ: $\sin^3\theta+\cos^3\theta=(\sin\theta+\cos\theta)^3-3\sin\theta\cos\theta(\sin\theta+\cos\theta)$

$$=\left(-\frac{1}{2}\right)^3-3\left(-\frac{3}{8}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{8}-\frac{9}{16}$$

$$\sin^3\theta+\cos^3\theta=-\frac{11}{16}$$

4.រកតំលៃកន្សោមខាងក្រោម

$$A=\frac{8\cos^3\alpha-2\sin^3\alpha+\cos\alpha}{2\cos\alpha-\sin^3\alpha}$$

ដោយចែកភាគយកនិងភាគបែងនឹង $\cos^3\alpha\neq 0$

$$A=\frac{8-2\tan^3\alpha+\frac{1}{\cos^2\alpha}}{\frac{2}{\cos^2\alpha}-\tan^3\alpha}=\frac{8-2\tan^3\alpha+\tan^2\alpha+1}{2\tan^2\alpha+2-\tan^3\alpha}$$

$$=\frac{8-2\times 2^3+2^2+1}{2\times 2^2+2-2^3}\ ,\tan\alpha=2\Rightarrow A=-\frac{3}{2}$$

$$.B=\frac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}$$

ដោយចែកភាគយកនិងភាគបែងនឹង $\cos\alpha\neq 0$

គេបាន $B=\frac{\tan\alpha+1}{1-\tan\alpha}$; $\tan\alpha=-2$

$$=\frac{-2+1}{1+2}=-\frac{1}{3}\Rightarrow B=-\frac{1}{3}$$

$$.C=\frac{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha-2\cos^2\alpha}$$

ដោយចែកភាគយកនិងភាគបែងនឹង $\sin^2\alpha\neq 0$

គេបាន $C=\frac{1-\cot^2\alpha}{1-2\cot^2\alpha}$ តែ $\cot\alpha=3$

$$\Rightarrow C=\frac{1-9}{1-2\times 9}=\frac{8}{17}\Rightarrow C=\frac{8}{17}$$

5.សំរួលកន្សោមខាងក្រោម:

ក. $\sqrt{\tan^2\alpha+\cot^2\alpha+2}=\sqrt{(\tan\alpha+\cot\alpha)^2}$

$$=|\tan\alpha+\cot\alpha|$$

ខ. $$\frac{\sin^2\alpha-\tan^2\alpha}{\cos^2\alpha-\cot^2\alpha}=\frac{\sin^2\alpha-\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}}{\cos^2\alpha-\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}}$$

$$=\frac{\sin^2\alpha\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}\times\frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}$$

$$=\frac{\sin^2\alpha\left(\cos^2\alpha-1\right).\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha\left(\sin^2\alpha-1\right).\cos^2\alpha}=\frac{\sin^6\alpha}{\cos^6\alpha}$$

ព្រោះ: $\cos^2\alpha-1=-\sin^2\alpha$, $\sin^2\alpha-1=-\cos^2\alpha$

គ. $\sqrt{\sin^2\alpha(1+\cot\alpha)+(\cos^2\alpha)(1+\tan\alpha)}$

$$=\sqrt{\sin^2\alpha+\sin^2\alpha.\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}+\cos^2\alpha+\cos^2\alpha.\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}$$

$$=\sqrt{\sin^2\alpha+2\sin^2\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha}$$

$$=\sqrt{\left(\sin\alpha+\cos^2\alpha\right)^2}=\left|\sin\alpha+\cos\alpha\right|$$

ឃ. $\dfrac{\cos^2\alpha+\cos^2\alpha\cot^2\alpha}{\sin^2\alpha+\sin^2\alpha\tan^2\alpha}$

$$=\frac{\cos^2\alpha\left(1+\cot^2\alpha\right)}{\sin^2\alpha\left(1+\tan^2\alpha\right)}=\frac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha}\cdot\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}$$

$$=\cot^2\alpha.\cot^2\alpha=\cot^4\alpha$$

6.ផ្ទៀងផ្ទាត់សមភាពខាងក្រោម:

ក. $\dfrac{\sin x+\cos x-1}{\sin x-\cos x+1}=\dfrac{\cos x}{1+\sin x}$

គេមាន: $\sin x+\cos x-1$

$$=2\sin\frac{x}{2}\cos x-2\sin^2\frac{x}{2}=2\sin\frac{x}{2}\left(\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}\right)$$

$$\sin x-\cos x+1=2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}+2\sin^2\frac{x}{2}$$

$$=2\sin\frac{x}{2}\left(\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}\right)$$

$$\Rightarrow\frac{\sin x+\cos x-1}{\sin x-\cos x+1}=\frac{\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}}$$

$$=\frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}+2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}=\frac{\cos x}{1+\sin x}$$

ដូចនេះ: $\frac{\sin x+\cos-1}{\sin x-\cos x+1}=\frac{\cos x}{1+\sin x}$

ខ. $$\frac{\cos x\cot x-\sin x\tan x}{\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{\cos x}}=1+\sin x\cos x$$

គេមាន $\dfrac{\cos x\cot x-\sin x\tan x}{\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{\cos x}}=\dfrac{\dfrac{\cos^2 x}{\sin x}-\dfrac{\sin^2 x}{\cos x}}{\dfrac{\cos x-\sin x}{\sin x\cos x}}$

$=\dfrac{\cos^3 x-\sin^3 x}{\cos x-\sin x}=\sin^2 x+\cos^2 x+\sin x\cos x$

$=1+\sin x\cos x$ ពិត

គ. $(\tan\theta-\sin\theta)^2+(1-\cos\theta)^2=\left(\dfrac{1}{\cos\theta}-1\right)^2$

គេមាន: $(\tan\theta-\sin\theta)^2+(1-\cos\theta)^2$

$=(\tan^2\theta+1)-2\sin\theta\tan\theta-2\cos\theta+1$

$=\dfrac{1}{\cos^2\theta}-2\left(\dfrac{\sin^2\theta}{\cos\theta}+\cos\theta\right)+1$

$=\dfrac{1}{\cos^2\theta}-\dfrac{2}{\cos\theta}+1=\left(\dfrac{1}{\cos\theta}-1\right)^2$ ពិត

ឃ. $\dfrac{2\sin\theta\cos\theta-\cos\theta}{1-\sin\theta+\sin^2\theta-\cos^2\theta}=\dfrac{1}{\tan\theta}$

គេមាន: $\dfrac{2\sin\theta\cos\theta-\cos\theta}{1-\sin\theta+\sin^2\theta-\cos^2\theta}$

$$=\frac{\cos\theta(2\sin\theta-1)}{1-\sin\theta+\sin^2\theta-1+\sin^2\theta}$$

$$=\frac{\cos\theta(2\sin\theta-1)}{\sin\theta(2\sin\theta-1)}=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{1}{\tan\theta}$$ ពិត

7.រកខួបនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម:

ក. $y=\sin\frac{2}{3}x$ មានខួប $p=\frac{2\pi}{\left|\frac{2}{3}\right|}=3\pi$

ខ. $y=-\sin\frac{1}{4}x=\sin\left(-\frac{1}{4}x\right)$ មានខួ $p=\frac{2\pi}{\left|-\frac{1}{4}\right|}=8\pi$

គ. $y=2\cos\frac{1}{4}x$ មានខួប $p=\frac{2\pi}{\left|\frac{1}{4}\right|}=8\pi$

ឃ . $y=\tan\frac{1}{4}x$ មានខួប $p=\frac{\pi}{\left|\frac{1}{4}\right|}=4\pi$

ង. $y=\sin 2x+\cos x$ មានខួប $p=2\pi$

8.រករូបភាពគូនិងសេសនៃអនុគមន៍

ក. $y=x-\sin 2x$ រឺ $f(x)=x-\sin 2x$

$\Rightarrow f(-x) = -x - \sin(-2x) = -x + \sin 2x$

$= -(x - \sin 2x) = -f(x)$

ដូចនេះ: $y = x - \sin 2x$ ជាអនុគមន៍សេស

ខ. $y = x^2 \cos^2 x$ ឬ $f(x) = x^2 \cos^2 x$

$\Rightarrow f(-x) = (-x)^2 . \cos^2 x(-x) = x\cos^2 x = f(x)$

ដូចនេះ: $y = x^2 \cos^2 x$ ជាអនុគមន៍គូ

គ. $y = \tan x \cos^2 x = f(x)$

$\Rightarrow f(-x) = \tan(-x) . \cos^2 x(-x)$

$= -(\tan x . \cos^2 x) = -f(x)$

ដូចនេះ: $y = \tan x \cos^2 x$ ជាអនុគមន៍សេស

ឃ. $y = \sin 5x + \sin 3x + 5\sin x \cos 2x$

$\Rightarrow f(-x) = \sin(-5x) + \sin(-3x) + 5\sin(-x)\cos(-2x)$

$= -\sin 5x - \sin 3x - 5\sin x \cos 2x$

$= -(\sin 5x + \sin 3x + 5\sin x . \cos 2x) = -f(x)$

ដូចនេះ: អនុគមន៍នេះជាអនុគមន៍សេស

ង. $y = \sin x + \tan x + \cot x = f(x)$

$\Rightarrow f(-x) = -\sin x - \tan x - \cot x$

$= -(\sin x + \tan x + \cot x) = -f(x)$

$\Rightarrow y=\sin x+\tan x+\cot x$ ជាអនុគមន៍សេស

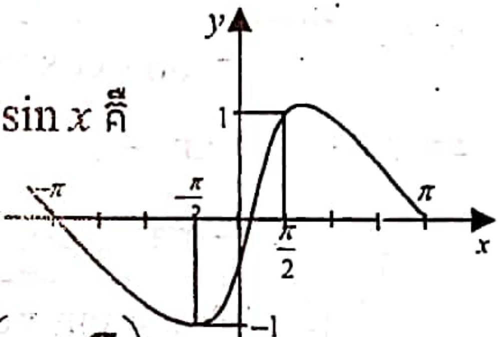
$$ច. y=\cos x+\sin\frac{x}{2}.\sin x+5x^2=f(x)$$

$$\Rightarrow f(-x)=\cos x+\sin\frac{x}{2}.\sin x+5x^2=f(x)$$

ដូចនេះ y ជាអនុគមន៍គូ

6.ដោយប្រើក្រាប $y=\sin x$ សង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម:

យើងមានក្រាបនៃអនុគមន៍ $y=\sin x$ គឺ



ដោយៈប្រើក្រាប $y=\sin x$ ខាងលើយើងបាន:

ក.ក្រាបនៃអនុគមន៍ $y=\sin x\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$ ដោយរំកិល ក្រាបនៃអនុគមន៍ $y=\sin x$ ពីស្តាំទៅឆ្វេងចំនួន $\frac{\pi}{3}$ ឯកតាតាមអ័ក្ស $(x'x)$ ។

ខ.ក្រាបនៃអនុគមន៍ $y=2+\sin x$ ដោយរំកិលក្រាបនៃអនុគមន៍ $y=\sin x$ ពីក្រោមឡើងលើចំនួន 2 ឯកតាតាមអ័ក្ស $(y'y)$ ។

គ.ក្រាបនៃអនុគមន៍ $y=1-\sin x$

ដោយប្រើក្រាប $y=\cos x$ ខាងលើយើងអាចសង់ក្រាប

នៃអនុគមន៍ៈក. $y=\cos\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)$

ដោយរំកិលក្រាបនៃអនុគមន៍ $y=\cos x$ ពីស្តាំទៅឆ្វេង $\dfrac{\pi}{2}$

ឯកតាស្របនឹងអ័ក្ស $y=\cos x$ ។

ខ. $y=2-\cos x$ ឆ្លុះនឹងក្រាបនៃអនុគមន៍

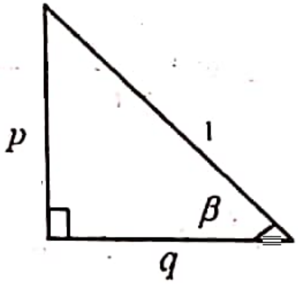
$y=\cos x$ ធៀបនឹងបន្ទាត់ $y=1$ ។

គ. $y=\cos x+2$ ដោយរំកិលក្រាបនៃអនុគមន៍

$y=\cos x$ ពីក្រោមទៅលើ 2 ឯកតាស្របអ័ក្ស $(y'y)$ ។

12.គេមាន $\sin\beta=p$ ហើយ β ជាមុំស្រួច។

គណនា



ក. $\tan\beta=\dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}$

តែ $p^2+q^2=1\Rightarrow q=\sqrt{1-p^2}$

$\Rightarrow\cos\beta=\sqrt{1-p^2}$

$\Rightarrow\tan\beta=\dfrac{p}{\sqrt{1-p^2}}=\dfrac{p\sqrt{1-p^2}}{1-p^2}$

ដូចនេះ $\tan\beta = \frac{p\sqrt{1-p^2}}{1-p^2}$

ខ. $\sin\left(90^0-\beta\right)=\cos\beta=\sqrt{1-p^2}$

គ. $\sin\left(180^0+\beta\right)=-\sin\beta=-p$

13.មានចំលើយនៅក្នុងសៀវភៅពុម្ព ។

14.បង្ហាញថា $\cos\theta\left(\frac{1}{1-\sin\theta}-\frac{1}{1+\sin\theta}\right)$

អាចសរសេរក្នុងទម្រង់ $k\tan\theta$ និងរកតំលៃ k

គេមាន $\cos\theta\left(\frac{1}{1-\sin\theta}-\frac{1}{1+\sin\theta}\right)$

$=\cos\theta\left(\frac{1+\sin\theta-1+\sin\theta}{(1-\sin\theta)(1+\sin\theta)}\right)$

$=\cos\theta.\frac{2\sin\theta}{1-\sin^2\theta}=\cos\theta.\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}=2\tan\theta$ ពិត

ដូចនេះ $k=2$

មេរៀនទី 2 រូបមន្តត្រីកោណមាត្រ

លំហាត់

1.គេមាន

$$\sin\alpha=\frac{1}{2}\left(0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right),\sin\beta=\frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{3}<\beta<\pi\right)$$

គណនា $\sin(\alpha+\beta),\cos(\alpha-\beta),\tan(\alpha-\beta)$ និង $\cos t(\alpha-\beta)$ ។

2.គេមាន $\cos\theta=-\frac{2}{3},\left(\frac{\pi}{2}<\theta<\pi\right)$ ។គណនា

$\cos 2\theta ,\sin\frac{\theta}{2},\sin 3\theta$ ។

3.គេមាន

$$t=\tan\frac{\theta}{2}(t\pm 1),\sin\theta=\frac{2t}{1+t^2},\cos\theta=\frac{1-t^2}{1+t^2},\tan\theta=\frac{2t}{1-t^2}$$

តាមសមភាព $2\cos 2\theta-\cos\theta+2=0$

គណនា $\tan\frac{\theta}{2}$ ដែល $-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}$ ។

4.គេមាន $\theta=36^0$ និង $2\theta=180^0-3\theta$ ។ តាមលក្ខណៈនេះ គណនា $\cos 36^0$ ។

5.គេមាន $\sin\alpha+\cos\beta=\frac{5}{4}$ និង $\cos\alpha+\sin\beta=\frac{5}{4}$ ហើយ $\left(0\le\alpha\le\frac{5}{4}\right),\left(0\le\beta\le\frac{\pi}{2}\right)$ ។

គណនា $\sin(\alpha+\beta)$ និង $\tan(\alpha+\beta)$ ។

6.ចូរបង្ហាញសមភាពខាងក្រោម:

ក. $\cot(a\pm b)=\dfrac{\cot a\cot b\mp 1}{\cot b\pm\cot a}$

ខ. $\tan(a+b)-\tan a-\tan b=\tan a\tan b\tan(a+b)$

គ. $\dfrac{\sin^4\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha-\cos^4\alpha}{\tan 2\alpha-1}=\cos 2\alpha$

ឃ. $\dfrac{\cos^3\alpha-\cos 3\alpha}{\cos\alpha}+\dfrac{\sin^3\alpha+\sin 3\alpha}{\sin\alpha}=3$

7.សម្រួលកន្សោមខាងក្រោម:

ក. $\sin 4x-4\sin 3x+6\sin 2x-4\sin x$

ខ. $\cos^2(\alpha+\beta)+\cos^2(\alpha-\beta)-\cos 2\alpha\cos 2\beta$

គ. $\dfrac{\sin\alpha+\sin 3\alpha+\sin 5\alpha}{\cos\alpha+\cos 3\alpha+\cos 5\alpha}$

ឃ. $\dfrac{\sin\alpha+\sin 3\alpha+\sin 5\alpha+\sin 7\alpha}{\cos\alpha+\cos 3\alpha+\cos 5\alpha}$

8.ចូរបង្ហាញសមភាពខាងក្រោម:

ក. $\sin 3a=4\sin a\sin\left(\dfrac{\pi}{3}+a\right)\sin\left(\dfrac{\pi}{3}-a\right)$

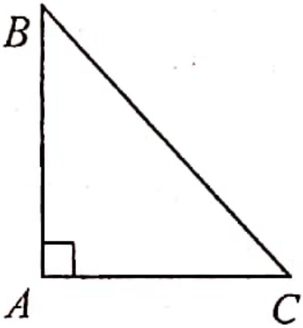
ខ. $\cos 3a=4\cos a\cos\left(\dfrac{\pi}{3}+a\right)\cos\left(\dfrac{\pi}{3}-a\right)$

គ. $4\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)=4\sin^2\alpha-3$

ឃ. $\sin a-\cos a=\sqrt{2}\sin\left(a-\frac{\pi}{4}\right)=-\sqrt{2}\sin\left(a+\frac{\pi}{4}\right)$

9.ចូរបង្ហាញថាត្រីកោណដែលផ្ទៀងផ្ទាត់សមភាព

ក. $\sin A=\frac{\sin B+\sin C}{\cos B+\cos C}$



ខ. $\frac{\sin C}{\cos B}=\sin A+\cos A\cot C$

ជាត្រីកោណកែង។

10.ចូរបង្ហាញថា ត្រីកោណ ABC ផ្ទៀងផ្ទាត់សមភាព

$\sin A=2\sin B\sin C$ ជាមុំក្នុងត្រីកោណនេះ ។

11.គេឲ្យ $\tan A+\tan B=2\cot\frac{C}{2}$ ។ បង្ហាញថាត្រីកោណ ABC ជាត្រីកោណសមបាត ។

12.គេមាន ΔABC និង A, B, C ជាមុំក្នុងត្រីកោណនេះ។

ក.បើគេដឹងថា $\sin A+\sin B+\sin C=1$

គណនា $\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$ ។

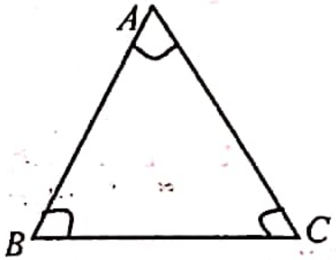
ខ.បង្ហាញថា $\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C=1-2\cos A\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$

13.គណនារង្វាស់មុំនៃត្រីកោណ ABC បើគេដឹងថា

ក. $\sin 3A+\sin 3B+\sin 3C=0$

ខ. $\sin 5A+\sin 5B+\sin 5C=0$

គ. $\sin 6A+\sin 6B+\sin 6c=0$ ។



ដំណោះស្រាយ

1.គេមាន $\sin\alpha=\frac{1}{2}\ \left(0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right),\sin\beta=\frac{1}{3}$

$\left(\frac{\pi}{2}<\beta<\pi\right)$ គេបាន

$$\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\sqrt{1-\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos\beta=-\sqrt{1-\sin^2\beta}=-\sqrt{1-\frac{1}{9}}=-\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

នោះយើងបាន

$+\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha$

$$=\frac{1}{2}\times\left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)+\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=-\frac{2\sqrt{2}}{6}+\frac{\sqrt{3}}{6}=\frac{\sqrt{3}-2\sqrt{2}}{6}$$

$+\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)+\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{-2\sqrt{6}+1}{6}$$

$$+\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\sin\beta\cos\alpha$$

$$=\frac{1}{2}\times\left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)-\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{-2\sqrt{2}-\sqrt{3}}{6}$$

$$+\tan(\alpha-\beta)=\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha-\beta)}=\frac{2\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2\sqrt{6}-1}$$

$$+\cot(\alpha-\beta)=\frac{\cos(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha-\beta)}=\frac{2\sqrt{6}-1}{2\sqrt{2}+\sqrt{3}}$$

2.គេមាន $\cos\theta=-\frac{2}{3}\left(\frac{\pi}{2}<\theta<\pi\right)$

$\Rightarrow \sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\sqrt{1-\frac{4}{9}}=\frac{\sqrt{5}}{3}$ គេបាន:

$$+\cos 2\theta=\cos^2\theta-\sin\theta=\frac{4}{9}-\frac{5}{9}=-\frac{1}{9}$$

$$+\sin^2\frac{\theta}{2}=\frac{1-\cos\theta}{2}=\frac{1+\frac{2}{3}}{2}=\frac{5}{6}$$

$$\Rightarrow \sin\frac{\theta}{2}=\sqrt{\frac{5}{6}}=\frac{\sqrt{30}}{6}$$

$+\sin 3\theta = 2\sin\theta - 4\sin^3\theta$

$$= 2\times\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right) - 4\times\frac{5\sqrt{5}}{27} = \frac{2\sqrt{5}}{3} - \frac{20\sqrt{5}}{27} = -\frac{2\sqrt{5}}{27}$$

3.គណនា $\tan\frac{\theta}{2}$

ដោយ $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow -\frac{\pi}{4} < \frac{\theta}{2} < \frac{\pi}{4}$

$\Leftrightarrow \tan\frac{\theta}{2} \in \left]-1,1\right[$

$$\cos 2\theta = 2\text{ccs}^2\theta - 1 = 2\left[\frac{1-t^2}{1+t^2}\right] - 1 = \frac{t^2-6t^2}{1+2t^2+t^4}$$

$2\cos 2\theta = \cos\theta + 2 = 0$

$\Leftrightarrow 2t^4 - 12t^2 - \left(1-t^2\right)\left(1+t^2\right) + 2\left(1+2t^2+t^4\right) = 0$

$\Leftrightarrow 5t^4 - 8t^2 + 1 = 0$

$\Delta' = 16 - 5 = 11$

$$\Rightarrow t^2 = \frac{4-\sqrt{11}}{5} \Rightarrow \tan\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{4-\sqrt{11}}{5}}$$

4.គណនា 36^0

គេមាន $\theta = 36^0$ និង $2\theta = 180^0 - 3\theta$

$\Rightarrow \cos 2\theta = \cos\left(180^0 - 3\theta\right) = -\cos 3\theta$.

$\Leftrightarrow \cos 2\theta + \cos 3\theta = 0$

$\Leftrightarrow 2\cos^2\theta - 1 + 4\cos^3\theta - 3\cos\theta = 0$

$\Leftrightarrow 4\cos^3\theta + 2\cos^2\theta - 3\cos\theta - 1 = 0$

$\Leftrightarrow (\cos\theta + 1)\left(4\cos^2\theta - 2\cos\theta - 1\right) = 0$

$\Leftrightarrow \cos\theta + 1 = 0 \Rightarrow \cos\theta = -1 < 0$ មិនយក

ឬ $4\cos^2\theta - 2\cos\theta - 1 = 0$

$\Delta' = 1 + 4 = 5 \Rightarrow \cos\theta = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{4}$ តែ $\cos\theta > 0$

$\Rightarrow \cos\theta = \dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$ តែ $\theta = 36^0 \Rightarrow \cos 36^0 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$

5.គេមាន $\sin\alpha + \cos\beta = \dfrac{5}{4}$

និង $\cos\alpha + \sin\beta = \dfrac{5}{4}, \left(0 \le \alpha, \beta \le \dfrac{\pi}{2}\right)$

គណនា $\sin(\alpha + \beta)$ និង $\tan(\alpha + \beta)$

តាង $A = \sin\alpha + \cos\beta$

$\Rightarrow A^2 = \sin^2\alpha + \cos^2\beta + 2\sin\beta\cos\alpha$

តាង $B=\cos\alpha+\sin\beta$

$\Rightarrow B^2=\cos^2\alpha+\sin^2\beta+2\sin\beta\cos\alpha$

$\Rightarrow A^2+B^2=2+2(\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha)$

$\Leftrightarrow 2.\frac{25}{16}-2=2(\sin(\alpha+\beta))\Leftrightarrow\frac{9}{16}=\sin(\alpha+\beta)$

ដូចនេះ $\sin(\alpha+\beta)=\frac{9}{16}$

$\cos^2(\alpha+\beta)=1-\sin^2(\alpha+\beta)=1-\frac{81}{256}=\frac{175}{256}$.

$\Rightarrow\cos(\alpha+\beta)=\pm\frac{5\sqrt{7}}{16}$

$\Rightarrow\tan(\alpha+\beta)=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=\pm\frac{9}{5\sqrt{7}}=\pm\frac{9\sqrt{7}}{35}$

6.បង្ហាញសមភាពខាងក្រោម:

ក. $\cot(a\pm b)=\frac{\cot a\cot b\pm1}{\cot b\pm\cot a}$

គេមាន $\cot(a\pm b)=\frac{\cos(a\pm b)}{\sin(a\pm b)}$

$$=\frac{\cos a\cos b\mp\sin a\sin b}{\sin a\cos b\pm\sin b\cos a}=\frac{\frac{\cos a\cos b}{\sin a\sin b}\pm 1}{\frac{\sin a\cos b}{\sin a\sin b}\pm\frac{\sin b\cos a}{\sin a.\sin b}}$$

$$=\frac{\cot a\cot b\pm 1}{\cot b\pm\cot a}$$ ពិត

ខ. $\tan(a+b)-\tan a-\tan b=\tan a\tan b\tan(a+b)$

គេមាន: $\tan(a+b)-\tan a-\tan b$

$$=\frac{\tan a+\tan b}{1-\tan a\tan b}-\tan a-\tan b$$

$$=\frac{\tan a+\tan b-\tan a+\tan^2 a\tan b-\tan b+\tan a\tan^2 b}{1-\tan a\tan b}$$

$$=\frac{\tan a\tan b(\tan a+\tan b)}{1-\tan a\tan b}$$

$=\tan a\tan b\tan(a+b)$ ពិត

គ. $\dfrac{\sin^4\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha-\cos^4\alpha}{\tan 2\alpha-1}=\cos 2\alpha$

គេមាន: $\dfrac{\sin^4\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha-\cos^4\alpha}{\tan 2\alpha-1}$

$$=\frac{(\sin^2)^2-(\cos^2)^2+\sin 2\alpha}{\frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}-1}$$

$$=\frac{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha+\sin 2\alpha}{\frac{\sin 2\alpha-\cos 2\alpha}{\cos 2\alpha}}$$

$$=\frac{\sin\alpha-\cos 2\alpha}{\sin\alpha-\cos 2\alpha}\times\cos 2\alpha=\cos 2\alpha \text{ (ពិត)}$$

ឃ. $\frac{\cos^3\alpha-\cos 3\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\sin^3\alpha+\sin 3\alpha}{\sin\alpha}=3$

គេមាន $\cos 3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha$ និង

$\sin 3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha$

យើងបានអង្គខាងឆ្វេងនៃសមភាពខាងលើទៅជា

$$\frac{\cos^3\alpha-4\cos^3\alpha+3\cos\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\sin^3\alpha+3\sin\alpha-4\sin^3\alpha}{\sin\alpha}$$

$$\frac{-3\cos^3\alpha+3\cos\alpha}{\cos\alpha}+\frac{3\sin\alpha-3\sin^3\alpha}{\sin\alpha}$$

$$=\frac{3\cos\left(1-\cos^2\alpha\right)}{\cos\alpha}+\frac{3\sin\alpha\left(1-\sin^2\alpha\right)}{\sin\alpha}$$

$$=3\left(2-\left(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha\right)\right)=3 \text{ (ពិត)}$$

7.សំរួលកន្សោមខាងក្រោមៈ

ក . $\sin 4x-4\sin 3x+6\sin 2x-4\sin x$

$=2\sin 2x\left(\cos 2x+3\right)-4\left(\sin 3x+\sin x\right)$

$=2\sin 2x\left(-2\sin^2 x+4\right)-8.\sin 2x\cos x$

$=2\sin 2x\left[4(1-\cos x)-2\sin^2 x\right]$

$=2\sin 2x\left(8\sin^2\frac{x}{2}-8\sin^2\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}\right)$

$=2\sin 2x.8\sin^2\frac{x}{2}\left(1-\cos^2\frac{x}{2}\right)=16\sin 2x.\sin^2\frac{x}{2}.\sin^2\frac{}{}$

$=16\sin 2x\sin\frac{x}{2}$ ពិត

ខ. $\cos^2(\alpha+\beta)+\cos^2(\alpha-\beta)-\cos 2\alpha\cos 2\beta$

គ. $\dfrac{\sin\alpha+\sin 3\alpha+\sin 5\alpha}{\cos\alpha+\cos 3\alpha+\cos 3\alpha}$

$=\dfrac{2\sin 3\alpha\cos 2\alpha+\sin 3\alpha}{2\cos 3\alpha\cos 2\alpha+\cos 3\alpha}$

$=\dfrac{\sin 3\alpha}{\cos 3\alpha}\times\dfrac{2\cos 2\alpha+1}{2\cos 2\alpha+1}=\tan 3\alpha$

ឃ. $\dfrac{\sin\alpha+\sin 3\alpha+\sin 5\alpha+\sin 7\alpha}{\cos\alpha+\cos 3\alpha+\cos 5\alpha+\cos 7\alpha}$

$=\dfrac{2\sin 4\alpha.\cos 3\alpha+2\sin 4\alpha\cos\alpha}{2\cos 4\alpha\cos 3\alpha+2\cos 4\alpha\cos\alpha}$

$=\dfrac{2\sin 4\alpha(\cos 3\alpha+\cos\alpha)}{2\cos 4\alpha(\cos 3\alpha+\cos\alpha)}=\tan 4\alpha$

.បង្ហាញសមភាពខាងក្រោម:

$$\text{ក.}\ \sin 3a = 4\sin a \sin\left(\frac{\pi}{3}+a\right).\sin\left(\frac{\pi}{3}-a\right)$$

គមាន: $\sin\left(\frac{\pi}{3}+a\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}\cos a + \frac{1}{2}\sin a$

$\sin\left(\frac{\pi}{3}-a\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}\cos a - \frac{1}{2}\sin a$

$\Rightarrow \sin\left(\frac{\pi}{3}+a\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}-a\right) = \frac{3}{4}\cos^2 a - \frac{1}{4}\sin^2 a$

$\Rightarrow 4\sin a \sin\left(\frac{\pi}{3}+a\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}-a\right)$

$= 3\sin a\left(1-\sin^2 a\right) - \sin^3 a$

$= 3\sin a - 4\sin^3 a = \sin 3a$ ពិត

$$\text{ខ.}\ \cos 3a = 4\cos a \cos\left(\frac{\pi}{3}+a\right)\cos\left(\frac{\pi}{3}-a\right)$$

$\cos\left(\frac{\pi}{3}+a\right) = \frac{1}{2}\cos a - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin a$

$\cos\left(\frac{\pi}{3}-a\right) = \frac{1}{2}\cos a + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin a$

$\Rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{3}+a\right)\cos\left(\frac{\pi}{3}-a\right) = \frac{1}{4}\cos^2 a - \frac{3}{4}\sin^2 a$

$$\Rightarrow 4\cos a\cos\left(\frac{\pi}{3}+a\right)\cos\left(\frac{\pi}{3}-a\right)$$

$$=\cos^3 a-3\cos a\left(1-\cos^2 a\right)$$

$$=\cos^3 a-3\cos a+3\cos^3 a$$

$=4\cos^3 a-3\cos a=\cos 3a$ ពិត

គ. $4\sin\left(a+\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(a-\frac{\pi}{3}\right)=4\sin^2 a-3$

គេមាន $\sin\left(a+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}\sin a+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos a$

$$\sin\left(a-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}\sin a-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos a$$

$$\Rightarrow \sin\left(a+\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(a-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{4}\sin^2 a-\frac{3}{4}\cos^2 a$$

$$\Rightarrow 4\sin\left(a+\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(a-\frac{\pi}{3}\right)=\sin^2-3\cos^2 a$$

$=\sin^2 a-3\left(1-\sin^2 a\right)=4\sin^2 a-3$ (ពិត)

ឃ $\sin a-\cos a=\sqrt{2}\sin\left(a-\frac{\pi}{4}\right)=-\sqrt{2}\sin\left(a+\frac{\pi}{4}\right)$

គេមាន: $\sin\left(a-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin a-\frac{\sqrt{2}}{2}\cos a$

$$\Rightarrow \sqrt{2}\sin\left(a-\frac{\pi}{4}\right)=\sin a-\cos a \text{ (ពិត)}$$

9.បង្ហាញថា ABC ជាត្រីកោណកែង

$$\text{ក. } SinA=\frac{\sin B+\sin C}{\cos B+\cos C} \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow 2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}=\frac{2\sin\frac{B+C}{2}.\cos\frac{B-C}{2}}{2.\cos\frac{B+c}{2}.\cos\frac{B+C}{2}}$$

គេមាន $\frac{B+C}{2}=\frac{\pi}{2}-\frac{A}{2}\Rightarrow \sin\frac{A}{2}=\cos\frac{B+C}{2}$

$$(1)\Leftrightarrow 2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}=\frac{\cos\frac{A}{2}}{\sin\frac{A}{2}}\Leftrightarrow \sin^2\frac{A}{2}=\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sin\frac{A}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow \frac{A}{2}=\frac{\pi}{4}\Rightarrow A=90^0$$

ដូចនេះ ABC ជាត្រីកោណកែងត្រង់ A

$$\text{ខ. } \frac{\sin C}{\cos B}=\sin A+\cos A\cot C$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin C}{\cos B} = \sin A + \cos B.\frac{\cos C}{\sin C}$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 C = \sin A \cos B \sin C + \cos A \cos B \cos C$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 C = \cos B\left(\sin A \sin C + \cos A \cos C\right)$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 C = -\cos\left(A+C\right).\cos\left(A-C\right)$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\cos 2A + \cos 2C\right)$$

$$\Leftrightarrow 2\sin^2 C + \cos 2A + \cos 2C = 0$$

$$\Leftrightarrow 1 - 2\cos 2C + \cos 2A + \cos 2C = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos 2A = -1 \Leftrightarrow 2A = \pi \Rightarrow A = \frac{\pi}{2} = 90^0$$

ដូចនេះ ΔABC ជាត្រីកោណកែងត្រង់ A

10.បង្ហាញថា ΔABC ជាត្រីកោណសមបាត

គេមាន: $\sin A = 2\sin B \cos C$

$$\Leftrightarrow \sin\left(B+C\right) = 2\sin B \cos C$$

$$\Leftrightarrow \sin B \cos C + \sin C \cos B = 2\sin B \cos C$$

$$\Leftrightarrow \sin B \cos C - \sin C \cos B = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(B-C\right) = 0 \Rightarrow B - C = 0 \Leftrightarrow B = C$$

ដូចនេះ ΔABC ជាត្រីកោណកែងសមបាត

11.បង្ហាញថា ABC ជាត្រីកោណសមបាត

គេអោយ $\tan A+\tan B=2\cot\frac{C}{2}$

គេមានៈ $\cot\frac{C}{2}=\tan\frac{A+B}{2}$ គេបាន

$$\tan A-\tan\frac{A+B}{2}+\tan B-\tan\frac{A+B}{2}=0$$

$$\Leftrightarrow\frac{\sin\frac{A-B}{2}}{\cos A\cos\frac{A+B}{2}}+\frac{\sin\frac{B-A}{2}}{\cos B\cos\frac{A+B}{2}}=0$$

និង $\sin\frac{C}{2}=\cos\frac{B+A}{2}$

$$\Leftrightarrow\sin\frac{A-B}{2}\left[\frac{1}{\cos A}-\frac{1}{\cos B}\right]=0$$

$$\Leftrightarrow\sin\frac{A-B}{2}=0\text{ រឺ }\frac{1}{\cos A}-\frac{1}{\cos B}=0$$

$$\Rightarrow\cos A=\cos B\Rightarrow A=B$$

ដូចនេះ ABC ជាត្រីកោណសមបាត

12.ក.គណនា $\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$

យើងមាន $A+B+C=\pi\Leftrightarrow A+B=\pi-C$

$$\Rightarrow\sin(A+B)=\sin(\pi-C)=\sin C$$

តាមសម្មតិកម្ម $\sin A+\sin B+\sin C=1$

$$\Leftrightarrow(\sin A+\sin B)+\sin(A+B)=1$$

$$\Leftrightarrow 2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}+2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A+B}{2}=1$$

$$\Leftrightarrow 2\sin\frac{A+B}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2}+\cos\frac{A+B}{2}\right)=1$$

$$\Leftrightarrow 4\sin\frac{A+B}{2}.\cos\frac{A}{2}.\cos\frac{B}{2}=1$$

$$\Leftrightarrow 4\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}=1\Leftrightarrow\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}=\frac{1}{4}$$

ខ.បង្ហាញថា

$$\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C=1-2\cos A\cos B\cos C$$

គេមាន

$$\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C=$$

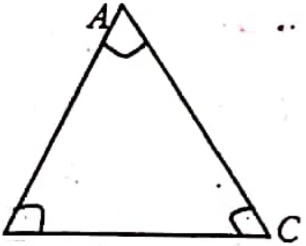
$$\frac{1}{2}(1+\cos 2A)+\frac{1}{2}(1+\cos 2B)+\cos^2(A+B)$$

$$=1+\cos(A+B)\cos(A-B)+\cos^2(A+B)$$

$$=1+\cos(A+B)\left[\cos(A-B)+\cos(A+B)\right]$$

$=1-2\cos A\cos B\cos C$ ពិត

13.គណនារង្វាស់មុំត្រីកោណ ABC បើគេដឹងថា



ក. $\sin 3A+\sin 3B+\sin 3C=0$

$\Leftrightarrow 4\cos\frac{3A}{2}\cos\frac{3B}{2}\cos\frac{3C}{2}=0$

$\Leftrightarrow \cos\frac{3A}{2}=0$ ឬ $\cos\frac{3B}{2}=0, \cos\frac{3C}{2}=0$

ខ. $\sin 5A+\sin 5B+\sin 5C=0$

$\Leftrightarrow 4\cos\frac{5A}{2}=0$ ឬ $\cos\frac{5B}{2}=0$ ឬ $\cos\frac{5C}{2}=0$

$\Leftrightarrow A=\frac{\pi}{5}, B=\frac{\pi}{5}, C=\frac{\pi}{5}$

ឬ $A=\frac{3\pi}{5}, B=\frac{3\pi}{5}, C=\frac{3\pi}{5}$

គ. $\sin 6A+\sin 6B+\sin 6C=0$

$\Leftrightarrow 4\cos 3A.\cos 3B\cos 3C=0$

$\Leftrightarrow \cos 3A=0$ ឬ $\cos 3B=0$ ឬ $\cos 3C=0$

$\Rightarrow A=\frac{\pi}{6}, B=\frac{\pi}{6}, C=\frac{\pi}{6}$ ឬ $A=\frac{\pi}{2}, B=\frac{\pi}{2}, C=\frac{\pi}{2}$

មេរៀនទី 3 សមីការនិងវិសមីការត្រីកោណមាត្រ

លំហាត់

1.ដោះស្រាយសមីការខាងក្រោមៈ

ក. $\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ខ. $\cos\theta = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

គ. $\cos\left(4x+\frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$

ឃ. $\cos^2 x = 1$ ង. $\sin\sqrt{x} = -1$

ច. $\cot x = 1$ ឆ. $\frac{1}{\cos 2x} = \sqrt{2}$

ជ. $2\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right) = 1$ ឈ. $\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right) = 5$

ញ. $\tan^3\left(x-\frac{\pi}{4}\right) = \tan x - 1$ ដ. $\cot\left(2x+\frac{\pi}{3}\right) = 2$

ឋ. $\frac{2\tan x}{1-\tan^2 x} = 5$

2.ដោះស្រាយសមីការខាងក្រោម:

ក. $\tan^3 3x - 2\sin^3 3x = 0$

ខ. $\cos\left(\frac{3\pi}{2}+x\right) = \sqrt{2}\sin x\cos x$

គ. $\sin 2x = (\cos x - \sin x)^2$

ឃ. $\sqrt{3}\sin x + \sin x = \frac{1}{\cos x}$

ង. $\sin 2x+\tan x=2$ ច. $\frac{\sqrt{3}}{\cos^2 x}=4\tan x$

ឆ. $\frac{1+\sin x}{1+\cos x}=\frac{1}{2}$

ជ. $\sin 3x+\cos 2x=1+2\sin x\cos 2x$

ឈ. $\sin 2(x-\pi)-\sin(3x-\pi)=\sin x$

ញ. $\tan x+\cot x=2(\sin 2x+\cos 2x)$

ដ. $\frac{\sin x+\sin 2x+\sin 3x}{\cos x+\cos 2x+\cos 3x}=\sqrt{3}$

3.ដោះស្រាយវិសមីការខាងក្រោម:

ក. $2\cos\theta\le-\sqrt{2}$ ខ. $-\sqrt{2}\sin\theta+1\ge 0$

គ. $\sqrt{3}\tan\theta-1<0$

ឃ. $\sin\left(2\theta+\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}\ (-\pi\le\theta<\pi)$

ង. $\cos\left(\frac{1}{2}\theta-\frac{\pi}{3}\right)\le\frac{1}{\sqrt{2}}\ (0\le\theta<2\pi)$

4.រកគ្រប់មុំចន្លោះ 0^0 និង 360^0 ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការ

