សំរាប់លក់

ក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា

គណិតវិទ្យា

កំរិតខ្ពស់

១១

កំណែ

គ្រឹះស្ថានបោះពុម្ពនិងចែកផ្សាយ

លំហាត់

មេរៀនទី ១ ផលបូកតួនៃស៊ីតផ្សេងៗ

1. សរសេរផលបូកខាងក្រោមដោយប្រើនិមិត្តសញ្ញា Σ :

ក. $1 + 2 + 3 + \ldots + 100$

ខ. $1 + 4 + 9 + 16 + \ldots + 484$

គ. $1 + 8 + 27 + 64 + \ldots + 3375$

ឃ. $1 \times 3 + 2 \times 4 + 3 \times 5 + \ldots + 20 \times 22$ ។

2. សរសេរគ្រប់តួទាំងអស់នៃផលបូកដោយមិនប្រើនិមិត្តសញ្ញា Σ :

ក. $\sum_{k=1}^{6} k$ ខ. $\sum_{k=1}^{5} k^2$

គ. $\sum_{k=4}^{9} (3k-1)$ ឃ. $\sum_{k=2}^{7} (-1)^k k$

3. ក. $\sum_{k=1}^{11} k^2$ ខ. $\sum_{k=1}^{24} k^2$ គ. $\sum_{k=12}^{24} k^2$

4. ក. $\sum_{k=1}^{24} k^3$ ខ. $\sum_{k=1}^{15} k^3$ គ. $\sum_{k=16}^{24} k^3$

5. ក. សម្រួលកន្សោម $\sum_{k=1}^{n} k(k+1)$

ខ. ដោយប្រើចម្លើយ ក. គណនាផលបូក

$1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 4 + \ldots + 28 \times 29$

6. ក. សម្រួលកន្សោម $\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2)$ ។

ខ. ដោយប្រើចម្លើយ ក. គណនាផលបូក

$1 \times 2 \times 3 + 2 \times 3 \times 4 + 3 \times 4 \times 5 + \ldots + 20 \times 21 \times 22$ ។

7. ក. កណាត់តួទី n នៃស្វ៊ីត 1, 2, 5, 10, 17, ... ។

ខ. គណនាផលបូក n តួដំបូងនៃស្វីតនេះ ។

8. ក. កំណត់តួទី n នៃស្វ៊ីត 1, 5, 14, 30, 55, 91, ... ។

ខ. រកផលបូក n តួដំបូងនៃស្វីតនេះ ។

9. កំណត់តួទី n នៃស្វ៊ីត (a_n) : p, q, p, q, p, q, ... ។

ចម្លើយ

1. សរសេរផលបូកខាងក្រោមដោយប្រើនិមិត្តសញ្ញា Σ :

ក. $1 + 2 + 3 + \ldots + 100 = \sum_{k=1}^{22} k^2$

ខ. $1 + 4 + 9 + 16 + \ldots + 484$

$$= 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \ldots + 22^2 = \sum_{k=1}^{22} k^2$$

គ. $1 + 8 + 27 + 64 + \ldots + 3375$

$$= 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \ldots + 15^3 = \sum_{k=1}^{15} k^3$$

ឃ. $1 \times 3 + 2 \times 4 + 3 \times 5 + \ldots + 20 \times 22$

$$= 1(1 + 2) + 2(2 + 2) + 3(3 + 2) + \ldots + 22(20 + 2)$$

$$= \sum_{n=1}^{20} n(n + 2)$$

2. សរសេរគ្រប់តួទាំងអស់នៃផលបូកដោយមិនប្រើនិមិត្ត

សញ្ញា Σ :

ក. $\sum_{k=1}^{6} k = 1+2+3+4+5+6$

ខ. $\sum_{k=1}^{5} k^2 = 1^2+2^2+3^2+4^2+5^2$

គ. $\sum_{k=2}^{9} (3k-1) = (3\times 4-1)+(3\times 5-1)+(3\times 6-1)+$

$+(3\times 7-1)+(3\times 8-1)+(3-9\times 1)$

ឃ. $\sum_{k=2}^{7} (3k-1) = (-1)^2\times 2+(-1)^3\times 3+(-1)^4\times 4+$

$+(-1)^5\times(5)+(-1)^6\times 6+(-1)^7\times 7$

3. គណនា

ក. $\sum_{k=1}^{11} k^2 = 1^2+2^2+3^2+4^2+\ldots+11^2$

គេមាន $(k+1)^3-k^3 = 3k^2+3k+1$

$k = 1 : 2^3-1^3 = 3\times 1^2+3\times 1+1$

$k = 2 : 3^3-2^3 = 3\times 2^2+3\times 2+1$

$k = 3 : 4^3-3^3 = 3\times 3^2+3\times 3+1$

$$k = 11 : 12^3 - 11^3 = 3 \times 11^2 + 3 \times 11 + 1$$

$$12^3 - 1^3 = 3(1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + 11^2) + 3$$

$$+ 3(1 + 2 + 3 + \ldots + 11) + (1 + 1 + \ldots + 1)$$

$$1727 = 3\left(\sum_{k=1}^{11} k^2\right) + 3 \times \frac{11}{2}(1 + 11) + 11$$

$$= 3\left(\sum_{k=1}^{11} k^2\right) + 209$$

ដូចនេះ $\sum_{k=1}^{11} k^2 = \dfrac{1727 - 209}{3} = \boxed{506}$

ខ. $\sum_{k=1}^{24} k^2$

គេមាន $(k+1)^3 - k^3 = 3k^2 + 3k + 1$

$$k = 1 : 2^3 - 1^3 = 3 \times 1^2 + 3 \times 1 + 1$$

$$k = 2 : 3^3 - 2^3 = 3 \times 2^2 + 3 \times 2 + 1$$

$$k = 3 : 4^3 - 3^3 = 3 \times 3^2 + 3 \times 3 + 1$$

- -

$$k = 24 : 25^3 - 24^3 = 3 \times 24^2 + 3 \times 24 + 1$$

$$25^3 - 1^3 = 3(1^2 + 2^2 + \ldots + 24^2) + 3(1 + 2 + \ldots + 24) + 25$$

$$15624 = 3 \sum_{k=1}^{24} k^2 + 3 \times \frac{24}{2}(1 + 24) + 24$$

$$= 3 \sum_{k=1}^{24} k^2 + 924$$

ដូចនេះ $\sum_{k=1}^{24} k^2 = \frac{15624 - 924}{3} = \boxed{4900}$

គ. $\sum_{k=1}^{24} k^2 = \sum_{k=1}^{24} k^2 - \sum_{k=1}^{11} k^2 = 4900 - 506 = \boxed{4394}$

. គណនា :

ក. $\sum_{k=1}^{24} k^3$

គេមាន $(k+1)^4 - k^4 = 4k^3 + 6k^2 + 4k + 1$

យក $k = 1 : 2^4 - 1^4 = 4 \times 1^3 + 6 \times 1^2 + 4 \times 1 + 1$

$k = 2 : 3^4 - 2^4 = 4 \times 2^3 + 6 \times 2^2 + 4 \times 2 + 1$

$k = 3 : 4^4 - 3^4 = 4 \times 3^3 + 6 \times 3^2 + 4 \times 3 + 1$

- -

$$k = 24 : 25^4 - 24^4 = 4 \times 24^3 + 6 \times 24^2 + 4 \times 3 + 1$$

$$25^4 - 1^4 = 4(1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + 24^3) +$$

$$+ 6(1^2 + 2^2 + \ldots + 24^2) + 4(1 + 2 + 3 + \ldots + 24) + 24$$

$$390624 = 4 \sum_{k\ \ 1}^{24} k^3 + 6 \times 4900 + 4 \times \frac{24}{2}(1 + 24) + 24$$

$$= 4 \sum_{k=1}^{24} k^3 + 29400 + 1200 + 24$$

$$= 4 \sum_{k=1}^{24} k^3 + 30624$$

ដូចនេះ $\sum_{k=1}^{24} k^3 = \boxed{90000}$

ខ. $\sum_{k=1}^{15} k^3$

គេមាន $(k + 1)^4 - k^4 = 4k^3 + 6k^2 + 4k + 1$

យក $k = 1 : 2^4 - 1^4 = 4 \times 1^3 + 6 \times 1^2 + 4 \times 1 + 1$

$k = 2 : 3^4 - 2^4 = 4 \times 2^3 + 6 \times 2^2 + 4 \times 2 + 1$

$k = 3 : 4^4 - 3^4 = 4 \times 3^3 + 6 \times 3^2 + 4 \times 3 + 1$

- -

$k = 15 : 16^4 - 15^4 = 4 \times 15^3 + 6 \times 15^2 + 4 \times 15 + 1$

$$16^4 - 1^4 = 4(1^3 + 2^3 + \ldots + 15^3) +$$

$$+ 6(1^2 + 2^2 + \ldots + 15^2) + 4(1 + 2 + \ldots + 15) + 15$$

$$65535 = 4 \sum_{k=1}^{15} k^3 + 6 \times 1240 + 4 \times 120 + 15$$

$$= 4 \sum_{k=1}^{15} k^3 + 7935$$

ដូចនេះ $\sum_{k=1}^{15} k^3 = \boxed{14400}$

គ. $\sum_{k=1}^{24} k^3 = \sum_{k=1}^{24} k^3 - \sum_{k=1}^{15} k^3 = 90000 - 14400 = \boxed{75600}$

5. ក. សម្រួលកន្សោម $\sum_{k=1}^{n} k(k+1)$:

$$\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \sum_{k=1}^{n} k^2 + \sum_{k=1}^{n} k$$