ក. $2\tan y=5\sin y$ ខ. $8\sin x\cos x=\sin x$

គ. $4\sin^2 x=6-9\cos x$ ឃ. $3\cos y+\cot y=0$

ង. $2\sin 2x+1=0$ ច. $6\sin x-8\sin^2 x=5\cos^2 x$

ឆ. $2\cot 2x = 5$ ជ. $3\sin y \tan y + 8 = 0$

ឈ. $3\cos^2 y = 7\sin y + 5$

ញ. $\cot\left(\frac{z}{2}\right) - 2\cos\left(\frac{z}{2}\right) = 0$

ដ. $\tan\left(x - 30^0\right)\tan 50^0 = 0$

5.គេឲ្យ $x = 3\sin\theta - 2\cos\theta$ និង $y = 3\cos\theta + 2\sin\theta$

ក.រកតម្លៃនៃមុំស្រួច θ ចំពោះ $x = y$

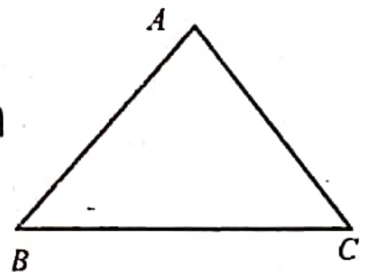
ខ.បង្ហាញថា $x^2 + y^2$ ជាចំនួនថេរចំពោះគ្រប់តម្លៃនៃ θ ។

6.គេឲ្យត្រីកោណ ABC មាន $\frac{\sin A + \cos B}{\sin B + \cos A} = \tan A$ ។

បង្ហាញថា ΔABC ជាត្រីកោណកែង ។

7.គេឲ្យត្រីកោណ ABC មាន $\frac{\sin C}{\sin B} = 2\cos A$ ។

រកប្រភេទនៃត្រីកោណ ΔABC ។



8.គេឲ្យ ΔABC មានមុំបំពេញលក្ខខណ្ឌ

$\tan B + \tan C = 2\cos\frac{A}{2}$ ។

បង្ហាញថា ΔABC ជាត្រីកោណសមបាត ។

ដំណោះស្រាយ

1.ដោះស្រាយសមីការខាងក្រោមៈ

ក. $\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \sin\theta = \sin\frac{\pi}{3}$

$\Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ ឬ $\theta = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi ; k \in \mathbb{Z}$

ខ. $\cos\theta = -\frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \cos\theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\Leftrightarrow \cos\theta = \cos\frac{3\pi}{4} \Leftrightarrow \theta = \pm\frac{3\pi}{4} + 2k\pi , k \in \mathbb{Z}$

គ. $\cos\left(4x + \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4x + \frac{\pi}{3} = x - \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ 4x + \frac{\pi}{3} = -x + \frac{\pi}{6} + 2k\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3} \\ x = -\frac{\pi}{30} + \frac{2k\pi}{5} \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

ឃ. $\cos^2 x = 1 \Leftrightarrow \cos x = \pm 1$

$+ \cos x = 1 \Leftrightarrow x = 2k\pi , k \in \mathbb{Z}$

$+ \cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + 2k\pi , k \in \mathbb{Z}$

ង. $\sin\sqrt{x}=-1 \Leftrightarrow \sqrt{x}=-\frac{\pi}{2}+2k\pi$

ច. $\cot x=1 \Leftrightarrow \cot x=\cot\frac{\pi}{4} \Rightarrow x=\frac{\pi}{4}+k\pi \ ,k\in\mathbb{Z}$

ឆ. $\frac{1}{\cos 2x}=\sqrt{2} \Leftrightarrow \cos 2x=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\Leftrightarrow \cos 2x=\cos\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow 2x=\pm\frac{\pi}{4}+2k\pi$

$\Leftrightarrow x=\pm\frac{\pi}{8}+k\pi \ ,k\in\mathbb{Z}$

ជ. $2\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=1 \quad \Leftrightarrow \sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}=\sin\frac{\pi}{6}$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} 2x-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{6}+2k\pi \\ 2x-\frac{\pi}{3}=\pi-\frac{\pi}{6}+2k\pi \end{array}\right. ,k\in\mathbb{Z}$$

ឈ. $\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}=\cos\frac{\pi}{6}$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{6}+2k\pi \\ 2x-\frac{\pi}{3}=-\frac{\pi}{6}+2k\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{4}+k\pi \\ x=-\frac{\pi}{4}+k\pi \end{array}\right. ,k\in\mathbb{Z}$$

ញ. $\tan^3\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\tan x-1 \quad (1)$

តាង $u=x-\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+u$

$(1) \Leftrightarrow \tan^3 u=\tan\left(\frac{\pi}{4}+u\right)-1 \Leftrightarrow \tan^3 u=\frac{\tan u+1}{1-\tan u}-1$

$\Leftrightarrow \tan^3 u-\tan^4 u-2\tan u=0$

$\Leftrightarrow \tan u\left(\tan^2 u-\tan^3 u-2\right)=0$

$\Leftrightarrow \tan u=0 \Rightarrow u=k\pi \ ,(k\in\mathbb{Z})$

ឬ $\tan^2 u-\tan^3 u-2=0 \quad \Leftrightarrow \tan^3 u-\tan^2 u+2=0$

$\Leftrightarrow \tan^3 u+\tan^2 u-2\tan^2 u+2=0$

$\Leftrightarrow \tan^2 u+\tan^2 u-2\tan^2 u+2=0$

$\tan^2 u-2\tan u+2=0$ គ្មានរឹស

2.ដោះស្រាយសមីការខាងក្រោម:

ក. $\tan^3 3x-2\sin^3 3x=0$

$\Leftrightarrow \sin^3 3x\left(1-2\cos^3 3x\right)=0$

$\Leftrightarrow \sin^3 3x=0 \Leftrightarrow \sin 3x=0$

$\Leftrightarrow \tan^2 u\left(\tan u+1\right)-2\tan\left(\tan u+1\right)\left(\tan u-1\right)=0$

$\Leftrightarrow \left(\tan u+1\right)\left(\tan^2 u-2\tan u+2\right)=0$

$$\Leftrightarrow \tan u + 1 = 0 \Leftrightarrow \tan u = -1 \Rightarrow u = \frac{3\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow \tan u + 1 = 0 \Leftrightarrow \tan u = -1 \Rightarrow u = \frac{3\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow 3x = 2k\pi \Leftrightarrow x = \frac{2k\pi}{3}$$

ຂ. $\cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = \sqrt{2}\sin x \cos x$

$$\Leftrightarrow \cos\frac{3\pi}{2}\cos x - \sin\frac{3\pi}{2}\sin x = \sqrt{2}\sin x \cos x$$

$$\Leftrightarrow 0 + \sin x = \sqrt{2}\sin x \cos x$$

$$\Leftrightarrow \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{4} + 2k\pi \ , k \in \mathbb{Z}$$

ຄ. $\sin 2x = (\cos x - \sin x)^2$

$$\Leftrightarrow \sin 2x = \cos^2 x - 2\sin x \cos x + \sin^2 x$$

$$\Leftrightarrow \sin 2x = 1 - \sin 2x$$

$$\Leftrightarrow 2\sin 2x = 1 \Leftrightarrow \sin 2x = \frac{1}{2} = \sin\frac{\pi}{6}$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} 2x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ 2x = \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{12} + k\pi \\ x = \frac{5\pi}{2} + k\pi \end{array}\right. , k \in \mathbb{Z}$$

ឃ. $\sqrt{3}\sin x+\sin x=\dfrac{1}{\cos x}$

$\sin x\left(\sqrt{3}+1\right)=\dfrac{1}{\cos x}$

$\tan x\left(\sqrt{3}+1\right)=\tan^2 x+1$

$\tan^2 x-\left(\sqrt{3}-1\right)\tan x+1=0$

(អ្នកអាចដោះស្រាយសមីការនេះដោយខ្លួនឯងដោយ
តាង $t=\tan x$)

ប. $\dfrac{\sqrt{3}}{\cos^2 x}=4\tan x\Leftrightarrow\dfrac{\sqrt{3}}{\cos x}=4\sin x$

$\Leftrightarrow\sin 2x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\sin\dfrac{\pi}{3}$

$$\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{6}+k\pi\\x=\dfrac{\pi}{3}+k\pi\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{6}+k\pi\\x=\dfrac{\pi}{3}+k\pi\end{array}\right.,k\in\mathbb{Z}$$

ឆ. $\dfrac{1+\sin x}{1+\cos x}=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow 2+2\sin x=1+\cos x$

$$\Leftrightarrow 1-\cos x+2\sin x=0\Leftrightarrow 2\sin\frac{x}{2}\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \sin\frac{x}{2}=0\Leftrightarrow \frac{x}{2}=2k\pi$$

3.ដោះស្រាយវិសមីការខាងក្រោម:

ក. $2\cos\theta\le-\sqrt{2}\Leftrightarrow \cos\theta\le-\frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\Leftrightarrow \cos\theta\le\cos\frac{3\pi}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{3\pi}{4}+2k\pi\le\theta\le-\frac{3\pi}{4}+2k\pi\ ,(k\in\mathbb{Z})$$

ខ. $-\sqrt{2}\sin\theta+1\ge0\Leftrightarrow \sin\theta\le\frac{\sqrt{2}}{2}=\sin\frac{\pi}{4}$

$$\Rightarrow \pi-\frac{\pi}{4}+2k\pi\le\theta\le\frac{\pi}{4}+2k\pi\ ,k\in\mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow \frac{3\pi}{4}+2k\pi\le\theta\le\frac{\pi}{4}+2k\pi\ ,(k\in\mathbb{Z})$$

គ. $\sqrt{3}\tan\theta-1<0\Leftrightarrow \tan\theta<\frac{1}{\sqrt{3}}=\tan\frac{\pi}{6}$

$$\Rightarrow -\frac{\pi}{2}+k\pi<\theta<\frac{\pi}{6}+k\pi\ .(t\in\mathbb{Z})$$

ង. $\cos\left(\frac{1}{2}\theta-\frac{\pi}{\theta}\right)\le\frac{1}{\sqrt{2}}\ (0\le\theta\le2\pi)$

$\Leftrightarrow\cos\left(\frac{1}{2}\theta-\frac{\pi}{3}\right)\le\cos\frac{\pi}{4}\Rightarrow\frac{\pi}{4}+2k\pi\le\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{3}+2k\pi$

$\Leftrightarrow\frac{7\pi}{12}+2k\pi\le\frac{\theta}{2}\le\frac{\pi}{12}+2k\pi$

$\Leftrightarrow\frac{7\pi}{6}+2+4k\pi\le\theta\le\frac{\pi}{6}+4k\pi\ ,(k\in\mathbb{Z})$

4.រកគ្រប់មុំចន្លោះ 0^0 និង 360^0 ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការ

ក. $2\tan y=5\sin y\Leftrightarrow2\frac{\sin y}{\cos y}=5\sin y$

$\Rightarrow\sin y\left(\frac{2}{\cos y}-5\right)=0$ ឬ $\frac{2}{\cos y}-5=0$

$+\sin y=0\Rightarrow y=0^0\ ,180^0\ ,130^0$

$+\frac{2}{\cos y}-5=0\Leftrightarrow\cos y=\frac{2}{5}=0,4$

ដូចនេះ $y=0^0;66,42^0,180^0$ រឺ 360^0

ខ. $8\sin x\cos x=\sin x\ \Leftrightarrow\sin x(8\cos x-1)=0$

$\Leftrightarrow\sin x=0\Rightarrow x=k\pi\ ,k=0,1,2$

ឬ $8\cos x-1=0 \Leftrightarrow \cos x=\frac{1}{8}=0,125$

ដូចនេះ: $x=0^0,180^0,360^0,8281^0$

គ. $4\sin^2 x=6-9\cos x \Leftrightarrow 4-4\cos^2 x=6-9\cos x$

$\Leftrightarrow 4\cos^2 x-9\cos x+2=0$

$\Delta=81-32=40=7^2>0$

$\Rightarrow \cos x=\frac{9+7}{8}=2>1$ (មិនយក)

ឬ $\cos x=\frac{9-7}{8}=\frac{1}{4}=0,25 \Rightarrow x=75,5^0$

ឃ. $3\cos y+\cot y=0 \Leftrightarrow 3\cos y+\frac{\cos y}{\sin y}=0$

$\Leftrightarrow \cos y(3\sin y+1)=0$

$\Leftrightarrow \cos y=0$ ឬ $3\sin y+1=0$

$+\cos y=0 \Rightarrow y=90^0,270^0$

$+3\sin y+1=0 \Leftrightarrow \sin y=-\frac{1}{3}=-0,33 \Rightarrow y=340^0$

ង. $2\sin 2x+1=0 \Leftrightarrow \sin 2x=-\frac{1}{2}=\sin\frac{11\pi}{6}$

$\Rightarrow 2x=\frac{11\pi}{6}+2k\pi \Leftrightarrow x=\frac{11\pi}{12}+k\pi$

តែ $0^0 \le x \le 360^0$

$$\Rightarrow x = \frac{11\pi}{12} = 165^0 \text{ ឬ } x = \frac{23\pi}{12} = 345^0$$

ឋ. $6\sin x - 8\sin^2 x = 5\cos^2 x$

$$\Leftrightarrow 6\sin x - 8\sin^2 x = 5 - 5\sin^2 x$$

$$\Leftrightarrow 3\sin^2 x - 6\cos x + 5 = 0$$

$\Delta' = 9 - 15 = -6 < 0$ សមីការគ្មានរឹស

ឆ. $2\cot 2x = 5 \Leftrightarrow \cot 2x = \frac{5}{2} \Leftrightarrow \tan 2x = \frac{5}{2} = 0,4$

$$\Rightarrow 2x = 21,8^0 \Rightarrow x = 10,9^0$$

ជ. $3\sin y \tan y + 8 = 0 \Leftrightarrow 3\frac{\sin^2 y}{\cos y} + 8 = 0$

$$\Rightarrow 3 - 3\cos^2 y + 8\cos y = 0 \Leftrightarrow 3\cos^2 y - 8\cos y - 3 = 0$$

$\Delta' = 16 - 36 = -20 < 0$ (សមីការគ្មានរឹស)

ឈ. $3\cos^2 y = 7\sin y + 5$

$$\Leftrightarrow 3 - 3\sin^2 y = 7\sin y + 5 \Leftrightarrow 3\sin^2 y + 7\sin y + 2 = 0$$

$\Delta = 49 - 24 = 25 > 0$

$$\Rightarrow \sin y = \frac{-7+5}{6} = -\frac{1}{3} = -0,33 \Rightarrow y = 340^0$$

ឬ $\sin y=\dfrac{-7-5}{6}=-2<-1$ (មិនយក)

ញ. $\cot\left(\dfrac{z}{2}\right)2\cos\left(\dfrac{z}{2}\right)=0$

$$\Leftrightarrow \cos\left(\frac{z}{2}\right)\left[\frac{1}{\sin\left(\frac{z}{2}\right)}-2\right]=0$$

$\Leftrightarrow \cos\left(\dfrac{z}{2}\right)=0$ ឬ $\dfrac{1}{\sin\left(\dfrac{z}{2}\right)}-2=0$

$+\cos\left(\dfrac{z}{2}\right)=0\Rightarrow \dfrac{z}{2}=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi$

$\Rightarrow z=\pi+4k\pi$ តែ $0^0<z<360^0\Rightarrow z=\pi=180^0$

$+\dfrac{1}{\sin\left(\dfrac{z}{2}\right)}-2=0\Leftrightarrow \sin\left(\dfrac{z}{2}\right)=\dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow \dfrac{z}{2}=\dfrac{\pi}{6}+2k\pi\Leftrightarrow z=\dfrac{\pi}{3}+4k\pi$.

ឬ $\dfrac{z}{2}=\pi-\dfrac{\pi}{6}+2k\pi\Leftrightarrow z=\dfrac{5\pi}{3}+4k\pi$

តែ $0^0 \le z \le 360^0 \Rightarrow z = \frac{\pi}{3} = 60^0$ ឬ $z = 300^0$

ង. $\tan(x-30^0)\tan 50^0 = 0$

$\Rightarrow \tan(x-30^0) = 0$ (ព្រោះ $\tan 50^0 \neq 0$)

$\Leftrightarrow x - \frac{\pi}{6} = k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + k\pi$ តែ $0^0 \le x \le 360^0$

$\Rightarrow x = 30^0$ ឬ $x = 210^0$

5.គេអោយ $x = 3\sin\theta - 2\cos\theta$ និង

$y = 3\cos\theta + 2\sin\theta$ ។

ក.រកតម្លៃនៃមុំស្រួច θ ចំពោះ $x = y$

គេបាន $3\sin\theta - 2\cos\theta = 3\cos\theta + 2\sin\theta$

$\Leftrightarrow \sin\theta = 5\cos\theta \Leftrightarrow \tan\theta = 5 \Rightarrow \theta = 18,7^0$

ខ.បង្ហាញថា $x^2 + y^2$ ជាចំនួនថេរ។ គេមាន:

$x^2 + y^2 = (3\sin\theta - 2\cos\theta)^2 + (3\cos\theta + 2\sin\theta)^2$

$= 9\sin^2\theta - 12\sin\theta\cos\theta + 4\cos^2\theta + 9\cos^2\theta +$

$12\sin\theta\cos\theta + 4\sin^2\theta$

$= 9(\sin^2\theta + \cos^2\theta) + 4(\sin\theta + \cos^2\theta) = 13$ ថេរ

ដូចនេះ $x^2 + y^2$ ជាចំនួនថេរ

6.បង្ហាញថា ΔABC ជាត្រីកោណកែង

គេមាន: $\dfrac{\sin A+\cos B}{\sin B+\cos A}=\tan A$

$\Leftrightarrow \dfrac{\sin A+\cos B}{\sin B+\cos A}=\dfrac{\sin A}{\cos A}$

$\Leftrightarrow \sin A\cos A+\cos A\cos B=\sin A\sin B+\sin A\cos A$

$\Leftrightarrow \cos A\cos B-\sin A\sin B=0$

$\Leftrightarrow \cos\left(A+B\right)=0\Rightarrow A+B=\dfrac{\pi}{2}\Rightarrow c=90^0$

ដូចនេះ ΔABC ជាត្រីកោណកែងត្រង់ C

7.រកប្រភេទនៃត្រីកោណ ABC

គេមាន: $\dfrac{\sin C}{\sin B}=2\cos A \Leftrightarrow \sin C=2\sin B\cos A \quad (1)$

ដោយ $A+B+C=\pi\Rightarrow A+B=\pi-C$

$\Rightarrow \sin\left(A+B\right)=\sin\left(\pi-C\right)=\sin C$

$(1)\Leftrightarrow \sin\left(A+B\right)=2\sin B\cos A$

$\Leftrightarrow \sin A\cos B+\sin B\cos A=2\sin B\cos A$

$\Leftrightarrow \sin A\cos B-\sin B\cos A=0$

$\Leftrightarrow \sin\left(A-B\right)=0\Leftrightarrow A-B=0\Rightarrow A=B$

ដូចនេះ ΔABC ជាត្រីកោណសមបាត

លំហាត់ជំពូក

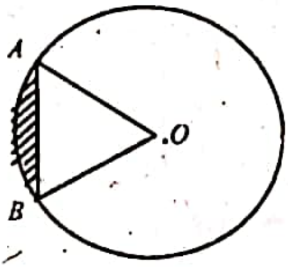
1.អង្កត់ធ្នូ AB ចែករង្វង់មួយដែលមានកាំស្មើនឹង $2\,cm$ ជា

ពីរអង្កត់ ។ គេដឹងថា AB ស្កាត់ធ្នូដែលមានមុំផ្ចិតស្មើ 60^0

ក.ក្រឡាផ្ទៃចម្រៀងថាស AOB ។

ខ.ក្រឡាផ្ទៃត្រីកោណ AOB ។

គ.ក្រឡាផ្ទៃអង្កត់ថាសតូច (ផ្នែកតូច)



2.គណនា

ក. $\sin 960^0$ ខ. $\cos 1215^0$ គ. 2940^0

ឃ. $\cos\dfrac{13\pi}{6}$ ង. $\tan\left(-\dfrac{19}{4}\pi\right)$ ច. $\sin\left(-\dfrac{17}{3}\pi\right)$

3.គណនា

ក. $\sin\theta+\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{2}\right)+\sin(\theta+\pi)+\left(\theta+\dfrac{3}{2}\pi\right)$

ខ. $\cos\dfrac{20}{3}\pi\tan\dfrac{7}{4}\pi+\sin\dfrac{5}{2}\pi\cos(-3\pi)$

គ. $\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)+\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+2\theta\right)+\sin(\pi-2\theta)+\cos(\pi-\theta)$

4.គេមាន

$$\tan\alpha+\tan\beta+\tan y=\tan\alpha\tan\beta\tan y\left(-\frac{\pi}{2}<\alpha,\beta,\gamma<\frac{\pi}{2}\right)$$

គណនាមុំ $(\alpha+\beta+\gamma)$

5.គេមាន $\alpha=\cos 10^0,\beta=\cos 50^0,\gamma=\cos 70^0$ ។

គណនា $\alpha-\beta-\gamma, \alpha^2-\beta\gamma$ និង $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$ ។

6.បង្ហាញថា

ក. $(1-\sin A+\cos A)^2=2(1-\sin A)(1+\cos A)$

ខ. $\cot A+\tan A=\dfrac{1}{\sin A\cos A}$

គ. $(\tan\theta+\sin\theta)(\tan\theta-\sin\theta)=\tan^2\theta\sin^2\theta$

ឃ. $\left(1+\dfrac{1}{\sin\theta}\right)(1-\sin\theta)=\cos\theta\cot\theta$

7.ដោះស្រាយសមីការខាងក្រោមៈ

ក. $4\cos^3 x-\cos 2x-4\cos 4x+1=0$

ខ. $\sin^2 2x-\cos^2 8x=0.5\cos 10x$

គ. $1+\sin x+\cos x+\sin 2x+\cos 2x=0$

ឃ. $\sin^4 x+\cos^4 x-\cos 2x+\dfrac{1}{4}\sin^2 2x-2=0$

ង. $\sin^{2007} x+\cos^{2007} x=1$

ច. $\tan x=\cot x+2\cot^2 2x$

8.ក.គេឲ្យ

$$2\sin A\cos A+(\cos A+\sin A)^2-(2\cos A+\sin A)^2=p\sin^2 A+q$$

រកតម្លៃនៃចំនួនថេរ p និង q ។

ខ.គេឲ្យ $\sin x\cos x(5\tan x+2\cot x)=a+b\sin^2 x$

រកតម្លៃនៃចំនួនថេរ a និង b

9.ដោះស្រាយវិសមីការខាងក្រោម:

ក. $\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\geq-\frac{1}{2}$ ខ. $\tan\left(x-\frac{\pi}{6}\right)\geq-1$

10.ដោះស្រាយសមីការវិសមីការខាងក្រោម:

ក. $2\sin^2\theta-\sqrt{2}\cos\theta=0$

ខ. $2\cos^2\theta+\sqrt{3}\sin\theta+1>0$

11.គេឲ្យ ΔABC មានមុំ 3 ជាមុំស្រួច ។

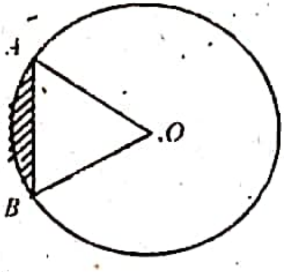
ក.បង្ហាញថា $\tan A+\tan B+\tan C=\tan A.\tan B.\tan C$

ខ.តាង $T=\tan A+\tan B+\tan C$ បង្ហាញថា $T\geq 3\sqrt{3}$

ដំណោះស្រាយ

1.ក.រកក្រឡាផ្ទៃចម្រៀកថាស AOB

តាមរូបមន្ត $S_{AOB}=\frac{1}{2}r^2\theta$



ដែល $r=OA=2\ cm$

$\theta=60^0=\frac{\pi}{3}$

យើងបាន: $S_{AOB}=\frac{1}{2}.4.\frac{\pi}{3}=\frac{2\pi}{3}cm^2$

ដូចនេះ: $S_{\Delta AOB} = \frac{2\pi}{3} cm^2$

ខ.រកក្រឡាផ្ទៃ ΔAOB

តាមរូបមន្ត $S_{\Delta AOB} = \frac{1}{2} OA.OB \sin\theta$

ដែល $OA = OB = 2\,cm, \theta = 60^0$

$\Rightarrow S_{\Delta AOB} = \frac{1}{2}.2.2.\sin 60^0 = \sqrt{3}$

ដូចនេះ: $S_{\Delta AOB} = \sqrt{3}\ cm^2$

គ.រកក្រឡាផ្ទៃអង្កត់ជាសតូច

តាង A ជាក្រឡាផ្ទៃនេះ យើងបាន:

$$A = \frac{1}{2} r^2 (\theta - \sin\theta) = \frac{1}{2} \times 4 \left(\frac{\pi}{4} - \sin\frac{\pi}{3} \right)$$

$$= 2\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{2\pi}{3} - \sqrt{3}$$

ដូចនេះ: $A = \frac{2\pi}{3} - \sqrt{3}\,cm^2$

2.គណនា

ក. $\sin 60^0 = \sin\left(6\pi - \left(180^0 - 60^0\right)\right)$

$$=\sin\left(-\left(180^0-60^0\right)\right)=-\sin 60^0=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

ខ. $\sin 2940^0=\sin\left(16\pi+\frac{\pi}{3}\right);\quad =\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

ឃ. $\cos\frac{13\pi}{6}=\cos\left(2\pi+\frac{\pi}{6}\right)=\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

ង. $\tan\left(-\frac{19\pi}{4}\right)=-\tan\left(\frac{20\pi-\pi}{4}\right)$

$$=-\tan\left(5\pi-\frac{\pi}{4}\right)=-\tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$=\tan\frac{\pi}{4}=1$$

ច. $\sin\left(-\frac{17\pi}{3}\right)=-\sin\left(\frac{18\pi-\pi}{3}\right)$

$$=-\sin\left(6\pi-\frac{\pi}{3}\right)=-\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)=\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

3.គណនា

ក. $\sin\theta+\sin\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)+\sin(\theta+\pi)+\left(\theta+\frac{3\pi}{2}\right)$

$$=\sin\theta+\cos\theta-\sin\theta+\left(\theta+\frac{3\pi}{2}\right)$$

$$=\cos\theta+\left(\theta+\frac{3\pi}{2}\right)$$

ខ. $\cos\frac{20\pi}{3}\tan\frac{7\pi}{4}+\sin\frac{5\pi}{2}\cos(-3\pi)$

$$=\cos\left(6\pi+\frac{2\pi}{3}\right)\tan\left(\pi+\frac{3\pi}{4}\right)+\sin\left(2\pi+\frac{\pi}{2}\right)\cos(2\pi+\pi)$$

$$=\cos\frac{2\pi}{3}\tan\frac{3\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{2}.\cos\pi=-\frac{1}{2}\times(-1)+1\times(-1)=\frac{3}{2}$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)+\cos\left(\frac{\pi}{2}+2\theta\right)+\sin(\pi-2\theta)+\cos(\pi-\theta)$$

$$=\cos\theta-\sin 2\theta+\sin 2\theta-\cos\theta=0$$

4.គណនាមុំ $(\alpha+\beta+\gamma)$

យើងមាន:

$$\tan(\alpha+\beta+\gamma)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta+\tan\gamma-\tan\alpha\tan\beta\tan\gamma}{1-\tan\alpha\tan\beta-\tan\alpha\tan\gamma-\tan\beta\tan\gamma}$$

តាមសម្មតិកម្ម

$:\tan\alpha+\tan\beta+\tan\gamma=\tan\alpha\tan\beta\tan\gamma$

$\Rightarrow\tan(\alpha+\beta+\gamma)=0\Rightarrow\alpha+\beta+\gamma=k\pi,k\in\mathbb{Z}$

5.គេមាន $\alpha=\cos 10^0, \beta=\cos 50^0, \gamma=\cos 70^0$ គេបាន:

$$\beta^2=\cos\left(60^0-10^0\right)$$

$$=\cos 60^0\cos 10^0+\sin 60^0\sin 10^0=\frac{1}{2}\cos 10^0+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 10^0$$

$$\Rightarrow \beta^2=\frac{1}{4}\cos^2 10^0+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 10^0\cos 10^0+\frac{3}{4}\sin^2 10^0$$

$$.\gamma=\cos\left(60^0+10^0\right)=\frac{1}{2}\cos 10^0-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 10^0$$

$$\Rightarrow \gamma^2=\frac{1}{4}\cos^2 10^0-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 10^0\cos 10^0+\frac{3}{4}\sin^2 10^0$$

យើងបាន:

$$+\alpha-\beta-\gamma=\cos 10^0-\frac{1}{2}\cos 10^0-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 10^0$$

$$-\frac{1}{2}\cos 10^0+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 10^0=\cos 10^0-\cos 10^0=0$$

ដូចនេះ: $\alpha-\beta-\gamma=0$

$$+\alpha^2-\beta\gamma=\cos^2 10^0-\frac{1}{4}\cos^2 10^0+\frac{3}{4}\sin^2 10^0$$

$$=\frac{3}{4}\cos^2 10^0+\frac{3}{4}\sin^2 10^0=\frac{3}{4}\left(\sin^2 10^0+\cos^2 10^0\right)=\frac{3}{4}\times 1$$

ដូចនេះ: $\alpha^2-\beta\gamma=\frac{3}{4}$

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=\cos^2 10^0+\frac{1}{4}\cos^2 10^0+\frac{3}{4}\sin^2 10^0+$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 10^0\cos 10^0+\frac{1}{4}\cos^2 10^0+\frac{3}{4}\sin^2 10^0-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 10^0\cos 10^0$$

$$=\frac{3}{2}\cos^2 10^0+\frac{3}{2}\cos\sin^2 10^0=\frac{3}{2}\left(\sin^2 10^0+\cos^2 10^0\right)=\frac{3}{2}$$

ដូចនេះ: $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=\frac{3}{2}$

៦.បង្ហាញថា

ក. $(1-\sin A+\cos A)^2=2(1-\sin A)(1+\cos A)$

គេមាន: $(1-\sin A+\cos A)^2=\left[(1-\sin A)+\cos A\right]^2$

$=(1-\sin A)\cos A+\cos^2 A+(1-\sin)^2$

$=1+2(1-\sin A)\cos A+\cos^2 A+1+\sin^2 A-2\sin A$

$=2\left[(1-\sin A)+\cos A(1-\sin A)\right]$

$=2(1-\sin A)(1+\cos A)$ (ពិត)

ខ. $\cot A+\tan A=\frac{1}{\sin A\cos A}$ គេមាន:

$$\tan A+\cot A=\frac{\sin A}{\cos A}+\frac{\cos A}{\sin A}=\frac{\sin^2 A+\cos^2 A}{\sin A\cos A}$$

$$=\frac{1}{\sin A\cos A}$$ ពិត

គ. $(\tan\theta+\sin\theta)(\tan\theta-\sin\theta)=\tan^2\theta\sin^2\theta$

$$=\tan^2\theta-\sin^2\theta=\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}-\sin^2\theta$$

$$=\left(\frac{1}{\cos^2\theta}-1\right).\sin^2\theta$$

$$=\frac{1-\cos^2\theta}{\cos^2\theta}.\sin^2\theta$$

$$=\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}.\sin^2\theta=\tan^2\theta.\sin^2\theta$$ (ពិត)

ឃ. $\left(1+\frac{1}{\sin\theta}\right)(1-\sin\theta)=\cos\theta.\cot\theta$

គេមាន: $\left(1+\frac{1}{\sin\theta}\right)(1-\sin\theta)$

$$=\frac{(1+\sin\theta)(1-\sin\theta)}{\sin\theta}=\frac{1-\sin^2\theta}{\sin\theta}$$

$$=\frac{\cos^2\theta}{\sin\theta}=\cos\theta.\cot\theta$$ ពិត

7.ដោះស្រាយសមីការខាងក្រោម:

ក. $4\cos^3 x-\cos 2x-4\cos x+1=0$

$\Leftrightarrow 4\cos^3 x-2\cos^2 x+1-4\cos x+1=0$

$\Leftrightarrow 2\cos^3 x-2\cos x-\left(\cos^2 x-1\right)=0$

$\Leftrightarrow 2\cos x\left(\cos^2 x-1\right)\left(2\cos x^2-1\right)=0$

$\Leftrightarrow \left(\cos^2 x-1\right)\left(2\cos x-1\right)=0$

$\Leftrightarrow \left(\cos x+1\right)\left(\cos x-1\right)\left(2\cos x-1\right)=0$

$\cos x+1=0$ ឬ $\cos x-1=0$ ឬ $2\cos x-1=0$

+ករណី $\cos x-1=0 \Leftrightarrow \cos x=1$

$\Rightarrow x=\pi+2k\pi, k\in\mathbb{Z}$

+ករណី $2\cos x-1=0 \Leftrightarrow \cos x=\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \cos x=\cos\frac{\pi}{3} \Rightarrow x=\pm\frac{\pi}{3}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}$

ខ. $\sin^2 2x-\cos^2 8x=0,5\cos 10x$

$\Leftrightarrow \frac{1-\cos 4x}{2}-\frac{1+\cos 16x}{2}=\frac{1}{2}\cos 10x$

$\Leftrightarrow -(\cos 4x+\cos 16x)=\cos 10x$

$\Leftrightarrow -\cos 10x\cos 6x-\cos 10x=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos 10x=0\\ \cos 6x=-1\end{array}\right.$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 10x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi \\ x=\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{k\pi}{3} \end{array}\right. ,k\in\mathbb{Z}$$

 គ. $1+\sin x+\cos x+\sin 2x+\cos 2x=0$

$$\Leftrightarrow \cos^2 x+\sin^2 x+\sin x+\cos x+\sin 2x+\cos^2 x-\sin^2 x=0$$

$$\Leftrightarrow \left(2\cos^2 x+\cos x\right)+\left(2\sin x\cos x+\sin x\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \cos x\left(2\cos x+1\right)\left(\cos x+\sin x\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2\cos x+1=0 \\ \cos x+\sin x=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x=-\dfrac{1}{2} \\ \cos x=-\sin x \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\pm\dfrac{2\pi}{3}+2k\pi ,k\in\mathbb{Z} \\ \cos x=\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+x\right) \quad (1) \end{array}\right.$$

$$(1)\Leftrightarrow x=\pm\left(\dfrac{\pi}{2}+x\right)+2k\pi$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{\pi}{2}+x+2k\pi \quad (\text{មិនពិត}) \\ x=-\dfrac{\pi}{2}-x+2k\pi \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow x=-\frac{\pi}{4}+k\pi \ ,(k\in\mathbb{Z})$$

ឃ. $\sin^4 x+\cos^4 x-\cos 2x+\frac{1}{4}\sin^2 2x-2=0$

$$\Leftrightarrow 1-\frac{1}{2}\sin^2 2x-\cos 2x+\frac{1}{4}\sin^2 2x-2=0$$

$$\Leftrightarrow -1-\frac{1}{4}\sin^2 2x-\cos 2x=0$$

$$\Rightarrow 4+4\sin^2 x\cos^2 x+4\cos^2 x-4\sin^2 x=0$$

$$\Leftrightarrow \left(1-\sin^2 x\right)+\cos^2 x\left(1+\sin^2 x\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 x+\cos^2 x\left(1+1-\cos^2 x\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 x+2\cos^2-\cos^4 x=0$$

$$\Leftrightarrow 3\cos^3 x-\cos^4 x=0$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 x\left(3-\cos^2 x\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 x=0 \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+k\pi \ ,k\in\mathbb{Z}$$

ឬ $\cos^2 x=3 \Leftrightarrow \cos x=\pm 3$ (មិនពិត)

ព្រោះ: $-1\le\cos x\le 1$

ដូចនេះ: $x=\frac{\pi}{2}+k\pi \ ,k\in\mathbb{Z}$

ង. $\sin^{2007} x + \cos^{2007} x = 1$

យើងមាន $\cos^{2007} x \le \cos^2 x \ , \forall x \in \mathbb{R}$ (1)

$$\sin^{2007} x \le \sin^2 x \quad (2)$$

យក $(1)+(2)$ គេបាន: $\cos^{2007} x + \sin^{2007} x \le 1 \ (*)$

$(*)$ ក្លាយជាសមភាពកាលណា $\begin{cases} \cos x = 1 \\ \sin x = 0 \end{cases}$ រឺ

$$\begin{cases} \cos x = 0 \\ \sin x = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2\pi \\ x = 2\pi \end{cases} \text{ រឺ } \begin{cases} x = \pm\dfrac{\pi}{2} \\ x = \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

ដូចនេះ $x = k.\dfrac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$

ច. $\tan x = \cot x + 2\cot^2 2x$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin x}{\cos x} - \frac{\cos x}{\sin x} = 2\cot^2 x$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin x \cos x} = 2\cot^2 2x$$

$$\Leftrightarrow \frac{-2\cos 2x}{\sin 2x} = 2\cot^2 2x$$

$$\Leftrightarrow -\left(\cot^2 2x + \cot 2x\right) = 0 \Leftrightarrow \cot 2x\left(\cot 2x + 1\right) = 0$$

$\Leftrightarrow \cot 2x = 0$ ឬ $\cot 2x + 1 = 0$

+ករណី $\cot 2x = 0 \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$

+ករណី $\cot 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow \cot 2x = -1$

$\Rightarrow 2x = \dfrac{3\pi}{4} + k\pi \Leftrightarrow x = \dfrac{3\pi}{8} + \dfrac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$

8.ក,រកតម្លៃនៃចំនួនថេរ p និង q

គេមាន

$2\sin A\cos A + (\cos A + \sin A)^2 - (2\cos A + \sin A)^2 = p\sin^2 A + q$ (1)

តែ $2\sin A\cos A(\cos A + \sin A)^2 - (2\cos A + \sin A)^2$

$= 4\sin A\cos A + 1 - 4\cos^2 A - 4\sin A\cos A - \sin^2 A$

$= 1 - 4 + 4\sin^2 A - \sin^2 A = 3\sin^2 A - 3$ (2)

តាម (1) & (2) គេបាន:

$p\sin^2 A + q = 3\sin^2 A - 3 \Rightarrow p = 3, q = -3$

ខ.រកតំលៃនៃចំនួនថេរ a និង b

គេមាន:

$\sin x\cos x(5\tan x + 2\cot x) = a + b\sin^2 x$ (3)

តែ $\sin x\cos x(5\tan x + 2\cot x)$

$$=\sin x\cos x\left(\frac{5\sin x}{\cos x}+\frac{2\cos x}{\sin x}\right)=5\sin^2 x+2\cos^2 x$$

$$=5\sin^2 x+2-2\sin^2 x=2+3\sin^2 x \quad (4)$$

តាម $(3)\&(4)$ គេបាន:

$$a+b\sin^2 x=2+3\sin^2 x\Rightarrow a=2,b=3$$

៦.ដោះស្រាយវិសមីការចំពោះ: $0\le x\le 2\pi$

ក. $\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\ge -\frac{1}{2}=\cos\frac{3\pi}{4}$

$$\Rightarrow -\frac{3\pi}{4}+2k\pi\le x+\frac{\pi}{3}\le\frac{3\pi}{4}+2k\pi\ ,k\in\mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{13\pi}{12}+2k\pi\le x\le\frac{5\pi}{12}+2k\pi\ ,k\in\mathbb{Z}$$

តែ $0\le x\le 2x$ យើងបាន: $0\le x\le\frac{\pi}{3}$ ឬ $\pi\le x\le 2\pi$

ខ. $\tan\left(x-\frac{\pi}{6}\right)\ge -1=\tan\frac{3\pi}{4}$

$$\Leftrightarrow\frac{3\pi}{4}+k\pi\le x\le\frac{\pi}{6}+k\pi\Leftrightarrow\frac{11\pi}{12}+k\pi\ ,k\in\mathbb{Z}$$

តែ $0\le x\le 2\pi$ យើងបាន:

$$0\le x<\frac{2\pi}{3}\text{ ឬ }\frac{11\pi}{12}\le x<\frac{5\pi}{3}$$

10.ដោះស្រាយសមីការវិសមីការខាងក្រោមៈ

ក. $2\sin^2\theta-\sqrt{2}\cos\theta=0$

$\Leftrightarrow 2-2\cos^2\theta-\sqrt{2}\cos\theta=0$

$\Leftrightarrow 2\cos^2\theta+\sqrt{2}\cos\theta-2=0$

$\Delta=2+16=18\Rightarrow\sqrt{\Delta}=3\sqrt{2}$

$\Rightarrow\cos\theta=\dfrac{-\sqrt{2}-3\sqrt{2}}{4}=-\sqrt{2}<-1$ មិនយក

ឬ $\cos\theta=\dfrac{-\sqrt{2}+3\sqrt{2}}{4}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\cos\dfrac{\pi}{4}$

$\Rightarrow\theta=\pm\dfrac{\pi}{4}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}$

ខ. $2\cos^2\theta+\sqrt{3}\sin\theta+1>0\ \ (1)$

$\Leftrightarrow 2-2\sin^2\theta+\sqrt{3}\sin\theta+1>0$

$\Leftrightarrow 2\sin^2\theta-\sqrt{3}\sin\theta-3<0$

សមីការ $2\sin^2\theta-\sqrt{3}\sin\theta-3=0$

មានរឹស2គឺ $\sin\theta=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ រឺ $\sin\theta=\sqrt{3}>1$ មិនយក

វិសមីការ (1) មានសំនុំចំលើយ

$$-\frac{\sqrt{2}}{2}<\sin\theta<1 \Leftrightarrow \sin\frac{5\pi}{4}<\sin\theta<\sin\frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{5\pi}{4}+2k\pi<\theta<\frac{\pi}{2}+2k\pi$$

11.គេអោយ ΔABC មានមុំ 3 ជាមុំស្រួច

ក.បង្ហាញថា

$$\tan A+\tan B+\tan C=\tan A.\tan B.\tan C$$

យើងមាន $A+B+C=\pi \Rightarrow A+B=\pi-C$

$$\Rightarrow \tan(A+B)=\tan(\pi-C)$$

$$\Leftrightarrow \tan\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A.\tan B}=-\tan C$$

$$\Leftrightarrow \tan A+\tan B=-\tan C+\tan A\tan B+\tan C$$

$\Leftrightarrow \tan A+\tan B+\tan C=\tan A\tan B\tan C$ ពិត

ខ.បង្ហាញថា $T\geq 3\sqrt{3}$

គេមាន $T=\tan A+\tan B+\tan C$

ដោយ A,B,C ជាមុំស្រួច(តាមសម្មតិកម្ម)

$$\Rightarrow \tan A>0, \tan B>0, \tan C>0$$

តាមវិសមភាពកូស៊ីយើងអាចសរសេរ

$$\tan A+\tan B+\tan C\geq 3\sqrt[3]{\tan A.\tan B.\tan C}$$

ដោយ $\tan A+\tan B+\tan C=\tan A\tan B\tan C$

គេបាន

$$\tan A+\tan B+\tan C\geq \sqrt[3]{\tan A+\tan B+\tan C}$$

$$(\tan A+\tan B+\tan C)^3\geq 27(\tan A+\tan B+\tan C)$$

$$(\tan A+\tan B+\tan C)^2\geq 27$$

$$\Leftrightarrow T\geq 3\sqrt{3}$$

ដូចនេះ $T\geq 3\sqrt{3}$

ជំពូកទី៤ ម៉ាទ្រីស និង ដេទែរមីណង់

មេរៀនទី១ ម៉ាទ្រីស

លំហាត់

1. ទិន្នន័យក្នុងកេសជួផ្ទានមួយបង្ហាញថា នៅថ្ងៃសុក្រ គេលក់កាហ្វេបាន 160 កែវ តែក្រូចឆ្មា 125 កែវនិងសូដា210 កែវ។ នៅថ្ងៃសៅរ៍ គេលក់ការហ្វេបាន 145 កែវ តែក្រូចឆ្មា 155 កែវ និង សូដា 325 កែវ។ ចូរបង្ហាញពត៌មាននេះជា ម៉ាទ្រីស និងប្រាប់លំដាប់នៃម៉ាទ្រីសនេះ។

2. គណនាម៉ាទ្រីសខាងក្រោមៈ

ក). $\begin{bmatrix}6 & -2\\ 5 & -1\\ 4 & 6\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0\\ -3 & 7\\ 2 & -5\end{bmatrix}$

ខ). $\begin{bmatrix}1 & 8 & 9\\13 & 21 & 4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3 & 0\\-8 & 9\\5 & 10\end{bmatrix}$

គ). $\begin{bmatrix}3 & 2\\4 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & -3\\7 & 5\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}2 & -4\\8 & 2\end{bmatrix}$

ឃ). $\begin{bmatrix}-2 & 3 & 1\\3 & 2 & 5\end{bmatrix}-3\begin{bmatrix}1 & 6 & -3\\5 & 2 & 1\end{bmatrix}$

3. គេឲ្យម៉ាទ្រីស:

$$A=\begin{bmatrix}3 & 21\\16 & -4\\3 & 8\end{bmatrix}\quad B=\begin{bmatrix}9 & 12\\-9 & 14\\-7 & 9\end{bmatrix}\qquad C=\begin{bmatrix}4 & -9\\3 & 10\end{bmatrix}$$

និង $D=\begin{bmatrix}5 & 1\\-13 & 5\end{bmatrix}$

គណនា: ក. $3A+B$; ខ. $B-A+C$; គ. $2C+5C-4D$

ឃ. $-A+3(B-A)$;ង. $2(3C)-7D$;ច. $-A+2(D+C)$

4. គណនា

ក. $\begin{bmatrix}12 & 4 & 2\\2 & -3 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & -1\\7 & 4\\6 & 5\end{bmatrix}$ ខ. $\begin{bmatrix}3 & -2 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}29\\5\\-6\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}15\end{bmatrix}$

5. គេឱ្យ $\begin{bmatrix}0 & 1\\-2 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b & -7\\a & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 2\\0 & -1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & -2\\6 & 3c\end{bmatrix}$

រកតម្លៃ a,b និង c ។

6. គេដឹងថាតម្លៃសំបុត្រចូលទស្សនាភិពណ៌មួយសន្លឹកសម្រាប់កូនក្មេង 2000 ៛ មនុស្សចាស់ 5000 ៛ និងជន បរទេស

10000៛ ។ ចំនួនសំបុត្រដែលបានលក់នៅចុងសប្តាហ៍កន្លងទៅនេះ មានសង្ខេបក្នុងតារាងខាងក្រោម៖

	កូនក្មេង	មនុស្សចាស់	ជនបរទេស
ថ្ងៃសៅរ៍	205	160	70
ថ្ងៃអាទិត្យ	310	200	65

ក. តាងតម្លៃសំបុត្រជាម៉ាទ្រីសជួរឈរ C ។

ខ. តាងពត៌មានក្នុងតារាងខាងលើជាម៉ាទ្រីស N ។

គ. គណនាផលគុណ NC។ តើធាតុរបស់ម៉ាទ្រីសNC តាងឲ្យអ្វី ?

7. គេមានម៉ាទ្រីស $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & k \\ 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$

$$C = \begin{bmatrix} 12 & 4 \\ -9 & m \end{bmatrix}$$

ក. គណនាA^2 និង A^{-1} ដែលជាម៉ាទ្រីសច្រាសនៃ A

ខ. រកតម្លៃ k ដើម្បីឱ្យ AB ជាម៉ាទ្រីសឯកតា

គ. រកតម្លៃmដើម្បីឲ្យដេទែរមីណង់Aស្មើនឹងដេទែរមីណង់ C

8. គេឲ្យម៉ាទ្រីស $= \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -5 & -4 \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$។

គណនា

ក. AB និង $(AB)^{-1}$ ខ. A^{-1} , B^{-1} , $B^{-1}A^{-1}$

គ. តើអ្នកសង្កេតឃើញយ៉ាងណាចំពោះ$(AB)^{-1}$និង$B^{-1}A^{-1}$

9. រកម៉ាទ្រីស x ដែល:

ក. $\begin{bmatrix}5 & -2\\ -3 & 2\end{bmatrix}x = \begin{bmatrix}-11\\ 9\end{bmatrix}$ ខ. $\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}x = 2\begin{bmatrix}3 & 1\\ -1 & -1\end{bmatrix}$

10. រកតម្លៃ p, q, a និង b ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់

ក. $\begin{bmatrix}10 & 3\\ -3 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}p\\ q\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}4\\ -1\end{bmatrix}$ ខ. $\begin{bmatrix}4 & -3\\ 2 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\ -1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}15\\ b\end{bmatrix}$

គ. $\begin{bmatrix}-1 & a\\ b & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & -1\\ -1 & 2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 5\\ 3 & 0\end{bmatrix}$

11. ក្នុងសមីការ $M\begin{bmatrix}1 & 0\\ 2 & 3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1 & -2\\ 0 & -1\\ 2 & 3\end{bmatrix}$

ចូរប្រាប់លំដាប់នៃម៉ាទ្រីសM និងរកម៉ាទ្រីសM ។

<u>ដំណោះស្រាយ</u>

1. បង្ហាញពត៌មានជាម៉ាទ្រីស និងលំដាប់នៃម៉ាទ្រីស

	ការហ្វេ	តែ	សុរា
សុក្រ	160	125	210
សៅរ៍	145	130	275
អាទិត្យ	120	155	325

ឬ

	សុក្រ	សៅរ៍	អាទិត្យ
កាហ្វេ	160	145	120
តែ	125	130	155
សុរា	210	275	325

ម៉ាទ្រីសទាំងពីរខាងលើមានលំដាប់ $3 X 3$ ។

2. គណនាម៉ាទ្រីសខាងក្រោម:

ក. $\begin{bmatrix}6 & -2\\5 & -1\\4 & 6\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0\\-3 & 7\\2 & -5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7 & 6\\2 & 12\\6 & -1\end{bmatrix}$

ខ. មិនអាចបូកបានព្រោះវាមានលំដាប់ខុសគ្នា។

គ. $\begin{bmatrix}2 & 3\\4 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & -3\\7 & 5\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}2 & -4\\8 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 4\\3 & 4\end{bmatrix}$

ឃ. $\begin{bmatrix}-2 & 3 & 1\\3 & 2 & 5\end{bmatrix}-3\begin{bmatrix}1 & 6 & -3\\5 & 2 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2 & 3 & 1\\3 & 2 & 5\end{bmatrix}$

$-\begin{bmatrix}3 & 18 & -9\\15 & 6 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-5 & -15 & 12\\-12 & -4 & 2\end{bmatrix}$

3. យើងបាន:

ក. $3A+B=3\begin{bmatrix}3 & 21\\16 & -4\\3 & 8\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}9 & 12\\-9 & 14\\-7 & 9\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}9 & 63\\48 & -12\\9 & 24\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}9 & 12\\-9 & 14\\-7 & 9\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}18 & 75\\39 & 2\\2 & 23\end{bmatrix}$

ខ. $B-A+C$ មិនអាចបូក-ដកបានព្រោះម៉ាទ្រីស $B-A$ មានលំដាប់ 3×2 រីឯម៉ាទ្រីស C មានលំដាប់ 2×2 ។

គ. $2C+5C-4D=7C-4D$

$=7\begin{bmatrix}4 & -9\\3 & 10\end{bmatrix}-4\begin{bmatrix}5 & 1\\-13 & 5\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}28 & -63\\21 & 70\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}20 & 4\\-52 & 20\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}8 & -67\\73 & 50\end{bmatrix}$

ឃ. $-A+3(B-A)=-A+3B-3A=3B-4A$

$=3\begin{bmatrix}9 & 12\\-9 & 14\\-7 & 9\end{bmatrix}-4\begin{bmatrix}3 & 21\\16 & -4\\3 & 8\end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 27 & 36 \\ -27 & 42 \\ -21 & 27 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 12 & 84 \\ 64 & -16 \\ 12 & 32 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 & -48 \\ -91 & 56 \\ -33 & -5 \end{bmatrix}$$

ង. $2(3C) - 7D = 6C - 7D$

$$= 6\begin{bmatrix} 4 & -9 \\ 3 & 10 \end{bmatrix} - 7\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -13 & 5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 24 & -54 \\ 18 & 60 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 35 & 7 \\ -91 & 35 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -11 & -61 \\ 109 & 25 \end{bmatrix}$$

ច. មិនអាចបូកដកបានព្រោះម៉ាទ្រីស$-A$ មានលំដាប់ 3×2 រីឯម៉ាទ្រីស $2(D + C)$ មានលំដាប់ 2×2 ។

4. គណនា:

ក. $\begin{bmatrix} 12 & 4 & -2 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 7 & 4 \\ 6 & 5 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 24 \quad +28 \quad -12 & -12 \quad +16 \quad -10 \\ 4 \quad -27 \quad +6 & -2 \quad -12 \quad +5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 40 & -6 \\ -17 & -9 \end{bmatrix}$$

ខ. $\begin{bmatrix} 3 & -2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 29 \\ 5 \\ -6 \end{bmatrix} + [15]$

$$= [87 \quad -10 \quad -24] + [15] = [53] + [15] = [68]$$

5. រកតំលៃ $a; b$ និង c

គេមាន:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b & -7 \\ a & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 6 & 3c \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} a & 0 \\ -2b & 14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 6 & -1 + 3c \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ -2b = 6 \\ -1 + 3c = 14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -3 \\ c = 5 \end{cases}$$

ដូចនេះ: $\boxed{a = 1, b = -3, c = 5}$

6. ក. តាងតម្លៃសំបុត្រជាម៉ាទ្រីសជួរឈរ C

យើងបាន: $C = \begin{bmatrix} 2000 \\ 5000 \\ 10000 \end{bmatrix}$

ខ. តាងពត៌មានក្នុងតារាងជាម៉ាទ្រីស N

$N = \begin{bmatrix} 205 & 160 & 70 \\ 310 & 200 & 65 \end{bmatrix}$

គ. គណនាផលគុណ NC

$$NC = \begin{bmatrix} 205 & 160 & 70 \\ 310 & 200 & 65 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2000 \\ 5000 \\ 10000 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 410000 & +800000 & +700000 \\ 620000 & +1000000 & +650000 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1910000 \\ 2270000 \end{bmatrix}$$

\+ ធាតុរបស់ម៉ាទ្រីស NC តាងអោយចំនួនទឹកប្រាក់ដែលទទួលបានពីការលក់សំបុត្រនៅថ្ងៃសៅរ៍ និង ថ្ងៃអាទិត្យ។

7. គេអោយ $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & k \\ 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$; $C = \begin{bmatrix} 12 & 4 \\ -9 & m \end{bmatrix}$។

យើងបាន: ក. $A^2 = A.A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 16 + 0 & 8 + 6 \\ 0 + 0 & 0 + 9 \end{bmatrix}$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 16 & 14 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}$$

$$+A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = \frac{1}{12}\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

ខ. រកតម្លៃ K ដើម្បីអោយ AB ជាម៉ាទ្រីសឯកតា

យើងបាន:

$$AB = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{4} & K \\ 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+0 & 4k+\frac{2}{3} \\ 0+0 & 0+1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 4k+\frac{2}{3} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ដើម្បីអោយ AB ជាម៉ាទ្រីសឯកតាលុះត្រាតែ

$$4K + \frac{2}{3} = 0 \Leftrightarrow 4K = -\frac{2}{3} \Rightarrow K = -\frac{2}{12} = -\frac{1}{6}$$

ដូចនេះ $\boxed{K = -\frac{1}{6}}$

គ. រកតំលៃ m ដើម្បីអោយ $|A| = |C|$

យើងមាន: $|A| = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 12$

ហើយ $|C| = \begin{vmatrix} 12 & 4 \\ -9 & m \end{vmatrix} = 12m + 36$

យើងបាន: $12m + 36 = 12 \Leftrightarrow 12m = -24$

$\Rightarrow m = -\frac{24}{12} = -2$

ដូចនេះ $\boxed{m = -2}$

8. គេអោយ $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -5 & -4 \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

យើងបាន:

ក. $+ AB = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -5 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 6-1 & -2+1 \\ -15+4 & 5-4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -11 & 1 \end{bmatrix}$

$+ (AB)^{-1} = \frac{1}{5+11}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 11 & 5 \end{bmatrix} = -\frac{1}{6}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 11 & 5 \end{bmatrix}$

ខ. $A^{-1} = \frac{1}{-3}\begin{bmatrix} -4 & -1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 3/2 \end{bmatrix}$

$+ B^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 3/2 \end{bmatrix}$

$+ B^{-1}A^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 3/2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4/3 & 1/3 \\ -5/3 & -2/3 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 4/6 - 5/6 & 1/6 - 2/6 \\ 4/6 - 15/6 & 1/6 - 6/6 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} -1/6 & -1/6 \\ -11/6 & -5/6 \end{bmatrix} = -\frac{1}{6}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 11 & 5 \end{bmatrix}$

គ. យើងសង្កេតឃើញថា $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ ។

9. រកម៉ាទ្រីស X ដែល:

ក. $\begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} -11 \\ 9 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} X$

$= \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} -11 \\ 9 \end{bmatrix} \Leftrightarrow I.X = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -11 \\ 9 \end{bmatrix}$

$= \frac{1}{4}\begin{bmatrix} -22+18 \\ -33+45 \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} -4 \\ 12 \end{bmatrix} \Rightarrow X = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$

ខ. គ្មានម៉ាទ្រីស X ព្រោះ $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$

10. រកតម្លៃ $p; q; a$ និង b ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់:

ក. $\begin{bmatrix} 10 & 3 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 10p + 39 \\ -3p - q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix}$

ម៉ាទ្រីសទាំងពីរនេះស្មើគ្នាកាលណា:

$$\begin{cases}10p+3q=4 & (1)\\ -3p-q=-1 & (2)\end{cases}$$

ដោយដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការនេះ

គេបាន: $p=1;\ q=4$

ខ. $\begin{bmatrix}4 & -3\\ 2 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\ -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}15\\ b\end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix}4a+3\\ 2a+1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}15\\ b\end{bmatrix}$

ម៉ាទ្រីសទាំងពីរនេះស្មើគ្នាកាលណា

$$\begin{cases}4a+3=15\\ 2a+1=b\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=3\\ b=7\end{cases}$$

ដូចនេះ $\boxed{a=3; b=7}$

គ. $\begin{bmatrix}-1 & a\\ b & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & -1\\ -1 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 5\\ 3 & 0\end{bmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{bmatrix}-2-a & 1+2a\\ 2b-1 & -b+2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 5\\ 3 & 0\end{bmatrix}$

ម៉ាទ្រីសទាំងពីរនេះស្មើគ្នាកាលណា:

$\begin{cases}-2-a=1\\ 2b-1=3\end{cases}$ និង $\begin{cases}2a+1=5\\ -b+2=0\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}a=-3\\ b=2\end{cases}$ និង $\begin{cases}a=2\\ b=2\end{cases}$

ដូចនេះ $\boxed{a=-3;\ a=2;\ b=2}$

11. ប្រាប់លំដាប់នៃម៉ាទ្រីស M

ដោយម៉ាទ្រីស $\begin{bmatrix}1 & 0\\ 2 & 3\end{bmatrix}$ មានលំដាប់ 2×2

ហើយម៉ាទ្រីស $\begin{bmatrix}-1 & -2\\ 0 & -1\\ 2 & 3\end{bmatrix}$ មានលំដាប់ 3×2

នោះ: $\boxed{M \text{ ជាម៉ាទ្រីសលំដាប់ } 3\times 2}$

+ រកម៉ាទ្រីស M

គេមាន: $M\begin{bmatrix}1 & 0\\ 2 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & -2\\ 0 & -1\\ 2 & 3\end{bmatrix}$

$$\Rightarrow M=\begin{bmatrix}-1 & -2\\ 0 & -1\\ 2 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 2 & 3\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}-1 & -2\\ 0 & -1\\ 2 & 3\end{bmatrix}\cdot\frac{1}{3}\begin{bmatrix}3 & 0\\ -2 & 1\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}-3+4 & 0-2\\ 0+2 & 0-1\\ 6-6 & 0+3\end{bmatrix}$$

$$M=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}1 & -2\\ 2 & -1\\ 0 & 3\end{bmatrix}$$

<u>មេរៀនទី២</u> <u>ដេទែរមីណង់</u>

<u>លំហាត់</u>

1. គណនាដេទែរមីណង់:

ក. $\begin{vmatrix}2 & 3 & 4\\ 3 & 2 & -1\\ 4 & 3 & 7\end{vmatrix}$ ខ. $\begin{vmatrix}1 & 3 & -1\\ 2 & -1 & 1\\ -2 & 2 & 3\end{vmatrix}$ គ. $\begin{vmatrix}1 & 2 & -3\\ 3 & -5 & -1\\ 4 & 4 & 1\end{vmatrix}$

2. គណនាដេទែរមីណង់ ដោយប្រើការពន្លាតតាមមីន័រ

ក. $\begin{vmatrix}-1 & 1 & 2\\ 4 & 1 & 0\\ 3 & 6 & -2\end{vmatrix}$ ខ. $\begin{vmatrix}1 & -1 & 1\\ 4 & 3 & 1\\ 0 & 5 & 2\end{vmatrix}$ គ. $\begin{vmatrix}3 & -1 & 1\\ 0 & 4 & 1\\ 5 & -2 & -3\end{vmatrix}$

3. បរិមាត្រចតុកោណកែងមួយមានប្រវែង $86cm$ ។ គេដឹងថាប្រវែងទទឹង 2 ដងលើសប្រវែងបណ្ដោយ $2cm$។ រកវិមាត្រនៃចតុកោណដោយប្រើការដោះស្រាយតាមវិធីក្រាមែរ។

4. គេលក់ផ្លែពុទ្រា$50kg$ ក្នុង$1kg$ មានតម្លៃ 3500 ៛ ។ ប៉ុន្តែដោយពុទ្រានេះមានផ្លែធំ និងផ្លែតូចនោះផ្លែតូចគេលក់តែ 3000 ៛ ក្នុង$1kg$ និង ផ្លែធំលក់ថ្លៃ5000 ៛ ក្នុង $1kg$។ តើផ្លែពុទ្រាធំមានប៉ុន្មានគីឡូក្រាមនិងតូចប៉ន្មានគីឡូក្រាម ?

5. គេដឹងថាផលបូកនៃបីចំនួនស្មើនឹង 20 ចំនួនទី 1 ស្មើនឹងផលបូកនៃចំនួនទី 2 និងទី 3 ស្មើនឹង 3 ដងចំនួនទី 1 ។ រកចំនួននីមួយៗ ?

6. បរិមាត្រត្រីកោណមួយមានប្រវែង $18m$ ។ គេដឹងថាជ្រុងដែលវែងជាងគេស្មើនឹង 2 ដងជ្រុងដែលខ្លីជាងគេ។ ជ្រុងមួយទៀតជាមធ្យមនព្វន្តនៃជ្រុងដែលវែងជាងគេនិង ជ្រុងខ្លីជាង គេ។ រកប្រវែងជ្រុងនីមួយៗ នៃត្រីកោណ។

7. ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ

ក. $\begin{cases} \frac{3}{4}x - y = 0 \\ \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y = 6 \end{cases}$ ខ. $\begin{cases} x + y = -6 \\ 2x - y = 2 \end{cases}$

គ. $\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 3x - 15 = -6y \end{cases}$ ឃ. $\begin{cases} 2x + 3y + 2z = 14 \\ 4x + 2y - z = 15 \\ x + y + 2z = 8 \end{cases}$

ង. $\begin{cases} x + 2y - 3z = 10 \\ 4x + y - z = -10 \\ 3x - 7y + 2z = 5 \end{cases}$ ច. $\begin{cases} -2x + y + 3z = 2 \\ x - 7y - 3z = -4 \\ 4x - 2y - 6z = 1 \end{cases}$

ដំណោះស្រាយ

1. គណនាដេទែរមីណង់៖

ក. $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 4 & 3 & 7 \end{vmatrix} = 28 - 12 + 36 - 32 - 63 + 6 = -37$

ខ. $\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -3 - 6 - 4 + 2 - 18 - 2 = -31$

គ. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & -5 & -1 \\ 4 & 4 & 1 \end{vmatrix} = -5 - 8 - 36 - 60 - 6 + 4$

$= -111$

2. គណនាដេទែរមីណង់ ដោយប្រើការពន្លាតតាមមីន័រ៖

ក. $\begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 0 \\ 3 & 6 & -2 \end{vmatrix}$

$= -1\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 6 & -2 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 6 \end{vmatrix}$

$= 2 + 8 + 42 = 52$

ខ. $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 5 \end{vmatrix}$

$= 1 + 8 + 20 = 29$

គ. $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \\ 5 & -2 & -3 \end{vmatrix}$

$= 3\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 5 & -2 \end{vmatrix}$

$= -30 - 5 - 20 = -55$

3. រកវិមាត្រនៃចតុកោណកែង

តាង $x(Cm)$ជាប្រវែងទទឹង $(x > 0)$

$y(Cm)$ ជាប្រវែងបណ្ដោយ $(y > 0)$

តាមបំរាប់គេបាន:

$\begin{cases} 2(x+y) = 86 \\ 2x - 2 = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 43 \\ 2x - y = 2 \end{cases}$

$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 2 = -3$

$D_x = \begin{bmatrix} 43 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = -43 - 2 = -45$

$D_y = \begin{bmatrix} 1 & 43 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = 2 - 86 = -84$

យើងបាន: $x = \frac{D_x}{D} = \frac{-45}{-3} = 15$

$y = \frac{D_y}{D} = \frac{-84}{-3} 28$

ដូចនេះ **វិមាត្រនៃចតុកោណកែងគឺ15Cmនិង 28Cm**

4. រកចំនួនផ្លែពុទ្រាធំនិងតូច

តាង $x(kg)$ជាចំនួនផ្លែពុទ្រាធំ

$y(kg)$ ជាចំនួនផ្លែពុទ្រាតូច

យើងបាន:$\begin{cases} x + y = 50 \\ 5000x + 3000y = 50 \times 3500 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 50 \\ 5x + 3y = 175 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 3y = 150 \\ 5x + 3y = 175 \end{cases}$

$2x = 25$

$\Longrightarrow x = \frac{25}{2} = 12{,}5 \Longrightarrow y = 50 - x = 50 - 12{,}5 = 37{,}5$

ដូចនេះ **ពុទ្រាធំមាន $12{,}5kg$ និងពុទ្រាតូចមាន $37{,}5kg$**

5. រកចំនួននីមួយៗ

តាងx, y, zជាចំនួនទី1ទី2និងទី3 រៀងគ្នាតាមបំរាប់យើងបាន

$$\begin{cases} x + y + z = 20 & (1) \\ x = y + z & (2) \\ z = 3x & (3) \end{cases}$$

យក(3) ជំនួស (1) និង (2)

$$-\begin{cases} 4x+y=20 & (4) \\ 2x+y=0 & (5) \end{cases}$$

$2x=20$ នោះ: $x=\frac{20}{2}=10$

$(4): y = 20 - 40x = 20 - 40 = -20$

$(3): z = 3x = 3 \times 10 = 30$

ដូចនេះ **ចំនួន$10, -20, 30$ជាចំនួនទី1, ទី2, និងទី3 រៀងគ្នា**

6. រកប្រវែងជ្រុងនីមួយៗនៃត្រីកោណ

តាង $x(m)$ ជាជ្រុងដែលវែងជាគេ $(x > 0)$

$y(m)$ ជាជ្រុងមធ្យម $(y > 0)$

$z(m)$ ជាជ្រុងដែលខ្លីជាងគេ $(z > 0)$

តាមបំរាប់យើងបាន:

$$\begin{cases} x + y + z = 18 & (1) \\ x = 2z & (2) \\ 2y = x + z & (3) \end{cases}$$

យក (2) ជំនួស (1) និង (3)

$$\begin{array}{l} +\begin{cases} y+3z=18 & (4) \\ 2y-3Z=0 & (5) \end{cases} \\ \hline 3y=18 \Longrightarrow y=\frac{18}{3}=6 \end{array}$$

$(4): 3z = 18 - y = 18 - 6 = 12 \Longrightarrow z = \dfrac{12}{3} = 4$

$(2): x = 2z = 2 \times 4 = 8$

ដូចនេះ **ជ្រុងទាំងបីនៃត្រីកោណគឺ $8m, 6m$ និង $4m$ រៀងគ្នា**

7. ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ:

ក. $\begin{cases} \frac{3}{4}x - y = 0 \\ \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 4y = 0 \\ 3x + 2y = 36 \end{cases}$

$D = \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 0 + 144 = 144$

$D_y = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 3 & 36 \end{vmatrix} = 108 - 0 = 108$

$x = \frac{D_x}{D} = \frac{144}{18} = 8, \quad y = \frac{D_y}{D} = \frac{108}{18} 6$

ដូចនេះ **ប្រព័ន្ធសមីការមានគូចំលើយ $(8, 6)$**

ខ. $\begin{cases} x + y = -6 \\ 2x - y = 2 \end{cases}$

$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 2 = -3$

$D_x = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 6 - 2 = 4$

$D_y = \begin{vmatrix} 1 & -6 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 2 + 12 = 14$

$x = \dfrac{D_x}{D} = -\dfrac{4}{3}; \; y = \dfrac{D_y}{D} = -\dfrac{14}{3}$

ដូចនេះ **ប្រព័ន្ធសមីការមានគូចំលើយ $\left(-\frac{4}{3}; -\frac{14}{3}\right)$**

គ. $\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 3x - 15 = -6y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y = 5 \\ 3x + 6y = 15 \end{cases}$

$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 6 - 6 = 0$

$D_x = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 15 & 6 \end{vmatrix} = 30 - 30 = 0$

ដូចនេះ ប្រព័ន្ធសមីការមានគូចំលើយរាប់មិនអស់

ឃ. $\begin{cases} 2x + 3y + 2z = 14 \\ 4x + 2y - z = 15 \\ x + y + 2z = 8 \end{cases}$

$D = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -13$

$D_x = \begin{vmatrix} 14 & 3 & 2 \\ 15 & 2 & -1 \\ 8 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -46$

$D_y = \begin{vmatrix} 2 & 14 & 2 \\ 4 & 15 & -1 \\ 1 & 8 & 2 \end{vmatrix} = -16$

$D_z = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 14 \\ 4 & 2 & 15 \\ 1 & 1 & 8 \end{vmatrix} = -21$

$x = \frac{D_x}{D} = \frac{46}{3}; \; y = \frac{D_y}{D} = \frac{16}{3}; \; z = \frac{D_z}{D} = \frac{21}{13}$

ដូចនេះ ប្រព័ន្ធមានចំលើយ $\left(\frac{46}{3}; \frac{16}{3}; \frac{21}{13}\right)$

ង. $\begin{cases} x + 2y - 3z = 10 \\ 4x + y - z = -10 \\ 3x - 7y + 2z = 5 \end{cases}$

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & 1 & -1 \\ 3 & -7 & 2 \end{vmatrix} = 66$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 10 & 2 & -3 \\ -10 & 1 & -1 \\ 5 & -7 & 2 \end{vmatrix} = -215$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & 10 & -3 \\ 4 & -10 & -1 \\ 3 & 5 & 2 \end{vmatrix} = -275$$

$$D_z = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 10 \\ 4 & 1 & -10 \\ 3 & -7 & 5 \end{vmatrix} = -475$$

$$x = \frac{D_x}{D} = -\frac{215}{66};\ y = \frac{D_y}{D} = -\frac{275}{66};\ z = \frac{D_z}{D} = -\frac{475}{66}$$

ដូចនេះ ប្រព័ន្ធមានចំលើយ $\left(-\frac{215}{66}; -\frac{275}{66}; -\frac{475}{66}\right)$

ឋ. $\begin{cases} -2x + y + 3z = 2 \\ x - 7y - 3z = -4 \\ 4x - 2y - 6z = 1 \end{cases}$

$$D = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 1 & -7 & -3 \\ 4 & -2 & -6 \end{vmatrix} = 0$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -4 & -7 & -3 \\ 1 & -2 & -6 \end{vmatrix} = 90 \neq 0$$

$$D_y = \begin{vmatrix} -2 & 2 & 3 \\ 1 & -4 & -3 \\ 4 & 1 & -6 \end{vmatrix} = -15 \neq 0$$

$$D_z = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 1 & -7 & -4 \\ 4 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 65 \neq 0$$

ដូចនេះ ប្រព័ន្ធសមីការគ្មានចំលើយ

លំហាត់ជំពូក

1. គេមានម៉ាទ្រីសដូចខាងក្រោម:

ក. $\begin{bmatrix}-3 & 2 & 5\end{bmatrix}$ ខ. $\begin{bmatrix}-3 & 1\\ 2 & 5\\ 7 & -6\end{bmatrix}$ គ. $\begin{bmatrix}-6\\ 7\\ 8\\ 0\end{bmatrix}$

ឃ. $\begin{bmatrix}1 & 2 & -3\\ 5 & 4 & 7\\ 11 & 0 & -13\end{bmatrix}$ ចូរកំណត់លំដាប់នៃម៉ាទ្រីស។

2. គេមានម៉ាទ្រីស

$A = \begin{bmatrix}5 & 6 & 7\\ -2 & x & 9\\ \sqrt{16} & x & 9\end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix}5 & y+7 & 7\\ -2 & -8 & 9\\ 4 & 0 & -8\end{bmatrix}$

ចូរកំណត់តម្លៃ x និង y ដើម្បីឱ្យ $A = B$

3. គេឲ្យម៉ាទ្រីស $A = \begin{bmatrix}2 & 0\\ -1 & 4\end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix}1 & -7\\ 3 & 0\end{bmatrix},$

$C = \begin{bmatrix}0 & 0\\ 8 & -2\end{bmatrix}$

គណនា៖

ក. $3A - B + 2C$ ខ. $2(A - B + 2C) + 3B - C$

4. រកតម្លៃ p, q, a និង b ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់៖

ក. $\begin{bmatrix}10 & 3\\ -3 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}p\\ q\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}4\\ -1\end{bmatrix}$ ខ. $\begin{bmatrix}4 & -3\\ 2 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\ -1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}15\\ b\end{bmatrix}$

គ. $\begin{bmatrix}-1 & a\\ b & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & -1\\ -1 & 2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 5\\ 3 & 0\end{bmatrix}$

5. គេឲ្យសមីការម៉ាទ្រីស $M\begin{bmatrix}1 & 0\\ 2 & 3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1 & -2\\ 0 & -1\\ 2 & 3\end{bmatrix}$

ចូរកំណត់លំដាប់នៃម៉ាទ្រីស M និងរកម៉ាទ្រីស M ។

6. ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ

ក. $\begin{cases} 2x - 3y = -4 \\ 5x + 7y = 1 \end{cases}$ ខ. $\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + y = 3 \end{cases}$

គ. $\begin{cases} x - 2y + 3z = 4 \\ 2x + y - 4z = 3 \\ -3x + 4y - z = -2 \end{cases}$ ឃ. $\begin{cases} 4x + 2y + 7z = 35 \\ 3x + y + 8z = 25 \\ 5x + 3y + z = 40 \end{cases}$

7. នារីទៅផ្សារទិញសាច់ដើម្បីធ្វើម្ហូបប្រចាំថ្ងៃ។ លើកទី1 នារីទិញមាន់$3kg$ ត្រី$1kg$ និងសាច់គោ$3kg$ ចំណាយអស់ប្រាក់ចំនួន94 ពាន់រៀលហើយលើកទី3 ទិញមាន់$3kg$ ត្រី $2kg$ និងសាច់គោ$1kg$ ចំណាយអស់ប្រាក់ចំនួន84 ពាន់រៀល។ តើសាច់មាន់ ត្រី និងសាច់គោ $1kg$ ថ្លៃប៉ុន្មានពាន់រៀល?

ដំណោះស្រាយ

1. កំណត់លំដាប់នៃម៉ាទ្រីសខាងក្រោម:

ក. $\begin{bmatrix} -3 & 2 & 5 \end{bmatrix}$ ជាម៉ាទ្រីសលំដាប់ 1×3 ។

ខ. $\begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 5 \\ 7 & -6 \end{bmatrix}$ ជាម៉ាទ្រីសលំដាប់ 3×2 ។

គ. $\begin{bmatrix} -6 \\ 7 \\ 8 \\ 0 \end{bmatrix}$ ជាម៉ាទ្រីសលំដាប់ 4×1 ។

ឃ. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 5 & 4 & 7 \\ 11 & 0 & -13 \end{bmatrix}$ ជាម៉ាទ្រីសលំដាប់ 3×3 ។

2. កំណត់តម្លៃ x និង y ដើម្បីឱ្យ $A = B$

គេមាន:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 6 & 7 \\ -2 & x & 9 \\ \sqrt{16} & x & 9 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 5 & y+7 & 7 \\ -2 & -8 & 9 \\ 4 & 0 & -8 \end{bmatrix}$$

ដើម្បីអោយ $A = B$ លុះត្រាតែ:

$$\begin{cases} y+7 = 6 \\ x = -8 \\ x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -1 \\ x = -8 \\ x = 0 \end{cases}$$

ដូចនេះ $\boxed{x = 0; x = -8; y = -1}$

3. គេឲ្យ $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & -7 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 8 & -2 \end{bmatrix}$។

យើងបាន:

ក. $3A - B + 2C = 3\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & -7 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 8 & -2 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ -3 & 12 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & -7 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 16 & -4 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 6 - 1 + 0 & 0 + 7 + 0 \\ -3 - 3 + 16 & 12 + 0 - 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 10 & 8 \end{bmatrix}$

ខ. $2(A - B + 2C) + 3B - C$

$= 2A - 2B + 4C + 3B - C = 2A + B + 3C$

$= 2\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -7 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 8 & -2 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -2 & 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -7 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 24 & -6 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 4 + 1 + 0 & 0 - 7 + 0 \\ -2 + 3 + 24 & 8 + 0 - 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -7 \\ 25 & 2 \end{bmatrix}$

4. រកតម្លៃ p, q, a និង b ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់៖

ក. $\begin{bmatrix}10 & 3\\ -3 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}p\\ q\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\ -1\end{bmatrix}\Leftrightarrow\begin{bmatrix}10p+3q\\ -3p-q\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\ -1\end{bmatrix}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}10p+3q=4\\ -3p-q=-1\end{cases}$

ដោះស្រាយប្រព័ន្ធនេះគេបាន $\boxed{p=1;q=-2}$

ខ. $\begin{bmatrix}4 & -3\\ 2 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\ -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}15\\ b\end{bmatrix}\Leftrightarrow\begin{bmatrix}4a+3\\ 2a+1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}15\\ b\end{bmatrix}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}4a+3=15\\ 2a+1=b\end{cases}$

ដោះស្រាយប្រព័ន្ធនេះគេបាន $\boxed{a=3;b=7}$

គ. $\begin{bmatrix}-1 & a\\ b & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & -1\\ -1 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 5\\ 3 & 0\end{bmatrix}$

$\Leftrightarrow\begin{bmatrix}-2-a & 1+2a\\ 2b-1 & -b+2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 5\\ 3 & 0\end{bmatrix}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}-a-2=1\\ 2b-1=3\end{cases}$ និង $\begin{cases}2a+1=5\\ -b+2=0\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}a=-3\\ b=2\end{cases}$ និង $\begin{cases}a=2\\ b=2\end{cases}$

ដូចនេះ $\boxed{a=-3;b=2\ \text{រឺ}\ a=2;b=2}$

5. គេឲ្យសមីការម៉ាទ្រីស $M\begin{bmatrix}1 & 0\\ 2 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & -2\\ 0 & -1\\ 2 & 3\end{bmatrix}$

យើងបាន: M ជាម៉ាទ្រីសលំដាប់ 3×2

+ រកម៉ាទ្រីស M

តាមសមីការម៉ាទ្រីសខាងលើ យើងបាន:

$$M=\begin{bmatrix}-1 & -2\\ 0 & -1\\ 2 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 2 & 3\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}-1 & -2\\ 0 & -1\\ 2 & 3\end{bmatrix}\frac{1}{3}\begin{bmatrix}3 & 0\\ -2 & 1\end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -3+4 & 0-1 \\ 1+2 & 0-1 \\ 6-6 & 0+3 \end{bmatrix} \Rightarrow M = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

6. ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការៈ

ក. $\begin{cases} 2x-3y=-4 \\ 5x+7y=1 \end{cases}$

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = 14+15 = 29 \neq 0$$

$$D_x = \begin{vmatrix} -4 & -3 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} = -28+3 = -25$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = 2+20 = 22$$

$$x = \frac{D_x}{D} = -\frac{25}{29}; y = \frac{D_y}{D} = \frac{22}{29}$$

ដូចនេះ ប្រព័ន្ធមានគូចំលើយ $\left(-\frac{25}{29}; \frac{22}{29}\right)$

ខ. $\begin{cases} x+y=1 \\ 2x+y=3 \end{cases}$

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1-2 = -1 \neq 0$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 1-3 = -2$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3-2 = 1$$

$$x = \frac{D_x}{D} = 2; y = \frac{D_y}{D} = -1$$

ដូចនេះ ប្រព័ន្ធមានគូចំលើយ $(2; -1)$

គ. $\begin{cases} x-2y+3z=4 \\ 2x+y-4z=3 \\ -3x+4y-z=-2 \end{cases}$

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -4 \\ -3 & 4 & -1 \end{vmatrix} = 20 \neq 0$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 4 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & -4 \\ -2 & 4 & -1 \end{vmatrix} = 80$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & -4 \\ -3 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 60$$

$$D_z = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \\ -3 & 4 & -2 \end{vmatrix} = 40$$

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{80}{20} = 4; y = \frac{D_y}{D} = \frac{60}{20} = 3$$

$$z = \frac{D_z}{D} = \frac{40}{20} = 2$$

ដូចនេះ ប្រព័ន្ធមានគូចំលើយ $(4; 3; 2)$

ឃ. $\begin{cases} 4x + 2y + 7z = 35 \\ 3x + y + 8z = 25 \\ 5x + 3y + z = 40 \end{cases}$

$$D = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 7 \\ 3 & 1 & 8 \\ 5 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 10 \neq 0$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 35 & 2 & 7 \\ 25 & 1 & 8 \\ 40 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 30$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 4 & 35 & 7 \\ 3 & 25 & 8 \\ 5 & 40 & 1 \end{vmatrix} = 80$$

$$D_z = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 35 \\ 3 & 1 & 25 \\ 5 & 3 & 40 \end{vmatrix} = 10$$

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{30}{10} = 3;\ y = \frac{D_y}{D} = \frac{80}{10} = 8$$

$$z = \frac{D_z}{D} = \frac{10}{10} = 1$$

ដូចនេះ ប្រព័ន្ធមានគូចំលើយ $(3; 8; 1)$

7. រកតម្លៃក្នុង $1kg$ នៃសាច់មាន់ត្រីនិង សាច់គោ

តាង x (ពាន់រៀល) ជាតម្លៃសាច់មាន់ $1kg$

y (ពាន់រៀល) ជាតម្លៃត្រី $1kg$

z (ពាន់រៀល) ជាតម្លៃសាច់គោ $1kg$

តាមបំរាប់ យើងបាន:

$$\begin{cases} 3x + y + 2z = 90 \\ 2x + y + 3z = 94 \\ 3x + 2y + z = 84 \end{cases}$$

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -6 \neq 0$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 90 & 1 & 2 \\ 94 & 1 & 3 \\ 84 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -84$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 3 & 90 & 2 \\ 2 & 94 & 3 \\ 3 & 84 & 1 \end{vmatrix} = -72$$

$$D_z = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 90 \\ 2 & 1 & 94 \\ 3 & 2 & 84 \end{vmatrix} = -108$$

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{84}{6} = 14;\ y = \frac{D_y}{D} = \frac{72}{6} = 12$$

$$z = \frac{D_z}{D} = \frac{108}{6} = 18$$

ដូចនេះ

សាច់មាន់ $1kg$ ថ្លៃ 14 ពាន់រៀល
ត្រី $1kg$ ថ្លៃ 12 ពាន់រៀល
សាច់គោ$1kg$ ថ្លៃ 18 ពាន់រៀល

ជំពូកទី៥ **លីមីត និង ដេរីវេ**

មេរៀនទី១ **លីមីត និង ដេរីវេ**

លំហាត់

2. គណនាលីមីតខាងក្រោមៈ

ក. $\lim\limits_{x\to 0} 2009$ ខ. $\lim\limits_{x\to 1}\left(-\frac{2008}{2009}\right)$ គ. $\lim\limits_{x\to -1} x$

ឃ. $\lim\limits_{x\to -2}(3x+4)$ ង. $\lim\limits_{x\to 2}(x^2-x)$

ច. $\lim\limits_{x\to 1}(5x^4-3x^3+2x^2-x+2)$

ឆ. $\lim_{x\to 1}(x^2+x)(3x-4)$

3. គណនាលីមីតខាងក្រោម:

ក. $\lim_{x\to 3}\frac{x}{x^2+1}$ ខ. $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}$ គ. $\lim_{x\to -1}\frac{x^2-1}{x+1}$

ឃ. $\lim_{x\to 3}\frac{x^3-27}{x-3}$ ង. $\lim_{x\to -4}\frac{x^3+64}{x+4}$ ច. $\lim_{x\to 2}\frac{\frac{1}{x^2}-\frac{1}{4}}{x-2}$

4. គណនាលីមីតខាងក្រោម:

ក. $\lim_{x\to 1}\frac{x^3-3x^2+3x-1}{x^3-x}$ ខ. $\lim_{x\to 3}\left[\frac{3}{x-3}-\frac{x}{x-3}\right]$

គ. $\lim_{x\to -1}\frac{x^2+3x+2}{x^2-2x-3}$ ឃ: $\lim\frac{2x^2-x}{2x^2-3x+1}$

ង. $\lim_{x\to -1}\frac{x^2+3x+2}{x^2-2x-3}$ ច. $\lim_{x\to a}\frac{x^n-a^n}{x-a}$ $(n\geq 1)$

5. ក. គេឱ្យ $f(x)=x^2$ ។ ចូររក $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$

ខ. f ជាអនុគមន៍កំណត់ដោយ $f(x)=3x^2+x$។

$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$

គ. $f(x)=\begin{cases}2x^2-3x & \text{បើ } x\neq 1\\ 5 & \text{បើ } x=1\end{cases}$ ។

រក $\lim_{x\to 1}f(x)$ និង $f(1)$ ។

6. ក. រកចំនួនពិត a និង b ដើម្បីឲ្យ $\lim_{x\to 1}\frac{x^2+ax+b}{x-1}=5$

ខ. រកចំនួនពិតpនិងqដើម្បីឲ្យ

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^2+px-6}{2x^2+3x-2}=q$$

គ. រកចំនួនពិត m និង n ដើម្បីឲ្យ

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-mx+8}{x^2-(n+2)x+2n}=\frac{1}{5}$$

7. ក. អនុគមន៍ $f(x)=\begin{cases}3x-1 & \text{បើ } x<1\\ 2x & \text{បើ } x\geq 1\end{cases}$ ។

រក $\lim_{x\to 1^-} f(x)$ $\lim_{x\to 1^+} f(x)$ និង $\lim_{x\to 1} f(x)$

ខ. អនុគមន៍ $g(x)=\begin{cases}x^2 & \text{បើ } x\leq 0\\ 2x & \text{បើ } x>0\end{cases}$ ។

រក $\lim_{x\to 0^-} g(x)$ $\lim_{x\to 0^+} g(x)$ និង $\lim_{x\to 0} g(x)$

8. គណនាលីមីត

ក. $\lim_{x\to +\infty}(x^2-3x+1)$ ខ. $\lim_{x\to -\infty}(1+3x^2+x^3)$

គ. $\lim_{x\to +\infty}\frac{3x-2}{2x+3}$ ឃ. $\lim_{x\to -\infty}\frac{-x^2+x+1}{2x+1}$

ង. $\lim_{x\to \pm\infty}\frac{-2}{3x+4}$ ច. $\lim_{x\to \pm\infty}\frac{x^2-1}{x^2+1}$

ឆ. $\lim_{x\to-\infty}\frac{2-x^2}{1-x}$ ជ. $\lim_{x\to+\infty}\frac{-x^2+x+1}{2x+1}$

ឈ. $\lim_{x\to+\infty}\frac{x-3}{x^2+1}$ ញ. $\lim_{x\to-\infty}\frac{1-2x}{x^2+x+1}$

9. គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម:

ក. $y=(2x+1)(4x-2)$ ខ. $y=(3x^2-1)(4x+1)$

គ. $f(x)=\frac{x}{x-4}$ ឃ. $f(t)=(t^2-3)(-t^2+t+1)$

ង. $f(x)=\frac{3x+4}{2x-1}$ ច. $f(x)=\frac{(1-x)(x^2+2)}{x^2-3}$

10. ក. គេឲ្យអនុគមន៍ $f(x)=10+\frac{40}{x}$ ។

រកអត្រាបម្រែបម្រួលមធ្យមនៃ f កាលណា x ប្រែប្រួល ពី 1 ទៅ 10 ។

ខ. តម្លៃ v នៃរថយន្តមួយ បន្ទាប់ពី t ឆ្នាំក្រោយមកកំណត់ដោយ $v(t)=\frac{10000}{t}+6000$ ។ រកអត្រាបម្រែបម្រួលនៃរថយន្ត កាលណា t ប្រែប្រួលពី 2 ទៅ 5 ។

11. អនុគមន៍ f កំណត់ដោយ

$f(x)=-4x^3+x^2+14x-1$

ក. រកតម្លៃx ដើម្បីឲ្យ$f(x)=0$ ហើយសិក្សាសញ្ញានៃ$f(x)$

ខ. រកតម្លៃx ដើម្បីឲ្យ$f''(x)=0$ ហើយសិក្សាសញ្ញានៃ$f''(x)$

12. អនុគមន៍ប៊ីការេ $g(x)=3x^4-2x^2+4$ ។

ក. រកដេរីវេទី 1 និងទី 2 នៃអនុគមន៍ g.