គេមាន $(k+1)^3 - k^3 = 3k^2 + 3k + 1$

បើ $k = 1 : 2^3 - 1^3 = 3 \times 1^2 + 3 \times 1 + 1$

$$k = 2 : 3^3 - 2^3 = 3 \times 2^2 + 3 \times 2 + 1$$

$$k = 3 : 4^3 - 3^3 = 3 \times 3^2 + 3 \times 3 + 1$$

$$k = n : (n+1)^3 - n^3 = 3n^2 + 3n + 1$$

$$(n+1)^3 - 1^3 = 3(1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2) +$$

$$+ 3(1 + 2 + 3 + \ldots + n) + n$$

$$= 3\sum_{k=1}^{n} k^2 + 3\sum_{k=1}^{n} k + n$$

$$3\left(\sum_{k=1}^{n} k^2 + \sum_{k=1}^{n} k\right) = (n+1)^3 - 1^3 - n$$

$$3\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = (n+1)(n^2 + 2n)$$

ដូចនេះ $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$

ខ. គណនាផលបូកដោយប្រើចម្លើយក្នុងសំណួរ ក :

$$1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 4 + \ldots + 28 \times 29 = \sum_{k=1}^{28} k(k+1)$$

$$= \frac{28(28+1)(28+2)}{3} = \boxed{8120}$$

6. ក. សម្រួលកន្សោម :

$$\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2) = \sum_{k=1}^{n} (k^3 + 3k^2 + 2k)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} k^3 + 3\sum_{k=1}^{n} k^2 + 2\sum_{k=1}^{n} k$$

ដោយ $(k+1)^4 - k^4 = 4k^3 + 6k^2 + 4k + 1$

យក $k = 1 : 2^4 - 1^4 = 4 \times 1^3 + 6 \times 1^2 + 4 \times 1 + 1$

$k = 2 : 3^4 - 2^4 = 4 \times 2^3 + 6 \times 2^2 + 4 \times 2 + 1$

$k = 3 : 4^4 - 2^4 = 4 \times 3^3 + 6 \times 3^2 + 4 \times 3 + 1$

- -

$k = n : (n+1)^4 - n^4 = 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1$

$$(n+1)^4 - 1^4 = 4(1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3) +$$

$$+ 6(1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2) + 4(1 + 2 + 3 + \ldots + n) + n$$

$$(n+1)^4 - 1 = 4\sum_{k=1}^{n} k^3 + 6\sum_{k=1}^{n} k^2 + 4\sum_{k=1}^{n} k + n$$

$$4\sum_{k=1}^{n}k^3+6\sum_{k=1}^{n}k^2+4\sum_{k=1}^{n}k=(n+1)^4-(n+1)$$

$$2\sum_{k=1}^{n}k^3+3\sum_{k=1}^{n}k^2+2\sum_{k=1}^{n}k=\frac{(n+1)(n+1)^3-(n+1)}{2}$$

$$\sum_{k=1}^{n}k^3+\left(\sum_{k=1}^{n}k^3+3\sum_{k=1}^{n}k^2+2\sum_{k=1}^{n}k\right)=\frac{(n+1)[(n+1)^3-1]}{2}$$

$$\sum_{k=1}^{n}k^3+\sum_{k=1}^{n}k(k+1)(k+2)=\frac{(n+1)n(n^2+3n+3)}{2}$$

$$\sum_{k=1}^{n}k(k+1)(k+2)=\frac{n(n+1)(n^2+3n+3)}{2}-\sum_{k=1}^{n}k^3$$

$$=\frac{n(n+1)(n^2+3n+3)}{2}-\frac{n(n+1)^2}{4}$$

$$=\boxed{\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}}$$

ខ. គណនាផលបូកដោយប្រើសំណួរ ក :

$1\times2\times3+2\times3\times4+3\times4\times5+\ldots+20\times21\times22$

$$=\sum_{k=1}^{20}k(k+1)(k+2)=\frac{20(20+1)(20+2)(20+3)}{4}$$

$$=\boxed{153130}$$

7. ក. កំណត់តួទី n នៃស្វ៊ីត

គេមាន $1;2;5;10;17;\ldots$

តាង (a_n) : ជាតួទី n នៃស្វ៊ីត

តាង (b_n) ជាផលសងស្វ៊ីតលំដាប់ ។ នៃ (a_n)

$$b_n = a_{n+1} - a_n$$

គេបាន (b_n) : $1;3;5;7;\ldots$ នោះ (b_n) ជាស្វ៊ីតនព្វន្ត

ដែលមាន $b_1 = 1$ និង $d = 2$

គេបាន $b_n = 1 + 2(n-1) = 2n - 1$

ចំពោះ $n \geq 2$ នោះ $a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} bk$

$$= 1 + \sum_{k=1}^{n-1} (2k-1)$$

ដូចនេះ $a_n = n^2 - 2n + 2$

ខ. គណនាផលបូក n តួដំបូងនៃស្វ៊ីត :

គេបាន

$$1 + 2 + 5 + 10 + 17 + \ldots + (n^2 - 2n + 2) = \sum_{k=1}^{n} (k^2 - 2k + 2)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} k^2 - 2\sum_{k=1}^{n} k + 2\sum_{k=1}^{n} k$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 2\frac{n(n+1)}{2} + 2n$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1) - 6n(n+1) + 12n}{6} = \boxed{\frac{n}{6}(2n^2 - 3n + 7)}$$

8. ក. កំណត់តួទី n នៃស្វ៊ីត $1;5;14;30;55;91;\ldots$

តាង a_n ជាតួទី n នៃស្វ៊ីត ហើយ (b_n) ជាផលសងស្វ៊ីត

លំដាប់ ١ នៃ (a_n) ដែល $b_n = a_{n+1} - a_n$

នោះ (b_n) : $4;9;16;25;36;\ldots$

តាង (c_n) ជាផលសងលំដាប់ ١ នៃ (b_n)

ដែល (c_n) : $5;7;9;11;\ldots$

នោះ (c_n) ជាស្វ៊ីតនព្វន្តដែល $c_1 = 5$ និង $d = 2$

គេបាន $c_n = 5 + 2(n-1) = 2n+3$

ចំពោះ $n \geq 2$ នោះ $b_n = b_1 + \sum_{k=1}^{n-1} c_k$

$$b_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} (2k+3) = 4 + n(n-1) + 3(n-1)$$

$$= n^2 + 2n + 1$$

ចំពោះ $n \geq z$:

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} (k^2 + 2k + 1)$$

$$= 1 + \frac{1}{6}n(n-1)(2n-1) + n(n-1) + (n-i)$$

$$= \frac{2n^3 + 3n^2 + 7n - 6}{6}$$

ខ. រកផលបូក n តួដំបូងនៃស៊ីត :

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_n = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{2k^3 + 3k^2 + 7k - 6}{6}\right)$$

$$= \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n} k^3 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} k^2 + \frac{7}{6}\sum_{k=1}^{n} k - \sum_{k=1}^{n} 1$$

$$= \frac{1}{18}n(n+1)(2n+1) + \frac{n^2(n+1)^2}{8} + \frac{7n(n+1)}{12} - n$$

$$= \boxed{\frac{n^4 + 4n^3 + 11n^2 - 64n}{12}}$$

9. កំណត់តួទី n នៃស៊ីត (a_n)

$$p = \frac{1}{2}[(p+q)+(-1)^0(p-q)]$$

$$q = \frac{1}{2}[(p+q)+(-1)^1(p-q)]$$

$$p = \frac{1}{2}[(p+q)+(-1)^2(p-q)]$$

ដូចនេះ $a_n = \frac{1}{2}[(p+q)+(-1)^{n-1}(p-q)]$

ជំពូក ១

លំហាត់

មេរៀនទី ២ ទំនាក់ទំនងតួនៃស្វ៊ីត

1. ស្វ៊ីត (a_n) កំណត់ដោយទំនាក់ទំនងកំណើនដូចខាងក្រោម :

   ក. $a_1 = 3, a_{n+1} = 2a_n - 4$

   ខ. $a_1 = 5, a_{n+1} = 3a_n - 2n$ ។

2. ស្វ៊ីត (a_n) កំណត់ដោយទំនាក់ទំនងកំណើន $a_1 = 1, a_2 = 2, a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ ។ កំណត់តួទី 7 នៃស្វ៊ីតនេះ។

3. ស្វ៊ីត (a_n) កំណត់ដោយទំនាក់ទំនងកំណើន $a_1 = 1, a_{n+1} = pa_n + q$ ។ គណនាតម្លៃ p និង q បើគេដឹងតួទី 3 ស្មើ 6 និងតួទី 5 ស្មើ 86 ។

4. កំណត់តួទូទៅនៃស្វ៊ីត (a_n) កំណត់ដោយទំនាក់ទំនងកំណើនដូចខាងក្រោម :

ក. $a_1 = 1, 3a_{n+1} = 2a_n + 3 (n = 1, 2, \ldots)$

ខ. $a_1 = 1, 3a_{n+1} = 3a_n + 4 (n = 1, 2, \ldots)$

គ. $a_1 = 1, a_{n+1} = a_n + n (n = 1, 2, \ldots)$

5. គេមានស៊ីត (a_n) កំណត់ដោយ

$$a_1 = 4, a_{n+1} = \frac{4a_n - 9}{a_n - 2} (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

ក. ស្រាយបញ្ជាក់ថា $a_n \neq 3$ ចំពោះគ្រប់ n ។

ខ. យក $b_n = \dfrac{1}{a_n - 3}$ និងកំណត់តួទូទៅនៃស៊ីត (b_n) ។ កំណត់តួទូទៅនៃស៊ីត (a_n) ។