ខ. សិក្សាសញ្ញានៃដេរីវេទី 1 និងសញ្ញានៃដេរីវេទី 2 ។

ដំណោះស្រាយ

1. ចូរបំពេញតារាងនីមួយៗ ហើយទាញរកលីមីត

ក.

x	-0.1	-0.01	-0.001	0.001	0.01	0.1
$f(x)=x^2+2$	2.01	2.0001	2.000001	2.000001	2.0001	2.01

$\lim_{x\to 0} f(x) = 2$

ខ.

x	-1.1	-1.01	-1.001	-0.999	-0.99	-0.9
$\lim\limits_{x\to (}$ $f(x)=x^2-2$	-0.79	-0.97	-0.99	-1.001	-1.01	-1.19

2. គណនាលមតខាងក្រោម:

ក. $\lim\limits_{x\to 0} 2009 = 2009$ ខ. $\lim\limits_{x\to 1}\left(-\frac{2008}{2009}\right) = \boxed{-\frac{2008}{2007}}$

គ. $\lim\limits_{x\to -1} x = \boxed{-1}$ ឃ. $\lim\limits_{x\to -2}(3x+4) = 3(-2)+4 = \boxed{-2}$

ង. $\lim\limits_{x\to 2}(x^2-x) = 2^2-2 = \boxed{2}$

ច. $\lim\limits_{x\to :}(5x^4-3x^3+2x^2-x+2) = \quad \boxed{5}$

ឆ. $\lim\limits_{x\to 1}(x^2+x)(3x-4) = 2\times(-1) = \boxed{-2}$

3. គណនាលីមីតខាងក្រោម:

ក. $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x}{x^2+1} = \frac{3}{3^2+1} = \frac{3}{9+1} = \boxed{\frac{3}{10}}$

ខ. $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)}{x-2}$

$=\lim_{x\to 2}(x+2)=2+2=\boxed{4}$

គ. $\lim_{x\to -1}\frac{x^2-1}{x+1}=\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)(x-1)}{x+1}$

$=\lim_{x\to -1}(x-1)=\boxed{-2}$

ឃ. $\lim_{x\to 3}\frac{x^3-27}{x-3}$ (រាង $\frac{0}{0}$)

$=\lim_{x\to 3}\frac{x^3-3^3}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x^2+3x+9)}{x+3}$

$\lim_{x\to 3}(x^2+3x+9)=\boxed{27}$

ង. $\lim_{x\to -4}\frac{x^3+64}{x+4}$ (រាងមិនកំណត់ $\frac{0}{0}$)

$=\lim_{x\to -4}\frac{x^3+4^3}{x+4}=\lim_{x\to -4}\frac{(x+4)(x^2-4x+16)}{x+4}$

$=\lim_{x\to -4}(x^2-4x+16)=16+16+16=\boxed{48}$

ច. $\lim_{x\to 2}\frac{\frac{1}{x^2}-\frac{1}{4}}{x-2}$ (រាងមិនកំណត់ $\frac{0}{0}$)

$=\lim_{x\to 2}\frac{4-x^2}{4x^2(x-2)}=\lim_{x\to 2}\frac{(2-x)(2+x)}{-4x^2(2-x)}$

$$=-\lim_{x\to2}\frac{x+2}{4x^2}=\frac{4}{16}=\boxed{\frac{1}{4}}$$

4. គណនាលីមីតខាងក្រោម:

ក. $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^3-3x^2+3x-1}{x^3-x}$ (រាងមិនកំណត់ $\frac{0}{0}$)

តាង $A=x^3-3x^2+3x-1$

$$\begin{aligned}&=(x^3-1)-3x(x^2-1)\\&=(x-1)(x^2+x+1)-3x(x-1)(x+1)\\&=(x-1)(-2x^2-2x+1)\end{aligned}$$

តាង $B=x^3-x=x(x^2-1)=x(x+1)(x-1)$

$$\Rightarrow\lim_{x\to1}\frac{A}{B}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(-2x^2-2x+1)}{(x-1)(x^2+x)}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{-2x^2-2x+1}{x^2+x}=\boxed{-\frac{3}{2}}$$

ខ. $\lim\limits_{x\to3}\left[\frac{3}{x-3}-\frac{x}{x-3}\right]$ (រាងមិនកំណត់ $\infty-\infty$)

$$=\lim_{x\to3}\frac{3-x}{x-3}=-\lim_{x\to3}\frac{x-3}{x-3}=\boxed{-1}$$

គ. $\lim\limits_{x\to-1}\frac{x^2+3x+2}{x^2-2x-3}$ (រាងមិនកំណត់ $\frac{0}{0}$)

$$= \lim_{x \to -1} \frac{x^3 + x + 2x + 2}{x^2 + x - 3x - 3}$$

$$= \lim_{x \to -1} \frac{x(x+1) + 2(x+1)}{x(x+1) - 3(x+1)}$$

$$= \lim_{x \to -1} \frac{x+2}{x-3} = \boxed{-\frac{1}{4}}$$

ង. $\lim_{x \to -1} \frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 - 2x - 3} = \boxed{-\frac{1}{4}}$

ច. $\lim_{x \to a} \frac{x^n - a^n}{x - a}$ $(n \geq 1)$ (រាងមិនកំណត់ $\frac{0}{0}$)

គេមាន: $x^n - x^n = (x - a)(x^{n-1} + x^{n-2}a + \cdots + xa^{n-2} + a^{n-1})$

$\Rightarrow \lim_{x \to a} \frac{x^n - a^n}{x - a} = \lim_{x \to a} (x^{n-1} + x^{n-2}a + \cdots + xa^{n-2} + a^{n-1}$

$= a^{n-1} + a^{n-1} + \cdots + a^{n-1}$ (n តួ)

$= na^{n-1}$

ដូចនេះ: $\boxed{\lim_{x \to a} \frac{x^n - a^n}{x - a} = n.a^{n-1}}$

5. ក. គណនា $\lim_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$

គេមាន: $f(x) = x^2 \Rightarrow f(1) = 1$

$\Rightarrow \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \frac{x^2-1}{x-1} = \frac{(x-1)(x+1)}{x-1}$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1}(x+1) = \boxed{2}$$

ខ. គណនា $\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$

គេមាន: $f(x) = 3x^2 + x \Rightarrow f(2) = 14$

$\Rightarrow \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \frac{3x^2+x-14}{x-2} = \frac{3x^2-12+x-2}{x-2} = \frac{3(x^2-4)+(x-2)}{x-2}$

$= \frac{(x-2)(3x+7)}{x-2} = 3x+7$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x\to 2}(3x+7) = \boxed{13}$$

គ.គណនា $\lim_{x\to 1} f(x)$ និង $f(1)$

គេមាន: $f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 3x & \text{បើ } x \neq 1 \\ 5 & \text{បើ } x = 1 \end{cases}$

យើងបាន:

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1}(2x^2 - 3x) = -1$$

ដូចនេះ $\boxed{\lim_{x\to 1} f(x) = -1 \text{ និង } f(1) = 5}$

6. ក. រកចំនួនពិត a និង b ដើម្បីឲ្យ $\lim_{x\to 1}\frac{x^2+ax+b}{x-1} = 5$

នៅពេល $x \to 1$ ភាគបែង $(x-1) \to 0$

យើងបាន:

$$\lim_{x\to 1}(x^2+ax+b)=\lim_{x\to 1}\frac{x^2+ax+b}{x-1}(x-1)$$

$$\Leftrightarrow 1+a+b=5\times 0=0 \Rightarrow a=-(b+1)\ (1)$$

យើងបាន: $\lim_{x\to 1}\frac{x^2+ax+b}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x^2-x-bx+b}{x-1}$

$$5=\lim_{x\to 1}\frac{x^2-x-bx+b}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x(x-1)-b(x-1)}{x-1}$$

$$5=\lim_{x\to 1}(x-b)=1-b \Rightarrow b=-4$$

ជំនួស(1)នោះ $a=3$

ដូចនេះ: $\boxed{a=3; b=-4}$

ខ. រកចំនួនពិតpនិងqដើម្បីឲ្យ $\lim_{x\to -2}\frac{x^2+px-6}{2x^2+3x-2}=q\ (*)$

នៅពេល $x\to -2$ ភាគបែង

$2x^2+3x-2=(2x-1)(x+2)$ខិតជិត 0

ដូចនេះ: $\boxed{\lim_{x\to -2}(x^2+px-6)}$

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^2+px-6}{2x^2+3x-2}(2x^2+3x-2)$$

$\Leftrightarrow 4-2p-6=q\times 0=0 \Rightarrow p=-1$ ជំនួសក្នុង(*)

យើងបាន:

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^2-x-6}{2x^2+3x-2}=\lim_{x\to -2}\frac{(x-3)(x+2)}{(2x-1)(x+2)}$$

$$\lim_{x\to -2}\frac{x-3}{2x-1}=1=q$$

ដូចនេះ $\boxed{p=-1; q=1}$

គ. រកចំនួនពិត m និង n ដើម្បីឲ្យ

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-mx+8}{x^2-(n+2)x+2n}=\frac{1}{5}\quad (**)$$

នៅពេល $x\to 2$ ភាគបែង $x^2-(n+2)x+2n$

ខិតទៅរក 0 យើងបាន: $\lim_{x\to 2}(x^2-mx+8)$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{x^2-mx+8}{x^2-(n+2)x+2n}\left(x^2-(n+2)x+2n\right)$$

$\Leftrightarrow 12-2n=\frac{1}{5}\times 0=0 \Rightarrow m=\frac{12}{2}=6$ ជំនួស$(**)$

យើងបាន:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-6x+8}{x^2-(n+2)x+2n}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x-4)}{(x-2)(x-n)}\Leftrightarrow \frac{1}{5}=\lim_{x\to 2}\frac{x-4}{x-n}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{5}=\lim_{x\to 2}\frac{-2}{2-n}\Leftrightarrow 2-n=-10\Rightarrow n=12$$

ដូចនេះ $\boxed{m=6; n=12}$

7. រក $\lim_{x\to 1^-}f(x)$ $\lim_{x\to 1^+}f(x)$ និង $\lim_{x\to 1}f(x)$

គេមាន:

$$f(x)=\begin{cases}3x-1 & \text{បើ } x<1\\ 2x & \text{បើ } x\geq 1\end{cases}$$

គេបាន:

$+\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}(3x-1)=2$

$+\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} 2x=2$

ដោយ $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=2$ $\boxed{\Rightarrow \lim\limits_{x\to 1} f(x)=2}$

ខ. រក $\lim\limits_{x\to 0^-} g(x)$ $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)$ និង $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$

គេមាន: $g(x)=\begin{cases}x^2 & \text{បើ } x\leq 0\\ 2x & \text{បើ } x>0\end{cases}$

គេបាន:

$+\ \lim\limits_{x\to 0^-} g(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} x^2=0$

$+\ \lim\limits_{x\to 0^+} g(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} 2x=0$

ដោយ $\lim\limits_{x\to 0^-} g(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)=0$

$\Rightarrow \boxed{\lim\limits_{x\to 0} g(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} g(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} g(x)=0}$

8. គណនាលីមីត

ក. $\lim\limits_{x\to +\infty}(x^2-3x+1)=\lim\limits_{x\to +\infty} x^2\left(1-\dfrac{3}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)=\boxed{+\infty}$

ຂ. $\lim_{x\to-\infty}(1+3x^2+x^3)=\lim_{x\to-\infty}x^3\left(1+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^3}\right)=-\infty$

ຄ. $\lim_{x\to+\infty}\frac{3x-2}{2x+3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(3-\frac{2}{x}\right)}{x\left(2+\frac{3}{x}\right)}=\boxed{\frac{3}{2}}$

ຆ. $\lim_{x\to-\infty}\frac{-x^2+x+1}{2x+1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x\left(\frac{4}{x}-1\right)}{x\left(1+\frac{2}{x}\right)}=\boxed{-1}$

ງ. $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-2}{3x+4}=\boxed{0}$

ຈ. $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2-1}{x^2+1}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(1+\frac{2}{x^2}\right)}=\boxed{1}$

ຉ. $\lim_{x\to-\infty}\frac{2-x^2}{1-x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2\left(\frac{2}{x^2}-1\right)}{x\left(\frac{1}{x}-1\right)}=\boxed{-\infty}$

ຊ. $\lim_{x\to+\infty}\frac{-x^2+x+1}{2x+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2\left(-1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}{x\left(2+\frac{1}{x}\right)}=\boxed{-\infty}$

ຌ. $\lim_{x\to+\infty}\frac{x-3}{x^2+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(1-\frac{3}{x}\right)}{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}=\boxed{0}$

ញ. $\lim_{x\to-\infty}\frac{1-2x}{x^2+x+1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x\left(\frac{1}{x}-2\right)}{x^2\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}=\boxed{0}$

9. គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម:

ក. $y=(2x+1)(4x-2)$

$\Rightarrow y'=(2x+1)'(4x-2)+(4x-2)'(2x+1)$

$=2(4x-2)+4(2x+1)$

$=8x-4+8x+4=16x$

ខ. $y=(3x^2-1)(4x+1)$

$\Rightarrow y'=(3x^2-1)'(4x+1)+$

$(4x+1)'(3x^2-1)$

$=6x(4x+1)+4(3x^2-1)$

$=24x^2+6x+12x^2-4$

$y'=36x^2+6x-4$

គ. $f(x)=\frac{x}{x-4}$

$\Rightarrow f'(x)=\frac{x'(x-4)-x(x-4)'}{(x-4)^2}=\frac{x-4-x}{(x-4)^2}$

$f'(x)=\frac{-4}{(x-4)^2}$

ឃ. $f(t)=(t^2-3)(-t^2+t+1)$

$f'(t)=(t^2-3)'(-t^2+t+1)+$

$(-t^2+t+1)'(t^2-3)$

$=2t(-t^2+t+1)+(-2t+1)(t^2-3)$

$=-2t^3+2t^2+2t-2t^3+2t+t^2-3$

$f'(t)=-4t^3+3t^2+4t-3$

ង. $f(x) = \frac{3x+4}{2x-1}$

$$f'(x) = \frac{(3x+4)'(2x-1)-(2x-1)'(3x+4)}{(2x-1)^2}$$

$$= \frac{3(2x-1)-2(3x+4)}{(2x-1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-11}{(2x-1)^2}$$

ច. $f(x) = \frac{(1-x)(x^2+2)}{x^2-3}$

$$f'(x) = \frac{[(1-x)(x^2+2)]'(x^2-3)-(x^2-3)'(1-x)(x^2+2)}{(x^2-3)^2}$$

$$= \frac{(-3x^2+2x-2)(x^2-3)-2x(1-x)(x^2+2)}{(x^2-3)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-x^4+11x^2-10x+6}{(x^2-3)^2}$$

10. ក. រកអត្រាបម្រែបម្រួលមធ្យមនៃ f កាលណា x ប្រែប្រួលពី 1 ទៅ 10 កំនត់ដោយ:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(10)-f(1)}{10-1} = \frac{14-50}{9} = \boxed{-4}$$

ខ. រកអត្រាបម្រែបម្រួលនៃតម្លៃរថយន្ត កាលណា t ប្រែប្រួល ពី 2 ទៅ 5 ឆ្នាំ កំនត់ដោយ:

$$\frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{V(5)-V(2)}{5-2} = \frac{8000-11000}{3} = \boxed{-1000}$$

11. ក. រកតម្លៃx ដើម្បីឱ្យ$f'(x) = 0$.

គេមាន: $f(x) = -4x^3 + x^2 + 14x - 1$

$\Rightarrow f'^{(x)} = -12x^2 + 2x + 14$

បើ $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2(-6x^2 + x + 7 = 0$

$\Leftrightarrow -6x^2 + x + 7 = 0$

$\Leftrightarrow x = -1$ ឬ $x = \frac{7}{6}$

ដូចនេះ: $\boxed{x = -1 \text{ ឬ } x = \frac{7}{6}}$

+ សិក្សាសញ្ញានៃ $f'(x)$

តារាងសញ្ញានៃ $f'(x)$

x	$-\infty$		-1		$\frac{7}{6}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

តាមតារាងខាងលើយើងបាន:

$+f'(x) \geq 0$ ចំពោះ: $x \in \left[-1; \frac{7}{6}\right]$

$+f'(x) < 0$ ចំពោះ: $x \in (-\infty; -1) \cup \left(\frac{7}{6}; +\infty\right)$

ខ. រកតម្លៃ x ដើម្បីអោយ $f''(x) = 0$

យើងមាន: $f'(x) = -12x^2 + 2x + 14$

$\Rightarrow f''(x) = -24x + 2$

បើ $f''(x) = 0 \Leftrightarrow -24x + 2 = 0$

$\Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$

តារាងសញ្ញានៃ $f''(x)$

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	

តាមតារាង យើងបាន:

$+f'(x) \geq 0$ ចំពោះ: $x \in \left[-\infty; \frac{1}{12}\right]$

$+f''(x) < 0$ ចំពោះ $x \in \left(\frac{1}{12}; +\infty\right)$

ខ. រកតម្លៃx ដើម្បីឲ្យ$f''(x) = 0$ ហើយសិក្សាសញ្ញានៃ$f''(x)$

12. ក. រកដេរីវេទី 1 និងទី 2 នៃ g

គេមាន: $g(x) = 3x^4 - 2x^2 + 4$

$\Rightarrow g'(x) = 12x^3 - 4x$

$\Rightarrow g''(x) = 36x^2 - 4$

ខ. សិក្សាសញ្ញានៃដេរីវេទី 1 និងទី 2

យើងមាន: $g'(x) = 12x^3 - 4x$

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x(3x^2 - 1) = 0$

$\Leftrightarrow x = 0$ ឬ $3x^2 - 1 = 0$

$\Leftrightarrow x = 0$ ឬ $x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$

តារាងសញ្ញានៃ $g'(x)$

x		$-\frac{1}{\sqrt{3}}$		0		$\frac{1}{\sqrt{3}}$	
x	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$3x^2-1$	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

តាមតារាងខាងលើយើងបាន:

$+g'(x) \geq 0$ ចំពោះ $x \in \left[-\frac{1}{\sqrt{3}}; 0\right] \cup \left[\frac{1}{\sqrt{3}}; +\infty\right[$

$+g'(x) < 0$ ចំពោះ $x \in \left(-\infty; -\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \cup \left(0; \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

· ចំពោះ $g''(x)$

យើងមាន: $g''(x) = 36x^2 - 4$

បើ $g''(x) = 0 \Leftrightarrow 36x^2 - 4 = 0$

$\Leftrightarrow 9x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm\frac{1}{3}$

តារាងសញ្ញានៃ $g''(x)$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{3}$		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
$g''(x)$		+	0	−	0	+	

តាមតារាងខាងលើយើងបាន:

$+g''(x) \geq 0$ ចំពោះ $x \in (-\infty; -\frac{1}{3}] \cup [\frac{1}{3}; +\infty[$

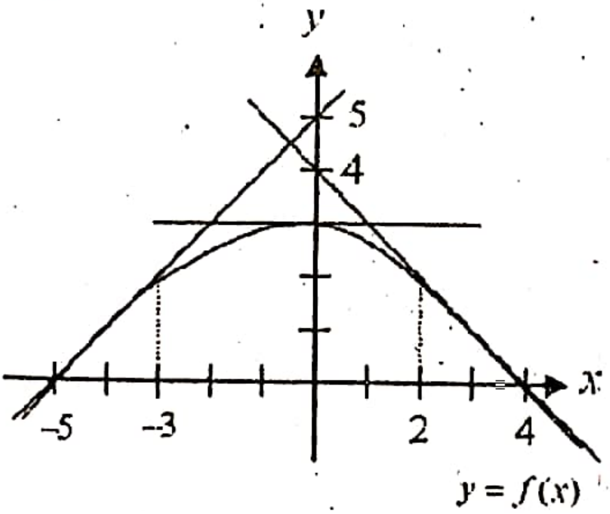
$+g''(x) < 0$ ចំពោះ $x \in \left(-\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$។

មេរៀនទី២

អនុគមន៍នៃដេរីវេ

លំហាត់

1. រកតម្លៃ $f'(-3)$ $f'(0)$ និង $f'(2)$ ដោយប្រើក្រាបតាងអនុគមន៍ f ។



2. អនុគមន៍ $f(x) = 2x^3 - 16x + 11$ មានក្រាប C ។

ក. រកសមីការបន្ទាត់ L ដែលប៉ះក្រាប C ត្រង់ចំណុច

$A(2; -5)$ ។

ខ. រកសមីការបន្ទាត់ដែលមានមេគុណប្រាប់ទិសស្មើ -10 ហើយប៉ះនឹងក្រាប C ។

3. អនុគមន៍ $f(x) = 4x^3 + 9x^2 - 30x + 1$ មានក្រាប C

ក. រកកូអរដោនេនៃគ្រប់ចំណុចប៉ះនៃក្រាប C ដែលមានបន្ទាត់ប៉ះជាបន្ទាត់ដេក។

ខ. រកសមីការនៃបន្ទាត់ប៉ះទាំងនោះ ។

4. អនុគមន៍ $y = 3x^2 - 4x + 1$ កំណត់នៅលើ $\mathbb{R}$ និងមានក្រាប C ។

ក. រកសមីការបន្ទាត់ប៉ះនឹង C ហើយកែងនឹងបន្ទាត់

$y = -\frac{x}{5} + 2$ ។

ខ. រកសមីការបន្ទាត់ប៉ះនឹង C ហើយស្របនឹងបន្ទាត់

$y = x + 5$ ។

5. អនុគមន៍ $f(x) = x^3 - 3x$ កំណត់នៅលើ $\mathbb{R}$ និងមានក្រាប C ។

ក. រកសមីការបន្ទាត់ប៉ះនឹងក្រាប C ត្រង់ចំណុច A ដែលមានអាប់ស៊ីស a ។

ខ. បន្ទាត់ប៉ះត្រង់ A កាត់ក្រាប C ម្តងទៀតត្រង់ B ។
រកអាប់ស៊ីសនៃ B ។

6. សិក្សាទិសដៅអថេរភាព រកអតិបរមា និងអប្បបរមាហើយ សង់តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍នីមួយៗ ដូចខាងក្រោម:

ក. $y=-x^3+3x^2+4$ ខ. $y=x(x-3)^2$

គ. $y=-x^2(x-1)^2$

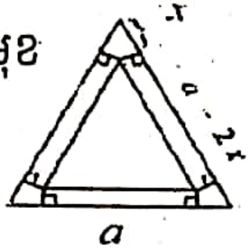
7. អនុគមន៍ $f(x)=x^3+3ax^2+3bx+2$ មានអតិបរមាធៀបត្រង់ $x=1$ និងមានអប្បបរមាធៀបត្រង់ $x=2$ ។

ក. រកតម្លៃនៃចំនួនពិត a និង b ។

ខ. រកផលដករវាងតម្លៃអតិបរមា និងអប្បបរមាធៀបនៃ f ។

8. អនុគមន៍ $f(x)=x^4+29$ និង $g(x)=4x^3$ មានក្រាប c_1 និង c_2 ។ បន្ទាត់ D ស្របអ័ក្សអរដោនេកាត់ក្រាប c_1 និង c_2 រៀងគ្នាត្រង់ A និង B ។ រកប្រវែងអប្បបរមានៃអង្កត់ $[AB]$

9. បន្ទះស័ង្កសីរាងត្រីកោណសម័ង្សមួយមានជ្រុងប្រវែង a ។ គេកាត់យកចេញពីផ្នែកត្រង់កំពូលទាំងបីនូវចតុកោណប៉ុនៗ គ្នា។ គេបត់ផ្នែកនៅសល់អោយបានជាប្រអប់មួយដែលមានរាងជាព្រីសត្រីមុខនិយ័តហើយគ្មានគម្រប។ រកតម្លៃ x ដើម្បីអោយប្រអប់មានមាឌធំបំផុត។



10. ថ្មមួយដុំបានធ្លាក់ពីកម្ពស់ 88.2 ម៉ែត្រតាមទិសឈរសំដៅមកផ្ទៃដី ។ ក្នុងរយៈពេល t វិនាទីក្រោយមក ដុំថ្មនោះធ្លាក់បានចម្ងាយ $9.8t^2$ ម៉ែត្រ។

ក. តើក្នុងរយៈពេលប៉ុន្មានវិនាទីក្រោយមកទើបដុំថ្មធ្លាក់ ប៉ះផ្ទៃដី។

ខ. រកល្បឿនធ្លាក់នៃដុំថ្មនៅខណៈ 2 វិនាទីបំបូង។

គ. រកល្បឿនធ្លាក់នៃដុំថ្មនៅពេលធ្លាក់ប៉ះផ្ទៃដី។

11. គេបាញ់វត្ថុមួយតាមទិសឈរពីផ្ទៃដីសំដៅទៅលើអាកាស ដោយមានល្បឿនដើម $\dot{V}_0 = 39.2m \cdot s^{-1}$
ហើយមានចម្ងាយ
ចរ $S = -4.9t^2 + 39.2t$ គិតជាម៉ែត្រពីផ្ទៃដីបន្ទាប់ពី t វិនាទីក្រោយមក។

ក. រកល្បឿននៃវត្ថុនៅខណៈ t បន្ទាប់ពីការបាញ់។

ខ. តើនៅពេលណាដែលវត្ថុស្ថិតនៅកម្ពស់ខ្ពស់បំផុត។ រកកម្ពស់នោះ។

គ. រករយៈពេលដែលវត្ថុស្ថិតក្នុងលំហអាកាស។

ឃ. រកចម្ងាយចរសរុបនៃវត្ថុ។

<u>ដំណោះស្រាយ</u>

1. រកតម្លៃ $f'(-3)$ $f'(0)$ និង $f'(2)$

តាមក្រាប យើងបាន: $f'(-3)$ $f'(0)$ និង $f'(2)$ ជាមេគុណ ប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់ $y=x+5, y=3$ និង $y=-x+4$ រៀងគ្នា

ដូចនេះ $\boxed{f'(-3)=1, f'(0)=0, f'(2)=-1}$

2. ក. រកសមីការបន្ទាត់ L ដែលប៉ះក្រាប C

គេមាន: $f(x)=2x^3-16x+11$

$\Rightarrow f'(x)=6x^2-16$

ដោយបន្ទាត់ L ប៉ះក្រាប C ត្រង់ $A(2;-5)$ នោះបន្ទាត់មានសមីការ $y=f'(2)(x-2)-5$ ដែល

$f'(2)=6\times 4-16=8$

យើងបាន: $y=8(x-2)-5=8x-21$

ខ. រកសមីការបន្ទាត់ដែលមានមេគុណប្រាប់ទិសស្មើ -10 ហើយប៉ះនឹងក្រាប C

តាង $(a;b)$ ជាកូអរដោណេចំណុចប៉ះដោយ $f'(a)=-10$

យើងបាន: $6a^2-16=-10 \Leftrightarrow 6a^2=6 \Rightarrow a=\pm 1$

· បើ $a=1$ នោះ $b=-3$

· បើ $a=-1$ នោះ $b=25$

· បន្ទាត់ប៉ះត្រង់ចំណុច $(1;-3)$ មានសមីការ:

$y=-10(x-1)-3=-10x+7$ ។

· បន្ទាត់ប៉ះត្រង់ចំណុច $(-1;25)$ មានសមីការៈ

$y=-10(x+1)-25=-10x+15$ ។

3. គេមានៈ $f(x)=4x^3+9x^2-30x+1$

$\Rightarrow f'(x)=12x^2+18x-30$

ក. រកកូអរដោនេនៃគ្រប់ចំណុចប៉ះនៃក្រាប c

តាង $(a;b)$ ជាកូអរដោណេចំណុចប៉ះ

យើងបានៈ $f'(a)=0$ ព្រោះ $y=0x+b$

$\Leftrightarrow 12a^2+18a-30=0 \Rightarrow a=1$ ឬ $a=-\frac{5}{2}$

· បើ $a=1$ នោះ $b=-16$

· បើ $a=-\frac{5}{2}$ នោះ $b=\frac{279}{4}$

ដូចនេះ ចំណុចប៉ះមានពីរគឺ $\boxed{(1;-16);\left(-\frac{5}{2};\frac{279}{4}\right)}$

ខ. រកសមីការនៃបន្ទាត់ប៉ះទាំងពីរ

ដោយបន្ទាត់ប៉ះជាបន្ទាត់ដេក យើងបានៈ

- បន្ទាត់ប៉ះត្រង់ $(1;-16)$ មានសមីការៈ $y=-16$
- បន្ទាត់ប៉ះត្រង់ មានសមីការៈ $\left(-\frac{5}{2};\frac{279}{4}\right)$ មានសមីការៈ

$y=\frac{279}{4}$

4. គេមាន: $y = 3x^2 - 4x + 1 \Rightarrow y' = 6x - 4$

ក. រកសមីការបន្ទាត់ប៉ះនឹង C ហើយកែងនឹង $y = -\frac{x}{5} + 2$

តាង a ជាមេគុណប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់ដែលត្រូវរក

យើងបាន: $a.(-\frac{1}{5}) = -1$ រឺ $a = 5$

តាង (m,n) ជាចំណុចប៉ះនឹងក្រាប C

យើងបាន: $f'(m) = a \Leftrightarrow 6m - 4 = 5 \Rightarrow m = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$

បើ $m = \frac{3}{2}$ នោះ $n = \frac{17}{2}$

ដូចនេះ បន្ទាត់ដែលត្រូវរកមានសមីការ

$$y = 5\left(x - \frac{3}{2}\right) + \frac{17}{2}$$
$$y = 5x + 1$$

ខ. រកសមីការបន្ទាត់ប៉ះនឹង C ហើយស្របនឹងបន្ទាត់ $y = x + 5$

តាង D ជាបន្ទាត់ដែលយើងត្រូវរកនោះ

D មានមេគុណប្រាប់ទិសស្មើ 1

តាង (a,b) ជាកូអរដោណេចំណុចប៉ះនឹង C

យើងបាន: $f'(a) = 1 \Leftrightarrow 6a - 4 = 1$

$$\Rightarrow a = \frac{5}{6} \text{ ហើយ } b = -\frac{3}{12}$$

ដូចនេះ បន្ទាត់ D មានសមីការ $y=\left(x-\frac{5}{6}\right)-\frac{3}{12}$ រឺ

$$\boxed{y=x-\frac{13}{12}}$$

5. គេមាន: $f(x)=x^3-3x \Rightarrow f'(x)=3x^2-3$

ក. រកសមីការបន្ទាត់ប៉ះនឹងក្រាប C ត្រង់ចំណុច A ដែលមានអាប់ស៊ីស a យើងបាន:

$f'(a)=3a^2-3$ ជាមេគុណប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់ហើយ

$f(a)=a^3-3a$ ជាអរដោនេនៃចំណុច A

ដូចនេះ សមីការបន្ទាត់ដែលប៉ះនឹងក្រាប C ត្រង់ A

មានសមីការ $y=\left(3a^2-3\right)(x-a)+a^3-3a$

រឺ $y=3a^2-3a^3-3x+3a+a^3-3a$

$$\boxed{y=3\left(a^2-1\right)x-2x^3}$$

ខ. រកអាប់ស៊ីសនៃ B

ដោយបន្ទាត់ប៉ះត្រង់ A កាត់ក្រាប C ត្រង់ B

យើងបាន: $3(a^2-1)x-2a^2=x^3-3x$

$\Leftrightarrow x^3-3x-3a^2x+3x+2a^2=0$

$\Leftrightarrow (x-a)(x^2+ax-2a^2)=0$

$\Leftrightarrow (x-a)^2(x+2a)=0$

$\Leftrightarrow x-a=0 \Rightarrow x=a$ អាប់ស៊ីសនៃ A

ឬ $x+2a=0 \Rightarrow x=-2a$

ដូចនេះ អាប់ស៊ីសនៃ B គឺ $-2a$

6. សិក្សាទិសដៅអថេរភាព រកអតិបរមា និងអប្បបរមាហើយសង់តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍

ក. $y=-x^3+3x^2+4 \Rightarrow y'=-3x^2+6x$

បើ $y'=0$ នោះ $x=0$ ឬ $x=2$

តារាងសញ្ញានៃ y'

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	

តាមតារាងញ្ញានៃ y' យើងបាន:

+ $y'\geq 0$ បើ $x\in[0;2]$

+ $y'<0$ បើ $x\in(-\infty;0)\cup(2;+\infty)$

តាមតារាងសញ្ញនៃ $y'=0$ ត្រង់ $x=0$ ហើយ y' ដូរសញ្ញា ពី $-$ ទៅ $+$ ។ ដូចនេះ y មានអប្បបរមាធៀបត្រង់ $x=0$ ហើយមានតម្លៃអប្បេប់រមាធៀប $y(0)=4$ ។

ម្យ៉ាងទៀត $y'=0$ ត្រង់ $x=2$ ហើយ y' ដូរសញ្ញា ពី $+$ ទៅ $-$ ។ ដូចនេះ y មានអតិបរមាធៀបត្រង់ $x=2$ ហើយមានតម្លៃអតិបរមាធៀប $y(2)=8$ ។

+ $\lim\limits_{x\to-\infty} y=\lim\limits_{x\to-\infty}(-x^3+3x^2+4)=+\infty$

+ $\lim\limits_{x\to+\infty} y=\lim\limits_{x\to+\infty}(-x^3+3x^2+4)=-\infty$

+ តារាងអថេរភាពនៃ y

x	$-\infty$		0		2		$-\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	↘	4	↗	8	↘	$-\infty$

ខ. $y = x(x-3)^2$

+ ដែនកំណត់ $D = \mathbb{R}$

+ ទិសដៅអថេរភាព:

· ដេរីវេទី1 $y' = (x-3)^2 + 2x(x-3)$

$$= 3x^2 - 12x + 9$$

បើ $y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 12x + 9 = 0$ មានរឹសពីរគឺ

$x = 1$ ឬ $x = 3$

តារាងសញ្ញានៃ y'

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	

តាមតារាងសញ្ញានៃ y' យើងបាន:

· $y' \geq 0$ បើ $x \in (-\infty; 1] \cup [3; +\infty)$

$\Rightarrow y$ ជាអនុគមន៍កើន លើចន្លោះនេះ

· $y' < 0$ បើ $x \in (1; 3)$

$\Rightarrow y$ ជាអនុគមន៍ចុះ លើចន្លោះនេះ

· y មានតម្លៃអតិបរមាធៀបត្រង់ $x = 1$ ហើយ $y(1) = 4$

· y មានតម្លៃអប្បបរមាធៀបត្រង់ $x=3$ ហើយ $y(3)=0$

. $\lim\limits_{x\to-\infty} y=\lim\limits_{x\to-\infty} x(x-3)^2=-\infty$

. $\lim\limits_{x\to+\infty} y=\lim\limits_{x\to+\infty} x(x-3)^2=+\infty$

តារាងអថេរភាពនៃ y

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	-4	↘	0	↗	$+\infty$

គ. $y=-x^2(x-1)^2$

+ ដែនកំណត់ $D=\mathbb{R}$

+ ទិសដៅអថេរភាព:

$y'=2x(x-1)(-2x+1)$

$y'=0 \Leftrightarrow 2x(x-1)(-2x+1)=0$ មានរឹសបីគឺ

$x=0, x=1, x=\dfrac{1}{2}$

តារាងសញ្ញានៃ y'

x	$-\infty$		0		$\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

តាមតារាងសញ្ញនៃ y' យើងបាន:

+ $y'\geq 0$ បើ $x\in(-\infty;0]\cup[\frac{1}{2};1]$

$\Rightarrow y$ ជាអនុគមន៍កើន លើចន្លោះ

+ $y'<0$ បើ $x\in(0;\frac{1}{2})\cup(0;-\infty)$

$\Rightarrow y$ ជាអនុគមន៍ចុះ លើចន្លោះនេះ

+ y មានតម្លៃអប្បបរមាត្រង់ $x=\frac{1}{2}$ ហើយ $y\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{16}$

+ y មានតម្លៃអតិបរមាត្រង់ $x=1$ និង $x=0$ ហើយ

$y(1)=y(0)=0$

+ $\lim\limits_{x\to-\infty} y=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[-x^2(x-1)^2\right]=-\infty$

+ $\lim\limits_{x\to+\infty} y=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[-x^2(x-1)^2\right]=-\infty$

តារាងអថេរភាពនៃ y

x	$-\infty$		0		$\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	↗	0	↘	$-\frac{1}{16}$	↗	0	↘	$-\infty$

7. ក. រកតម្លៃនៃចំនួនពិត a និង b

យើងមាន: $f(x)=x^3+3ax^2+3bx+2$

យើងបាន: $f'(x)=3x^2+6ax+3b$

ដោយ f មានអតិបរមាធៀបត្រង់ $x=1$ និងមាន អប្បបរមាធៀបត្រង់ $x=2$ យើងបាន:

$$\begin{cases}f'(1)=0\\f'(2)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3+6a+3b=0\\12+12a+3b=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow -\begin{cases}6a+3b=-3 & (1)\\ 12a+3b=-12 & (2)\end{cases}$$

$-6a=9$ នោះ $a=-\frac{9}{6}=-\frac{3}{2}$

ពី $(1)\Rightarrow 3b=-3-6a=-3+9=6$

$\Rightarrow b=\frac{6}{3}=2$ ដូចនេះ $\boxed{a=-\frac{3}{2};b=2}$

ខ. រកផលដករវាងតម្លៃអតិបរមា និងអប្បបរមាធៀបនៃ f ចំពោះតំលៃ a និង b ដែលរកឃើញយើងបាន:

$$f(x)=x^3-\frac{9}{2}x^2+6x+2$$

ហើយតម្លៃអតិបរមាធៀបត្រង់ $x=1$ គឺ

$f(1)=1-\frac{9}{2}+6+2=\frac{9}{2}$ និងតម្លៃអប្បបរមាធៀបត្រង់

$x=2$ គឺ $f(2)=2^3-\frac{9}{2}2^2+6\times2+2=4$

នាំអោយ $f(1)-f(2)=\frac{9}{2}-4=\frac{1}{2}$

8. រកប្រវែងអប្បបរមានៃអង្កត់ $[AB]$

យក $A(a,m);B(a,n)\in(D)$ យើងនឹងរក $\min|m-n|$

ដោយ $A\in(C_1);\ B\in(C_2)\Rightarrow m=a^4+29;n=4a^3$

$\Rightarrow m-n=a^4-4a^3+29$ តាង $h=a^4-4a^3+29$

$$h' = 4a^3 - 12a^2 = 4a^2(a^2 - 3)$$

បើ $h' = 0 \Rightarrow a = 0$ រឺ $a = 3$

a	$-\infty$		0		3		$+\infty$
h'		$-$	0	$-$	0	$+$	
h		↘			$h(3)$	↗	

តាមតារាងយើងបានៈ

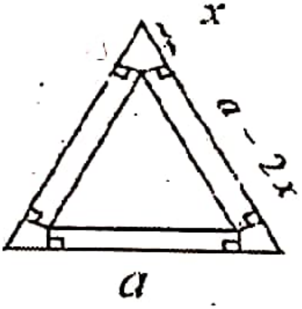
$$h \geq h(3) \Leftrightarrow m - n \geq 2 \Rightarrow \min|m-n| = 2$$

ដូចនេះ **ប្រវែងអប្បបរមានៃ $[AB]$ ស្មើ 2**

៩. កំណត់តម្លៃ x ដើម្បីអោយប្រអប់មានមាឌធំបំផុត .

តាង V ជាមាឌប្រអប់ យើងបានៈ

$$V(x) = \frac{3}{4}x(x-2a)^2,\ 0 < x < a$$



$$= \frac{3}{4}x^3 - 3ax^2 + 3a^2x$$

$$V'(x) = \frac{9}{4}x^2 - 6ax + 3a^2$$

$$V'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{9}{4}x^2 - 6ax + 3a^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{4}x^2 - 2ax + a^2 = 0 \Leftrightarrow x = 2a \text{ ឬ } x = \frac{2a}{3}$$

តារាងសញ្ញានៃ $v'(x)$

x		$\frac{2a}{3}$		a	
$V'(x)$	$+$	0	$-$	0	
$V(x)$	↗	អតិ	↘		

តាមតារាង V មានតម្លៃអតិបរមាត្រង់ $x = \frac{2a}{3}$

ដូចនេះ **ប្រអប់មានមាឌធំបំផុតកាលណា $x = \frac{2a}{3}$**

10. ក. រករយៈពេលដែលដុំថ្មធ្លាក់ប៉ះផ្ទៃដី

ដុំថ្មធ្លាក់ប៉ះដីកាលណា $88.2 = 9.8t^2$ រឺ $t^2 = 9 \Rightarrow t = \pm 3$ តែ $t > 0$

ដូចនេះ **$t = 3$ វិនាទី**

ខ. រកល្បឿនធ្លាក់នៃដុំថ្មនៅខណៈ2 វិនាទីដំបូង

តាង $V(m/s)$ ជាល្បឿនធ្លាក់នៃដុំថ្ម

យើងមានសមីការចំងាយចរ $S(t) = 9.8t^2$

យើងបាន: $V(t) = \frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt}(9.8t^2) = 19.6t$

ចំពោះ $t = 2s$ យើងបាន: $V(2) - 39.2m/s$

ដោយល្បឿន V មានទិសដៅចុះក្រោម នោះ

យើងបាន: $V = -39.2m/s$

គ. រកល្បឿនធ្លាក់នៃដុំថ្មនៅពេលធ្លាក់ប៉ះផ្ទៃដី

យើងមាន: $V(t) = 19.6t$ ដុំថ្មធ្លាក់ប៉ះផ្ទៃដីនៅខណៈពេល

$t=3s$ យើងបាន: $V(3)=19.6\times 3=58.8m/s$

តែ V មានទិសដៅចុះក្រោម យើងបាន: $\boxed{V=-58.8m/s}$

11. ក. រកល្បឿននៃវត្ថុនៅខណៈ t បន្ទាប់ពីបាញ់

យើងមាន: $S(t)=-4.9t^2+39.2t$

យើងបាន: $V(t)=\frac{ds}{dt}=\frac{d}{dt}(-4.9t^2+39.2t)$

$V(t)=-9.8t+39.2m/s$

ខ. រករយៈពេលដែលវត្ថុស្ថិតនៅកំពស់ខ្ពស់បំផុត

វត្ថុស្ថិតនៅខ្ពស់បំផុតលុះត្រាតែ $V(t)=0$

យើងបាន: $-9.8t+39.2=0$ នាំអោយ $t=\frac{39.2}{9.8}=4s$

ដូចនេះ $\boxed{t=4s}$

+ រកកំពស់នោះ ចំពោះ $t=4s$ យើងបាន:

$S(4)=-4.9\times 4^2+39.2\times 4=78.4m$

ដូចនេះ $s=78.4m$

គ. រករយៈពេលដែលវត្ថុស្ថិតក្នុងលំហអាកាស

វត្ថុស្ថិតក្នុងលំហអាកាសលុះត្រាតែចំងាយចរ

$S(t)=0\Leftrightarrow -4.9t^2+39.2t=0$

នាំអោយ $t=0$ (មិនយក) ឬ $t=\frac{39.2}{4.9}=8s$

ដូចនេះ វត្ថុស្ថិតក្នុងលំហអាកាសរយៈពេល $t = 8s$

ឃ. រកចំងាយចរសរុបនៃវត្ថុ គឺជាចំងាយចរទាំងទៅទាំងមក

យើងបាន: $s_{សរុប} = 2\times78.4m = 156.8m$

ដូចនេះ: $\boxed{s_{សរុប} = 156.8m}$

<u>មេរៀនទី៣</u>

អថេរភាពនិងក្រាបនៃអនុគមន៍

<u>លំហាត់</u>

- អនុគមន៍ $y = ax^3 + bx^2 + c + d \quad (a \neq 0)$

1. សិក្សាអថេរភាពនិងសង់ក្រាបតាងអនុគមន៍ខាងក្រោម:

ក. $y = x^3 + 4x$ ខ. $y = -2x^3 - 6x - 8$

គ. $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 4$

ឃ. $y = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + x - \frac{1}{3}$

ង. $y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + 1$

2. អនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x) = x^3 - 3x + 2$ ហើយមានក្រាប C ។

ក.បង្ហាញថាចំណុច $I(0,2)$ ជាចំណុចរបត់និងជាផ្ចិតឆ្លុះនៃ C ។

ខ. រកសមីការបន្ទាត់ប៉ះនឹងក្រាប C ត្រង់ចំណុចរបត់ I ។

គ. សង់តារាងអថេរភាពនៃ f និងក្រាប C ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់។

3. អនុគមន៍ $y=x^3+mx+5$ កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ហើយ m ជាប៉ារ៉ាម៉ែត។

ក.តម្លៃដើម្បីអោយអនុគមន៍មានអតិបរមាធៀប និង អប្បបរមាធៀប ។

ខ.សិក្សាអថេរភាពនិងសង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ចំពោះ $m=-3$

4. អនុគមន៍ f កំណត់នៅលើ $\mathbb{R}$ ដោយ

$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$

ក. រកតម្លៃនៃលេខមេគុណ a, b, c និង d ដោយដឹងថាអនុគមន៍មានអតិបរមាធៀប $y=4$ ត្រង់ $x=1$ ហើយក្រាបប៉ះនឹងអ័ក្សអាប់ស៊ីសត្រង់ $x=3$ ។

ខ. សិក្សាអថេរភាព និង សង់ក្រាបតាង

$f(x)=x^3-6x^2+9x$ ។

5. អនុគមន៍ $f_a(x)=x^3-1-a(x-1)$ មានក្រាប c_a ទៅតាមតម្លៃប៉ារ៉ាម៉ែត a នីមួយៗ។

ក. រកតម្លៃ a ដើម្បីអោយក្រាប c_a ប៉ះនឹងអ័ក្សអាប់ស៊ីស។

ខ. សិក្សាអថេរភាពនិងសង់ក្រាបតាងអនុគមន៍ចំពោះតម្លៃ a ដែលរកបាន។

6. អនុគមន៍ $y=x^3-x$ មានក្រាប C ។

ក. បង្ហាញថា $A(-1,0)$ ជាចំណុចប្រសព្វមួយរវាងក្រាប C និងបន្ទាត់ L មានសមីការ $y=a(x+1)$ ។

ខ. រកសមីការបន្ទាត់ប៉ះនឹងក្រាប C ត្រង់ចំណុច A ។

គ. រកតម្លៃ a ដើម្បីអោយ L កាត់ក្រាប ត្រង់ពីរចំណុចផ្សេងគ្នា M_1 និង M_2 ក្រៅពីចំណុច A ។ រកសំណុំ ចំណុចកណ្តាល I នៃអង្កត់ $[M_1M_2]$ ។

- អនុគមន៍ $y=ax^4+bx^2+c \qquad (a\neq 0)$

7. សិក្សាអថេរភាពនិង សង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ខាងក្រោមៈ

ក. $y=x^4+2x^2-3$ ខ. $y=-\dfrac{1}{2}x^4-x^2+\dfrac{3}{2}$

គ. $y=x^4-4x^2$ ឃ. $y=x^4-2x^2+2$

ង. $t=2x^2-x^4$ ច. $y=x^4-6x^2+5$

8. គេអោយអនុគមន៍ $y=x^4-mx^2+3$ ដែល m ជាប៉ារ៉ាម៉ែត។

ក. រកតម្លៃ m ដើម្បីអោយក្រាបនៃអនុគមន៍នេះមានចំណុចរបត់ពីរ ។

ខ. រកតម្លៃ m ម្បីអោយក្រាបនៃអនគមន៍គ្មានចំណុចរបត់។

9. អនុគមន៍ $y=\dfrac{1}{2}x^4-3x^2+\dfrac{3}{2}$ មានក្រាប C ។

ក. សង់តាក់ងអថេរភាពនៃអនុគមន៍នេះ។ រកចំណុចរបត់នៃក្រាប C ។

ខ. រកសមីការបន្ទាត់ប៉ះត្រង់ចំណុចរបត់។

គ. រកសមីការបន្ទាត់ទាំងអស់ដែលកាត់តាមចំណុច

$A\left(0, \frac{3}{2}\right)$ ហើយប៉ះនឹងក្រាប C ។

10. អនុគមន៍ f កំណត់ដោយ

$f(x) = -x^4 + 2mx^2 - 2m + 1$ ហើយមានក្រាប C_m ។

ក. រកតម្លៃ m ដើម្បីអោយអនុគមន៍ f មានអតិបរមាធៀបពីរនិង អប្បបរមាធៀបមួយ។

ខ. សិក្សាអថេរភាព និង សង់ក្រាបតាងអនុគមន៍ f ចំពោះ $m = 5$ ។

គ. រកតម្លៃ m ដើម្បីអោយក្រាប C_m កាត់អ័ក្សអាប់ស៊ីសត្រង់បួនចំណុចផ្សេងគ្នា។

- អនុគមន៍ $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ $(c \neq 0,\ ad - bc \neq 0)$

11. បង្ហាញថាបន្ទាត់ដែលបានអោយ គឺជាអាស៊ីមតូតនៃក្រាបតាង f :

ក. $f(x) = \dfrac{2x+1}{x}$ បន្ទាត់ $L_1 : x = 0, L_2 : y = 2$ ។

ខ. $f(x)=\dfrac{-3x+1}{x+2}$ បន្ទាត់ $L_1: x=-2, L_2: y=-3$ ។

12. សិក្សាអថេរភាពនិងសង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម:

ក. $y=\dfrac{1}{x-3}$ ខ. $y=\dfrac{x+1}{x-1}$ គ. $y=\dfrac{2x}{x+1}$

ឃ. $y=\dfrac{1-2x}{2(x-2)}$ ង. $y=\dfrac{2-3x}{1-x}$

ច. $y=\dfrac{1-x}{x-3}$ ចំពោះ $x\in(3,+\infty)$

ឆ. $y=\dfrac{x-2}{2x}$ ចំពោះ $x\in(-\infty, 2)$ ។

13. អនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ មានក្រាប H ។

ក. រកមេគុណ a, b, c និង d ដោយដឹងថាក្រាប H កាត់តាមចំណុច $E(-3, -1), F(0,5)$ និង $G(3,2)$ ។

ខ. រកមេគុណ a, b, c និង d ដោយដឹងថាបន្ទាត់ $L_1: x=2$ ជាអាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាប H ហើយបន្ទាត់ $L_2: y=\dfrac{3}{2}x+1$ ប៉ះនឹងក្រាប H ត្រង់ចំណុច $A(0,1)$ ។

14. អនុគមន៍ $y=\dfrac{x+b}{cx+d}$ មានក្រាប H ។

ក. រកមេគុណ b, c, d ដើម្បីអោយក្រាប H កាត់អ័ក្សអាប់ស៊ីសត្រង់ $x=-1$ កាត់អ័ក្សអរដោនេត្រង់ $y=-1$ និងកាត់តាម $A(2, 3)$ ។

ខ. សិក្សាអថេរភាពនិងសង់ក្រាប H នៃ f ។

គ. កំណត់ចំណុចប្រសព្វរវាងក្រាប H និងបន្ទាត់ $L: y=x$

15. គេអោយអនុគមន៍ $y=\dfrac{2px+1}{x-p}$ ដែលមានក្រាប H_p និង p ជាប៉ារ៉ាម៉ែត។

ក. សិក្សាអថេរភាពនិងសង់ក្រាប H_1 នៃអនុគមន៍ចំពោះ $p=1$ ។

ខ. រកកូអរដោនេនៃចំណុចប៉ះ A រវាងក្រាប H_1 និងបន្ទាត់ដែលមានមេគុណប្រាប់ទិសស្មើ $-\dfrac{1}{3}$ ។

គ. រកសមីការអាស៊ីមតូតទាំងពីរនៃក្រាប H_p ។ រកសំណុំចំណុចនៃចំណុចប្រសព្វ រវាងអាស៊ីមតូតទាំងពីរ កាលណា p ប្រែប្រួលតម្លៃ។

ដំណោះស្រាយ

1. សិក្សាអថេរភាពនិងសង់ក្រាបតាងអនុគមន៍:

ក. $y=x^3+4x$

+ ដែលកំណត់ $D=\mathbb{R}$

+ ទិសដៅអថេរភាព $y'=3x^2+4$

$y'=0$ គ្មានរឹសនោះអនុគមន៍គ្មានបរមាធៀបទេ។

+ លីមីត: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y=\lim\limits_{x\to\pm\infty}(x^3+4x)=\pm\infty$

+ តារាងអថេរភាព

x	$-\infty$		$+\infty$
y'		$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

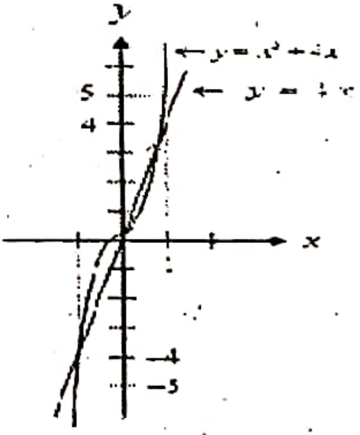
+ ចំណុចរបត់ $y''=6x$ បើ $y''=0 \Rightarrow x=0, y(0)=0$

ដូចនេះ ចំនុច $(0,0)$ ជាចំណុចរបត់នៃក្រាប C

+ ក្រាប

- ចំណុចប្រសព្វរវាងក្រាបនឹងអ័ក្ស: $x=0, y=0$
- បន្ទាត់ប៉ះនឹងក្រាបត្រង់ចំណុចរបត់ $I(0,0)$ មានមេគុណប្រាប់ទិស $y'(0)=4$ មានសមីការ:

$y=4(x-0)+0=4x$



ខ. $y=-2^3-6x-8$

+ ដែនកំណត់ $D=\mathbb{R}$

+ ទិសដៅអថេរភាព: $y'=-6x^2-6$

$y'=0$ គ្មានរឹសនោះអនុគមន៍គ្មានបរមាធៀបទេ។

+ លីមីត: $\lim\limits_{x\to-\infty} y=\lim\limits_{x\to-\infty}(-2x^3-6x-8)=+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} y=\lim_{x\to+\infty}(-2x^3-6x-8)=-\infty$$

+ តារាងអថេរភាព

x	$-\infty$		$+\infty$
y'		$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	$-\infty$

+ ចំណុចរបត់ $y''=-12x$ បើ

$y''=0\Rightarrow x=0, y=y(0)=-8$

+ ក្រាប:

• ចំណុចប្រសព្វរវាងក្រាបនឹងអ័ក្ស: $x=0, y=-8$

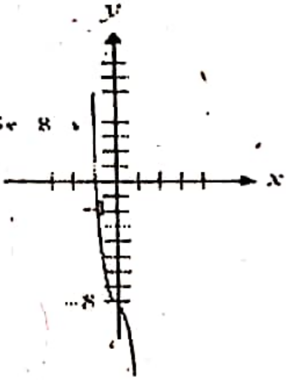
បើ $y=0$ គេបាន $-2x^3-6x-8=0$

$\Leftrightarrow (x+1)\left[-2\left(x^2-x+4\right)\right]=0 \Leftrightarrow x=-1$

ព្រោះ: $-2(x^2-x+4)=0$ គ្មានរឹស

• បន្ទាត់ប៉ះនឹងក្រាបត្រង់ចំណុចរបត់ $I(0,-8)$ មានមេគុណប្រាប់ទិស $y'(0)=-6$ និងមានសមីការ:

$y=-6(x-0)-8=-6x-8$



គ. $y=x^3-6x^2+9x-4$

+ដែនកំណត់ $D=\mathbb{R}$

+ ទិសដៅអថេរភាព:

$y'=3x^2-12x+9$

$y'=0 \Leftrightarrow 3x^2-12x+9=0$

$\Leftrightarrow (x-1)(3x-9)=0 \Leftrightarrow x=1, x=3$

• សញ្ញានៃ y'

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	

• តម្លៃបរមាធៀប:

y មានអប្បបរមាធៀបត្រង់ $x=3$ ហើយ $y(3)=-4$

y មានអប្បបរមាធៀបត្រង់ $x=1$ ហើយ $y(2)=0$

+ លីមីត $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(x^3-6x^2+9x-4)=\pm\infty$

+ តារាងអថេរភាព

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	-4	$\nearrow$	$+\infty$

+ ចំណុចរបត់: $y''=6x-12$ បើ $y''=0 \Rightarrow x=2$ ហើយ

$y(2)=-2$

+ ក្រាប:

• ចំណុចប្រសព្វរវាងក្រាបនឹងអ័ក្ស: បើ $x=0$

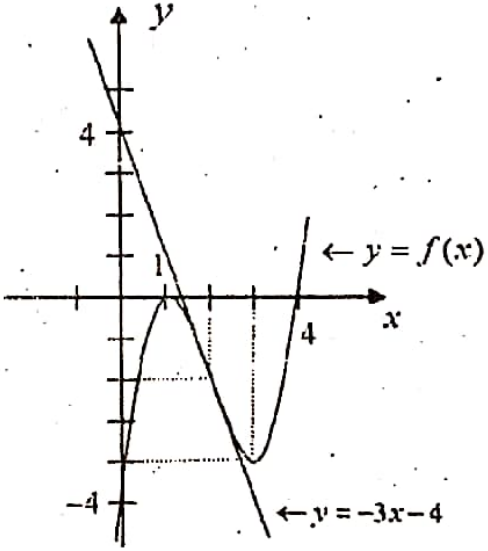
គេបាន: $y=-4$ ។ បើ $y=0$ គេបាន:

$x^3-6x^2+9x-4=0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2-5x+4)=0$

$\Leftrightarrow x=1$ រឺ $x=4$

• បន្ទាត់ប៉ះត្រង់ចំណុចរបត់ $I(2;-2)$ មានមេគុណប្រាប់ ទិស $y'(2)=-3$ ហើយមានសមីការ

$y=-3(x-2)-2=-3x+4$



ឃ. $y=\frac{1}{3}x^3-x^2+x-\frac{1}{3}$

+ដែនកំណត់ $D=\mathbb{R}$

+ ទិសដៅអថេរភាព: $y'=x^2-2x+1$ បើ

$y'=0 \Leftrightarrow x^2-2x+1=0 \Leftrightarrow x=1 \qquad (\Delta=0)$

•សញ្ញានៃ y':

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	

+ លីមីត $\lim_{x\to\pm\infty}(\frac{1}{3}x^3-x^2+x-\frac{1}{3})=\pm\infty$

+ តារាងអថេរភាព:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

+ ចំណុចរបត់: $y''=2x-2$ បើ $y''=0\Rightarrow x=1$

ហើយ $y(1)=0$

+ ក្រាបៈ

• ចំណុចប្រសព្វរវាងក្រាបនឹងអ័ក្សៈ បើ $x=0$

គេបានៈ $y=-\dfrac{1}{3}$ ហើយ បើ $y=0$ គេបានៈ

$$\frac{1}{3}x^3-x^2+x-\frac{1}{3}=0\Leftrightarrow(x-1)\left[\frac{1}{3}\left(x^2-2x+1\right)\right]=0$$

$\Leftrightarrow x=1$ ព្រោះ x^2-2x+1 មានរឹសឌុប $x_0=1$ ។

• បន្ទាត់ប៉ះត្រង់ចំណុចរបត់ $I(1;\,0)$ មានមេគុណប្រាប់ទិស $y'(1)=0$ ហើយមានសមីការ $y=0$

2. ក. បង្ហាញថាចំណុច $I(0,\,2)$ ជាចំណុចរបត់និងជាផ្ចិតឆ្លុះនៃក្រាប C

យើងមានៈ $f(x)=x^3-3x+2$

យើងបានៈ $f'(x)=3x^2-3;\ f''(x)=6x$

$f''(x)=0$ នោះ $x=0$

សញ្ញានៃ $f''(x)$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	

$f''(x)$ ប្តូរសញ្ញានៅសងខាង $x=0$ ។

ចំពោះ $x=0 \Rightarrow y=f(0)=2$ ។

ដូចនេះ $I(0,\ 2)$ ជាចំណុចរបត់នៃក្រាប C

+ បង្ហាញថា $I(0,\ 2)$ ជាផ្ចិតឆ្លុះនៃក្រាប C

យើងមាន: $f(2\times 0-x)+f(x)=f(-x)+f(x)$

$=-x^3+3x+2-x^3-3x+2=4=2\times 2$

ដូចនេះ $I(0,\ 2)$ ជាផ្ចិតឆ្លុះនៃក្រាប

ខ. រកសមីការបន្ទាត់ប៉ះនឹងក្រាប C ត្រង់ចំណុច I

យើងមាន: $y=f'(x_0)(x-x_0)+y_0)+y_0$

ដែល $f'(x_0)=f'(0)=-3$ ហើយ $y_0=f(2)=4$

ដូចនេះ $y=-3(x-0)+4$ ឬ $y=-3x+4$

គ. សង់តារាងអថេរភាពនៃ f និងក្រាប c

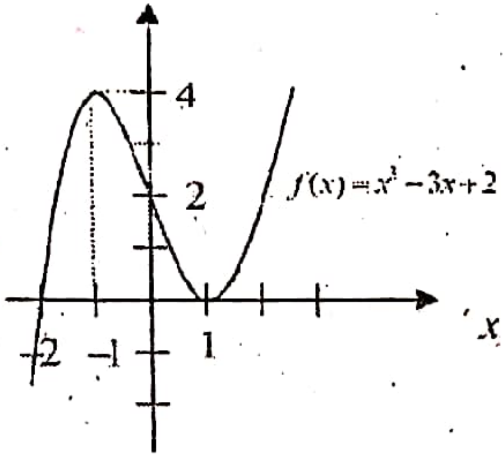
• បើ $f'(x)=0 \Leftrightarrow 3x^2-3=0 \Leftrightarrow x=\pm 1$

• $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}(x^3-3x+2)=\pm\infty$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	-4	↘	0	↗	$+\infty$

• ចំណុចប្រសព្វរវាងក្រាបនិងអ័ក្ស: បើ $x=0,\ y=2$

បើ $y=0 \Leftrightarrow x^3-3x+2=0 \Leftrightarrow x=1,\ x=-2$



3. ក. កំណត់តម្លៃ m ដើម្បីអោយអនុគមន៍មាន អតិបរមា និង អប្បបរមាធៀប

យើងមាន: $f(x)=x^3+mx+5$

$\Rightarrow f'(x)=3x^2+m$

អនុគមន៍មានអតិបរមា និង អប្បបរមាធៀបលុះត្រាតែ $f'(x)=0$ មានឫសពីរផ្សេងគ្នា យើងបាន:

$3x^2+m=0$ មានឫសពីរកាលណា $m<0$

ដូចនេះ $m<0$

ខ. សិក្សាអថេរភាពនិងសង់ក្រាបបំពោះ $m<-3$

យើងបាន: $f(x)=x^3-3x+5$ មាន $D=\mathbb{R}$

$\Rightarrow f'(x)=3x^2-3$ បើ $f'(x)=0$ នោះ $x=\pm1$

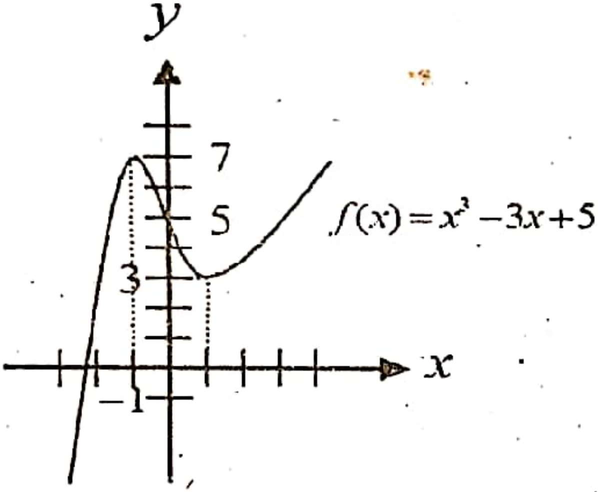
• $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(x^3-3x+5\right)=\pm\infty$

តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍

x	$-\infty$		1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	7	$\searrow$	3	$\nearrow$	$+\infty$

•ចំណុចប្រសព្វរវាងក្រាបនឹងអ័ក្ស: បើ $x=0, y=5$

បើ $y=0 \Leftrightarrow x^3-3x+5=0 \Leftrightarrow x\simeq -2,33$



4. ក. រកតំលៃលេខមេគុណ a, b, c និង d

យើងមាន: $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$

$$f'(x)=3ax^2+2bx+c$$

ដោយ f មានអតិបរមាធៀប $y=4$ ត្រង់ $x=1$ និងក្រាប ប៉ះអ័ក្សអាប់ស៊ីសត្រង់ $x=3$ យើងបាន:

$$\begin{cases} f(1)=4 \\ f'(1)=0 \\ f(3)=0 \\ f'(3)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b+c+d=4 & (1) \\ 3a+2b+c=0 & (2) \\ 27a+9b+3c+d=0 & (3) \\ 27a+6b+c=0 & (4) \end{cases}$$

ដោយដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការនេះយើងបាន:

$$\boxed{a=1,\ b=-6,\ c=9,\ d=0}$$

ខ. សិក្សាអថេរភាពនិងសង់ក្រាបតាងអនុគមន៍

$f(x)=x^3-6x^2+9x$

+ដែនកំណត់ $D=\mathbb{R}$

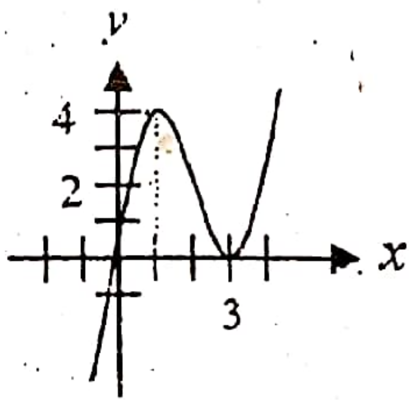
+ ទិសដៅអថេរភាព: $f'(x)=3x^2-12x+9$

$f'(x)=0$ មានរឹស $x=1$ ឬ $x=3$

+ $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(x^3-6x^2+9x\right)=\pm\infty$

+ តារាងអថេរភាព:

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	4	↘	0	↗	$+\infty$



5. ក. រកតម្លៃ a ដើម្បីអោយ C_a ប៉ះនឹងអ័ក្សអាប់ស៊ីស

យើងមាន: $f_a(x) = x^3 - 1 - a(x-1)$

$$f_a'(x) = 3x^2 - a$$

ក្រាប C_a ប៉ះនឹងអ័ក្សអាប់ស៊ីសកាលណា $a = 3,\ a = \dfrac{3}{4}$

ខ. សិក្សាអថេរភាពនិងសង់ក្រាបទៅតាមតម្លៃ a

+ ចំពោះ $a = 3$ គេបាន: $f(x) = x^3 - 1 - 3(x-1)$

$f'(x) = 3x^2 - 3,\ f''(x) = 6x$

តារាងអថេរភាព:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

+ ចំពោះ $a = \dfrac{3}{4}$ គេបាន: $f(x) = x^3 - 1 - \dfrac{3}{4}(x-1)$

$f'(x) = 3x^2 - \dfrac{3}{4},\ f''(x) = 6x$

តារាងអថេរភាព:

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\frac{1}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

(អ្នកអានសង់ខ្សែកោងខ្លួនឯង)

6. ក. បង្ហាញថា $A(-1,\ 0)$ ជាចំណុចប្រសព្វរវាងក្រាប C និងបន្ទាត់ $L: y = a(x+1)$

យើងមានៈ $y = x^3 - x$ យើងបានៈ $x^3 - x = a(x+1)$

ចំពោះ $A(-1, 0)$ នោះ $0 = 0$ (ពិត)

ខ. រកសមីការបន្ទាត់ប៉ះនឹងក្រាប C ត្រង់ចំណុច A

តាមរូបមន្តៈ $y = a'(x - x_0) + y_0$ ដែល

$a' = y'(-1) = 2,\ y_0 = y(0) = 0$ យើងបានៈ

$$y = 2(x+1)$$

គ. រកតម្លៃ a ដើម្បីងោយ L កាត់ C ត្រង់ពីរចំណុចផ្សេងគ្នា M_1 និង M_2 ក្រៅពី A

សមីការអាប់ស៊ីសចំណុចប្រសព្វរវាង L និង C

$x^3 - x = a(x+1) \Leftrightarrow (x+1)(x^2 - x - a) = 0$ (1)

$\Leftrightarrow x+1 = 0 \Rightarrow x = -1$ ជាអាប់ស៊ីសរបស់ A

ឬ $x^2 - x - a = 0$, មាន $\Delta = 1 + 4a$

ដើម្បីអោយ L កាត់ក្រាប C ត្រង់ពីរចំណុចផ្សេងគ្នា

លុះត្រាតែ $\Delta > 0$ រឺ $1 + 4a > 0 \Rightarrow \boxed{a > -\frac{1}{4}}$

+ រកសំនុំចំណុចកណ្តាល I នៃអង្កត់ $[M_1M_2]$.

តាម(1)បន្ទាត់ (L) កាត់ C កាលណា $a > \frac{1}{4}$ គេបានៈ

អាប់ស៊ីសនៃ I គឺ $x_I = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{s}{2} = -\frac{b}{2a} = \frac{1}{2}$

នោះ $y_I = a\left(\frac{1}{2}+1\right) = \frac{2}{3}a$ នាំអោយ $a = \frac{2}{3}y_I$

ដោយ $a >= \frac{1}{4}$ គេបាន: $\frac{2}{3}y_I > -\frac{1}{4} \Rightarrow y_I > \frac{3}{8}$

ដូចនេះ **សំណុំចំណុច I ជាបន្ទាត់ $x = \frac{1}{2}$ ផ្នែក $y > \frac{3}{8}$**

7. សិក្សាអថេរភាពនិងសង់ក្រាបនៃអនុគមន៍:

ក. $y = x^4 + 2x^2 - 3$

+ដែនកំណត់ $D = \mathbb{R}$

+ ទិសដៅអថេរភាព: $y' = 4x^3 + 4x$

$y' = 0$ មានរឹស $x = 0$ តែមួយគត់

+ លីមីត $\lim_{x \to \pm\infty}\left(x^4 + 2x^2 - 3\right) = +\infty$

+ តារាងអថេរភាព:

x	[illegible]	0	[illegible]
y'	$-$	0	$+$
y	[illegible] ↘	3	↗ [illegible]

+ ក្រាប:

•ចំណុចប្រសព្វរវាងក្រាបនឹងអ័ក្ស: បើ $x = 0$

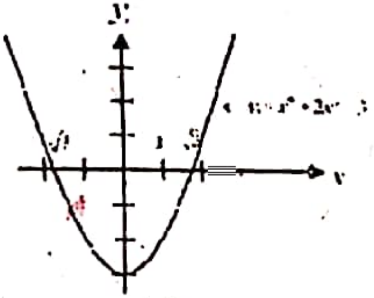
គេបាន: $y = -3$ បើ $y = 0$ គេបាន: $x^4 + 2x^2 - 3 = 0$

មានរឹស $x = \pm\sqrt{3}$

•អ័ក្សឆ្លុះ អ័ក្សអរដោណេជាអ័ក្សឆ្លុះនៃក្រាប។

•សង់ក្រាប:

(ចំពោះសំនួរ ខ. ដល់ ឃ.
សូមអ្នកសិក្សាដោយស្លួនឯងតាម
របៀបខាងលើនិងតាមការណែនាំ
នៅក្នុងសៀវភៅពុម្ព)។



8. ក. រកតម្លៃ m ដើម្បីអោយក្រាបមានចំណុចរបត់ពីរ

គេមាន: $f(x)=x^4-mx^2+3$

$\Rightarrow f'(x)=4x^3-2mx$

ដើម្បីអោយក្រាបនៃអនុគមន៍នេះមានចំណុចរបត់ពីរលុះត្រា តែ $f'(x)=0$ មានរឹសបីផ្សេងគ្នារឺ $-m<0\Rightarrow \boxed{m>0}$

ខ. រកតម្លៃ m ដើម្បីអោយក្រាបគ្មានចំណុចរបត់ក្រាបនៃអនុគមន៍គ្មានចំណុចរបត់កាលណា

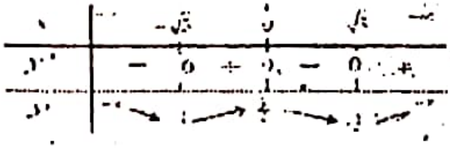
$\frac{b}{a}\geq 0\Leftrightarrow -m\geq 0\Rightarrow \boxed{m\leq 0}$

9. គេមាន: $y=\frac{1}{2}x^4-3x^2+\frac{3}{2}$

$\Rightarrow y'=2x^3-6x$ បើ $y'=0$ គេបាន

$2x^3-6x=0$ មានរឹស $x=0$ ឬ $x=\pm\sqrt{3}$

ក. សង់តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍នេះ:



+ រកចំណុចរបត់នៃក្រាប C

$y'' = 6x^2 - 6$ បើ $y'' = 0$ នោះ $6x^2 - 6 = 0$ មានរឹសពីរ $x = \pm 1$ ។ ដូចនេះក្រាបនៃអនុគមន៍មានចំណុចរបត់ពីរគឺ $(-1; -1)$ និង $(1; -1)$

ខ. រកសមីការបន្ទាត់ប៉ះត្រង់ចំណុចរបត់:

+ ចំពោះចំណុច $(-1; -1)$ មានសមីការ

$y = y'(-1)(x+1) - 1$ ដែល

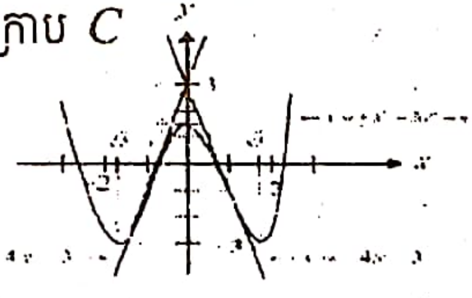
$y'(-1) = 4 \Rightarrow y = 4(x+1) - 1$ រឺ $\boxed{y = 4x + 3}$

+ ចំពោះចំណុច $(1; -1)$ មានសមីការ

$y = y'(1)(-1) - 1$ ដែល $y'(1) = -4$

$\Rightarrow y = -4(x-1) - 1$ រឺ $\boxed{y = -4 + 3}$

គ. សង់បន្ទាត់ប៉ះនឹងក្រាប C



ឃ. រកសមីការបន្ទាត់ដែលកាត់តាម $A(0, \frac{3}{2})$ ហើយប៉ះនឹងក្រាប C :យើងមាន: $y = y'(0)(x - 0) + \dfrac{3}{2}$

តែ $y'(0) = 0$ នោះ: $y = \dfrac{3}{2}$

10. រកតម្លៃ m

គេមាន: $f(x)=-x^4+2mx^2-2m+1$

ដើម្បីអោយ f មានអតិបរមាធៀបពីរនិងអប្បបរមាធៀបមួយ

លុះត្រាតែ $\frac{2m}{-1}<0 \Rightarrow m>0$

ខ. សិក្សាអថេរភាពនិងសង់ក្រាបតាងអនុគមន៍ f

ចំពោះ $m=5$ យើងបាន: $f(x)=-x^4+10x^2-9$

$\Rightarrow f'(x)=-4x^3+20x$ បើ $f'(x)=0$ គេបាន

$x=0$ ឬ $x=\pm\sqrt{5}$

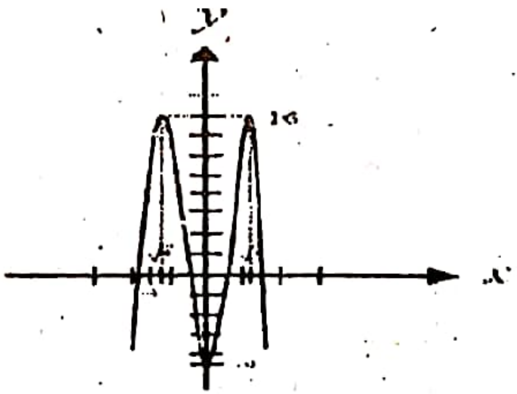
តារាងអថេរភាពនៃ f

x	$-\infty$		$-\sqrt{5}$		0		$\sqrt{5}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	16	↘	-9	↗	16	↘	$-\infty$

\+ ក្រាប:

• ចំណុចក្រាបកាត់អ័ក្ស: បើ $x=0$

គេបាន: $y=-9$ បើ $y=0$ នោះ: $x=\pm1, x=\pm3$



ឆ. រកតម្លៃ m ដើម្បីអោយក្រាប C_m កាត់អ័ក្សអាប់ស៊ីសត្រង់បួនចំណុចផ្សេងគ្នា

ក្រាបកាត់អ័ក្សអាប់ស៊ីសត្រង់បួនចំណុចផ្សេងគ្នា កាលណាសមីការ: $-x^4+2mx^2-2m+1=0$ (1) មានរឹសបួនផ្សេងគ្នា។ តាង $t=x^2, t\geq 0$

យើងបាន: $-t^2+2mt-2m+1=0$ (2)

$$\Delta' = m^2-2m+1$$

(1) មានរឹសបួនផ្សេងគ្នាកាលណា (2) មានរឹសពីរផ្សេងគ្នា

$\Rightarrow \Delta' > 0 \Leftrightarrow m^2-2m+1>0$

m		1	
$\Delta' > 0$	−	0	+

ដូចនេះ: $\boxed{m>1}$

11. បង្ហាញថាបន្ទាត់ដែលបានអោយគឺជាអាស៊ីមតូតនៃក្រាបតាង f :

ក. $f(x)=\dfrac{2x+1}{x}$ គេបាន:

+ $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\infty$ នាំអោយ $L_1: x=0$ ជាអាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាបតាង f

+ $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 2$ នោះ $L_2 : y = 2$ ជាអាស៊ីមតូតដេកនៃ

ក្រាបតាង f ។

ខ. $f(x) = \dfrac{-3x+1}{x+2}$ គេបាន:

+ $\lim\limits_{x\to-2} f(x) = \lim\limits_{x\to-2} \dfrac{-3x+1}{x+2} = \infty$

+ $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{-3x+1}{x+2} = -3$

ដូចនេះ បន្ទាត់ $L_1 : x = -2$ និងបន្ទាត់ $L_2 : y = -3$

ជាអាស៊ីមតូតឈរនិងដេករៀងគ្នានៃក្រាបតាង f ។

12. សិក្សាអថេរភាពនិងសង់ក្រាបតាងអនុគមន៍

ក. $y = \dfrac{1}{x-3}$

+ដែនកំណត់ $D = \mathbb{R} - \{3\}$

+ ទិសដៅអថេរភាព: $y' = -\dfrac{1}{(x-3)^2} < 0,\ x \in D$

+ $\lim\limits_{x\to3^+} f(x) = +\infty,\ \lim\limits_{x\to3^-} f(x) = -\infty$

នាំ[illegible]យបន្ទាត់ $x = 3$ ជាអាស៊ីមតូតឈរ

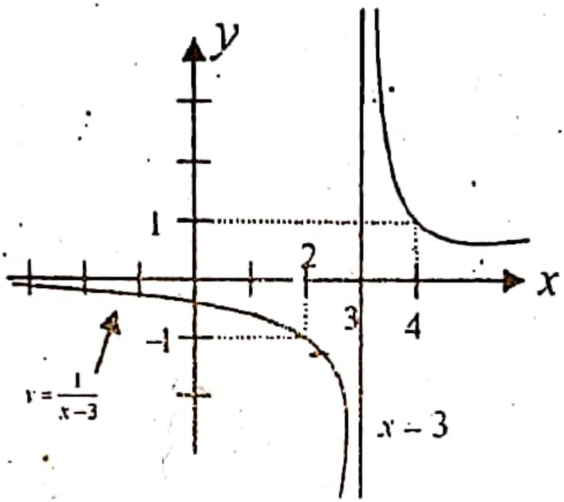
+ $\lim\limits_{[illegible]} f(x) = 0$ នាំអោយបន្ទាត់ $y = 0$ ជាអាស៊ីមតូតដេក