6. គេមាន S_n ជាផលបូក n តួដំបូងនៃស៊ីត (a_n) ។ បើ S_n បំពេញលក្ខខណ្ឌ $S_n = 4 - a_n - \dfrac{1}{2^{n-2}} (n = 1, 2, 3, \ldots)$ ។

ក. កំណត់ទំនាក់ទំនងកំណើនរវាង a_{n+1} និង a_n ។

ខ. កំណត់តួទី n នៃស៊ីត (a_n) ។

7. គេមាន S_n ជាផលបូក n តួដំបូងនៃស៊ីត a_n ហើយ បំពេញលក្ខខណ្ឌ a_n : $a_1 = 1$, $S_n = a_{n+1} + n^2$

$n \geq 1$ ។ កំណត់តួទី n នៃស្វ៊ីត a_n ។

8. គេមាន S_n ជាផលបូក n តួដំបូងនៃស្វ៊ីត a_n ហើយ S_n បំពេញលក្ខខណ្ឌ $S_n = \frac{n}{n-1} \cdot a_n$ $n \geq 2$ ។

ក. បញ្ជាក់រក a_n $(n \geq 3)$ អនុគមន៍នឹង n និង a_{n-1} ។

ខ. បញ្ជាក់រក S_n $(n \geq 2)$ អនុគមន៍នឹង n និង S_{n-1} ។

គ. ឧបមាថា $a_1 = 1$ រកតួទី n នៃស្វ៊ីត S_n ដែល $n \geq 1$

9. គេមានស្វ៊ីត a_n កំណត់ដោយទំនាក់ទំនងកំណើន

$a_n : a_1 = 2, a_{n+1} = \frac{a_n}{a_n + 3}(n = 1, 2, 3, \ldots)$ ។

ក. តាង $b_n = \frac{1}{a_n}$ ។ កំណត់ទំនាក់ទំនងកំណើនរវាង b_n និង b_{n+1} ។

ខ. កំណត់តួទី ន នៃស្វ៊ីត a_n ។

ចម្លើយ

1. កំណត់តួទី 4 នៃស្វ៊ីត

ក. $a_1 = 3 ; a_{n+1} = 2a_n - 4$

បើ $n = 1$ នោះ $a_2 = 2$; $a_3 = 0$; $a_4 = -4$

ដូចនេះតួនៃស៊ីត 3;2;0;–4 ។

ខ. $a_1 = 5$; $a_{n+1} = 3a_n - 2n$

ដូចនេះតួនៃស៊ីត 5;13;35;96

2. កំណត់តួទី 7 នៃស៊ីត

គេមាន $a_1 = 1$; $a_2 = 2$; $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$

បើ $n = 1$ នោះ $a_3 = a_2 + a_1 = 1 + 2 = 3$

បើ $n = 2$ នោះ $a_4 = a_3 + a_2 = 3 + 2 = 5$

បើ $n = 3$ នោះ $a_5 = a_4 + a_3 = 5 + 3 = 8$

បើ $n = 4$ នោះ $a_6 = a_5 + a_4 = 8 + 5 = 13$

បើ $n = 5$ នោះ $a_7 = a_6 + a_5 = 13 + 8 = 21$

3. គណនា p និង q :

គេមានទំនាក់ទំនងកំណើននៃ a_n គឺ $a_1 = 1$;

$a_{n+1} = pa_n + q$

គេបាន $a_{n+1} = pa_n + q$

បើ $n = 1 ; a_2 = pa_1 + q = p + q$

$n = 2 ; a_3 = pa_2 + q = p(p+q) + q = p^2 + pq + q$

$n = 3 ; a_4 = pa_3 + q = 6p + q$

$n = 4 ; a_5 = pa_4 + q = p(6p+q) + q$

តែ $a_5 = 86 \Leftrightarrow p(6p+q) + q = 86$

$$6p^2 + pq + q = 86$$

$$5p^2 + (p^2 + pq + q) = 86$$

$$5p^2 + 6 = 86 \Rightarrow p = \pm 4$$

ចំពោះ $p = 4 \Leftrightarrow 16 + 4q + q = 6$ នោះ $q = -2$

ចំពោះ $p = -4 \Leftrightarrow 16 - 4q + q = 6$ នោះ $q = \frac{10}{3}$

ដូចនេះ $(p = 4 \ ; \ q = -2) ; \left(p = -4 \ ; \ q = \frac{10}{3}\right)$

4. កំណត់តួទូទៅនៃ (a_n)

ក. $a_1 = 1 ; 3a_{n+1} = 2a_n + 3 ; (n = 1;2;\ldots)$

គេបាន $a_{n+1} = \frac{1}{3}(2a_n + 3) \Rightarrow a_n = \frac{1}{3}(2a_{n-1} + 3)$;

$(n \geq 2)$

តាង $b_n = a_{n+1} - a_n = \frac{2}{3}(a_n - a_{n-1})$

$$= \frac{2}{3}b_{n-1}$$

$\Rightarrow \frac{b_n}{b_{n-1}} = \frac{2}{3}$ នោះ (b_n) ជាស្វ៊ីតធរណី ប $q = \frac{2}{3}$

តែ $a_z = \frac{1}{3}(2a_1 + 3) = \frac{1}{3}(2+3) = \frac{5}{3}$

នោះ $b_1 = a_2 - a_1 = \frac{5}{3} - 1 = \frac{2}{3}$

$$b_n = b_1 q^{n-1} = \frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} = \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

គេបាន $a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{2}{3}\right)^k = 1 + \left(\frac{2}{3}\right)^1 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$

$$= \frac{1 \times \left[\left(\frac{2}{3}\right)^n - 1\right]}{\frac{2}{3} - 1} = \boxed{3\left[1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n\right]}$$

ខ. $a_1 = 1$; $3a_{n+1} = 3a_n + 4$; $(n = 1;2;\ldots)$

គេបាន $a_{n+1} = \frac{1}{3}(3a_n + 4) \Rightarrow a_n = \frac{1}{3}(3a_{n-1} + 4)$; $(n \geq 2)$

$$a_2 = \frac{1}{3}(3a_1 + 4) = \frac{1}{3}(3 \times 1 + 4) = 1 + \frac{4}{3}(2 - 1)$$

$$a_3 = \frac{1}{3}(3a_2 + 4) = \frac{1}{3}\left[3\left(1 + \frac{4}{3}\right) + 4\right] = 1 + \frac{4}{3}(3 - 1)$$

ដូចនេះ $\boxed{a_a = 1 + \frac{4}{3}(n - 1)}$

គ. $a_1 = 1$; $a_{n+1} = a_n + n$

គេបាន $a_{n+1} = a_n + n$ នោះ $a_n = a_{n-1} + (n - 1)$

តាង $b_n = a_{n+1} - a_n = a_n - a_{n-1} + 1$

$$= b_{n-1} + 1$$

នោះ $b_n - b_{n-1} = 1 \Rightarrow (b_n)$ ជាស្វ៊ីតនព្វន្តដែល $d = 1$

តែ $a_2 = a_1 + n = 1 + n$

$b_1 = a_2 - a_1 = 1 + n - 1 = n$

$$\Rightarrow b_n = b_1 + (n - 1)d = n + n - 1 = 2n$$

គេបាន $a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} 2k = 1 + 2 + 4 + 6 + \ldots + 2(n - 1)$

$$= 1 + \frac{n-1}{4}(2 + 2(n-1)) = \boxed{\frac{n^2 - n + 2}{2}}$$

5. ក. ស្រាយបញ្ជាក់ថា $a_n \neq 3$ គ្រប់ n

គេមានស៊ីត (a_n) ; $a_1 = 4$; $a_{n+1} = \dfrac{4a_n - 9}{a_n - 2}$;

$(n = 1;2;3;\ldots)$

ឧបមាថា $a_k = 3$ នោះយើងបាន

$$a_{k+1} = \frac{4a_k - 9}{a_k - 2} = \frac{4 \times 3 - 9}{3 - 2} = 3$$

គេបាន $a_{k+1} = a_k = \ldots = a_2 = a_1 = 3$

តែ $a_1 = 4$ សម្មតិកម្ម

នាំឱ្យការឧបមាថា $a_k = 3$ មិនពិត

ដូចនេះ $a_n \neq 3$; គ្រប់ n

ខ. កំណត់តួទូទៅនៃ b_n :

គេមាន $b_n = \dfrac{1}{a_n - 3}$

គេបាន $b_1 = \dfrac{1}{a_1 - 3} = \dfrac{1}{4 - 3} = 1$

$$b_2 = \frac{1}{a_2 - 3} = \frac{1}{\frac{7}{2} - 3} = 2$$

$$b_3 = \frac{1}{a_3 - 3} = \frac{1}{\frac{10}{3} - 3} = 3$$

គេបាន (b_n) ជាស្វ៊ីតនព្វន្តដែលមាន $b_1 = 1$ និង $d = 1$

ដូចនេះ $\boxed{b_n = n}$

- ទាញរកតួទូទៅ a_n

គេមាន $b_n = \frac{1}{a_n - 3}$ នោះ $a_n - 3 = \frac{1}{b_n}$

$$\Rightarrow a_n = \frac{1}{b_n} + 3 = \boxed{\frac{1}{n} + 3}$$

6. ក. រកទំនាក់ទំនងរវាង a_{n+1} និង a_n :