+ [illegible]

x	$-\infty$	3	$+\infty$
y'	$-$	‖	$-$
y	$0 \searrow -\infty$	‖	$+\infty \searrow 0$

+ ក្រាប:

• ចំណុចក្រាបកាត់អ័ក្ស: បើ $x=0,\ y=-\dfrac{1}{3}$



(ចំពោះសំនួរខ. ដល់ ឆ. សូមអ្នកអានសិក្សាដោយខ្លួនឯង តាមលំនាំខាងលើនិង តាមការណែនាំនៅក្នុងសៀវភៅពុម្ព)។

13. ក. រកមេគុណ a, b, c និង d

យើងមាន: $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ មានក្រាប H ។

ដោយក្រាបកាត់ H តាមចំណុច $E(-3,-1); F(0,5)$ និង-$G(3,2)$ យើងបាន:

$$\begin{cases} -3a+b=3c-d & (1) \\ b=5d & (2) \\ 3a+b=3c+d & (3) \end{cases}$$

ដោយដោះស្រាយប្រព័ន្ធនេះគេបាន:

$$\boxed{a=1,\ b=5,\ c=1,\ d=1}$$

ខ. រកមេគុណ a, b, c និង d

$$\boxed{a=2,\ b=-2,\ c=1,\ d=-2}$$

14. ក. រកមេគុណ b, c, d

គេមាន: $y=f(x)=\dfrac{x+b}{cx+d}$ មានក្រាប H

ដើម្បីអោយក្រាប H កាត់អ័ក្សអាប់ស៊ីសត្រង់ $x=-1$ កាត់អ័ក្សអរដោនេត្រង់ $y=-1$ និងកាត់តាម $A(2, 3)$ លុះត្រាតែ

$$\begin{cases} f(-1)=0 \\ f(0)=-1 \\ f(2)=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{-1+b}{-c+d}= \\ \frac{b}{d}=3 \\ \frac{2+b}{2c+d}=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=1 \\ d=-b=-1 \\ c=1 \end{cases}$$

ដូចនេះ: $\boxed{b=1,\ c=1,\ d=-1}$

ខ. សិក្សាអថេរភាពនិងសង់ក្រាប H នៃ f

ចំពោះ: $b=c=1,\ d=-1$ យើងបាន:

$f(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$

+ដែនកំណត់ $D=\mathbb{R}-\{1\}$

+ ទិសដៅអថេរភាព: $f'(x)=-\dfrac{2}{(x-1)^2}<0$

+ $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x+1}{x-1}=1$ នាំអោយបន្ទាត់ $y=1$ ជាអាស៊ីមតូតដេក។

+ $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x+1}{x-1}=-\infty$

+ $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x+1}{x-1}=+\infty$

នាំអោយបន្ទាត់ $x=1$ ជាអាស៊ីមតូតឈរ។

+ តារាងអថេរភាព:

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	‖	$-$
$f(x)$	$1 \searrow -\infty$	‖	$+\infty \searrow 1$

+ ក្រាប

ចំណុចក្រាបកាត់អ័ក្ស: បើ $x=0$, $y=-1$

បើ $y=0$ នោះ $x=-1$

គ. កំណត់ចំណុចប្រសព្វរវាងក្រាប H និងបន្ទាត់ $y=x$

សមីការអាប់ស៊ីសចំណុចប្រសព្វ $x=\dfrac{x+1}{x-1}$

$\Leftrightarrow x^2-2x-1=0$ មានរឹស $x=1\pm\sqrt{2}$

+ ចំពោះ $x=1+\sqrt{2}$ គេបាន $y=1+\sqrt{2}$

+ ចំពោះ $x=1-\sqrt{2}$ គេបាន $y=1-\sqrt{2}$

15. ក. សិក្សាអថេរភាពនិងសង់ក្រាប H_1 ចំពោះ $p=1$

ចំពោះ $p=1$ យើងបានៈ $y=f(x)=\dfrac{2x+1}{x-1}$

+ ដែនកំណត់ $D=\mathbb{R}-\{1\}$

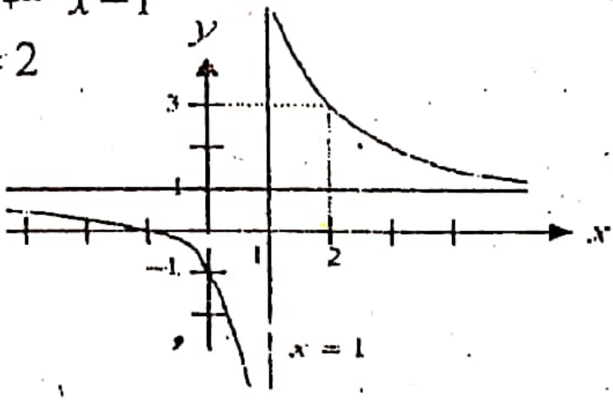
+ ទិសដៅអថេរភាព $f'(x)=\dfrac{-3}{(x-1)^2}<0,\forall x\in D$

+ $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)=+\infty,\ \lim\limits_{x\to1^-} f(x)=-\infty$

នាំអោយបន្ទាត់ $x=1$ ជាអាស៊ីមតូតឈរ។

+ $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\mp\infty}\dfrac{2x+1}{x-1}=2$

នាំអោយបន្ទាត់ $y=2$ ជាអាស៊ីមតូតដេក។

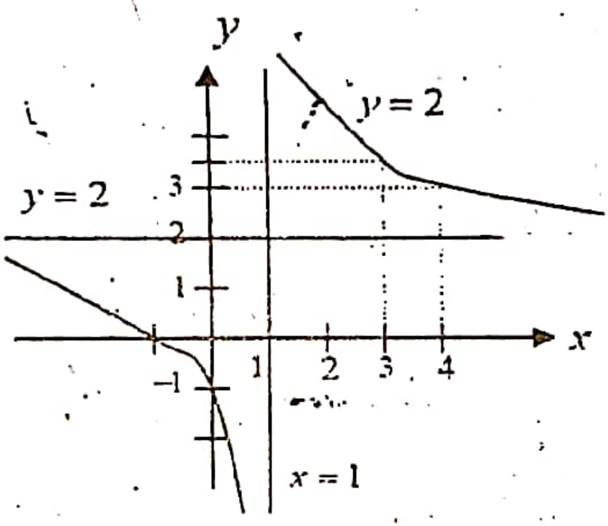


+ តារាងអថេរភាព:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y'		$-$	‖	$-$	
y	2 ↘	$-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	2

+ ចំណុចប្រសព្វកាត់អ័ក្ស: បើ $x=0$ នោះ $y=-1$

បើ $y=0$ នោះ $x=-\dfrac{1}{2}$



ខ. រកកូអរដោនេនៃចំណុចប៉ះ A រវាងក្រាប H_1 និងបន្ទាត់ដែលមានមេគុណប្រាប់ទិសស្មើ $-\dfrac{1}{3}$

យើងបាន: $f'(x)=-\dfrac{1}{3}\Leftrightarrow -\dfrac{3}{(x-1)^2}=-\dfrac{1}{3}$

$\Leftrightarrow x^2-2x-8=0 \Leftrightarrow x=4$ ឬ $x=-2$

• ចំពោះ: $x=4$ គេបាន: $y=3$

•ចំពោះ $x=-2$ គេបាន: $y=\frac{5}{3}$

ដូចនេះ: កូអរដោនេចំណុច A គឺ $(4,3)$ រឺ $\left(-2,\frac{5}{3}\right)$

គ. រកសមីការអាស៊ីមតូតទាំងពីរនៃក្រាប H_p

យើងមាន: $+\lim_{x\to p} f(x)=\lim_{x\to p}\frac{2px+1}{x-p}=\infty$

នោះបន្ទាត់ $x=p$ ជាអាស៊ីមតូតឈរនៃ H_p

$+\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{2px+1}{x-p}=2p$

នោះបន្ទាត់ $y=2p$ ជាអាស៊ីមតូតដេកនៃ H_p

•រកសំណុំចំណុចនៃចំណុចប្រសព្វរវាងអាស៊ីមតូតទាំងពីរ

សំណុំចំណុចប្រសព្វរវាងអាស៊ីមតូតទាំងពីរគឺ $M_p(p,2p)$

<u>ជំពូកទី៦</u> <u>ប្រូបាប</u>

<u>មេរៀនទី១</u>

ប្រូបាប

<u>លំហាត់</u>

1. ក. គេបោះកាក់មួយនិងគ្រាប់ឡុកឡាក់មួយគ្រាប់ព្រមគ្នា។ ចូរកំណត់:

ក. សកម្មភាពដែលជាពិសោធន៍ចៃដន្យ និងជាវិញ្ញាសា

ខ. លំហសំណាក S និង

ព្រឹត្តិការណ៍ A "បោះកាក់បានខាងរូប H"

ព្រឹត្តិការណ៍ B "បោះគ្រាប់ឡុកឡាក់បានខាងលេខ..."

គ. រកប្រូបាបព្រឹត្តិការណ៍ផ្ទុយនឹង A ព្រឹត្តិការណ៍នឹង B និងព្រឹត្តិការណ៍ផលគុណ A និង B ។

2. គេហូតបៀមួយសន្លឹកដោយចៃដន្យចេញពីហ៊ូបៀ 52 សន្លឹក។ រកប្រូបាបដែលហូតបានៈ

ក. សន្លឹកអាត់ ខ. សន្លឹកក្រហម គ. សន្លឹកអាត់ ឬ ក្រហម

ឃ. មិនមែនអាត់ និងមិនមែនក្រហម។

3. ថង់មួយមានឃ្លី 10 ចុះលេខពី 0 ដល់ 9 ។ គេចាប់យកឃ្លីមួយដោយចៃដន្យ។ ចូរកំណត់:

ក. លំហសំណាក S និង

ព្រឹត្តិការណ៍ A "ចាប់បានឃ្លីមានលេខជាពហុគុណនៃ3"

ព្រឹត្តិការណ៍ B "ចាប់បានឃ្លីមានលេខធំជាង5"

ខ. រកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ $A, B, A \cap B$ និង $A \cap B$

4. ថង់មួយមានឃ្លីខៀវ 7 និងឃ្លីស 3។ គេចាប់យកឃ្លីម្តង 3 ដោយចៃដន្យតែម្តងគត់។ រកប្រូបាបដែលចាប់បាន:

ក. ឃ្លីខៀវ 2 និងឃ្លីស1 ខ. ឃ្លីខៀវទាំង3 គ. ឃ្លីសទាំង3

5. គេបោះគ្រាប់ឡុកឡាក់ 2ព្រមគ្នាមួយពណ៌ក្រហម។

រកប្រូបាបដែលៈ

ក. លេខចេញលើគ្រាប់ខៀវ ស្មើនឹង 2 ដងនៃលេខចេញលើគ្រាប់ក្រហម។

ខ. ផលបូកលេខគ្រាប់ឡុកឡាក់ទាំង 2 ស្មើនឹង 5 ។

6.ក្នុងប្រអប់1មានក្រដាសបត់ជាសន្លឹកឆ្នោតចាប់យករង្វាន់។ សន្លឹកឆ្នោតមាន20 សន្លឹកដែលឆ្នោតត្រូវរង្វាន់មាន12 សន្លឹក សម្រាប់សិស្ស 20 នាក់ចាប់យកមួយសន្លឹកម្នាក់បន្តបន្ទាប់គ្នា ដើម្បីផ្ទៀងមើលរង្វាន់រៀងៗខ្លួន។ សុខជាអ្នកចាប់បានមុនគេ បន្ទាប់សៅចាប់ទី 2 និងសនចាប់ទី 3 និងសិស្សឯទៀតចាប ម្នាក់មួយបន្តបន្ទាប់គ្នារហូតអស់ឆ្នោត។រកប្រូបាបដែលៈ

ក. សុខចាប់បានឆ្នោត្រូវរង្វាន់

ខ. សៅចាប់បានឆ្នោតត្រូវរង្វាន់

គ. សនចាប់បានឆ្នោត្រូវរង្វាន់

ឃ. តើអ្នកចាប់មុន និងអ្នកចាប់ក្រោយអ្នកណាមានសំណាងជាងអ្នកណា ?

ដំណោះស្រាយ

1. ក. ពីសោធន៍ចៃដន្យគឺ សម្មភាពបោះកាក់និងគ្រាប់ឡុកឡាក់។

+ វិញ្ញាសាគឺសកម្មភាពបោះកាក់មួយនិង គ្រាប់ឡុកឡាក់មួយគ្រាប់ព្រមគ្នា។

ខ. លំហសំណាក $S=\{(1,H);(2,H);(3,H);(4,H);$
$(5,H);(6,H);(1,T);(2,T);(3,T);(4,T);$
$(5,T);(6,T)\}$ ។

+ ព្រឹត្តិការណ៍:

$A=\{(1,H);(2,H);(3,H);(4,H);(5,H);(6,H)\}$ +

ព្រឹត្តិការណ៍:

$B=\{(4,H);(4,T)\}$ ។

គ. រកប្រូបាបព្រឹត្តិការណ៍ផ្ទុយនឹង A

យើងមានៈ $P(A)=\dfrac{n(A)}{n(S)}=\dfrac{6}{12}=\dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow P\left(\overline{A}\right)=1=P(A)=1-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}$

+ រកប្រូបាបព្រឹត្តិការណ៍ផ្ទុយនឹង B

យើងមានៈ $P(B)=\dfrac{n(B)}{n(S)}=\dfrac{2}{12}=\dfrac{1}{6}$

$\Rightarrow P\left(\overline{B}\right)=1-\dfrac{1}{6}=\dfrac{5}{6}$

+ រកប្រូបាបព្រឹត្តិការណ៍ផលគុណ A និង B

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{12}$$

2. រកប្រូបាបដែលហូតបាន:

ក. សន្លឹកអាត់

ដោយក្នុងបៀរហ៊ូ 52 សន្លឹកមានអាត់ 4 សន្លឹក

យើងបាន: $P_{(\text{អាត់})} = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$

ខ. សន្លឹកក្រហម

ដោយក្នុងបៀរហ៊ូ 52 សន្លឹកមានសន្លឹកក្រហម 26 សន្លឹក

យើងបាន: $P_{(\text{ក្រហម})} = \frac{26}{52} = \frac{1}{2}$

គ. សន្លឹកអាត់ ឬ ក្រហម

ដោយក្នុងសន្លឹកក្រហម 26 សន្លឹកមានអាត់ 2 សន្លឹកដែលជាសន្លឹកក្រហម យើងបាន:

$$P_{(\text{អាត់ ឬ ក្រហម})} = \frac{1}{13} + \frac{1}{2} - \frac{2}{52} = \frac{28}{52} = \frac{7}{13}$$

3. ក. កំណត់:

+ លំហសំណាក $S = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$

+ ព្រឹត្តិការណ៍ A "ចាប់បានឃ្លីមានលេខជាពហុគុណនៃ3"

លេខជាពហុគុណនៃ 3មាន $0,3,6,9$

ដូចនេះ: $\boxed{A=\{0,3,6,9\}}$

+ ព្រឹត្តិការណ៍ $B=\{6,7,8,9\}$

ខ. រកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ $A,B,A\cap B$ និង $A\cap B$

យើងបាន: $P(A)=\dfrac{n(B)}{n(S)}=\dfrac{4}{10}=\dfrac{2}{5}$

$$P(B)=\frac{n(B)}{n(S)}=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$$

$$P(A\cap B)=\frac{n(A\cap B)}{n(S)}=\frac{2}{10}=\frac{1}{5}$$

$$P(A\cap B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\frac{3}{5}$$

4. រកប្រូបាបដើម្បីអោយបាន:

ក. ឃ្លីខៀវ 2 និង ឃ្លីមួយ

តាង A ជាព្រឹត្តិការណ៍នេះ យើងបាន:

$P(A)=\dfrac{n(A)}{n(S)}$ ដែល $n(A)=C(7,2)\times C(3,1)$ រី

$n(A)=\dfrac{7!}{5!2!}\times\dfrac{3!}{2!1}=63$ ហើយ

$$n(S)=C(10,3)=\frac{10!}{7!3!}=120$$

$$\Rightarrow P(A)=\frac{63}{120}=0.525$$

ខ. ឃ្លីខៀវទាំងបី

តាង B ជាព្រឹត្តិការណ៍នេះ យើងបាន:

$$P(B)=\frac{n(B)}{n(S)} \text{ ដែល } n(B)=C(7,3)=35$$

$$\Rightarrow P(B)=\frac{35}{120}=0.921$$

គ. ឃ្លីសទាំងបី: តាង C ជាព្រឹត្តិការណ៍នេះ

យើងបាន: $P(C)=\frac{n(C)}{n(S)}$ ដែល $n(C)=C(3,3)=1$

$$\Rightarrow P(C)=\frac{1}{120}=0.0083$$

5. រកប្រូបាបដែល:

ក. លេខចេញលើគ្រាប់ខៀវស្មើនឹងពីរដងនៃលេខចេញលើ
គ្រាប់ក្រហម:

តាង A ជាព្រឹត្តិការណ៍នេះ យើងបាន:

$A=\{(a,b)$ ដែល a ជាលេខចេញលើគ្រាប់ឡុកឡាក់ខៀវ ហើយ b ជាលេខចេញលើគ្រាប់ឡុកឡាក់ក្រហម $\}$ ។

ដូច្នេះ $\boxed{A=\{(2,1);(4,2);(6,3)\}}$

ចំនួនករណីអាច $n(S)=6\times 6=36$

$$\Rightarrow P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{3}{36}=\frac{1}{12}=0.083$$

ខ. ផលបូកលេខគ្រាប់ឡុកឡាក់ទាំងពីរស្មើ 5

តាង B ជាព្រឹត្តិការណ៍នេះ យើងបាន៖

$B\{(1,4);(2,3);(4,1);(3,2)\}$

$$\Rightarrow P(B)=\frac{n(B)}{n(S)}=\frac{4}{36}=\frac{1}{9}=0.11$$

6. រកប្រូបាបដែល៖

ក. សុខចាប់បានឆ្នោតត្រូវរង្វាន់

តាង A ជាព្រឹត្តិការណ៍នេះ

យើងបាន៖ $P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{12}{20}=\frac{3}{5}$

ខ. សៅចាប់បានឆ្នោតត្រូវរង្វាន់

តាង B ជាព្រឹត្តិការណ៍នេះ

យើងបាន៖ $P(B)=\frac{12}{20}\times\frac{11}{19}+\frac{8}{20}\times\frac{12}{19}=\frac{3}{5}$

គ. សនចាប់បានឆ្នោតត្រូវរង្វាន់

តាង C ជាព្រឹត្តិការណ៍នេះ៖

យើងបាន: $P(C)=\dfrac{3}{5}$

ឃ. អ្នកចាប់មុននឹងអ្នកចាប់ក្រោយមានសំណាងដូចគ្នា

ជំពូកទី៧ ស្ថិតិ

មេរៀនទី១ បំលែងចែកទិន្នន័យជាភាគរយ

លំហាត់

1. គណនាទីលទាំងបី និងភាគដប់នៃសំណុំទិន្នន័យនីមួយៗខាងក្រោម:

ក. 1 3 5 5 7 0 8 2 2 4 4

ខ. 7 10 22 2 0 8 12 13 18 21។

2. គណនាកាទីលទីមួយ Q_1 កាទីលទីបី Q_3 និង L_{68} នៃសំណុំទិន្នន័យ

ក. 18 0 8 16 10 4 4 14 2 13 5 7

ខ. 0.7 0.4 0.65 0.78 0.45 0.32 1.9 0.0078

3. គណនាមេដ្យាន កាទីលទីមួយ Q_1 កាទីលទីបី Q_3 និង L_{63} នៃបំណែងចែកប្រេកង់ខាងក្រោម:

ក.

x	4	5	6	7	8	9
y	12	9	8	13	9	9

ខ.

x	12	13	14	15	16
y	3	9	11	15	7

4. តារាងខាងក្រោមបង្ហាញពិន្ទុ ដែលបានមកពីបោះគ្រាប់ឡុកឡាក់មួយ ចំនួន 60 ដង។ គណនា Q_2 និង D_1 ។

ពិន្ទុ x	1	2	3	4	5	6
ប្រេកង់ f	12	9	8	13	9	9

5. អ្នកលក់សៀវភៅម្នាក់បានអោយដឹងថា សៀវភៅថ្មីរបស់គាត់មានទាំងអស់ចំនួន25 ក្បាលក្នុងនោះមានចំនួន4 ក្បាលមួយក្បាលលក់តម្លៃ 10$ មានចំនួន 6 ក្បាលមួយក្បាលលក់តម្លៃ 8$ មានចំនួន 4 ក្បាលមួយលក់តម្លៃ 7$ មានចំនួន 9 ក្បាលមួយក្បាលលក់តម្លៃ 15$ និងមានចំនួន 2 ក្បាលមួយក្បាលលក់តម្លៃ 22$ ។

ក. គណនាតម្លៃមធ្យមក្នុងសៀវភៅមួយក្បាល

ខ. គណនាកាទីល Q_1, Q_2, Q_3 និង L_{32} ។

6. ការពិសោធន៍បណ្ដុះកូនប៉េងប៉ោះដោយប្រើជីគីមីក្នុងរយៈពេលមួយអាទិត្យ បម្រែបម្រួលកំពស់កូនប៉េងប៉ោះទទួលបានលទ្ធផលដូចខាងក្រោមៈ

កំពស់ (mm)	0-5	5-10	10-15	15-20	20-25	25-30	30-35
ចំនួនកូនប៉េងប៉ោះ f	3	15	72	15	90	36	8

គណនា Q_1, Q_3 និង D_1 ។

7. គេបានកត់ត្រា ចំនួនសៀវភៅដែលមាននៅតាមធ្នើចំនួន 40 ក្នុងបណ្ណាល័យមួយ។

ចំនួនសៀវភៅ	30-35	35-40	40-45	45-50	50-55	55-60
ចំនួនធ្នើ	4	6	10	13	5	3

គណនាមេដ្យាន និង L_{28}។

ដំណោះស្រាយ

1. គណនាកាទីលទាំងបី និងភាគរបំនៃសំណុំទិន្នន័យ:

ក. 1 3 5 5 7 0 8 2 2 4 4

ដំបូងគេត្រូវរៀបទិន្នន័យតាមលំដាប់កើនគឺ:

0 1 2 2 3 4 4 5 5 7 8 យើងបាន:

$+\ Q_1 =$ តម្លៃទី $\frac{1}{4}(n+1)$ ដែល $n=11$

$=$ តម្លៃទី $\frac{1}{4}(n+1) =$ តម្លៃទី3

ដូច្នេះ $\boxed{Q_1 = 2}$

$+\ Q_2 =$ តម្លៃទី $\frac{1}{2}(n+1) =$ តម្លៃទី 6

ដូច្នេះ $\boxed{Q_2 = 4}$

$+\ Q_3 =$ តម្លៃតួទី $\frac{3}{4}(n+1) =$ តម្លៃទី 9

ដូច្នេះ $\boxed{Q_3 = 5}$

+ $D_1 =$ តម្លៃតួទី $\frac{1}{10}(n+1) =$ តម្លៃទី 1.2

ដោយតួទី 1.2 នៅចន្លោះតួទី 1 និងតួទី 2 គេបាន:

$D_1 = \frac{0+1}{2} = \frac{1}{2}$ ដូច្នេះ $\boxed{D_1 = \frac{1}{2}}$

ខ. 7 10 22 2 0 8 12 13 18 21

ដំបូងគេត្រូវរៀបទិន្នន័យតាមលំដាប់កើនគឺ:

0 2 7 8 10 12 13 18 21 22, $n = 10$

គេបាន: $Q_1 =$ តម្លៃតួទី $\frac{1}{4}(n+1) =$ តម្លៃតួទី 2.75

ដោយតួទី 2.75 នៅចន្លោះតួទី 2 និងតួទី 3 គេបាន:

$$Q_1 = \frac{2+7}{2} = \frac{9}{2} = 4.5$$

ដូច្នេះ $\boxed{Q_1 = 4.5}$

+ $Q_2 =$ តម្លៃតួទី $\frac{1}{2}(n+1) =$ តម្លៃទី 5.5

ដោយតួទី 5.5 នៅចន្លោះតួទី 5 និងតួទី6 គេបាន:

$Q_2 = \frac{10+12}{2} = 11$ ដូច្នេះ $\boxed{Q_2 = 11}$

$+\ Q_3 =$ តម្លៃតួទី $\frac{3}{4}(n+1) =$ តម្លៃទី 8.25

ដោយតួទី 8.25 នៅចន្លោះតួទី 8 និងតួទី9 គេបាន:

$Q_3 = \frac{18+21}{2} = 19.5$ ដូច្នេះ $\boxed{Q_3 = 19.5}$

$+\ D_1 =$ តម្លៃតួទី $\frac{1}{10}(n+1) =$ តម្លៃទី 1.1

ដោយតួទី 1.1 នៅចន្លោះតួទី 1 និងតួទី 2 គេបាន:

$D_1 = \frac{0+2}{2} = 1$ ដូច្នេះ $\boxed{D_1 = 1}$

2\. គណនាកាទីលទីមួយ Q_1 និងកាទីលទីបី Q_3 និង L_{68}

ក. 0 2 4 4 5 7 8 10 13 14 16 18

គេបាន: $Q_1 =$ តម្លៃតួទី $\frac{1}{4}(n+1), n = 12$

$=$ តម្លៃទី $\frac{1}{4}(n+1) =$ តម្លៃទី 3.25

$\Rightarrow Q_1 = \frac{4+4}{2} = \frac{8}{2} = 4$ ដូច្នេះ $\boxed{Q_1 = 4}$

$+\ Q_3 =$ តម្លៃតួទី $\frac{3}{4}(n+1) =$ តម្លៃទី 9.75

$\Rightarrow Q_3 = \frac{13+14}{2} = 13.5$ ដូច្នេះ $\boxed{Q_3 = 13.5}$

+ $L_{68} =$ តម្លៃតួទី $\frac{68}{100}(n+1) =$ តម្លៃតួទី 8.84

$\Rightarrow L_{68} = \frac{10+13}{2} = 11.5$ ដូចនេះ $\boxed{L_{68} = 11.5}$

ខ. $0.0078; 0.32; 0.4; 0.45; 0.65; 0.7; 0.78; 1.9, n = 8$

+ $Q_1 =$ តម្លៃតួទី $\frac{1}{4}(8+1) =$ តម្លៃតួទី 2.25

$\Rightarrow Q_1 = \frac{0.32+0.4}{2} = 0.36$ ដូច្នេះ $\boxed{Q_1 = 0.36}$

+ $Q_3 =$ តម្លៃតួទី $\frac{3}{4}(8+1) =$ តម្លៃទី 6.75

$\Rightarrow Q_3 = \frac{0.7+0.78}{2} = 0.74$ ដូច្នេះ $\boxed{Q_3 = 0.74}$

+ $L_{68} =$ តម្លៃតួទី $\frac{68}{100}(8+1) =$ តម្លៃតួទី 6.12

ដូចនេះ $\boxed{L_{68} = 0.74}$

3. គណនាមេដ្យាន Q_1, Q_3 និង L_{63} នៃៈ

ក. សង់តារាងប្រេកង់កើន

x	f	f ↗
4	12	12
5	9	21
6	8	29
7	13	42
8	9	51
9	9	60

យើងបាន: $(n = 60)$

+ មេដ្យាន = តម្លៃតួទី $\frac{1}{2}(60+1) =$ តម្លៃតួទី 30.5

ដូច្នេះ មេដ្យានស្មើនឹង 7

+ $Q_1 =$ តម្លៃតួទី $\frac{1}{4}(60+1) =$ តម្លៃតួទី 15.25

ដូច្នេះ $Q_1 = 5$

+ $Q_3 =$ តម្លៃតួទី $\frac{3}{4}(60+1) =$ តម្លៃទី 45.75

ដូច្នេះ $Q_3 = 8$

+ $L_{63} =$ តម្លៃតួទី $\frac{63}{100}(60+1) =$ តម្លៃតួទី 38.43

ដូចនេះ $L_{63} = 7$

ខ. សង់តារាងប្រេកង់កើន:

x	f	f ↗
12	3	3
13	9	12
14	11	23
15	15	38
16	7	45

យើងបាន: $(n = 45)$

+ មេដ្យាន $=$ តម្លៃតួទី $\frac{1}{2}(45+1)=$ តម្លៃតួទី 23

ដូច្នេះ **មេដ្យានស្មើនឹង 14**

+ $Q_1 =$ តម្លៃតួទី $\frac{1}{4}(45+1)=$ តម្លៃតួទី 11.5

ដូច្នេះ $\boxed{Q_1 = 13}$

+ $Q_3 =$ តម្លៃតួទី $\frac{3}{4}(45+1)=$ តម្លៃទី 34.5

ដូច្នេះ $\boxed{Q_3 = 15}$

+ $L_{63} =$ តម្លៃតទី $\frac{63}{100}(45+1)=$ តម្លៃតួទី 28.98

ដូចនេះ $\boxed{L_{63} = 15}$

4. គណនា Q_2 និង D_1

សង់តារាងប្រេកង់កើននៃទិន្នន័យ:

x	f	$f\nearrow$
1	12	12
2	9	21
3	8	29
4	13	42
5	9	51
6	9	60

យើងបាន: $(n=60)$

+ $Q_2 =$ តម្លៃតួទី $\frac{1}{2}(60+1)=$ តម្លៃតួទី 30.5

$\boxed{\Rightarrow Q_2 = 1}$

$+\ D_1 =$ តម្លៃតួទី $\frac{1}{10}(60+1) =$ តម្លៃតួទី 6.1

ដូច្នេះ $\boxed{D_1 = 1}$

5. ក. គណនាតម្លៃមធ្យមក្នុងសៀវភៅ 1 ក្បាល

បង្កើតតារាងប្រេកង់កើន:

តម្លៃសៀវភៅ x	ចំនួនសៀវភៅ f	$f^{\nearrow}$
\$7	4	4
\$8	6	10
\$10	4	14
\$15	9	23
\$22	2	25

តាង $\overline{X}$ ជាតម្លៃមធ្យមក្នុងសៀវភៅ 1 ក្បាល

$$\overline{X} = \frac{(7\times4)+(8\times6)+(10\times4)+(15\times9)+(22\times2)}{25}$$

$$= \frac{28+48+40+135+44}{25} = 11.8$$

ដូចនេះ $\boxed{\overline{X} = 11.8\$}$

ខ. គណនា Q_1, Q_2, Q_3 និង L_{32} $(n = 25)$

$+\ Q_1 =$ តម្លៃតួទី $\frac{1}{4}(25+1) =$ តម្លៃទី 6.5

ដូច្នេះ $\boxed{Q_1 = \$8}$

+ $Q_2 =$ តម្លៃតួទី $\frac{1}{2}(25+1) =$ តម្លៃទី 13

ដូចនេះ $\boxed{Q_2 = \$10}$

+ $Q_3 =$ តម្លៃតួទី $\frac{3}{4}(25+1) =$ តម្លៃទី 19.5

ដូច្នេះ $\boxed{Q_3 = \$15}$

+ $L_{32} =$ តម្លៃតួទី $\frac{32}{100}(25+1) =$ តម្លៃតួទី 8.32

ដូចនេះ $\boxed{L_{32} = \$8}$

6. គណនា Q_1, Q_3 និង D_1

បង្កើតតារាងប្រេកង់កើន

កំពស់ (mm)	ចំនួនកូនប៉េងពោះ f	$f \nearrow$
0-5	3	3
5 - 10	15	18
10 - 15	72	90
15 - 20	15	105
20 - 25	90	195
25 - 30	36	231
30 - 35	8	239

ចំពោះ Q_1 និង Q_3 យើងអនុវត្តន៍រូបមន្ត:

+ $Q_1 = L + \frac{\frac{1}{4}n - f^{\uparrow}}{f} \times i$ ដែល $n = 239$

ដែល $Q_1 =$ តម្លៃតួទី $\frac{1}{4}n =$ តម្លៃតួទី 59.75

$\Rightarrow Q_1$ ស្ថិតនៅចន្លោះ 10 – 15 យើងបាន:

$$Q_1 = 10 + \frac{59.75 - 18}{72} \times 5 = 12.89$$

ដូចនេះ: $\boxed{Q_1 = 12.89mm}$

$+ \ Q_3 = L + \frac{\frac{3}{4}n - f^{\uparrow}}{f} \times i$ ដែល $\frac{3}{4}n = 179.25$

$\Rightarrow Q_3$ ស្ថិតរនៅថ្នាក់ 20 – 25

$$\Rightarrow Q_3 = 20 + \frac{179.25 - 105}{90} \times 5 = 24.125$$

ដូចនេះ: $\boxed{Q_3 = 24.125}$

$+ \ D_1 = L + \frac{\frac{1}{10}n - f^{\uparrow}}{f} \times i$ ដែល $\frac{1}{10}n = 23.9$

$\Rightarrow D_1$ ស្ថិតនៅថ្នាក់ 10 – 15

$$\Rightarrow D_1 = 10 + \frac{23.9 - 18}{72} \times 5 = 10.40mm$$

ដូចនេះ: $\boxed{D_1 = 10.40mm}$

7. គណនមេដ្យាន និង L_{28}

បង្កើតតារាងប្រេកង់កើន:

ចំនួនសៀវភៅ	ចំនួនថ្ងៃ	$f^{\uparrow}$
30-35	4	4
35-40	6	10
40-45	10	20
45-50	13	33
50 55	5	38
55-60	2	40

យើងបាន: $(n=40)$

មេដ្យាន $= L + \dfrac{\frac{1}{2}n - f^{\uparrow}}{f} \times i$

យើងដឹងថា មេដ្យាន = តម្លៃតួទី $\frac{1}{2}n$ = តម្លៃតួទី 20

ដូច្នេះ មេដ្យានស្ថិតនៅថ្នាក់ 40 – 45

អោយ មេដ្យាន $= 40 + \dfrac{20+10}{10} \times 5 = 45$

ដូចនេះ **មេដ្យានស្មើនឹង 45**

$$L_{28} = L + \frac{\frac{28}{100}n - f^{\uparrow}}{f} \times i$$

យើងដឹងថា L_{28} = តម្លៃតួទី $\dfrac{28}{100}n$ = តម្លៃតួទី 11.2

ដូច្នេះ L_{28} ស្ថិតនៅថ្នាក់ 40 -45

$$\Rightarrow L_{28} = 40 + \frac{11.2-10}{10} \times 5 = 40.6$$

ដូចនេះ $\boxed{L_{28} = 40.6}$

<u>មេរៀនទី២</u>

រង្វាស់នៃគំលាត

<u>លំហាត់</u>

1. គណនាវ៉ង់ និងចន្លោះអាំងទែកាទីលនៃសំណុំទិន្នន័យខាងក្រោម៖

ក. 5 16 9 8 6 10 12 10 8 6

ខ.

x	3	4	5	6	7	8	9
f	5	2	7	9	4	10	5

2. ប្រាក់ចំណូលប្រចាំសប្តាហ៍(គិតជាដុល្លារ) របស់អ្នកដឹកនាំថ្នាក់កណ្តាលក្នុងក្រុមហ៊ុនមួយមាន 52 56 58 65 68 65 75 70។ ដោយសន្មតថាទិន្នន័យទាំងនេះជាសកលស្ថិតិ 1

ក. គណនាវ៉ង់ ខ. គណនាវ៉ារ្យង់សកលស្ថិតិ និងគំលាតស្តង់ដាសកលស្ថិតិ។

3. ពូសែ និងពូសុខជាឈ្មួញទិញជ្រូកដូចគ្នា។ ឈ្មួញទាំងពីរទិញជ្រូកម្នាក់ 10 ក្បាល ដែលជ្រូកនីមួយៗមានម៉ាស

ម៉ាសជ្រូកពូសែ (គិតជាKg)	70	92	102	98	105	35	39	39	40	60
ម៉ាសជ្រូកពូសុខ (គិតជាKg)	63	63	65	71	72	74	40	58	80	94

ក. គណនាវ៉ារ្យង់ (ស្ថិតិសកល)

ខ. តើឈ្មួញមួយណាទិញជ្រូកបានម៉ាសស្មើសាច់ជាង ?