គេមាន $\delta_n = 4 - a_n - \frac{1}{2^{n-2}}$; $(n = 1;2;\ldots)$

$$\delta_{n+1} = 4 - a_{n+1} - \frac{1}{2^{n-1}}$$

គេបាន $a_{n+1} = \delta_{n+1} - \delta_n = 4 - a_{n+1} - \frac{1}{2^{n-1}} - 4 + a_n + \frac{1}{2^{n-2}}$

$$= -a_{n+1} + a_n + \frac{1}{2^{n-1} \times 2^{-1}} - \frac{1}{2^{n-1}}$$

ដូចនេះ $\boxed{2a_{n+1} = a_n + \frac{1}{2^{n-1}}}$

ខ. កំណត់តួទី n នៃស្វ៊ីត (a_n)

គេមានគ្រប់ $n \geq 2$ នោះ $\delta_1 = a_1$

គេបាន $\delta_1 = 4 - a_1 - \frac{1}{2^{-1}}$ ឬ $2a_1 = 4 - 2 = 2 \Rightarrow a_1 = 1$

គេមាន $2a_{n+1} = a_n + \frac{1}{2^{n-1}}$

$2^{n+1}a_{n+1} = 2^n a_n + 2$ (គុណទំនាក់ទំនងខាងលើនឹង 2^n)

តាង $b_{n+1} = 2^{n+1} \cdot a_{n+1}$ នោះ $b_n = 2^n a_n$

គេបាន $b_{n+1} = b_n + 2$ នោះ (b_n) ជាស្វ៊ីតនព្វន្តដែល

$b_1 = 2a_1 = 2$ និងផលសងរួម $d = 2$

នោះ $b_n = b_1 + (n-1)d = 2 + 2(n-1) = 2n$

គេបាន $2^n a_n = 2n$

ដូចនេះ $\boxed{a_n = \frac{n}{2^{n-1}}}$

7\. រកតួទី n នៃស្វ៊ីត (a_n) :

គេមាន $\delta_n = a_{n+1} + n^2$

គេបាន $a_n = \delta_n - \delta_{n-1} = (a_{n+1} + n^2) - [a_n + (n-1)^2]$

$$= a_{n+1} - a_n + 2n - 1$$

$$a_{n+1} = 2a_n - 2n + 1$$

ដូចនេះស្វ៊ីត (a_n) កំណត់ដោយទំនាក់ទំនងកំនើន

$a_{n+1} = 2a_n - 2n + 1$

8\. ក. បញ្ជាក់ a_n $(n \geq 3)$ ជាអនុគមន៍នឹង n និង $a_n - 1$

គេមាន $\delta_n = \dfrac{n}{n-1}a_n$ នោះ $\delta_{n-1} = \dfrac{n-1}{n-2} \cdot a_{n-1}$

$$a_n = \delta_n - \delta_{n-1} = \frac{na_n}{n-1} - \frac{(n-1)a_{n-1}}{n-2}$$

$$\frac{(n-1)a_n - na_n}{n-1} = -\frac{(n-1)a_{n-1}}{n-2}$$

$$\frac{-a_n}{n-1} = -\frac{(n-1)a_{n-1}}{n-2}$$

ដូចនេះ $\boxed{a_n = \dfrac{(n-1)^2}{n-2}a_{n-1}}$

ខ. ទាញរក δ_n $(n \geq 2)$ ជាអនុគមន៍នៃ n និង δ_{n-1}

គេមាន $a_n = \frac{(n-1)^2}{(n-2)} a_{n-1}$

$$\delta_n - \delta_{n-1} = \frac{(n-1)a_{n-1}}{n-2} \times (n-1)$$

នោះ $\delta_n = \delta_{n-1} \times (n-1) + \delta_{n-1}$

ដូចនេះ $\boxed{\delta_n = n\delta_{n-1}}$

គ. រកតួទី n នៃស្វីត δ_n , $(n \geq 1)$:

គេមាន $a_1 = 1$; $\delta_n = n\delta_{n-1}$; $\delta_1 = a_1 = 1$

9. ក. កំណត់ទំនាក់ទំនងកំនើនរវាង b_n និង b_{n+1}

គេមាន $a_2 = 2$; $a_{n+1} = \frac{a_n}{a_n + 3}$ នោះ $a_n > 0$ គ្រប់ n

គេបាន $\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{a_n + 3}{a_n} = 1 + \frac{3}{a_n}$

តាង $b_n = \frac{1}{a_n}$ គេបាន $b_{n+1} = 1 + 3b_n$

ដូចនេះ $\boxed{b_{n+1} = 3b_n + 1}$

ខ. កំណត់តួទី n នៃស្វ៊ីត (a_n) :

គេមាន $b_{n+1} = 3b_n + 1$

$$b_{n+1} + \frac{1}{2} = 3\left(b_n + \frac{1}{2}\right)$$

តាង $V_{n+1} = b_{n+1} + \frac{1}{2}$ នោះ $V_n = b_n + \frac{1}{2}$

គេបាន $V_{n+1} = 3V_n$ នោះ V_n ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ $q = 3$

$b_1 = \frac{1}{a_1} = \frac{1}{2}$ នោះ $V_1 = b_1 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$

នោះ $V_n = V_1 q^{n-1} = 3^{n-1}$

តែ $V_n = b_n + \frac{1}{2}$

នោះ $b_n + \frac{1}{2} = 3^{n-1}$ នោះ $b_n = 3^{n-1} - \frac{1}{2}$

ម្យ៉ាងទៀត $b_n = \frac{1}{a_n}$

នោះ $a_n = \frac{1}{b_n} = \frac{1}{3^{n-1} - \frac{1}{2}} = \frac{2}{2 \times 3^{n-1} - 1}$

លំហាត់

មេរៀនទី ៣ វិចារអនុមានរួមគណិតវិទ្យា

1. ស្រាយបញ្ជាក់ថា ចំពោះគ្រប់ $n \geq 1$;

$1^2 + 2^2 + 3^3 + \ldots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ ដោយ

ប្រើវាចារអនុមានរួមគណិតវិទ្យា។

2. បង្ហាញថាចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ n

ក. ចំនួន $4^n + 2$ ចែកដាច់នឹង 3 ។

ខ. ចំនួន $3^{n+3} - 4^{4n+2}$ ចែកដាច់នឹង 11 ។

3. គេមានស៊ីត $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ កំណត់ដោយ

$U_{n+1} = \sqrt{U_n + 2}$ និង $U_0 = 0$ ។

ក. ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ $n, U_n \leq 2$ ។

ខ. ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ $n, U_n \leq U_{n+1}$ ។

4. បង្ហាញតាមវាចារអនុមានរួមគណិតវិទ្យាថា ចំពោះគ្រប់

ចំនួនគត់ធម្មជាតិ n $(1+x)^n \geq 1 + nx + \dfrac{n(n-1)}{2}x^2$

ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត $n \geq 0$ ។

5. ដោយប្រើទ្រឹស្តីបទទ្វេធា ចូរពន្លាតកន្សោមខាងក្រោម

ក. $(3x-1)^4$ ខ. $(2x+y)^6$ គ. $(a+b)^6$ ។

6. សរសេរពន្លាតកន្សោមខាងក្រោមដោយប្រើ Σ :

ក. $(a-y)^5$ ខ. $(2x+y)^6$ គ. $(a+b)^{12}$ ។

ចម្លើយ

1. ស្រាយបញ្ជាក់ថាចំពោះគ្រប់ $n \geq 1$:

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

- ចំពោះ $n = 1$ នោះ $1 = 1$ (ពិត)

- ចំពោះ $n = 2$ នោះ $5 = 5$ (ពិត)

- ឧបមាថា $n = k$

នោះ $1^2+2^2+3^2+\ldots+k^2 = \dfrac{k(k+1)(2k+1)}{6}$ (ពិត)

- យើងស្រាយថាពិតដល់ $n = k+1$

គេមាន $1^2+2^2+3^2+\ldots+k^2 = \dfrac{k(k+1)(2k+1)}{6}$

- ឧបមាថាពិតដល់ $n = k$ គឺ $3^{k+3} - 4^{4k+2}$ ចែកដាច់ 11

គឺ $3^{k+3} - 4^{4k+2} = 11m$; $(m \in \mathbb{Z})$

- យើងស្រាយថាពិតដល់ $n = k+1$

គេបាន $P_{(k+1)} = 3^{(k+1)+3} - 4^{4(k+1)+2}$

$$= 3^{k+4} - 4^{4k+6}$$

$$= 3 \times 3^{k+3} - 4 \times 4^{4k+2}$$

$$= 3(3^{k+3} - 4^{4k+2}) - 253 \times 4^{4k+2}$$

$$= 3(11m) - 23(11 \times 4^{4k+2})$$

$$= 11(3m - 23 \times 4^{4k+2})$$ ចែកដាច់នឹង11

ដូចនេះ $P_{(n)} = 3^{n+3} - 4^{4n+2}$ ចែកដាច់នឹង 11 ។

3. ក. បង្ហាញថា $u_n \leq 2$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ n

គេមាន $u_0 = 0$; $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2}$; $n \in \mathbb{N}$

ចំពោះ $n = 0$ នោះ $u_1 = \sqrt{u_0 + 2} = \sqrt{2} \leq 2$ (ពិត)

ចំពោះ $n = 1$ នោះ $u_2 = \sqrt{u_1 + 2} = \sqrt{\sqrt{2} + 2} \leq 2$ (ពិត)

ឧបមាថាពិតដល់ $n = k$ គឺ $u_k \leq 2$ (ពិត)

យើងស្រាយថាពិតដល់ $n = k+1$

គេបាន $u_k \leq 2$ នោះ $u_k + 2 \leq 4$ នោះ $\sqrt{u_k + 2} \leq 2$

នាំឱ្យ $u_{k+1} = \sqrt{u_k + 2} \leq 2$ ពិត

ដូចនេះ $\boxed{u_n \leq n; \quad \text{គ្រប់ } n \in \mathbb{N}}$

ខ. បង្ហាញថា $u_n \leq u_{n+1}$ ចំពោះគ្រប់ $n \in \mathbb{N}$

ចំពោះ $n = 0$ នោះ $u_0 = 0 \leq u_1 = \sqrt{2}$ (ពិត)