4. គេមានទិន្នន័យ a b 8 5 7 (ជាស្ថិតិសកល) ដែលមានតម្លៃមធ្យមស្មើនឹង 6 និងវ៉ារ្យង់ស្មើនឹង 2 ។ គណនាតំលៃ a និង b បើ $a>b$ ។

5. បំណែងចែកប្រេកង់ខាងក្រោម ជាបំលែងចែកម៉ាស (kg) ជ្រូកចំនួន 40 ក្បាលក្នុងកសិដ្ឋានមួយ

ម៉ាស (kg)	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70
ចំនួនជ្រូក f_i	5	[illegible]	10	11	6

ក. គណនាវ៉ង់ ខ. គណនាមធ្យម គ. គណនាគំលាតស្តង់ដា

ដំណោះស្រាយ

1. គណនាវ៉ង់ និងចន្លោះអាំងទែកាទីលៈ

ក. 5 16 9 8 6 10 12 10 8 6

រៀបទិន្នន័យតាមលំដាប់កើនៈ

5 6 6 8 8 9 10 10 12 16

យើងបានៈ វ៉ង់ $\boxed{=16-5=11}$

+ $I=Q_3-Q_1$ ដែល $n=10$

$Q_3=$ តម្លៃតួទី $\frac{3}{4}(n+1)=$ តម្លៃទី 8.25

$$\Rightarrow Q_3 = \frac{10+12}{2} = 11$$

$Q_1 =$ តម្លៃតួទី $\frac{1}{4}(10+1) =$ តម្លៃតួទី 2.75

$$\Rightarrow Q_1 = \frac{6+6}{2} = 6$$

យើងបាន: $\boxed{I = 11-6 = 5}$

ខ. បង្កើតតារាងប្រេកង់កើន:

x	f	f ↗
3	5	5
4	2	7
5	7	14
6	9	23
7	4	27
8	10	37
9	5	42

+ វ៉ $= 9-3 = 6$

+ $I = Q_3 - Q_1$ ដែល

$Q_3 =$ តម្លៃតួទី $\frac{3}{4}(42+1) =$ តម្លៃតួទី32.25

ដូច្នេះ $\boxed{Q_3 = 8}$

$Q_1 =$ តម្លៃតួទី $\frac{1}{4}(42+1) =$ តម្លៃតួទី 10.75

ដូច្នេះ $\boxed{Q_1 = 5}$

$\Rightarrow I = 8-5 = 3$

2.ក. វ៉ង់ $= 75-52 = 23$

ខ. តាមរូបមន្ត $\sigma^2 = \frac{\sum (Xi-\mu)^2}{N}$ ដែល

$$\mu = \frac{\sum Xi}{N} = \frac{52+56+58+65+68+65+75+70}{8}$$

$= 63.6$

$Xi - \mu$	$(Xi - \mu)^2$
52-63.5=-11.6	134.56
56-63.6=-7.6	57.76
58-63.6=-5.6	31.36
65-63.6=1.4	1.96
68-63.6=4.4	19.36
65-63.6=1.4	1.36
75-63.6=11.4	129.96
70-63.6=6.4	40.96
	$\sum (Xi-\mu)^2 = 417.68$

ដូចនេះ $\boxed{\sigma^2 = \frac{417.68}{8} = 52.21}$

$\Rightarrow \sigma = \sqrt{52.21} = 7.22$

3. ក. គណនាវ៉ារ្យង់ (ស្ថិតិសកល)

តាមរូបមន្ត:

$$\sigma^2 = \frac{\sum (Xi-\mu)^2}{N}$$

ដែល $\mu_2 = \frac{\sum Xi}{N} = 68$

$$\mu_1 = \frac{\sum Xi}{N} = 68$$

ជ្រូកសុខ(kg)	$X_i-\mu_1$	$(X_i-\mu_1)^2$	ជ្រូកវែង	$X_i-\mu_2$	$(X_i-\mu_2)^2$
63	-5	25	70	2	4
63	-5	25	92	24	576
65	-3	9	102	34	1156
71	3	9	98	30	900
72	4	16	105	37	1369
74	6	36	35	-33	1089
40	-28	784	39	-29	841
58	-10	100	39	-29	841
80	12	144	40	-28	784
94	26	676	60	-8	64
		$\sum(X_i-\mu_1)^2=1824$			$\sum(X_i-\mu_2)^2=7624$

យើងបាន: $\sigma_1^2=\dfrac{1824}{10}=182.4$

$$\sigma_2^2=\frac{7624}{10}=762.4$$

ខ. ដោយ $\sigma_2^2<\sigma_2^2$ នោះពូសុខទិញជ្រូកបានម៉ាស ស្មើសាច់ជាង ,

4. គណនាតំលៃ a និង b

យើងមាន: $\mu=\dfrac{a+b+8+5+7}{5}$ តែ $\mu=6$

$$\Rightarrow \frac{a+b+20}{50}=6 \Leftrightarrow a+b=10 \quad (1)$$

ម្យ៉ាងទៀត $\dfrac{\sum X_i^2}{N}-\mu^2=\sigma^2$ តែ $\sigma^2=2$

$$\Rightarrow \frac{a^2+b^2+8^2+5^2+7^2}{5}-6^2=2$$

$$\Rightarrow \frac{a^2+b^2+138-180}{5}=2$$

$$\Rightarrow a^2+b^2-42=10 \Leftrightarrow a^2+b^2=52 \quad (2)$$

(1) គេទាញបាន: $a=10-b$ ជំនួស (2) គេបាន:

$$(10-b)^2+b^2=52 \Leftrightarrow 2b^2-20b+48=0$$

$$\Rightarrow b^2-10b+24=0$$

$$\Delta'=25-24=1 \Rightarrow b_1=6, b_2=4$$

ចំពោះ: $b=6 \Rightarrow a=4$

ចំពោះ: $b=4 \Rightarrow a=6$

ដោយ $a>b$ នោះ: $\boxed{a=6,\ b=4}$

. ការវង់ $=70-20=50$

ខ. គណនាមធ្យម $\overline{X}$

[illegible](kg)	$X_i - \mu_1$	$(X_i - \mu_1)^2$	[illegible]	$X_i - \mu$	$(X_i - \mu)^2$
63	-5	25	70	2	4
63	-5	25	92	24	576
65	-3	9	102	34	1156
71	3	9	96	30	900
72	4	16	105	37	1369
74	6	36	75	-33	1089
40	-28	784	39	-29	841
58	-10	100	39	-29	841
80	12	144	40	-28	784
94	26	676	60	-8	64
		$\sum(X_i-\mu_1)^2 = 182$[illegible]			$\sum(X_i-\mu_1)^2 = 7624$

$$\overline{X} = \frac{\sum f_i X_i}{\sum f_i} = \frac{1850}{40} = 46.25$$

គ. គណនាគំលាតស្តង់ដារៈ

$$S = \sqrt{\frac{\sum f_i X_i^2}{\sum f_i} - \overline{X}^2} = \sqrt{\frac{91800}{40} - (46.25)^2}$$

$$= \sqrt{2295 - 2139.0625} = \sqrt{155.93}$$

$$\boxed{S = 12.49}$$

មេរៀនទី៣

បំរែលងបែកនរ៉ម៉ាល់

លំហាត់

1. បំរែលងចែកនរ៉ម៉ាល់មួយមានមធ្យមស្មើនឹង 80 និងមានគំលាតស្មើនឹង 14 ។

ក. គណនាជាភាគរយនៃទិន្នន័យដែលស្ថិតនៅ

ចន្លោះ 75 និង 90 ។

ខ. គណនាជាភាគរយនៃទិន្នន័យដែលតិចជាង 75

គ. គណនាជាភាគរយនៃទិន្នន័យដែលនៅចន្លោះ 55និង 70

2. បើ z តាងបំណែងចែកន័រម៉ាល់ ដែលមានមធ្យមស្មើនឹង 0 និងគំលាតស្តង់ដាស្មើនឹង 1 ។

គណនាតម្លៃ a បើ

ក. ភាគរយដែល $(z < a) = 96.93\%$

ខ. ភាគរយដែល $(z > a) = 88.49\%$ ។

3. កម្ពស់ក្មេងប្រុសមួយក្រុមដែលមានអាយុ15 ឆ្នាំជាបំណែងចែកន័រម៉ាល់មានមធ្យមស្មើនឹង $150.3cm$ និងគំលាតស្តង់ដាស្មើនឹង $5cm$ ។ គណនាជាភាគរយដែលគេជ្រើសរើសដោយចៃដន្យបានក្មេងម្នាក់កម្ពស់: ក. តិចជាង $153cm$

ខ. ច្រើនជាង $158cm$ គ. នៅចន្លោះ $147cm$ និង $149cm$

ឃ. នៅចន្លោះ $150cm$ និង $158cm$ ។

4. កម្ពស់ដើមផ្កាក្នុងសួនមួយកន្លែងជាបំណែងចែកន័រម៉ាល់ដែលមានមធ្យមស្មើនឹង μ និងមានគំលាតស្មើនឹង $6cm$ ។ គេដឹងថាមាន 4.78% នៃដើមផ្កាទាំងអស់មានកម្ពស់ខ្ពស់ ជាង $82cm$ ។ គណនាតម្លៃនៃ μ ។

ដំណោះស្រាយ

1. បំណែងចែកនរម៉ាល់មួយមាន $\mu = 80$ និង $\sigma = 14$ ។

ក. គណនាជាភាគរយនៃទិន្នន័យដែលស្ថិតនៅចន្លោះ 75និង90

ភាគរយដែល $(75 < X < 90) =$

ភាគរយដែល$\left(\frac{75-80}{14} < Z < \frac{90-80}{14}\right)$

$=$ភាគរយដែល $(-0.36 < Z < 0.71)$

$= 0.1406 + 0.2611 = 0.4017 = \boxed{40.17\%}$

ខ. គណនាជាភាគរយនៃទិន្នន័យដែលតិចជាង 75

ភាគរយដែល $(X < 75)$ = ភាគរយដែល $(Z < -0.36)$

$= 0.5 - 0.1406 = 0.3594 = \boxed{35.94\%}$

គ. គណនាជាភាគរយនៃទិន្នន័យដែលស្ថិតនៅចន្លោះ 55និង70

ភាគរយដែល $(55 < X < 70) =$ ភាគរយដែល

$\left(\frac{55-80}{14} < Z < \frac{70-80}{14}\right) =$ ភាគរយដែល

$(-0.79 < Z < -0.2611) = 0.4633 - 0.2611$

$= 0.2022 = \boxed{20.22\%}$

2. គណនាតម្លៃ a បើ:

ក. ភាគរយដែល

$(z<a)=96.93\% \Leftrightarrow 0.5+a=0.9693$

$\Leftrightarrow a=0.9693-0.5=0.4693$

តាមតារាងក្រលាផ្ទៃស្ថិតនៅក្រោមខ្សែកោងន័រម៉ាល់

គេបាន $\boxed{a=1.87}$

ខ. ភាគរយដែល $(z>a)=88.49\%$

$\Leftrightarrow 0.5-a=0.8849 \Leftrightarrow -a=0.3849$

តាមតារាងក្រលាផ្ទៃស្ថិតនៅក្រោមខ្សែកោងន័រម៉ាល់

គេបាន $-a=1.2$ រឺ $\boxed{a=-1.2}$

3. គណនាជាភាគរយដែលគេជ្រើសរើសដោយចៃដន្យបានក្មេងប្រុសម្នាក់កំពស់:

ក. តិចជាង $153cm$ យើងមាន:

ភាគរយដែល $(z<0.153)=$ ភាគរយដែល

$$\left(z>\frac{153-150.3}{5}\right)$$

$=$ ភាគរយដែល $(z<0.54)=0.5+0.2054$

$=0.7054=\boxed{70.54\%}$

ខ. ច្រើនជាង $158cm$ យើងមាន:

ភាគរយដែល $(z > 158)$ = ភាគរយដែល

$\left(z < \frac{158-150.3}{5}\right)$ = ភាគរយដែល $(z > 1.54)$

$= 0.5 - 0.4382 = 0.0618 = 6.18\%$

គ. នៅចន្លោះ $147cm$ និង $149.5cm$

ភាគរយដែល $(147 < X < 149.5)$

= ភាគរយដែល $\left(\frac{147-150.3}{5} < z < \frac{149.5-150.3}{5}\right)$

= ភាគរយដែល $(-0.66 < X < -0.16)$

$= 0.2454 - 0.0636 = 0.1818 = 18.18\%$

ឃ. នៅចន្លោះ $150cm$ និង $158cm$

ភាគរយដែល $(150 < X < 158)$

= ភាគរយដែល $\left(\frac{150-150.3}{5} < z < \frac{158-150.3}{5}\right)$

= ភាគរយដែល $(-0.06 < z < 1.54)$

$= 0.4382 + 0.0239 = 0.4621 = 46.21\%$

4. គណនាតម្លៃនៃ μ យើងមាន:

ភាគរយដែល $\left(z > \frac{82-\mu}{6}\right) = 4.78\%$

$$\Leftrightarrow 0.5-\frac{82-\mu}{6}=0.0478 \Leftrightarrow 0.5-0.0478$$

$$=\frac{82-\mu}{6} \Leftrightarrow 0.4522=\frac{82-\mu}{6} \Leftrightarrow 1.67=\frac{82-\mu}{6}$$

$$\Leftrightarrow 10.02-82=-\mu \Leftrightarrow -71.98=-\mu \text{ រឺ}$$

$$\boxed{\mu = 71.98cm}$$

លំហាត់ជំពូក

1. គេមានសំណុំទិន្នន័យខាងក្រោម។ គណនាកាទីលទាំងបីភាគដប និង L_{35}

ក. 4 8 3 6 7 10 11 18 15 19 20។

ខ.

x	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
f	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]

2. អ្នកទេសចរណ៍ជនជាតិជប៉ុន ដែលធ្វើដំណើរតាមយន្តហោះមកព្រះរាជាណាចក្រកម្ពុជាមានអាយុ
32 21 60 47 54 17 72 55 33 និង 41 ឆ្នាំ។

ក. គណនារ៉ង់។ ខ. គណនាចន្លោះអាំងទែកាទីល។

គ. គណនាគំលាតស្តង់ដា។

3. ប្រាក់ចំណូលប្រចាំសប្តាហ៍របស់នាយករង 5 នាក់ក្នុងក្រុមហ៊ុនមួយនោះមាន $30 $35 $50 $42 និង $40 ដោយគិតថាទិន្នន័យជាសកលស្ថិតិ។

ក. គណនាវ៉ារ្យង់។ ខ. គណនាគំលាតស្តង់ដា។

4. ពិន្ទុនៃការធ្វើតេស្តសិស្សចំនួន60នាក់លើមុខវិជ្ជាគណិតវិទ្យាបានបង្ហាញដូចតារាងខាងក្រោម:

ពិន្ទុ	100-105	105-110	110-115	115-120	120-125
ចំនួនសិស្ស f	8	13	25	11	4

ក. គណនាវ៉ង់ ខ. គណនា Q_1 និង Q_3

គ. គណនាភាគដប់ និង L_{36}

ឃ. គណនាវ៉ារ្យង់ និង គំលាតស្តង់ដា។

5. តារាងខាងក្រោម ជាបំណែងចែកប្រេកង់រយៈពេលសម្រាប់ដោះស្រាយចំណោទរបស់សិស្ស30 នាក់ងាយមួយ។

រយៈពេល(គិតជាវិនាទី)	10-15	[illegible]0-20	20-25	25-40	40-45
ចំនួនសិស្ស f	8	13	24	[illegible]	4

ក. គណនាម៉ូត ខ. គណនាមធ្យម

គ. គណនាគំលាតស្តង់ដា ឃ. រកមេគុណនៃភាពទេរ។

6. គេមានបំណែងចែកប្រេកង់ខាងក្រោម:

x_i	20	21	22	23	24	25	26	27	28	30	31
f	20	30	33	31	20	18	12	10	5	3	2

ក. គណនាម៉ូត។ ខ. គណនាគំលាតស្តង់ដា។

គ. រកមេគុណនៃភាពទេរ រួចធ្វើការវិនិច្ឆ័យ។

7. បើ z តាមបំណែងចែកន័រម៉ាល់ ដែលមានមធ្យមស្មើនឹង 0 និងវ៉ារ្យង់ស្មើនឹង1 ។ គណនាតម្លៃ a

បើ ក. ភាគរយដែល $(Z > a) = 34.09\%$

ខ. ភាគរយដែល $(Z < a) = 7.93\%$ ។

8. ល្បឿនរថយន្តឆ្លងកាត់ចំណុចត្រួតពិនិត្យមួយ ជាបំណែងចែកន័រម៉ាល់។ ការអង្កេតបានបង្ហាញថារថយន្តដែលឆ្លងកាត់ការអង្កេតមាន 95% មានល្បឿនតិចជាង $85km/h$ និងល្បឿនតិចជាង $55km/h$ ។

ក. គណនាល្បឿនមធ្យមនៃរថយន្តដែលឆ្លងកាត់ចំណុចត្រួតពិនិត្យ

ខ. រកភាគរយល្បឿនរថយន្តដែលបើកបរលើសពី $70km/h$

9. គេដឹងថា ទិន្នន័យ X ជាបំណែងចែកន័រម៉ាល់ដែលមានមធ្យមស្មើនឹង μ និងវ៉ារ្យង់ស្មើនឹង σ^2 ម្យ៉ាងទៀតភាគរយ ដែល $(x > 51) = 1.13\%$ និងភាគរយដែល $(x > 30) = 97.13\%$ ។ គណនា μ និង σ ។

ដំណោះស្រាយជំពូក

1. គណនាកាទីលទាំងបី ភាគដប់និង L_{35}

ក. 4 8 3 ៦ 7 10 11 1៨ 15 19 20

តម្រៀបទិន្នន័យតាមលំដាប់កើន $(n=11)$

3 4 6 7 8 10 11 15 18 19 20

យើងបាន:

$+\ Q_1 =$ តម្លៃតួទី $\frac{1}{4}(11+1) =$ តម្លៃតួទី 3

ដូច្នេះ $\boxed{Q_1 = 6}$

$+\ Q_2 =$ តម្លៃតួទី $\frac{1}{2}(11+1) =$ តម្លៃតួទី 6

ដូច្នេះ $\boxed{Q_1 = 10}$

$+\ Q_3 =$ តម្លៃតួទី $\frac{3}{4}(11+1) =$ តម្លៃតួទី 9

ដូច្នេះ $\boxed{Q_1 = 18}$

$+\ D_1 =$ តម្លៃតួទី $\frac{1}{10}(11+1) =$ តម្លៃតួទី 1.2

ដូច្នេះ $D_1 = \frac{3+4}{2} = \boxed{3.5}$

$+\ L_{35} =$ តម្លៃតួទី $\frac{35}{100}(11+1) =$ តម្លៃតួទី 4.2

ដូចនេះ $L_{35} = \frac{7+8}{2} = \boxed{7.5}$

ខ. បង្កើតតារាងប្រេកង់កើន

x	f	$f^{\uparrow}$
7	2	2
8	5	7
9	4	11
11	12	23
13	11	34
15	9	43
19	7	50
20	3	53

យើងបាន: $(n=53)$

\+ $Q_1 =$ តម្លៃតួទី $\frac{1}{4}(53+1) =$ តម្លៃតួទី 13.5

ដូច្នេះ: $\boxed{Q_1 = 11}$

\+ $Q_2 =$ តម្លៃតួទី $\frac{1}{2}(53+1) =$ តម្លៃតួទី 27

ដូច្នេះ: $\boxed{Q_1 = 13}$

\+ $Q_3 =$ តម្លៃតួទី $\frac{3}{4}(53+1) =$ តម្លៃតួទី 40.5

ដូច្នេះ: $\boxed{Q_1 = 15}$

\+ $D_1 =$ តម្លៃតួទី $\frac{1}{10}(53+1) =$ តម្លៃតួទី 5.4

ដូច្នេះ: $\boxed{D_1 = 8}$

+ $L_{35} =$ តម្លៃតួទី $\frac{35}{100}(53+1) =$ តម្លៃតួទី 18.9

ដូចនេះ $\boxed{L_{35} = 11}$

2. ក. វិង់ $= 72 - 17 = \boxed{55}$

ខ. គណនាចន្លោះអាំងទែកាទីល

តម្រៀបទិន្នន័យតាមលំដាប់កើន:

17 21 32 33 41 47 54 55 60 72

យើងមាន: $I = Q_3 - Q_1$ ដែល $(n = 10)$

$Q_3 =$ តម្លៃតួទី $\frac{3}{4}(10+1) =$ តម្លៃតួទី 8.25

ដូច្នេះ $Q_3 = \frac{55+60}{2} = \boxed{57.5}$

យើងបាន: $I = 57.5 - 26.5 = \boxed{31}$

គ. គណនាគំលាតស្តង់ដា

+ គំលាតវ៉ារ្យង់ $\sigma^2 = \frac{\sum (X_i - \mu)^2}{N}$, $\mu = 43.2$

បង្កើតតារាង:

Xi	$Xi-\mu$	$(X_i-\mu)^2$
17	-26.2	686.44
21	-22.2	492.84
32	-11.2	125.44
33	-10.2	104.04
41	-2.2	4.84
47	3.8	14.44
54	10.8	116.64
55	11.8	139.24
60	16.8	282.24
72	28.8	829.44
		$\sum(X_i-\mu)^2=2795.56$

យើងបាន: $\sigma^2=\dfrac{2795.56}{10}=279.556$

$\Rightarrow \sigma=\sqrt{279.556}=\boxed{16.72}$

3. ក. គណនាវ៉ារ្យង់

តាមរូបមន្តវ៉ារ្យង់ $\sigma^2=\dfrac{\sum(X_i-\mu)^2}{N}$

ដែល $\mu=\dfrac{30+35+50+42+40}{5}=39.4$

បង្កើតតារាង:

Xi	$Xi-\mu$	$(X_i-\mu)^2$
30	-9.4	88.36
35	-4.4	19.36
50	10.6	112.36
42	2.6	6.76
40	0.6	0.36
		$\sum(Xi-\mu)^2=227.2$

$$\Rightarrow \sigma^2 = \frac{227.2}{5} = \boxed{45.44}$$

ខ. គណនាគំលាតស្តង់ដា

$$\sigma = \sqrt{45.44} = \boxed{6.74}$$

4. ក. គណនារ៉ង់ $= 125 - 100 = \boxed{25}$

ខ. គណនា Q_1 និង Q_3

បង្កើតតារាងប្រេកង់កើន:

ពិន្ទុ	ចំនួនសិស្ស f	$f^{\uparrow}$
100-105	8	8
105-110	13	21
110-115	25	46
115-120	11	57
120-125	4	61

យើងបាន: $(n = 61)$

$$+\ Q_1 = L + \frac{\frac{1}{4}n - f^{\uparrow}}{f} \times i \text{ តែ } Q_1 = \text{តម្លៃតួទី } \frac{61}{4}$$

$Q_1 =$ តម្លៃតួទី 15.25 តាមតារាងប្រេកង់កើន

តួទី 15.25 ស្ថិតនៅថ្នាក់ $105 - 110$

$$\Rightarrow Q_1 = 105 + \frac{15.25 - 8}{13} \times 5 = \boxed{107.78}$$

$$+\ Q_3 = L + \frac{\frac{3}{4}n - f^{\uparrow}}{f} \times i \text{ តែ}$$

$Q_3 =$ តម្លៃតួទី $\frac{3}{4}n =$ តម្លៃតួទី 45.75

តួទី 45.75 ស្ថិតនៅចន្លោះ 110−115

$$\Rightarrow Q_3 = 110 + \frac{45.75-21}{25} \times 5 = \boxed{114.95}$$

គ. គណនាភាគដប់និង L_{36}

+ $D_1 = L + \frac{\frac{1}{10}n - f^{\uparrow}}{f} \times i$ តែ

$D_1 =$ តម្លៃតួទី $\frac{61}{10} =$ តម្លៃតួទី6.1

D_1 ស្ថិតនៅចន្លោះ 100−105

$$\Rightarrow D_1 = 100 + \frac{6.1-0}{8} \times 5 = \boxed{103.81}$$

+ $L_{36} = L + \frac{\frac{36}{100}n - f^{\uparrow}}{f} \times i$ តែ

$L_{36} =$ តម្លៃតួទី $\frac{36}{100} \times 61 =$ តម្លៃតួទី 21.96

L_{36} ស្ថិតនៅចន្លោះ 110−115

$$\Rightarrow L_{36} = 110 + \frac{21.96-21}{25} \times 5 = \boxed{110.19}$$

ឃ. គណនាភ័រ្យង់និងតំណកតស្តង់ដា

$\boxed{S^2 = 28.9}$ និង $\boxed{S = 5.37}$

5. ក. គណនាម៉ូត $= \dfrac{20+25}{2} = 22.5$

ខ. គណនាមធ្យម $\overline{X}$

រយៈពេល	f_i	X_i	f_iX_i	X_i^2	$f_iX_i^2$
5-10	8	7.5	60	56.25	450
10-20	13	15	195	225	2925
20-25	24	22.5	540	506.25	12150
25-40	11	32.5	357.5	1055.25	11618.75
40-45	4	42.5	170	1806.25	7225
	$\sum f_i = 60$		$\sum f_iX_i = 1322.5$		$\sum f_iX_i^2 = 34368.75$

យើងបាន: $\overline{X} = \dfrac{\sum f_iX_i}{\sum f_i} = \dfrac{1322.5}{60} = \boxed{22.04}$

គ. គណនាគំលាតស្តង់ដា

យើងមាន: $S^2 = \dfrac{\sum f_iX_i}{\sum f_i} = \dfrac{34368.75}{60} = 572.81$

យើងបាន: $S = \sqrt{572.81} = \boxed{23.93}$

ឃ. រកមេគុណនៃភាពទេរ

6. ក. គណនាម៉ូត $= 22$

ខ. គណនាគំលាតស្តង់ដា

យើងមាន: $\sigma = \sqrt{\frac{\sum (X_i - \mu)^2}{N}}$

ដែល $\mu = 25.27$, $\sum (X_i - \mu)^2 = 136.15$, $N = 11$

$\Rightarrow \sigma = \sqrt{\frac{136.15}{11}} = \boxed{3.5}$

7. គណនាតម្លៃ a បើ:

ក. ភាគរយដែល $(z > a) = 34.09\%$

$\Leftrightarrow 0.5 - a = 0.3409 \Leftrightarrow a = 0.1591$

ដូច្នេះ $\boxed{a = 0.41}$

ខ. ភាគរយដែល $(z < a) = 7.93\%$

$\Leftrightarrow 0.5 + a = 0.0793 \Leftrightarrow a = -0.4207$

ដូច្នេះ $\boxed{a = -1.41}$

8. ក. គណនាល្បឿនមធ្យមនៃរថយន្តដែលឆ្លងកាត់ចំណុចត្រួតពិនិត្យ

តាមបំរាប់: $\begin{cases} \text{ភាគរយដែល } (X < 85) = 95\% \\ \text{ភាគរយដែល } (X > 55) = 95\% \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 85 - \mu = 0.45\sigma \\ -55 + \mu = 0.45\sigma \end{cases}$

ដោះស្រាយប្រព័ន្ធនេះ គេបាន $\boxed{\mu = 70km/h}$

ខ. រកភាគរយល្បឿនរថយន្តដែលបើកបរលើសពី $70km/h$

យើងបាន: ភាគរយដែល $(X > 70)$

$$= \text{ភាគរយដែល}\left(z > \frac{70-70}{33.33}\right)$$

$$= \text{ភាគរយដែល}(z > 0) = 0.5 = 50\%$$

ដូចនេះ:

> ភាគរយដែលរថយន្តបើកបរលើសពី $70km/h$
> មាន 50% នៃរថយន្តទាំងអស់។

9. គណនា μ និង σ

យើងមាន: $\begin{cases} \text{ភាគរយដែល } (X < 51) = 1.13\% \\ \text{ភាគរយដែល } (x > 30) = 97.13\% \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{ភាគរយដែល } \left(z > \frac{51-\mu}{\sigma}\right) = 0.0113 \\ \text{ភាគរយដែល } \left(z > \frac{30-\mu}{\sigma}\right) = 0.9713 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{51-\mu}{\sigma} = 0.5 - 0.0113 \\ \frac{30-\mu}{\sigma} = 0.5 - 0.9713 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 51-\mu = 2.28\sigma \\ 30-\mu = -1.9\sigma \end{cases}$$

ដោះស្រាយប្រព័ន្ធនេះ គេបាន: $\boxed{\mu = 39.54;\ \sigma = 5.02}$

បន្ថែម ជំពូកទី៦ និងទី៧

ជំពូក ៦ ប្រូបាប

លំហាត់

1. គេបោះកាក់មួយ និងគ្រាប់ឡុកឡាក់មួយគ្រាប់ព្រមគ្នា។ ចូរកំណត់ :

ក. សកម្មភាពដែលជាពិសោធន៍ចៃដន្យ និងជាវិញ្ញាសា

ខ. លំហាត់សំណាក S និងព្រឹត្តិការណ៍

A : "បោះកាក់ បានខាងរូប H"

B : "បោះគ្រាប់ឡុកឡាក់បានលេខ 4"

គ. រកប្រូបាបព្រឹត្តិការណ៍ផ្ទុកនឹង A ព្រឹត្តិការណ៍ផ្ទុយនឹង B និងព្រឹត្តិការណ៍ផលគុណ A និង B

2. គេហូតបៀរមួយសន្លឹកដោយចៃដន្យចេញពីហ៊ូបៀរ 52 សន្លឹក។ រកប្រូបាបដែលហូតបាន :

ក. សន្លឹកអាត់

ខ. សន្លឹកក្រហម

គ. សន្លឹកអាត់ ឬក្រហម

ឃ. មិនមែនអាត់ និងមិនមែនក្រហម

3. ថង់មួយមានឃ្លី 10 ចុះលេខពី 0 ដល់ 9។ គេចាប់យកឃ្លីមួយដោយចៃដន្យ។ ចូរកំណត់ :

ក. លំហសំណាក S និងព្រឹត្តិការណ៍

A : "ចាប់បានឃ្លីមានលេខជាពហុគុណនៃ 3"

A : "ចាប់បានឃ្លីមានលេខធំជាង 5"

ខ. រកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ A, B, $A \cap B$ និង $A \cup B$

4. ថង់មួយមានឃ្លីខៀវ 7 និងឃ្លីស 3។ គេចាប់យកឃ្លីម្តង 3 ដោយចៃដន្យតែម្តងគត់។ រកប្រូបាបដែលចាប់បាន :

ក. ឃ្លីខៀវ 2 និងឃ្លីស 1

ខ. ឃ្លីខៀវទាំង3

គ. ឃ្លីសទាំង 3

5. គេបោះគ្រាប់ឡុកឡាក់ 2 ព្រមគ្នាមួយពណ៌ខៀវ មួយ

ទៀតពណ៌ក្រហម។ រកប្រូបាបដែល ៖

ក. លេខចេញលើគ្រាប់ខៀវស្មើនឹង 2 ដងនៃលេខចេញលើគ្រាប់ក្រហម

ខ. ផលបូកលេខគ្រាប់ឡុកឡាក់ទាំង 2 ស្មើនឹង 5 ។

6. ក្នុងប្រអប់ ! មានក្រដាសបត់ជាសន្លឹកឆ្នោតចាប់យករង្វាន់។ សន្លឹកឆ្នោតមាន 20 សន្លឹកដែលឆ្នោតត្រូវរង្វាន់មាន 12 សន្លឹកសម្រាប់សិស្ស 20 នាក់ចាប់យកមួយសន្លឹកម្នាក់បន្តបន្ទាប់គ្នា ដើម្បីផ្សងមើលរង្វាន់រៀងៗខ្លួន។ សុខជាអ្នកចាប់បានមុនគេ បន្ទាប់សៅចាប់ទី 2 និងសនចាប់ទី 3 និងសិស្សឯទៀតចាប់ម្នាក់មួយបន្តបន្ទាប់គ្នារហូតអស់ឆ្នោត។ រកប្រូបាបដែល ៖

ក. សុខចាប់បានឆ្នោតត្រូវរង្វាន់

ខ. សៅចាប់បានឆ្នោតត្រូវរង្វាន់

គ. សនចាប់បានឆ្នោតត្រូវរង្វាន់

ឃ.តើអ្នកចាប់មុន និងអ្នកចាប់ក្រោយអ្នកណាមានសំណាងជាងអ្នកណា?

ចម្លើយ

១. ក. កំណត់សកម្មភាពដែលជាពិសោធន៍ចៃដន្យ និងជាវិញ្ញាសា :

- ពិសោធន៍ចៃដន្យ គឺសកម្មភាពបោះកាក់មួយ និងសកម្មភាពបោះគ្រាប់ឡុកឡាក់មួយ

- វិញ្ញាសាគឺ : សកម្មភាពបោះកាក់មួយ និងគ្រាប់ឡុកឡាក់មួយព្រមគ្នា

ខ. លំហសំណាក

$$S = \{(H;1);(H;2);(H;3);(H;4);(H;5);(H;6)$$
$$(T;1);(T;2);(T;3);(T;4);(T;5);(T;6)$$
$$(1;H);(2;H);(3;H);(4;H);(5;H);(6;H)$$
$$(1;T);(2;T);(3;T);(4;T);(5;T);(6;T)\}$$

ព្រឹត្តិការណ៍

$$A = \{(H;1);(H;2);(H;3);(H;4);(H;5);(H;6)$$
$$(1;H);(2;H);(3;H);(4;H);(5;H);(6;H)\}$$

$B = \{(4;H);(4;T);(H;4);(T;4)\}$

2. រកប្រូបាបដែលហូតបាន :

ក. សន្លឹកអាត់

ចំនួនករណីអាច $n(S) = C_{52}^{1} = 52$ ករណី

ចំនួនករណីស្រប $n(A) = C_{4}^{1} = 4$ ករណី

ដូចនេះ ប្រូបាបហូតបានសន្លឹកអាត់ 1 សន្លឹកគឺ :

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(B)} = \frac{4}{52} = \boxed{\frac{1}{13}}$$

ខ. សន្លឹកក្រហម

ចំនួនករណីស្រប $n(B) = C_{26}^{1} = 26$ ករណី

ដូចនេះ $P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{26}{52} = \boxed{\frac{1}{2}}$

គ. សន្លឹកអាត់ ឬក្រហម

ដោយ $n(A \cap B) = C_{2}^{1} = 2$ ករណី

នោះ $P(A \cap B) = \frac{2}{52} = \frac{1}{26}$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$$= \frac{1}{13} + \frac{1}{2} - \frac{1}{26} = \boxed{\frac{7}{13}}$$

ឃ. មិនមែនអាត់ និងមិនមែនក្រហម

គេបាន P (មិនមែនអាត់ និងមិនមែនក្រហម)

$$= \frac{24}{52} = \boxed{\frac{6}{13}}$$

3. កំណត់

ក. លំហសំណាក : $S = \{0;1;2;3;4;5;6;7;8;9\}$

ព្រឹត្តិការណ៍ $A = \{0;3;6;9\}$

$B = \{6;7;8;9\}$

ខ. រកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍

$$P(A) = \frac{4}{10} = \frac{2}{5} \text{ ; } P(B) = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$

$$P(A \cap B) = \frac{2}{10} = \frac{1}{5} \text{ ; } P(A \cup B) = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

4. រកប្រូបាប :

ក. ឃ្លីខៀវ 2 និងឃ្លីស ។

តាង A ព្រឹត្តិការណ៍ចាប់បានឃ្លីខៀវ 2 និងឃ្លីស ។

ចំនួនករណីអាច :

$$n(S) = C_{10}^{3} = \frac{10!}{3!(10-3)!} = 120$$ ករណី

ចំនួនករណីស្រប $n(A) = C_7^2 \times C_3^1 = 63$ ករណី

ដូចនេះ $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{63}{120} = \boxed{0.525}$

ខ.ឃ្លីខៀវទាំង 3 :

តាង B : ព្រឹត្តិការណ៍ចាប់បានឃ្លីខៀវទាំងបី

ចំនួនករណីស្រប $n(B) = C_7^3 = \frac{7!}{3!(7-3)!} = 35$

វកណី

ដូចនេះ $P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{35}{120} = \boxed{0.2916}$

គ. ឃ្លីសទាំងបី :

តាង C : ព្រឹត្តិការណ៍ចាប់បានឃ្លីសទាំងបី

ចំនួនករណីស្រប $n(C) = C_3^1 = 1$ ករណី

ដូចនេះ $P(C) = \frac{n(C)}{n(S)} = \boxed{\frac{1}{120}}$

5. រកប្រូបាបដែល :

ក. លេខចេញលើគ្រាប់ខៀវស្មើ ២ ដង លេខចេញលើគ្រាប់ក្រហម :

ចំនួនករណីអាច : $n(S) = 6^2 = 36$ ករណី

ព្រឹត្តិការណ៍ A = { (ខៀវលេខ 1 , ក្រហមលេខ 2) ; (ខៀវលេខ 2 , ក្រហមលេខ 3) ; (ខៀវលេខ 3 , ក្រហមលេខ 6) }

ចំនួនករណីស្រេបគឺ $n(A) = 3$ ករណី

ដូចនេះ $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{3}{36} = \boxed{\frac{1}{12}}$

ខ. ផលបូកលេខគ្រាប់ឡុកឡាក់ទាំងពីរស្មើ ៥

ព្រឹត្តិការណ៍ $B = \{(1;4);(4;1);(2;3);(3;2)\}$

ចំនួនករណីស្រប $n(B) = 4$ ករណី

ដូចនេះ $P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{4}{36} = \boxed{\frac{1}{9}}$

6. រកប្រូបាបដែល :

ក. សុខចាប់បានឆ្នោតត្រូវរង្វាន់

ចំនួនករណីអាច $n(S) = 20$ ករណី

ឆ្នោតរង្វាន់មាន 12 សន្លឹក នោះសុខមានជម្រើស 12 ករណី

ដូចនេះ $P(\text{សុខ}) = \frac{12}{20} = \boxed{\frac{3}{5}}$

ខ. សៅចាប់បានឆ្នោតត្រូវរង្វាន់

$P(\text{សៅ}) = \frac{12}{20} \times \frac{11}{19} + \frac{8}{20} \times \frac{12}{19} = \boxed{\frac{3}{5}}$

គ. សនចាប់បានឆ្នោតត្រូវរង្វាន់

$P(\text{សន}) = \boxed{\frac{3}{5}}$

ឃ. អ្នកចាប់មុន និងអ្នកចាប់ក្រោយមានសំណាងដូចគ្នា។

លំហាត់

មេរៀនទី១ ការបែងចែកទិន្នន័យជាភាគរយ

1. គណនាកាទីលទាំងបី និងភាគដប់នៃសំណុំទិន្នន័យនីមួយៗខាងក្រោម :

ក. 1 3 5 5 7 0 8 2 2 4 4

ខ. 7 10 22 2 0 8 12 13 18 21 ។

2. គណនាកាទីលទីមួយ Q_1 កាទីលទីបី Q_3 និង L_{68} នៃសំណុំទិន្នន័យ

ក. 18 0 8 16 10 4 4 14 2 13 5 7

ខ. 0.7 0.4 0.65 0.78 0.45 0.32 1.9 0.0078 ។

3. គណនាមេដ្យានកាទីលទីមួយ Q_1 កាទីលទីបី Q_3 និង L_{63} នៃបំណែងចែកប្រេកង់ខាងក្រោម :

ក.

x	4	5	6	7	8	9
f	12	9	8	13	9	9

ខ.

x	12	13	14	15	16
f	3	9	11	15	7

4. តារាងខាងក្រោមបង្ហាញពិន្ទុ ដែលបានមកពីបោះគ្រាប់ឡុកឡាក់មួយ ចំនួន 60 ដង។ គណនា Q_2 និង D_1 ។

ពិន្ទុ x	1	2	3	4	5	6
ប្រេកង់ f	12	9	8	13	9	9

5. អ្នកលក់សៀវភៅម្នាក់បានឱ្យដឹងថា សៀវភៅថ្មីរបស់គាត់មានទាំងអស់ចំនួន 25 ក្បាល ក្នុងនោះមានចំនួន 4 ក្បាលមួយក្បាលលក់តម្លៃ \$10 មានចំនួន 6 ក្បាល មួយក្បាលលក់តម្លៃ \$8 មានចំនួន 4 ក្បាលមួយក្បាលលក់តម្លៃ \$7 មានចំនួន 9 ក្បាល មួយក្បាលលក់តម្លៃ \$15 និងមានចំនួន 2 ក្បាល មួយក្បាលលក់តម្លៃ \$22 ។

ក. គណនាតម្លៃមធ្យមក្នុងតម្លៃមួយក្បាល

ខ. គណនាកាទីល Q_1, Q_2, Q_3 និង L_{32} ។

6. ការពិសោធន៍បណ្តុះកូនប៉េងប៉ោះដោយប្រើជីគីមីក្នុងរយៈពេលមួយអាទិត្យ បម្រែបម្រួលកូនប៉េងប៉ោះ ទទួល

បានលទ្ធផលដូចខាងក្រោម :

កម្ពស់ (mm)	0-5	5-10	10-15	15-20	20-25	25-30	30-35
ចំនួនកូនប៉េងប៉ោះ f	3	15	72	15	90	36	8

គណនា Q_1, Q_3 និង D_1 ។

7. គេបានកត់ត្រាចំនួនសៀវភៅដែលមាននៅតាមធ្នើ ចំនួន 41 ក្នុងបណ្ណាល័យមួយ។

ចំនួនសៀវភៅ	30-35	35-40	40-45	45-50	50-55	55-60
ចំនួនធ្នើ	4	6	10	13	5	3

គណនាមេដ្យាន និង L_{28} ។

ចម្លើយ

1. គណនាកាទីលទាំងបី និងភាគដប់នៃសំណុំទិន្នន័យនីមួយៗ :

ក. 1;3;5;5;7;0;8;2;2;4;4

ទិន្នន័យលំដាប់កើន : 0;1;2;2;3;4;4;5;5;7;8

+ Q_1 ជាតម្លៃតួទី $\frac{1}{4}(11+1) = 3$ នោះ $Q_1 = 2$

+ Q_2 ជាតម្លៃតួទី $\frac{1}{2}(11+1) = 6$ នោះ $Q_2 = 4$

+ Q_3 ជាតម្លៃតួទី $\frac{3}{4}(11+1) = 9$ នោះ $Q_3 = 5$

តាមរូបមន្តភាគដប់គឺ : D_1 ជាតម្លៃតួទី $\frac{1}{10}(n+1)$

+ D_1 តម្លៃតួទី $\frac{1}{10}(11+1) = 1.2$

នោះ $D_1 = \frac{0+1}{2} = 0.5$

+ D_2 តម្លៃតួទី $\frac{2}{10}(11+1) = 2.4$

នោះ $D_2 = \frac{1+2}{2} = 1.5$

ដូចគ្នាគេបាន $D_3 = 2$; $D_4 = 2.5$; $D_5 = 4$;

$D_6 = 4.5$; $D_7 = 5$; $D_8 = 6$; $D_9 = 7.5$

ខ. 0;2;7;8;10;12;13;18;21;22

+ Q_1 តម្លៃទី $\frac{1}{4}(10+1) = 2.75$

នោះ $Q_1 = \frac{2+7}{2} = 4.5$

+ Q_2 តម្លៃទី $\frac{1}{2}(10+1) = 5.5$

នោះ $Q_2 = \dfrac{10+12}{2} = 11$

+ Q_3 តម្លៃទី $\dfrac{3}{4}(10+1) = 8.25$

នោះ $Q_3 = \dfrac{18+21}{2} = 19.5$

+ D_1 តម្លៃទី $\dfrac{1}{10}(10+1) = 1.1$

នោះ $D_1 = \dfrac{0+2}{2} = 1$

+ D_2 តម្លៃទី $\dfrac{2}{10}(10+1) = 2.2$

នោះ $D_2 = \dfrac{2+7}{2} = 4.5$

+ $D_3 = 7.5$; $D_4 = 9$; $D_5 = 11$; $D_6 = 12.5$;

$D_7 = 15.5$; $D_8 = 19.5$; $D_9 = 21.5$

2. គណនាកាទីល Q_1;Q_3 និង L_{68} :

ក. 0;2;4;4;5;7;8;10;13;14;16;18

+ Q_1 តម្លៃតួទី $\dfrac{1}{4}(12+1) = 3.25$

នោះ $Q_1 = \dfrac{4+4}{2} = 4$

\+ Q_3 តម្លៃតួទី $\frac{3}{4}(12+1) = 9.75$

នោះ $Q_3 = \frac{13+14}{2} = 13.5$

\+ L_{68} តម្លៃតួទី $\frac{68}{100}(12+1) = 8.84$

នោះ $L_{68} = \frac{10+13}{2} = 11.5$

ខ. 0.0078;0.32;0.4;0.45;0.65;0.7;0.78;1.9

\+ Q_1 តម្លៃតួទី $\frac{1}{4}(8+1) = 2.25$

នោះ $Q_1 = \frac{0.32+0.4}{2} = 0.36$

\+ Q_3 តម្លៃតួទី $\frac{3}{4}(8+1) = 6.75$

នោះ $Q_3 = \frac{0.7+0.78}{2} = 0.74$

\+ L_{68} តម្លៃតួទី $\frac{68}{100}(8+1) = 6.12$

នោះ $L_{68} = \frac{0.7+0.78}{2} = 0.74$

3. គណនា $M_e;Q_1;Q_3;L_{63}$

ក.

x	4	5	6	7	8	9
f	12	9	8	13	9	9
$f^{\uparrow}$	12	21	29	42	51	60

+ Q_1 តម្លៃតួទី $\frac{1}{4}(60+1) = 15.25$ នោះ $Q_3 = 5$

+ Q_3 តម្លៃតួទី $\frac{3}{4}(60+1) = 45.75$ នោះ $Q_3 = 8$

+ M_e តម្លៃតួទី $\frac{1}{2}(60+1) = 30.5$ នោះ $M_e = 7$

+ L_{63} តម្លៃតួទី $\frac{63}{100}(60+1) = 38.43$

នោះ $L_{63} = 7$

ខ.

x	12	13	14	15	16
f	3	9	11	15	7
$f^{\uparrow}$	3	12	23	38	45

+ Q_1 តម្លៃតួទី $\frac{1}{4}(45+1) = 11.5$ នោះ $Q_1 = 13$

\+ Q_3 តម្លៃតួទី $\frac{3}{4}(45+1) = 34.5$ នោះ $Q_3 = 15$

\+ L_{63} តម្លៃតួទី $\frac{63}{100}(45+1) = 28.98$

នោះ $L_{63} = 15$

\+ M_e តម្លៃតួទី $\frac{1}{2}(45+1) = 23$ នោះ $M_e = 14$

4\. គណនា $Q_2;D_1$

x	1	2	3	4	5	6
f	12	9	8	13	9	9
$f\uparrow$	12	21	29	42	51	60

\+ Q_2 តម្លៃតួទី $\frac{1}{2}(60+1) = 30.5$ នោះ $Q_2 = 4$

\+ D_2 តម្លៃតួទី $\frac{2}{10}(60+1) = 12.2$ នោះ $D_2 = 2$

៥. ក. គណនាតម្លៃមធ្យមក្នុងសៀវភៅមួយក្បាល

x	7$	8$	10$	15$	22$	សរុប
f	4	6	4	9	2	25
f × x	28	48	40	198	44	358
f↑	4	10	14	23	25	

គេបាន $\bar{x} = \frac{\Sigma f \times x}{\Sigma f} = \frac{358}{25} = 14.32^{\$}$

ខ. គណនា $Q_1;Q_2;Q_3;L_{32}$

+ Q_1 ជាតម្លៃតួទី $\frac{1}{4}(25+1) = 6.5$ នោះ $Q_1 = 8^{\$}$

+ Q_2 តម្លៃតួទី $\frac{1}{2}(25+1) = 13$ នោះ $Q_2 = 10^{\$}$

+ Q_3 តម្លៃតួទី $\frac{3}{4}(25+1) = 19.5$ នោះ $Q_3 = 15^{\$}$

+ L_{32} តម្លៃតួទី $\frac{32}{100}(25+1) = 8.32$

នោះ $L_{32} = 8\$$

6. គណនា $Q_1;Q_3;D_1$:

កម្ពស់ x(mm)	0-5	5-10	10-15	15-20	20-25	25-30	30-35
ប្រេកង់ f	3	15	72	15	90	36	8
ប្រេកង់កើន $f^{\uparrow}$	3	18	90	105	195	231	239

- រក Q_1 :

ដោយ $\frac{1}{4}n = \frac{234}{4} = 59.75$

តាមតារាងប្រេកង់កើន $18 < 59.75 < 90$ នោះ Q_1 នៅ

ក្នុងថ្នាក់ $10 - 15$

គេបាន $L = 10$; $f^{\uparrow} = 18$; $f = 72$;

$i = 15 - 10 = 5$

ដូចនេះ

$$Q_1 = L + \frac{\frac{1}{4}n - f^{\uparrow}}{f} \times (i) = 10 + \frac{(59.75 - 18) \times 5}{72} = \boxed{12.89mm}$$

- រក Q_3 :

ដោយ $\frac{3}{4}n = \frac{3 \times 239}{4} = 179.25$

តាមតារាងប្រេកង់កើន $105 < 179.25 < 195$ នោះ Q_3

នៅក្នុងថ្នាក់ $20 - 25$

គេបាន $L = 20$; $f' = 105$; $f = 90$;

$i = 25 - 20 = 5$

ដូចនេះ

$$Q_3 = L + \frac{\frac{3}{4}n - f'}{f} \times (i) = 20 + \frac{(179.25 - 105) \times 5}{90} \times (5)$$

$$= \boxed{24.125mm}$$

- រក D_1 :

ដោយ $\frac{n}{10} = \frac{239}{10} = 23.9$ នោះ D_1 នៅក្នុងថ្នាក់

$10 - 15$

ដូចនេះ

$$D_1 = L + \frac{\frac{1}{10}n - f'}{f} \times (i) = 10 + \frac{(23.9 - 18)}{72} \times 5 = \boxed{10.40mm}$$

7. គណនា M_e និង L_{28} :

x	30 – 35	35 – 40	40 – 45	45 – 50	50 – 55	55 – 60
f	4	6	10	13	5	3
f'	4	10	20	33	30	41

- រក M_e :

ដោយ $\frac{n}{2} = \frac{41}{2} = 20.5$

តាមតារាងប្រេកង់កើន $20 < 20.5 < 33$ នោះ M_e នៅក្នុង

ថ្នាក់ 45 – 50

គេបាន $L = 45$; $f' = 20$; $f = 13$; $i = 5$

ដូចនេះ

$$M_e = L + \frac{\frac{n}{2} - f'}{f}(i) = 45 + \frac{(20.5 - 20) \times 5}{13} = \boxed{45.192 \text{ ក្បាល}}$$

- រក L_{28} :

ដោយ $\frac{28}{100}n = \frac{28 \times 41}{100} = 11.48$

តាមតារាងប្រេកង់កើន $10 < 11.48 < 20$ នោះ L_{28} នៅក្នុងថ្នាក់ $40 - 45$

គេបាន $L = 45$; $f' = 20$; $f = 13$; $i = 5$

ដូចនេះ

$$L_{28} = L + \frac{\left(\frac{28n}{100} - f\right) \times i}{f} = 40 + \frac{(11.48 - 10) \times 5}{10} = \boxed{40.74\text{ក្បាល}}$$

លំហាត់

មេរៀនទី ២ រង្វាស់នៃគំលាត

1. គណនាវ៉ារ្យង់ និងចន្លោះរវាំងទែកាទីលនៃសំណុំទិន្នន័យខាងក្រោម :

ក. 5 16 9 8 6 10 12 10 8 6

ខ.

x	3	4	5	6	7	8	9
f	5	2	7	9	4	10	5

2. ប្រាក់ចំណូលប្រចាំសប្ដាហ៍ (គិតជាដុល្លារ) របស់អ្នកនឹងនាំថ្នាក់កណ្ដាលក្នុងក្រុមហ៊ុនមួយមាន 52 56 58 65 68 65 75 70។ ដោយសន្មតថាទិន្នន័យទាំងនេះ ជាសកលស្ថិតិ។

ក. គណនាវ៉ារ្យង់

ខ. គណនាវ៉ារ្យង់សកលស្ថិតិ និងគំលាតស្តង់សកលស្ថិតិ។

3. ពូសែ និងពូសុខជាឈ្មួញទិញជ្រូកដូចគ្នា។ ឈ្មួញទាំងពីរ

ទិញជ្រូកបានម្នាក់ 10ក្បាល ដែលជ្រូកនីមួយៗមានម៉ាស

ម៉ាសជ្រូកពូសែ (គិតជា kg)	70	92	102	98	105	35	39	39	40	60
ម៉ាសជ្រូកពូសុខ (គិតជា kg)	63	63	65	71	72	74	40	58	80	94

ក. គណនាវ៉ារ្យង់ (ស្ថិតិសកល)

ខ. តើឈ្មួញមួយណាទិញជ្រូកបានម៉ាសស្មើសាច់ជាង?