ចំពោះ $n = 1$ នោះ $u_1 = \sqrt{2} \leq u_2 = \sqrt{\sqrt{2} + 2}$ (ពិត)

ឧបមាថាពិតដល់ $n = k$ គឺ $u_k \leq u_{k+1}$ (ពិត)

យើងស្រាយថាពិតដល់ $n = k+1$

គេបាន $u_k \leq u_{k+1}$ ឬ $u_k + 2 \leq u_{k+1} + 2$

$\sqrt{u_k + 2} \leq \sqrt{u_{k+1} + 2}$ ឬ $u_{k+1} \leq u_{k+2}$ (ពិត)

ដូចនេះ $\boxed{u_n + u_{n+1} \text{ គ្រប់ } n \in \mathbb{N}}$

4. បង្ហាញថា $(1+x)^n \geq 1 + nx + \dfrac{n(n-1)x^2}{2}$; $x \geq 0$

- បើ $n = 1$ គេបាន $1 + x \geq 1 + x$ (ពិត)

$$1^2+2^2+3^2+\dots+k^2+(k+1)^2=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}+(k+1)^2$$

$$=\frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6} \text{ (ពិត)}$$

ដូចនេះ $1^2+2^2+3^2+\dots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ (ពិត)

2. បង្ហាញថាចំពោះគ្រប់ចំនួនពិតធម្មជាតិ n

ក. 4^n+2 ចែកដាច់នឹង 3

គេមាន $4^n+2 = 4^n-1+3$

$$= (4-1)(4^{n-1}+4^{n-2}+\dots+4+1)+3$$

$$= 3(4^{n-1}+4^{n-2}+\dots+4+1)+3$$

$$= 3[(4^{n-1}+4^{n-2}+\dots+4+1)+1]$$

$3k$ ដែល $k=(4^{n-1}+4^{n-2}+\dots+4+1)+1$

ដូចនេះ 4^n+2 ចែកដាច់នឹង 3 ។

ខ. $3^{n+3}-4^{4n+2}$ ចែកដាច់ 11

តាង $P_{(n)} = 3^{n+3}-4^{4n+2}$

- ចំពោះ $n = 1$ នោះ $P_{(1)} = 3^4-4^6 = -4015$

ចែកដាច់ 11

- បើ $n = 2$ គេបាន $(1+x)^2 \geq 1 + 2x + x^2$ (ពិត)

- ឧបមាថាពិតដល់ $n = k$

  គឺ $(1+x)^k \geq 1 + kx + \dfrac{k(k-1)x^2}{2}$ (ពិត)

- យើងស្រាយថាពិតដល់ $n = k+1$

គេមាន $(1+x)^k \geq 1 + kx + \dfrac{k(k-1)x^2}{2}$

$$(1+x)^k(1+x) \geq \left[1' + kx + \frac{k(k-1)x^2}{2}\right](1+x)$$

$$(1+x)^{k+1} \geq \left[1 + (k+1)x + \frac{k(k+1)x^2}{2} + \frac{k(k-1)x^3}{2}\right]$$

នោះ $(1+x)^{k+1} \geq 1 + (k+1)x + \dfrac{k(k+1)x^2}{2}$ (ពិត)

ដូចនេះ $(1+x)^n \geq 1 + nx + \dfrac{n(n-1)x^2}{2}$; $x \geq 0$

5. ប្រើទ្រឹស្តីបទទ្វេធាពន្លាតកន្សោម :

ក. $(3x - 1^4) = 81x^4 - 108x^3 + 54x^2 - 12x + 1$

ខ. $(2x+y)^6 = 64x^6 + 19x^5y + 240x^4y^2 +$

$$+ 160x^3y^3 + 60x^2y^4 + 12xy^5 + y^6$$

គ. $(a+b)^6 = a^6 + a^5b + a^4b^2 + a^3b^3 + a^2b^4 + ab^5 + b^6$

6. ពន្លាតកន្សោមដោយប្រើ Σ

ក. $$(x-y)^5 = \sum_{r=0}^{5} C(5;r)x^{5-r}(-y)^r$$

$$= x^5 - 5x^4y + 10x^3y^2 - 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^5$$

ខ. $$(2x+y)^6 = \sum_{r=0}^{6} C(6;r)(2x)^{6-r}y^r$$

$$= (2x)^6 + 6(2x)^5y + 15(2x)^4y^2 +$$

$$+ 20(2x)^3y^3 + 15(2x)^2y^4 + 6(2x)y^5 + y^6$$

គ. $$(a+b)^{12} = \sum_{r=0}^{12} C(12;r)a^{12-r}b^r$$

$$= C(12;0)a^{12} + C(11;1)a^{11}b + \ldots + C(12;12)b^{11}$$

វិញ្ញាសា (?) វិពូក ១

លំហាត់

1. សរសេរបីតួដំបូងនៃស្វ៊ីតនព្វន្តដោយដឹងថា $S_{10} = 210$ និង $S_{20} = 820$ ។

2. គេដឹងថាផលបូកតួទី 1 និងតួទី 4 នៃស្វ៊ីតនព្វន្តស្មើនឹង 2 និងផលបូកការេរបស់វាស្មើនឹង 20។ គណនាផលបូកប្រាំបីតួដំបូងនៃស្វ៊ីត។

3. គេមាន S_m និង S_n ជាផលបូក m តួដំបូង និង n តួដំបូងរៀងគ្នានៃស្វ៊ីតនព្វន្តមួយដែល $\frac{S_m}{S_n} = \frac{m^2}{n^2} (n \neq m)$ ។ តាងតួទី m គឺ u_m និងតួទី n គឺ u_n ។ បង្ហាញថា $\frac{u_m}{u_n} = \frac{2m-1}{2n-1}$ ។

4. គេមានស្វ៊ីតធរណីមាត្រ $12, 4, \frac{4}{3}, \ldots$ ។

ក. គណនាតួទី 10

ខ. តើចំនួន $\frac{4}{729}$ ជាតួទីប៉ុន្មាននៃស៊ីត ?

គ. គណនាផលបូក 20 តួដំបូងនៃស៊ីតធរណីមាត្រ។

5. គេឱ្យ (U_n) ជាស៊ីតធរណីមាត្រ បើគេដឹងថា

$U_n = 2(2)^{n-1}$ ។ គណនា S_n ។

6. គណនាផលបូកស៊ីតធរណីមាត្រ

$1 + 2x + 3x^2 + \ldots + (n-1)x^{n-2} + nx^{x-1}$ ។

7. គណនាតួទី 1 នៃស៊ីតធរណីមាត្រអនន្តតួដែលមាន

$q = \frac{3}{5}$ និង $S\infty = 40$ ។

8. គេឱ្យបីចំនួនជាស៊ីតធរណីមាត្រ។ គណនាចំនួនទាំងនោះ បើគេដឹងថាផលគុណនៃចំនួនទាំងនោះស្មើនឹង 3375 ហើយផលបូកវាស្មើនឹង 93 ។

9. គណនាផលបូក n តួដំបូងនៃស៊ីតនីមួយៗខាងក្រោម

ក. ស៊ីត (a_n) : $1, \frac{1}{1+2}, \frac{1}{1+2+3}, \ldots, \frac{1}{1+2+3+4+\ldots+n}$

ខ. ស៊ីត (b_n) : $\frac{1}{(1\times 3)^2}, \frac{2}{(3\times 5)^2}, \frac{3}{(5\times 7)^2}, \ldots,$

$$, \frac{n}{[(2n-1)(2n+1)]^2}$$

10. ក. កំណត់តួទី n នៃស្វ៊ីត 1, 3, 6, 15, 31, 56, …

ខ. គណនាផលបូក n តួដំបូងនៃស្វ៊ីតនេះ។

11. ក. គណនា $\sum_{k=1}^{n} (2k^2 - 1)$

ខ. ដោយប្រើសំណួរ ក. គណនាផលបូក

$1 + 7 + 17 + 31 + \ldots + 799$

12. សរសេរផលបូក $1 + 4 + 7 + 10 + 13 + \ldots + 298$

ដោយប្រើ Σ ។

13. ដោយប្រើវិចារអនុមានរួមគណិតវិទ្យា ស្រាយបញ្ជាក់

ថា $\sum_{k=1}^{n} 2^{k-1} = 2^n - 1$ ។

14. គេមានស្វ៊ីត (U_n) កំណត់ដោយ $U_{n+1} = 2U_n + 1$

និង $U_0 = 1$ ហើយស្វ៊ីត (V_n) កំណត់ដោយ

$V_n = U_n + 1$ ។

ក. បង្ហាញថាស្វ៊ីត (V_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ។

ខ. ទាញរក U_n ជាអនុគមន៍នៃ n។

គ. សិក្សាភាពម៉ូណូតូននៃស្វ៊ីត (U_n)។

ឃ. ចំពោះគ្រប់ $n \in \mathbb{N}$ គណនាផលបូក

$S_n = U_0 + U_1 + U_2 + \ldots + U_n$។

15. គេមានស្វ៊ីត (U_n) កំណត់ដោយ $U_{n+1} = \frac{U_n + 2}{U_n + 1}$

និង $U_0 = 2$។

ក. គណនា U_1, U_2, U_3។

ខ. បង្ហាញថាចំពោះគ្រប់ $n \in \mathbb{N}$,

$$U_{n+1} - \sqrt{2} = \frac{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}-U_n)}{U_n + 1}$$ ។

គ. បង្ហាញថាចំពោះគ្រប់ $n \in \mathbb{N}$, $U_n > 1$។

ឃ. ទាញពីសំណួរ ខ. និង គ. ថា

$$\left|U_{n+1} - \sqrt{2}\right| \leq \frac{\sqrt{2}-1}{2} \times \left|\sqrt{2} - U_0\right|$$ ។

ឃ. បង្ហាញថាវាចារអនុមានរួមគណិតវិទ្យាថា

$$\left|U_n - \sqrt{2}\right| \le \left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)^n \times \left|\sqrt{2} - U_0\right|$$ ។

16.គេមាន (a_n) កំណត់ដោយទំនាក់ទំនងកំណើន

$$a_1 = 1, a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + n$$

ក. តាង $b_n = 2^n a_n$ ។ កំណត់តួទី n នៃស៊ីត (a_n) ។

ខ. កំណត់តួទី n នៃស៊ីត (b_n) ។

17.ក. សរសេរ $(x^2 - 2y)^7$ ដោយប្រើ Σ

ខ. កំណត់តួទី 6 នៃពន្លាត $(x^2 - 2y)^7$ ។

18.បង្ហាញថាផលបូកនៃលេខមេគុណក្នុងពន្លាត $(1 + x)^n$ គឺ 2^n ។

19.បង្ហាញថា $C(n, 0) + C(n, 2) + C(n, 4) + \ldots + C(n, n-1)$

$= C(n, 1) + C(n, 3) + C(n, 5) + \ldots + C(n, n) = 2^{n-1}$ ដែល

$C(n, 0), C(n, 1), C(n, 2), \ldots, C(n, n)$ ជាលេខមេគុណក្នុងពន្លាត $(1 + x)^n$ ដែល n ជាចំនួនគត់សេស។

ចម្លើយ

1. សរសេរ ៣ តួដំបូងនៃស្វ៊ីតនព្វន្ត : $s_n = \frac{n}{2}[2u_1 + (n-1)d]$

គេមាន $\begin{cases} s_{10} = 210 \\ s_{20} = 820 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 210 = \frac{10}{2}(2u_1 + 9d) \\ 820 = \frac{20}{2}(2u_1 + 19d) \end{cases}$

$\begin{cases} 210 = 10u_1 + 49d \\ 820 = 20u_1 + 190d \end{cases}$ នោះ $u_1 = 3 \; ; d = 4$

គេបាន $u_2 = u_1 + d = 7 \; ; u_3 = u_2 + d = 11$

ដូចនេះ $\boxed{u_1 = 3 \;\; ; u_2 = 7 \;\; ; u_3 = 11}$

2. គណនាផលបូក 8 តួដំបូងនៃស្វ៊ីតនព្វន្ត :

គេមាន $\begin{cases} u_1 + u_4 = 2 \\ u_1^2 + u_4^2 = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + (u_1 + 3d) = 2 \quad (1) \\ u_1^2 + (u_1 + 3d)^2 = 20 \quad (2) \end{cases}$

តាម (1) : $2u_1 + 3d = 2 \Rightarrow u_1 = 1 - \frac{3}{2}d$

តាម (2) : $\left(1 - \frac{3}{2}d\right)^2 + \left(1 - \frac{3}{2}d + 3d\right)^2 = 20$

$$1 - 3d + \frac{9}{4}d^2 + 1 + 3d + \frac{9}{4}d = 20$$

$$\frac{9}{4}d^2 = 20 \text{ នោះ } d = \pm 2$$

- បើ $d = 2$ នោះ $u_1 = 1 - \frac{3}{2}(2) = -2$

ដូចនេះ $s_8 = \frac{8}{2}[2(-2) + (8-1) \times 2] = \boxed{40}$

- បើ $d = -2$ នោះ $u_1 = 1 - \frac{3}{2}(-2) = 4$

ដូចនេះ $s_8 = \frac{8}{2}[2(4) + (8-1)(-2)] = \boxed{-24}$

3. បង្ហាញថា $\frac{u_m}{u_n} = \frac{2m-1}{2n-1}$

តាង d ជាផលសងរួមនៃស្វីតនព្វន្ត

គេបាន $s_m = \frac{m}{2}[2u_1 + (m-1)d]$

$$s_n = \frac{n}{2}[2u_1 + (n-1)d]$$

គេឱ្យ $\frac{s_m}{s_n} = \frac{m^2}{n^2}$; $(m \neq n)$

$$\frac{\frac{m}{2}[2u_1 + (m-1)d]}{\frac{n}{2}[2u_1 + (n-1)d]} = \frac{m^2}{n^2}$$

$$\frac{2u_1+(m-1)d}{2u_1+(n-1)d}=\frac{m}{n}$$

$$2nu_1+n(m-1)d=2mu_1+m(n-1)d$$

$$2nu_1+nmd-nd=2mu_1+nmd-md$$

$2u_1(n-m)=(n-m)d$ នោះ $u_1=\frac{d}{2}$; $(n\neq m)$

តែ $u_m=u_1+(m-1)d=\frac{d}{2}+(m-1)d=\left(m-\frac{1}{2}\right)d$

$u_n=u_1+(n-1)d=\frac{d}{2}+(n-1)d=\left(n-\frac{1}{2}\right)d$

គេបាន $\frac{u_m}{u_n}=\frac{\left(m-\frac{1}{2}\right)d}{\left(n-\frac{1}{2}\right)d}=\frac{2m-1}{2n-1}$

ដូចនេះ $\boxed{\frac{u_m}{u_n}=\frac{2m-1}{2n-1}}$

4. ក. គណនាតួទី 10 :

គេមាន $u_1=12$; $u_2=4$; $u_3=\frac{4}{3}$;...

$$q=\frac{u_2}{u_1}=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$$

ដូចនេះ $u_{10} = u_1 q^{10-1} = 12\left(\frac{1}{3}\right)^9 = \boxed{\frac{4}{6561}}$

ខ. រកតួដែលមានតម្លៃស្មើ $\frac{4}{729}$

គេមាន $u_n = \frac{4}{729}$ ឬ $u_1 q^{n-1} = \frac{4}{729}$

$12\left(\frac{1}{3}\right)^{3-1} = \frac{4}{729}$ នោះ $\frac{4}{3^{n-2}} = \frac{4}{729}$

$\frac{4}{3^{n-2}} = \frac{4}{3^6}$ នោះ $n-2 = 6 \Rightarrow n = 8$

ដូចនេះ $\boxed{u_8 = \frac{4}{729}}$

គ. គណនាផលបូក 20 តួដំបូងនៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រ

$$s_{20} = \frac{u_1(1-q^{20})}{1-q} = \frac{12\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^{20}\right)}{1-\frac{1}{3}} = \frac{6(3^{19})-2}{3^{18}}$$

5. គណនា s_n :

គេមាន $u_n = 2(3)^{n-1}$ រាងដូច $u_n = u_1 \times q^{n-1}$

នោះ $u_1 = 2 \; ; q = 3$

ដូចនេះ $s_n = \frac{u_1(1-q^n)}{1-q} = \frac{2(1-3^{n-1})}{1-3} = 3^{n-1} - 1$

6. គណនាផលបូកស៊ីតធរណីមាត្រ ៖

គេមាន $s_{(x)} = 1 + 2x + 3x^2 + \dots + (n-1)x^{n-2} + nx^{n-1}$

គេបាន

$$
+\begin{cases}
1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^{n-2} + x^{n-1} = \dfrac{1(1-x^n)}{1-x} \\
\qquad = \dfrac{1}{1-x} - \dfrac{x^n}{1-x} \\
x + x^2 + x^3 + \dots + x^{n-2} + x^{n-1} = \dfrac{x(1-x^{n-1})}{1-x} \\
\qquad = \dfrac{x}{1-x} - \dfrac{x^n}{1-x} \\
x^2 + x^3 + \dots + x^{n-2} + x^{n-1} = \dfrac{x^2(1-x^{n-2})}{1-x} \\
\qquad = \dfrac{x^2}{1-x} - \dfrac{x^n}{1-x}
\end{cases}
$$

- -

$$x^{n-1} = \frac{x^{n-1}(1-x)}{1-x} = \frac{x^{n-1}}{1-x} - \frac{x^n}{1-x}$$

$$s_{(x)} = \frac{1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1}}{1-x} - \frac{nx^n}{1-x}$$

$$s_{(x)} = \frac{\frac{1(1-x^n)}{1-x}}{1-x} - \frac{nx^n}{1-x} = \frac{1-x^n}{(1-x)^2} - \frac{nx^n}{1-x}$$

$$= \frac{1-x^n - n(1-x)x^n}{(1-x)^2} = \frac{1-x^n-nx^n+nx^{n+1}}{(1-x)^2}$$

$$= \frac{1-(1+n)x^n+nx^{n+1}}{(1-x)^2}$$

ដូចនេះ $\boxed{s_{(x)} = \frac{1-(1+n)x^n-nx^{n+1}}{(1-x)^2}}$

7. គណនាតួទី 1 នៃស៊ីតធរណីមាត្រអនន្តតួ :