4. គេមានទិន្នន័យ a b 8 5 7 (ជាស្ថិតិសកល) ដែលមានតម្លៃមធ្យមស្មើនឹង 6 និងវ៉ារ្យង់ស្មើនឹង 2។ គណនាតម្លៃ a និង b បើ $a > b$។

5. បំណែងចែកប្រេកង់ខាងក្រោម ជាបំណែងចែកម៉ាស (kg) ជ្រូក 40ក្បាល ក្នុងកសិដ្ឋានមួយ

ម៉ាស (kg)	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70
ចំនួនជ្រូក f_i	5	8	10	11	6

ក. គណនាវ៉ង់

ខ. គណនាមធ្យម

គ. គណនាគំលាតស្តង់ដា។

ចម្លើយ

1. គណនារ៉ង់ និងចន្លោះអាំងទែកាទីល :

ក. 5;6;6;8;8;9;10;10;12;16

គេបានរ៉ង់ $R = 16 - 5 = \boxed{11}$

Q_1 តម្លៃតួទី $\frac{1}{4}(10+1) = 2.75$ នោះ $Q_1 = 6$

Q_3 តម្លៃតួទី $\frac{3}{4}(10+1) = 8.25$

នោះ $Q_3 = \frac{10+12}{2} = 11$

គេបាន $I = Q_3 - Q_1 = 11 - 6 = \boxed{5}$

ខ.

x	3	4	5	6	7	8	9
f	5	2	7	9	4	10	5
f↑	5	7	14	23	27	37	42

គេបានរ៉ង់ $R = 9 - 3 = \boxed{6}$

Q_1 តម្លៃតួទី $\frac{1}{4}(42+1) = 10.75$ នោះ $Q_1 = 5$

Q_2 តម្លៃតួទី $\frac{3}{4}(42+1) = 32.25$ នោះ $Q_3 = 8$

គេបាន $I = Q_3 - Q_1 = 8 - 5 = \boxed{3}$

2. ក. រកវ៉ង់ :

គេបាន $52^\$;56;58;65;65;68;70;75^\$$ (ជាសាកលស្ថិតិ)

គេបានវ៉ង់ $R = 75^\$ - 52^\$ = \boxed{23^\$}$

ខ. គណនាវ៉ារ្យង់ និងគំលាតស្តង់ដា :

ដោយ

$$\mu = \frac{52+56+58+65+65+68+70+75}{8} = \frac{509}{8} = 63.625^\$$$

x	$x-\mu$	$(x-\mu)^2$
52	−11.625	135.14
56	−7.625	58.14
58	−5.625	31.64
65	1.375	1.89

65	1.375	1.89
68	4.375	19.14
70	6.375	40.64
75	11.375	129.39
		$\Sigma(x-\mu)^2 = 417.87$

គេបានវ៉ារ្យង់ $\delta^2 = \frac{417.87}{8} = 52.23$

គំលាតស្តង់ដា : $\delta = \sqrt{52.23} = \boxed{7.22^{\$}}$

3. ក. គណនាវ៉ារ្យង់ : (សាកលស្ថិតិ)

មធ្យមម៉ាសជ្រូកពូសែ

$$\mu_1 = \frac{70+92+102+98+105+35+39+39+40+60}{10}$$

$= 68kg$

មធ្យមម៉ាសជ្រូកពូសុខ

$$\mu_2 = \frac{63+63+65+71+72+74+40+58+80+94}{10}$$

$= 68kg$

x	$x - \mu_1$	$(x - \mu_1)^2$
70	2	4
92	24	576
102	34	1156
98	30	900
105	37	1369
35	–33	1089
39	–29	841
39	–29	841
40	–28	784
60	–8	64
		$\Sigma(x - \mu_1)^2 = 7624$

x	$x-\mu_2$	$(x-\mu_2)^2$
63	–5	25
63	–5	25
56	–3	9
71	3	9
72	4	16
74	6	36
40	–28	784
58	–10	100
80	12	144
94	26	676
		$\Sigma(x-\mu_2)^2 = 1824$

ដូចនេះ $\delta_1^2 = \frac{\Sigma(x-\mu_1)^2}{n} = \frac{7624}{10} = \boxed{76.24}$

$$\delta_2^2 = \frac{\Sigma(x-\mu_2)^2}{n} = \frac{1824}{10} = \boxed{18.24}$$

ខ. ដោយ $\delta_1^2 > \delta_2^2$ នោះពូសុខទិញជ្រូកបានស្មើសាច់ជាងពូសែ ។

4. គណនា a និង b , $(a > b)$ (សាកលស្ថិតិ) :

គេមាន $\mu = \dfrac{a+b+8+5+7}{5} = 6$ ឬ $a+b = 10$

នោះ $a = 10 - b$

$$\delta^2 = 2 \Leftrightarrow \frac{(a-6)^2+(b-6)^2+(8-6)^2+(5-6)^2+(7-6)^2}{5} = 2$$

$(a-6)^2 + (b-6)^2 = 4$

$(10-b-6)^2 + (b-6)^2 = 4$

$b^2 - 10b + 24 = 0$

$\Delta' = 25 - 24 = 1$ នោះ $b = 4 \; ; b = 6$

តែ $a > b$ ដូចនេះ $\boxed{a = 6 \;\; ; \;\; b = 4}$

5. ក. រកវង់ :

$R = 70kg - 20kg = \boxed{50kg}$

ខ. គណនាមធ្យម

ម៉ាស (kg)	f	ផ្ចិតថ្នាក់ x	$f \times x$	x^2	$f \times x^2$
20 – 30	5	25	125	625	3125
30 – 40	8	35	280	1225	9800
40 – 50	10	45	450	2025	20250
50 – 60	11	55	605	3025	33275
60 – 70	6	65	390	4225	25350
សរុប	$\Sigma f = 40$		$\Sigma f \times x = 1850$		$\Sigma fx^2 = 91800$

គេបាន $\bar{x} = \dfrac{\Sigma f \times x}{\Sigma f} = \dfrac{1850}{40} = \boxed{46.25\text{kg}}$

គ. គណនាគំលាតស្តង់ដា :

$$\delta = \sqrt{\frac{\Sigma f \times x^2}{\Sigma f} - (\bar{x})^2} = \sqrt{\frac{91800}{40} - (46.25)^2}$$

$$= \boxed{12.48\text{kg}}$$

លំហាត់

មេរៀនទី ៣ បំណែងចែកន័រម៉ាល់

1. បំណែកចែកន័រម៉ាល់មួយមានមធ្យមស្មើនឹង 80 និងមានគំលាតស្មើនឹង 14។

ក. គណនាជាភាគរយនៃទិន្នន័យដែលស្ថិតនៅចន្លោះ 75 និង 90

ខ. គណនាជាភាគរយនៃទិន្នន័យដែលតិចជាង 75

គ. គណនាជាភាគរយនៃទិន្នន័យដែលស្ថិតនៅចន្លោះ 55 និង 70។

2. បើ z តាងបំណែងចែកន័រម៉ាល់ ដែលមានមធ្យមស្មើនឹង 0 និងគំលាតស្តង់ដាស្មើនឹង 1។ គណនាតម្លៃ a បើ

ក. ភាគរយដែល $z < a = 96.93\%$

ខ. ភាគរយដែល $z > a = 88.49\%$។

3. កម្ពស់ក្មេងប្រុសមួយក្រុមដែលមានអាយុ 15 ឆ្នាំ ជាបំណែងចែកន័រម៉ាល់មានមធ្យមស្មើនឹង 150.3cm និងគំលាតស្តង់ដាស្មើនឹង 5cm ។ គណនាជាភាគរយដែលគេជ្រើសរើសដោយចៃដន្យបានក្មេងម្នាក់កម្ពស់ :

ក. តិចជាង 153cm

ខ. ច្រើនជាង 158cm

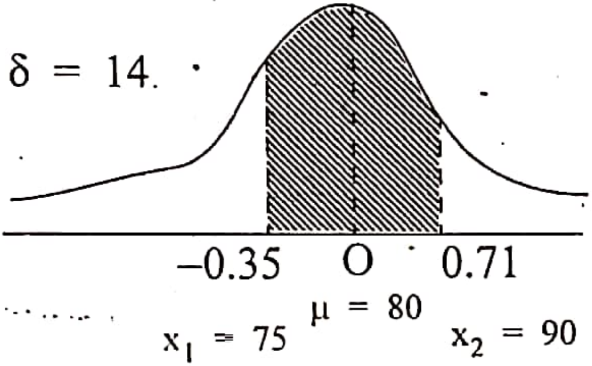
គ. នៅចន្លោះ 147cm និង 149.5cm

ឃ. នៅចន្លោះ 150cm និង 158cm ។

4. កម្ពស់ដើមផ្កាក្នុងសួនមួយកន្លែងជាបំណែងចែកន័រម៉ាល់ ដែលមានមធ្យមស្មើនឹង μ និងមានគំលាតស្មើនឹង 6cm ។ គេដឹងថាមាន 4.78% នៃដើមផ្កាទាំងអស់មានកម្ពស់ខ្ពស់ជាង 82cm ។ គណនាតម្លៃនៃ μ ។

ចម្លើយ

1. ក. គណនាភាគរយនៃទិន្នន័យដែលស្ថិតនៅចន្លោះ 75 និង 90 :



គេបាន $Z_1 = \frac{x_1 - \mu}{\delta} = \frac{75 - 80}{14} = -0.35$

$$Z_2 = \frac{x_2 - \mu}{\delta} = \frac{90 - 80}{14} = 0.71$$

តាមតារាងភាគរយដែល $(75 < x < 90)$

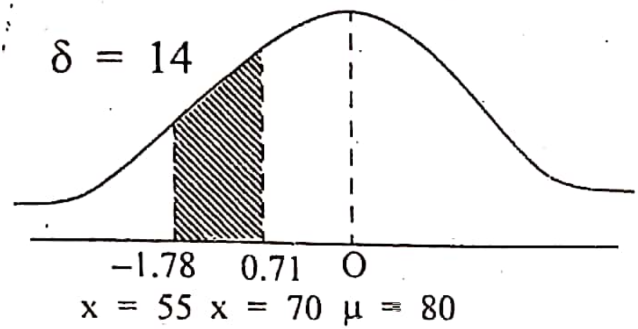
$= 0.1368 + 0.2611 = 0.3978 = \boxed{39.78\%}$

ខ. គណនាភាគរយនៃទិន្នន័យដែលតិចជាង 75 :

ភាគរយដែល

$(x < 75) = 0.5 - 0.1368 = 0.3632 = \boxed{36.32\%}$

គ. គណនាភាគរយនៃទិន្នន័យដែលនៅចន្លោះ 55 និង 70 :



$$Z_1 = \frac{x_1 - \mu}{\delta} = \frac{55 - 80}{14} = -1.78$$

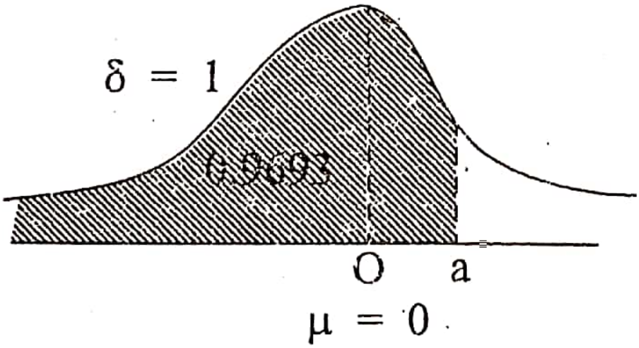
$$Z_2 = \frac{x_2 - \mu}{\delta} = \frac{70 - 80}{14} = -0.71$$

ដូចនេះ ភាគរយនៃទិន្នន័យនៅចន្លោះ 55 និង 70 គឺ :

$$= 0.4625 - 0.2611 = 0.2014 = \boxed{20.14\%}$$

2. គណនា a :

ក. ភាគរយដែល $(Z < a) = 96.93\%$



ដោយ $0.9693 - 0.5 = 0.4693$

តាមតារាង $a = 1.87$

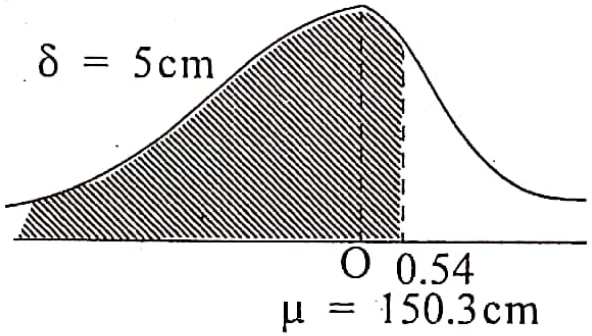
ខ. ភាគរយដែល $(Z > a) = 88.49\%$

ដោយ $0.8849 - 0.5 = 0.3849$

តាមតារាង $a = -1.2$

3. គណនាភាគរយដែលជ្រើសរើសដោយចៃដន្យបានក្មេងកម្ពស់

ក. តិចជាង 153cm



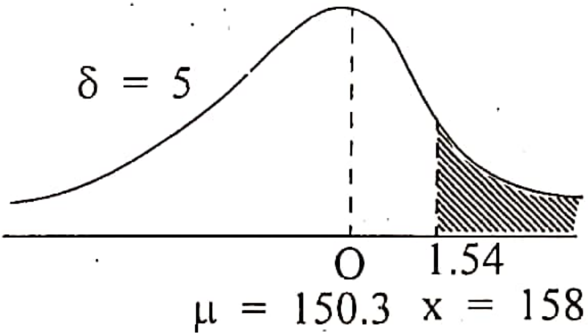
ដោយ $z = \frac{x - \mu}{\delta}$

$= \frac{153 - 150.3}{5} = 0.54$

ភាគរយដែល

$(x < 15) = 0.5 + 0.2054 = 0.6054 = 60.54\%$

ខ. ច្រើនជាង 158cm



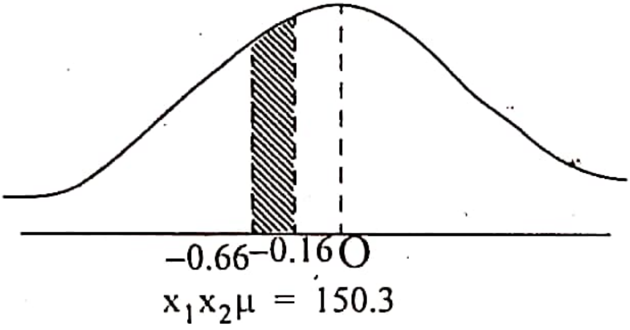
ដោយ $z = \frac{x - \mu}{\delta}$

$= \frac{158 - 150.3}{5} = 1.54$

ភាគរយដែល

$(x > 158) = 0.5 - 0.4382 = 0.0618 = \boxed{6.18\%}$

គ. នៅចន្លោះ 147cm និង 149.5cm



គេបាន $z_1 = \dfrac{x_1 - \mu}{\delta}$

$= \dfrac{147 - 150.3}{5} = 0.66$

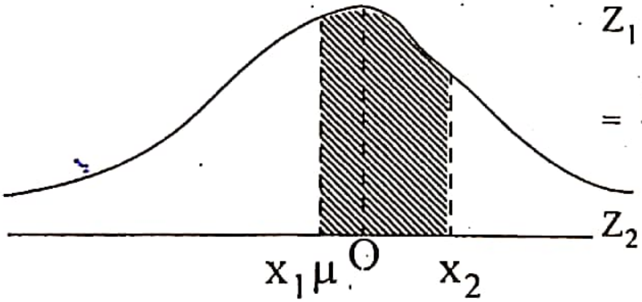
$Z_2 = \dfrac{x_2 - \mu}{\delta}$

$= \dfrac{149.5 - 150.3}{5} = -0.16$

ភាគរយនៅចន្លោះ 147cm និង 149.5cm គឺ :

$= 0.2454 - 0.0636 = 0.1818 = \boxed{18.18\%}$

ឃ.នៅចន្លោះ 150cm និង 158cm



$Z_1 = \dfrac{x_1 - \mu}{\delta}$

$= \dfrac{158 - 150.3}{5} = -0.06$

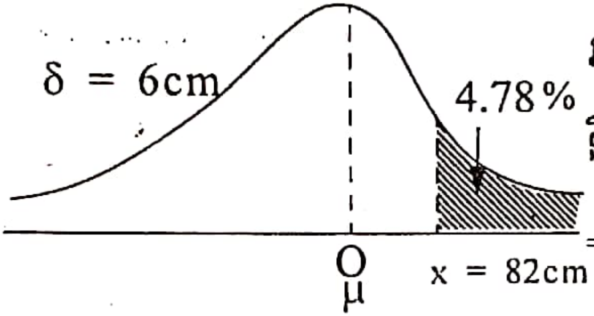
$Z_2 = \dfrac{x_2 - \mu}{\delta}$

$= \dfrac{158 - 150.3}{5} = 1.54$

ភាគរយនៅចន្លោះ 150cm និង 158cm

$= 0.0239 + 0.4382 = 0.4621 = \boxed{46.21\%}$

4. <u>គណនាតម្លៃនៃ</u> μ :



ភាគរយនៅចន្លោះ μ និង 82cm គឺ

$= 0.5 - 0.0478 = 0.4522$

តាមតារាងគេបាន $Z = 1.67$

តាមរូបមន្ត $Z = \dfrac{x-\mu}{\delta}$

នោះ $\mu = x - X \times \delta$

$= 82 - 1.67 \times 6 = \boxed{71.98\text{cm}}$

លំហាត់

ជំពូក ៧

1. គេមានសំណុំទិន្នន័យខាងក្រោម។ គណនាកាទីលទាំងបី ភាគផប់ និង L_{35}

ក. 4 8 3 6 7 10 11 18 15 19 20

ខ.

x	7	8	9	11	13	15	19	20
f	2	5	4	12	11	9	7	3

2. អ្នកទេសចរណ៍ជនជាតិជប៉ុន ដែលធ្វើដំណើរតាមយន្តហោះមកព្រះរាជាណាចក្រកម្ពុជាមានអាយុ 32 21 60 47 54 17 72 55 33 និង 41 ឆ្នាំ។

ក. គណនារ៉ង់

ខ. គណនាចន្លោះអាំងទែកាទីល

គ. គណនាគំលាតស្តង់ដា។

3. ប្រាក់ចំណូលប្រចាំសប្តាហ៍របស់នាយករង 5 នាក់ក្នុងក្រុមហ៊ុនមួយនោះមាន \$30 \$35 \$50 \$42 និង \$40 ដោយ

គិតថាជាទិន្នន័យសកលស្ថិតិ។

ក. គណនាវ៉ារ្យង់

ខ. គណនាគំលោតស្តង់ដា។

4. ពិន្ទុនៃការធ្វើតេស្តសិស្សចំនួន 60 នាក់លើមុខវិជ្ជាគណិតវិទ្យា បានបង្ហាញដូចតារាងខាងក្រោម :

ពិន្ទុ	100-105	105-110	110-115	115-120	120-125
ចំនួនសិស្ស f	8	13	25	11	4

ក. គណនារ៉េង់

ខ. គណនា Q_1 និង Q_3

គ. គណនាភាគដប់ និង L_{36}

ឃ. គណនាវ៉ារ្យង់ និងគំលាតស្តង់ដា។

5. តារាងខាងក្រោម ជាបំណែងចែកប្រេកង់រយៈពេលសម្រាប់ដោះស្រាយចំណោទរបស់សិស្ស 38 នាក់ ងាយ

មួយ។

រយៈពេល (គិតជាវិនាទី)	5-10	10-15	15-20	20-25	25-30
ចំនួនសិស្ស f	8	13	24	11	4

ក. គណនាម៉ូត ខ. គណនាមធ្យម

គ. គណនាគំលាតស្តង់ដា ឃ. រកមេគុណនៃភាពទេ។

6. គេមានបំណែងចែកប្រេកង់ខាងក្រោម។

x_i	20	21	22	23	24	25	26	27	29	30	31
f_i	20	30	33	31	20	18	12	10	5	3	2

ក. គណនាម៉ូត

ខ. គណនាគំលាតស្តង់ដា

គ. រកមេគុណនៃភាពទេរ រួចធ្វើការសន្និដ្ឋាន។

7. បើ z តាមបំណែងចែកន័រម៉ាល់ ដែលមានមធ្យមស្មើនឹង 0 និងវ៉ារ្យង់ស្មើនឹង 1។ គណនាតម្លៃ a បើ

ក. ភាគរយដែល $Z > a = 34.09\%$

ខ. ភាគរយដែល $Z < a = 7.93\%$ ។

8. ល្បឿនរថយន្តឆ្លងកាត់ចំណុចត្រួតពិនិត្យមួយ ជាបំណែងចែកន័រម៉ាល់។ ការអង្កេតបានបង្ហាញថារថយន្តដែលឆ្លងកាត់ការអង្កេតមាន 95% មានល្បឿនតិចជាង 85km/h ។ និងល្បឿនតិចជាង 55/h ។

ក. គណនាល្បឿនមធ្យមនៃរថយន្តដែលឆ្លងកាត់ចំណុចត្រួតពិនិត្យ

ខ. រកភាគរយល្បឿនរថយន្តដែលបើកបរលើសពី 70km/h ។

9. គេដឹងថា ទិន្នន័យ x ជាបំណែងចែកន័រម៉ាល់ដែលមានមធ្យមស្មើនឹង μ និងវ៉ារ្យង់ស្មើនឹង δ^2 ម្យ៉ាងទៀតភាគរយដែល $(x > 51) = 1.13\%$ និងភាគរយដែល $(x > 30) = 97.13\%$ ។ គណនា μ និង δ ។

ចម្លើយ

1. គណនា $Q_1;Q_2;Q_3;D_1;L_{35}$

ក. 3;4;6;7;8;10;11;15;18;19;20

- Q_1 តម្លៃតួទី $\frac{1}{4}(11+1) = 3$ នោះ $Q_1 = 6$

- Q_2 តម្លៃតួទី $\frac{1}{2}(11+1) = 6$ នោះ $Q_2 = 10$

- Q_3 តម្លៃតួទី $\frac{3}{4}(11+1) = 9$ នោះ $Q_3 = 18$

- D_1 តម្លៃតួទី $\frac{1}{10}(11+1) = 1.2$

  នោះ $D_1 = \frac{3+4}{2} = 3.5$

- L_{35} តម្លៃតួទី $\frac{35}{100}(11+1) = 4.2$

  នោះ $L_{35} = \frac{7+8}{2} = 7.5$

x	7	8	9	11	13	15	19	20
f	2	5	4	12	11	9	7	3
f↑	2	7	11	23	34	43	50	53

- Q_1 តម្លៃតួទី $\frac{1}{4}(53+1) = 13.5$ នោះ $Q_1 = 11$

- Q_2 តម្លៃតួទី $\frac{1}{2}(53+1) = 27$ នោះ $Q_2 = 13$

- Q_3 តម្លៃតួទី $\frac{3}{4}(53+1) = 40.5$ នោះ $Q_3 = 15$

- D_1 តម្លៃតួទី $\frac{1}{10}(53+1) = 5.4$ នោះ $D_1 = 8$

- L_{35} តម្លៃតួទី $\frac{35}{100}(53+1) = 18.9$ នោះ $L_{35} = 11$

2. ក. គណនារ៉ង់ R

គេមាន : 17;21;32;33;41;47;54;55;60;72

គេបានរ៉ង់ $R = 72 - 17 = \boxed{55}$ ឆ្នាំ

ខ. គណនាចន្លោះអាំងទែកាទីល I :

- Q_1 តម្លៃតួទី $\frac{1}{4}(10+1) = 2.75$

នោះ $Q_1 = \frac{21+32}{2} = 26.5$ ឆ្នាំ

- Q_3 តម្លៃតួទី $\frac{3}{4}(10+1) = 8.25$

នោះ $Q_3 = \frac{55+60}{2} = 57.5$ ឆ្នាំ

គេបាន $I = Q_3 - Q_1 = 57.5 - 26.5 = \boxed{31 \text{ ឆ្នាំ}}$

គ. គណនាគំលាតស្តង់ដា

ដោយ

$$\bar{x} = \frac{\Sigma x_i}{n} = \frac{17 + 21 + 32 + 33 + 41 + 47 + 54 + 55 + 60 + 72}{10}$$

$$= \frac{432}{10} = 43.2 \text{ ឆ្នាំ}$$

$$(x_1 - \bar{x})^2 = (17 - 43.2)^2 = 686.44$$

$$(x_2 - \bar{x})^2 = (21 - 43.2)^2 = 492.84$$

$$(x_3 - \bar{x})^2 = (32 - 43.2)^2 = 125.44$$

$$(x_4 - \bar{x})^2 = (33 - 43.2)^2 = 104.04$$

$$(x_5 - \bar{x})^2 = (41 - 43.2)^2 = 4.84$$

$$(x_6 - \bar{x}) = (47 - 43.2)^2 = 14.44$$

$$(x_7 - \bar{x}) = (54 - 43.2)^2 = 116.64$$

$$(x_8 - \bar{x}) = (55 - 43.2)^2 = 139.24$$

$$(x_9 - \bar{x})^2 = (60 - 43.2)^2 = 282.24$$

$(x_{10} - \bar{x})^2 = (72 - 43.2)^2 = 829.44$

នោះ $\Sigma(x_i - \bar{x})^2 = 2795.6$

ដូចនេះ $S = \sqrt{\dfrac{\Sigma(x_i - \bar{x})^2}{n-1}} = \sqrt{\dfrac{2795.6}{10-1}} = \boxed{17.62\text{ ឆ្នាំ}}$

3. ក. គណនាវ៉ារ្យង់នៃសាកលស្ថិតិ :

ដោយ $\mu = \dfrac{\Sigma x_i}{N} = \dfrac{30+35+50+42+40}{5} = \dfrac{197}{5} = 39.5^{\$}$

$(x_1 - \mu)^2 = (30 - 39.4)^2 = 88.36$

$(x_2 - \mu)^2 = (35 - 39.4)^2 = 19.36$

$(x_3 - \mu)^2 = (50 - 39.4)^2 = 112.36$

$(x_4 - \mu)^2 = (42 - 39.4)^2 = 6.76$

$(x_5 - \mu)^2 = (40 - 39.4)^2 = 0.36$

នោះ $\Sigma(x_i - \mu)^2 = 227.2$

ដូចនេះ $\delta^2 = \dfrac{\Sigma(x_i - \mu)^2}{N} = \dfrac{227.2}{5} = \boxed{45.44}$

ខ. គណនាគំលាតស្តង់ដា

$$\delta = \sqrt{\frac{\Sigma(x_i - \mu)^2}{N}} = \sqrt{45.44} = \boxed{6.74^{\$}}$$

4. ក. គណនារ៉ង់ :

$$\text{រ៉ង់} = 125 - 100 = \boxed{25}$$

ខ. គណនា Q_1 និង Q_3 :

ពិន្ទុ	f_i	f'	ផ្ចិតថ្នាក់ x_i	$f_i x_i$	x_i^2	$f_i x_i^2$
100 – 105	8	8	102.5	820	10506.25	84050
105 – 110	13	21	107.5	1397.5	11556.25	150231.25
110 – 115	25	46	112.5	2812.5	12656.25	316406.25
115 – 120	11	57	117.5	1292.5	13806.25	151868.75
120 – 125	4	61	122.5	490	15006.25	60025
សរុប	61			6812.5		762581.25

+ រក Q_1 :

ដោយ $\frac{n}{4} = \frac{61}{4} = 15.25$

តាមតារាងប្រេកង់កើន $8 < 15.25 < 21$ នោះ Q_1 នៅក្នុង

ថ្នាក់ $105 - 110$

គេបាន

$$Q_1 = L + \frac{\frac{n}{4} - fi}{f} \times (i) = 105 + \frac{(15.25 - 8) \times 5}{13} = \boxed{107.78}$$

+ រក Q_3 :

ដោយ $\frac{3n}{4} = 45.75$

តាមតារាងប្រេកង់កើន $21 < 45.75 < 46$ នោះ Q_3 នៅ

ក្នុងថ្នាក់ $110 - 115$

គេបាន

$$Q_3 = L + \frac{\left(\frac{3}{4}n - fi\right)i}{f} = 110 + \frac{(45.75 - 21) \times 5}{25} = \boxed{114.95}$$

គ. គណនា L_{36} :

ដោយ $\frac{36}{100}n = \frac{36 \times 61}{100} = 21.96$

តាមតារាងប្រេកង់កើន $21 < 21.96 < 46$ នោះ L_{36} នៅ

ក្នុងថ្នាក់ 110 – 115

គេបាន

$$L_{36} = L + \frac{\left(\frac{36n}{100} - f\right)i}{f} = 110 + \frac{(21.96 - 21) \times 5}{25} = \boxed{114.8}$$

ឃ.គណនាវ៉ារ្យង់ និងគំលាតស្តង់ដា :

មធ្យមគំរូ $\bar{x} = \frac{\Sigma f_i x_i}{\Sigma f_i} = \frac{6812.5}{61} = 111.68$

វ៉ារ្យង់ $\delta^2 = \frac{\Sigma f_i x_i}{\Sigma f_i} - (\bar{x})^2 = \frac{762581.25}{61} - (111.68)^2$

$$= \boxed{28.90}$$

គំលាតស្តង់ដា $\delta = \sqrt{28.90} = \boxed{5.37}$

5. ក. គណនាម៉ូត :

រយៈពេល S	f_i	ផ្ចិតថ្នាក់ x_i	$f_i^{\uparrow}$	$x_i f_i$	$x_i^2 \times f_i$
5 – 10	8	7.5	8	60	450
10 – 15	13	12.5	21	162.5	2031.25
15 – 20	24	17.5	45	420	7350

20 – 25	11	22.5	56	247.5	5568.75
25 – 30	4	27.5	60	110	3025
	$\Sigma f_i = 60$			$\Sigma x_i f_i = 1000$	$\Sigma x_i^2 \times f_i = 18425$

តាមតារាងប្រេកង់ថ្នាក់ម៉ូដគឺ 15 – 20

ដូចនេះ $M_0 = \dfrac{20 + 15}{2} = \boxed{17.5}$

ខ. គណនាមធ្យម : $\bar{x} = \dfrac{\Sigma x_i f_i}{\Sigma f_i} = \dfrac{1000}{60} = \boxed{16.66}$

គ. គណនាគំលាតស្តង់ដា :

$$\delta = \sqrt{\frac{\Sigma f_i \times x_i^2}{\Sigma f_i} - (\bar{x})^2} = \sqrt{\frac{18425}{60} - \left(\frac{1000}{60}\right)^2} = 5.41$$

ឃ.រកមេគុណនៃភាពទេរ :

គេបាន $R = \dfrac{\bar{x} - M_0}{\delta} = \dfrac{16.66 - 17.5}{5.41} = \boxed{-0.1552}$

6. ក. គណនាម៉ូត :

x_i	f_i	$f_i\uparrow$	$f_i \times x_i$	$f_i \times x_i^2$
20	20	20	400	8000

21	30	50	630	13230
22	33	83	726	15972
23	31	114	713	16399
24	20	134	480	11520
25	18	152	450	11250
26	12	164	312	8112
27	10	174	270	7290
29	5	179	145	4205
30	3	182	90	2700
31	2	184	62	1922
	$\Sigma f_i = 184$		$\Sigma f_i x_i = 4278$	$\Sigma f_i x_i^2 = 100600$

តាមតារាងប្រេកង់គេបានម៉ូតគឺ :

$M_0 = \boxed{22}$

ខ. គណនាគំលាតស្តង់ដា :

$$\text{ដោយ}\bar{x} = \frac{\Sigma f_i x_i}{\Sigma f_i} = \frac{4278}{184} = 23.25$$

$$\delta = \sqrt{\frac{\Sigma f_i x_i^2}{\Sigma f_i} - (\bar{x})^2} = \sqrt{\frac{100600}{184} - (23.25)^2}$$

$$= \boxed{2.48}$$

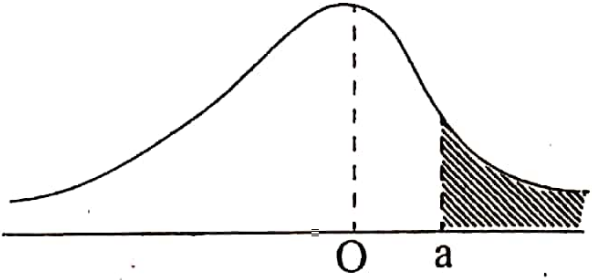
គ. គណនាមេគុណនៃភាពទេរ

$$R = \frac{\bar{x} - M_0}{\delta} = \frac{23.25 - 22}{2.48} = 0.50$$

ដូចនេះ ខ្សែកោងទេទៅរកខាងវិជ្ជមាន ។

7. គណនាតម្លៃ a បើ :

ក. ភាគរយដែល $(Z > a) = 34.09\%$



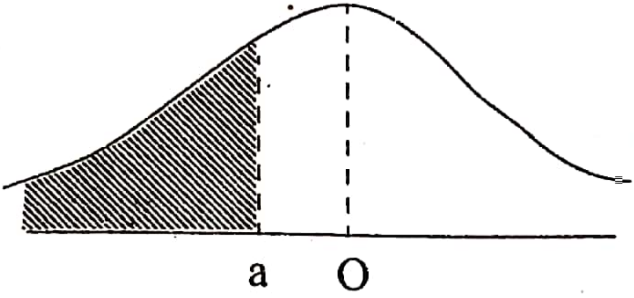
ដោយ

$0.5 - 0.3409 = 0.1591$

តាមតារាង Z គេបាន

$a = 0.41$

ខ. ភាគរយដែល $(Z < a) = 7.93\%$



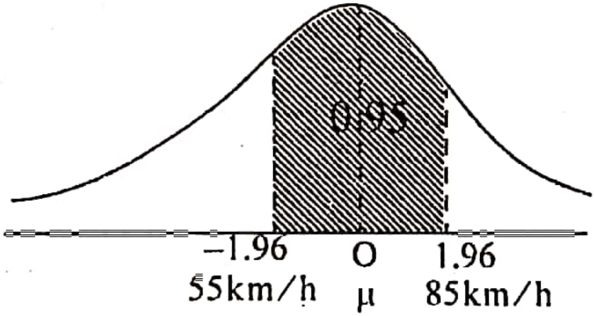
ដោយ

$0.5 - 0.0793 = 0.4209$

តាមតារាង Z គេបាន

$a = 1.42$

8. ក. គណនាល្បឿនមធ្យមនៃរថយន្តដែលឆ្លងកាត់ចំណុចត្រួតពិនិត្យ



ដោយ $\frac{0.95}{2} = 0.475$ នោះ $Z_1 = -1.96$;

$Z_2 = +1.96$

គេបាន $Z_1 = \frac{V_1 - \mu}{\delta} = \frac{55 - \mu}{\delta} \Rightarrow \mu = 55 - Z_1 \times \delta$

$Z_2 = \frac{V_2 - \mu}{\delta} = \frac{85 - \mu}{\delta} \Rightarrow \mu = 85 - Z_2 \times \delta$

គេបាន $55 - Z_1 \times \delta = 85 - Z_2 \times \delta$

$$55 + 1.96\delta = 85 - 1.96\delta$$

$3.92\delta = 30$ នោះ $\delta = 7.65$

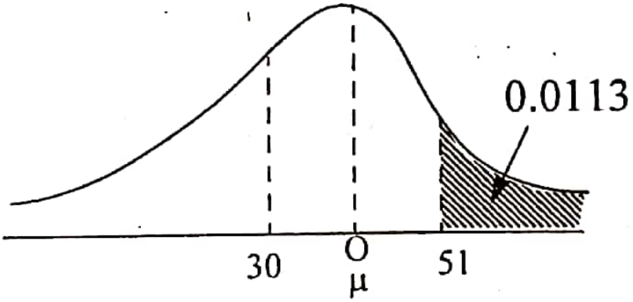
ដូចនេះ $\mu = 55 + 1.96(7.65) = \boxed{70km/h}$

ខ. រកភាគរយល្បឿនរថយន្តដែលបើកលើសពី 70km/h

ដោយ $\mu = 70km/h$ នោះភាគរយរថយន្តបើកល្បឿន

លើសពី 70km/h គឺ 50% ។

9. គណនា μ និង δ :



ដោយភាគរយដែល $(x > 51) = 1.13\% = 0.0113$

ហើយ $0.5 - 0.0113 = 0.4887$ នោះ $Z_2 = 3.28$

ភាគរយដែល $(x > 30) = 97.13\% = 0.9713$

ហើយ $0.9713 - 0.5 = 0.4713$ នោះ $Z_1 = -1.9$

គេបាន $Z_1 = \frac{x_1 - \mu}{\delta} \Rightarrow \delta = \frac{x_1 - \mu}{Z_1}$

$$Z_2 = \frac{x_2 - \mu}{\delta} \Rightarrow \delta = \frac{x_2 - \mu}{Z_2}$$

គេបាន $\frac{x_1 - \mu}{Z_1} = \frac{x_2 - \mu}{Z_2}$

$$\frac{30 - \mu}{-1.9} = \frac{51 - \mu}{3.28}$$

$$98.4 - 3.28\mu = -96.9 + 1.9\mu$$

$-5.18\mu = -195.3$ នោះ $\mu = 37.70$

គេបាន $\delta = \frac{30 - 37.70}{-1.9} = \boxed{4.05}$