គេមាន $q = \frac{3}{5}$; $s_\infty = 40$

គេមាន $s_\infty = \frac{a_1}{1-q}$ ឬ $\frac{a_1}{1-\frac{3}{5}} = 40$

ដូចនេះ $\boxed{a_1 = 16}$

8. គណនាចំនួនទាំង 3 នៃស៊ីតធរណីមាត្រ

តាង a;b;c ជាបីចំនួនតគ្នានៃស៊ីតធរណីមាត្រ

គេបាន $b^3 = abc$ នោះ $b = \sqrt[3]{abc}$

$b = \sqrt[3]{3375} = 15$

តែ $b^2 = ac$ ឬ $ac = 15^2 = 225$

$a + b + c = 93$ ឬ $a + c = 93 - b = 93 - 15 = 78$

$$\begin{cases} a + c = 78 \\ ac = 225 \end{cases}$$

a និង c ជាឫសនៃសមីការ $x^2 - 5x + p = 0$

$x^2 - 78x + 225 = 0$

$\Delta' = (-39)^2 - 225 = (36)^2$

$x_1 = 39 - 36 = 3$; $x_2 = 39 + 36 = 75$

ដូចនេះ $\boxed{\text{បីចំនួននោះគឺ : } 75;15;3}$

9. គណនាផលបូក n តួដំបូងនៃស៊ីត :

ក. $1;\dfrac{1}{1+2};\dfrac{1}{1+2+3};\ldots;\dfrac{1}{1+2+3+\ldots+n}$

តាង $s_n = 1 + \dfrac{1}{1+2} + \dfrac{1}{1+2+3} + \ldots + \dfrac{1}{1+2+3+\ldots+n}$

យើងមាន $\dfrac{1}{1+2+3+\ldots+n} = \dfrac{1}{\frac{n}{2}(1+n)} = 2\left(\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}\right)$

$$+\begin{cases} \text{បើ}n = 1: \dfrac{1}{2} = 2\left(\dfrac{1}{1} - \dfrac{1}{2}\right) \\ n = 2: \dfrac{1}{1+2} = 2\left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3}\right) \\ n = 3: \dfrac{1}{1+2+3} = 2\left(\dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{4}\right) \\ \text{-----------------------------} \\ n = n: \dfrac{1}{1+2+3+\ldots+n} = 2\left(\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}\right) \end{cases}$$

$$s_n = 2\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{n+1}\right)$$

$$= 2\left(\frac{n+1-1}{n+1}\right) = \boxed{\frac{2n}{n+1}}$$

ខ. $b_n : \dfrac{1}{(1\times 3)^2}; \dfrac{2}{(3\times 5)^2}; \dfrac{3}{(5\times 7)^2}; \ldots; \dfrac{n}{[(2n-1)(2n+1)]^2}$

តាង

$$s_n = \frac{1}{(1\times 3)^2} + \frac{2}{(3\times 5)^2} + \frac{3}{(5\times 7)^2} + \ldots + \frac{n}{[(2n-1)(2n+1)]}$$

គេមាន $\dfrac{n}{[(2n-1)(2n+1)]^2} = \dfrac{1}{8}\left[\dfrac{1}{(2n-1)^2} - \dfrac{1}{(2n+1)^2}\right]$

$$+\begin{cases} \text{បើ } n=1: \dfrac{1}{(1\times 3)} = \dfrac{1}{8}\left(\dfrac{1}{1^2}-\dfrac{1}{3^2}\right) \\ n=2: \dfrac{2}{(3\times 5)^2} = \dfrac{1}{8}\left(\dfrac{1}{3^2}-\dfrac{1}{5^2}\right) \\ n=3: \dfrac{3}{(5\times 7)^2} = \dfrac{1}{8}\left(\dfrac{1}{5^2}-\dfrac{1}{7^2}\right) \\ \text{-------------------------} \\ n=n: \dfrac{n}{[(2n-1)(2n+1)]^2} = \dfrac{1}{8}\left[\dfrac{1}{(2n-1)^2}-\dfrac{1}{(2n+1)^2}\right] \end{cases}$$

$$s_n = \frac{1}{8}\left[\frac{1}{1^2}-\frac{1}{(2n+1)^2}\right]$$

$$= \frac{1}{8}\left(\frac{4n^2+4n+1-1}{(2n+1)^2}\right) = \boxed{\frac{n^2+n}{2(2n+1)^2}}$$

10. ក. កំណត់តួទី n នៃស្វ៊ីត $1;2;6;15;31;56;\ldots$

តាង a_n ជាតួទី n នៃស្វ៊ីតដែលឱ្យ

ហើយ $b_n = a_{n+1}-a_n$ (ហៅថាផលសងលំដាប់ទី 1)

គេបានស្វ៊ីត b_n គឺ : $1;4;9;16;25;\ldots$

តាង $c_n = b_{n+1}-b_n$ (ហៅថាផលសងលំដាប់ទី 2)

គេបានស្វ៊ីត c_n គឺ : $3;5;7;9;\ldots$

ស៊ីត (c_n) ជាស៊ីតនព្វន្តដែល $d = 2 ; C_1 = 3$

គេបាន $c_n = c_1 + (n-1)d = 3 + (n-1)2$

$$= 3 + 2n - 2 = 2n + 1$$

ចំពោះ $n \geq 2$ គេបាន $b_n = b_1 + \sum_{k=1}^{n-1} c_k = b_1 + \sum_{k=1}^{n-1} (2k+1)$

$$b_n = 1 + 2\sum_{k-1}^{n-1} k(n-1) = n + 2 \times \frac{1}{2}(n-1)n = n^2$$

ចំពោះ $n = 1$ នោះ $b_1 = 1$ ពិត

ដូចនេះ $b_n = n^2$

ចំពោះ $n \geq 2$ គេបាន $a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} k^2$

$$a_n = 1 + \frac{1}{6}(2n-1)(n-1)n$$

ចំពោះ $n = 1$ នោះ $a_1 = 1$ ពិត

ដូចនេះ $\boxed{a_n = \frac{1}{6}(2n-1)(n-1) + 1}$

ខ. គណនាផលបូក n តួដំបូងនៃស៊ីត

គេបាន $s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$

$$= \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{6}(2k-1)(k-1)k+1\right]$$

$$= \frac{1}{6}\sum_{k=1}^{n}(2k^3-3k^2+k+6)$$

$$= \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n}k^3-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}k^2+\frac{1}{6}\sum_{k=1}^{n}k+n$$

$$= \frac{1}{3}\left[\frac{1}{2}n(n+1)\right]^2-\frac{1}{2}\times n(n+1)(2n+1)+$$

$$+\frac{1}{6}\times\frac{1}{2}n(n+1)+n$$

$$= \frac{1}{12}n^2(1+n)^2-\frac{1}{12}n(n+1)(2n+1)$$

$$+\frac{1}{12}n(n+1)+n = \frac{1}{12}n(n^3-n+12)$$

ចំពោះ $n = 1$ នោះ $s_1 = 1$ (ពិត)

ដូចនេះ $\boxed{s_n = \frac{n}{12}(n^3-n+12)}$

11. ក. គណនា $\sum_{k=1}^{n}(2k^2-1)$

$$\sum_{k=1}^{n}(2k^2-1) = 2\sum_{k=1}^{n}(k^2-n) = 2\times\frac{1}{6}(n-1)(2n-1)-n$$

$$= \frac{1}{3}n(2n^2 - n - 2n + 1 - 3) = \frac{1}{3}n(2n^2 - 3n - 2)$$

$$= \boxed{\frac{n}{3}(n-2)(2n+1)}$$

ខ. គណនាផលបូក $1 + 7 + 17 + 31 + \ldots + 799$:

$$s_{20} = 1 + 7 + 17 + 31 + \ldots + 799$$

$$= \sum_{k=1}^{20} (2k^2 - 1) = \frac{20}{3}(20-2)(2 \times 20 + 1) = 5720$$

12. សរសេរផលបូកដោយប្រើ Σ :

តាង $s = 1 + 4 + 7 + 10 + 13 + \ldots + 298$

$$= (3 \times 1 - 2) + (3 \times 2 - 2) + (3 \times 3 - 2) + \ldots + (3 \times 100 - 2)$$

$$= \sum_{k=1}^{100} (2n - 2)$$

13. ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\sum_{k=1}^{n} 2^{k-1} = 2^n - 1$:

- បើ $n = 1$ គេបាន $\sum_{k=1}^{1} 2^0 = 2^0 - 1$ ឬ $1 = 1$ (ពិត)

- បើ $n = 2$ នោះ $\sum_{k=1}^{2} 2^{k-1} = 2^2 - 1$ ឬ $3 = 3$ (ពិត)

- ឧបមាថាពិតដល់ $n = p$ គឺ $\sum_{k=1}^{p} 2^{k-1} = 2^p - 1$ (ពិត)

- យើងស្រាយថាពិតដល់ $n = P + 1$

គេមាន $\sum_{k=1}^{p} 2^{k-1} = 2^p - 1$

$1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{p-1} = 2^p - 1$

$1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{p-1} + 2^p = 2^p - 1 + 2^p$

គេបាន $\sum_{k=1}^{p} 2^k = 2^{p+1} - 1$ (ពិត)

ដូចនេះ $\boxed{\sum_{k=1}^{n} 2^{k-1} = 2^n - 1}$

14. ក. បង្ហាញថា (v_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ :

គេមាន $v_n = u_n + q$; $u_{n+1} = 2u_n + 1$; $u_0 = 1$

នោះ $v_{n+1} = u_{n+1} + 1 = 2u_n + 1 + 1 = 2(u_n + 1)$

$= 2v_n$

ដូចនេះ (v_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រដែល $q = 2$; $v_0 = 2$

ខ. ទាញរក u_n ជាអនុគមន៍នៃ n :

ដោយ (v_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ

$$v_n = v_0 q^n = 2 \times 2^n = 2^{n+1}$$

តែ $v_n = u_n + 1$

នោះ $u_n = v_n - 1 = \boxed{2^{n+1} - 1}$

គ. សិក្សាភាពម៉ូណូតូននៃស្វ៊ីត (u_n) :

គេមាន $u_{n+1} - u_n = 2u_n + 1 - u_n = u_n + 1$

$$= 2^{n+1} - 1 + 1 = 2^{n+1} > 0 \text{ គ្រប់ } n \in \mathbb{N}$$

ដូចនេះ (u_n) ជាស្វ៊ីតម៉ូណូតូន

ឃ. គណនាផលបូក s_n :

$$s_n = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n$$

$$= \sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n} (2^{k+1} - 1)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} 2^{k+1} - (n+1)$$

$$= 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{n+1} - (n+1)$$

$$= \frac{2(1 - 2^{n+1})}{1-2} - (n+1)$$

$$= 2^{n+2} - (n+1)$$

$$= 2^{n+2} - (n+3)$$

5. ក. គណនា $u_1; u_2; u_3$:

គេមាន $u_{n+1} = \dfrac{u_n + 2}{u_n + 1}$ និង $u_0 = 2$

គេបាន $u_1 = \dfrac{u_0 + 2}{u_0 + 1} = \boxed{\dfrac{4}{3}}$; $u_2 = \dfrac{u_1 + 2}{u_1 + 1} = \dfrac{\frac{4}{3} + 2}{\frac{4}{3} + 1} = \dfrac{10}{7}$

$$u_3 = \frac{u_3 + 2}{u_3 + 1} = \frac{\frac{10}{7} + 2}{\frac{10}{7} + 1} = \boxed{\frac{24}{17}}$$

ខ. បង្ហាញថា $u_{n+1} - \sqrt{2} = \dfrac{(\sqrt{2} - 1)(\sqrt{2} - u_n)}{u_n + 1}$; $(n \in \mathbb{N})$

គេមាន $u_{n+1} - \sqrt{2} = \dfrac{u_n + 2}{u_n + 1} - \sqrt{2}$

$$= \frac{u_n + 2 - \sqrt{2}u_n - \sqrt{2}}{u_n + 1} = \frac{u_n(1 - \sqrt{2}) + \sqrt{2}(\sqrt{2} - 1)}{u_n + 1}$$

$$= \frac{u_n(1-\sqrt{2})-\sqrt{2}(1-\sqrt{2})}{u_n+1} = \frac{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}-u_n)}{u_n+1}$$

ដូចនេះ $\boxed{u_{n+1}-\sqrt{2} = \frac{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}-u_n)}{u_n+1}}$

គ. បង្ហាញថា $u_n > 1$ គ្រប់ $n \in \mathbb{N}$

គេមាន $u_0 = 2 > 1$ (ពិត)

$$u_1 = \frac{4}{3} > 1 \text{ (ពិត)}$$

ឧបមាថាពិតដល់ $n = k$ គឺ $u_k > 1$ គ្រប់ $n \in \mathbb{N}$

យើងស្រាយថានៅតែពិតដល់ $n = k+1$

គេបាន $u_k > 1$; $u_k + 1 > 0$

នោះ $u_k + 2 > 3$

$$\frac{u_k+2}{u_k+1} > \frac{3}{u_k+1} \Leftrightarrow u_{k+1} > \frac{3}{u_k+1}$$

ដោយ $u_0 > u_1 > u_2 > u_3 > \dots > u_k$ តែ $u_0 = 2$

នោះ $u_k < 2$ ឬ $u_k + 1 < 3$

គេបាន $u_{k+1} > \dfrac{3}{u_k + 1} > 1$ (ពិត)

ដូចនេះ $\boxed{u_n > 1, \quad \text{គ្រប់ } n \in \mathbb{N}}$

ឃ.ទាញពីសំណួរ ខ និង គ ថា :

$$\left|u_{n+1} - \sqrt{2}\right| \leq \frac{\sqrt{2}-1}{2} \times \left|u_n - \sqrt{2}\right|$$

តាមសំណួរ ខ : $u_{n+1} - \sqrt{2} = \dfrac{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}-u_n)}{u_n + 1}$ (1)

តាមសំណួរ គ : $u_n > 2$ ឬ $u_n + 1 > 2$ (2)

ចែកទំនាក់ទំនង (1) និងទំនាក់ទំនង (2) គេបាន

$$\frac{u_{n+1} - \sqrt{2}}{u_n + 1} \leq \left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}-u_n}{u_n + 1}\right)$$

$$\left|\frac{u_{n+1} - \sqrt{2}}{u_n + 1}\right| \leq \left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)\left|\frac{\sqrt{2}-u_n}{u_n + 1}\right|$$

$$\frac{\left|u_{n+1} - \sqrt{2}\right|}{\left|u_n + 1\right|} \leq \frac{\left|\sqrt{2}-u_n\right|}{\left|u_n + 1\right|}\left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)$$

ដូចនេះ $\boxed{\left|u_{n+1} - \sqrt{2}\right| \leq \left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)\left|u_n - \sqrt{2}\right|}$

ង. បង្ហាញថា $\left|u_n-\sqrt{2}\right| \le \left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)^n \times \left|\sqrt{2}-u_0\right|$

- បើ $n = 0$ នោះ $\left|u_0-\sqrt{2}\right| \le \left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)^0 \left|\sqrt{2}-u_0\right|$

$$\left|2-\sqrt{2}\right| \le \left|\sqrt{2}-2\right| \text{ (ពិត)}$$

- ឧបមាថាពិតដល់ $n = k$ គឺ

$\left|u_k-\sqrt{2}\right| \le \left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)^k \times \left|\sqrt{2}-u_0\right|$ (ពិត)

- យើងស្រាយថានៅតែពិតរហូតដល់ $n = k+1$

គេមាន $\left|u_k-\sqrt{2}\right| \le \left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)^k \times \left|\sqrt{2}-u_0\right|$

$$\left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)\left|u_k-\sqrt{2}\right| \le \left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)^{k+1} \times \left|\sqrt{2}-u_0\right|$$

គេបាន $u_{k+1} \le \left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)^{k+1} \times \left|\sqrt{2}-u_0\right|$ (ពិត)

ដូចនេះ $\boxed{\left|u_k-\sqrt{2}\right| \le \left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)^n \times \left|\sqrt{2}-u_0\right|}$

16. ក. កំណត់តួទី n នៃស្វ៊ីត (a_n) :

គេមាន $a_1 = 1$; $a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + n$; $b = a^n a_n$

តាង $f(n)$ ជាអនុគមន៍ដែល $f(n+1) = \frac{1}{2}f(n)+n$

គេបាន $a_{n+1} - f(n+1) = \left(\frac{1}{2}a_n + n\right) - \left(\frac{1}{2}f(n)+n\right)$

$$= \frac{1}{2}(a_n - f(n))$$

តាង $v_{n+1} = a_{n+1} - f(n+1)$ នោះ $v_n = a_n - f(n)$

គេបាន $v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n$ នោះ (v_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រដែល

$$q = \frac{1}{2}$$

ហើយ $v_1 = a_1 - f(1) = 1 - f(1)$

នោះ $v_n = v_1 \times q^{n-1} = [1-f(1)]\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1-f(n)}{2^{n-1}}$

តែ $v_n = a_n - f(n)$ នោះ $a_n = f(n) + v_n$

$a_n = f(n) + \frac{1-f(1)}{2^{n-1}}$ គ្រប់ $n \in \mathbb{N}^*$

តាង $\wp_n = \alpha n + \beta$ ជាស្វ៊ីតជំនួយ

គេបាន $\alpha(n+1)+\beta = \frac{1}{2}(\kappa n + \beta) + n$

$$\alpha n + \alpha + \beta = \frac{1}{2}\alpha n + \frac{1}{2}\beta + n$$

$$\left(\frac{1}{2}\alpha - 1\right)n + \left(\alpha + \frac{1}{2}\beta\right) = 0$$

នោះ $\begin{cases} \frac{1}{2}\alpha - 1 = 0 \\ \alpha + \frac{1}{2}\beta = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 2 \\ \beta = -4 \end{cases}$ នោះ $f(n) = 2n - 4$

$$f(1) = 2 \times 1 - 4 = -2$$

ដូចនេះ $\boxed{a_n = \frac{3}{2^{n-1}} + 2n - 4}$

ខ. កំណត់តួទី n នៃស្វ៊ីត b_n :

គេមាន $b_n = 2^n a_n = 2^n\left(\frac{3}{2^{n-1}} + 2n - 4\right)$

$$= \frac{3 \times 2^n}{2^{n-1}} + 2(n-2) - 2^n = \boxed{6 + (n-2)2^{n+1}}$$

17. ក. សរសេរ $(x^2 - 2y)^7$ ដោយប្រើ Σ :

$$(x^2 - 2y)^7 = \sum_{r=0}^{7} c_r(x^2)^{7-r} \cdot (-2y)^r = \sum_{r=0}^{7} c_7^r(x^2)^{7-r}(-2y)^r$$

ខ. កំណត់តួទី 6 នៃពន្លាត :

គេបានតួទី 6 គឺ :

$$c_7^5(x^2)^2(-2y)^5 = \frac{7!}{5!(7-5)!}(x^2)^2(-32)^5 = \boxed{-672x^4y^5}$$

18. បង្ហាញថាផលបូកលេខមេគុណក្នុងពន្លាត $(1+x)^n$ គឺ 2^n :

គេមាន $(1+x)^n = c_n^0 1^n x^0 + c_n^0 1^n x^0 + c_n^1 1^{n-1} x^1 +$

$$+ c_n^2 1^{n-2} x^2 + \dots + c_n^{1n-1} 1^1 x^{n-1} + c_n^n 1^0 x^n$$

បើ $x = 1$ នោះ $(1+x)^n = c_n^0 + c_n^1 + c_n^2 + \dots + c_n^{n-1} + c_n^n$

ដូចនេះ $c_n^0 + c_n^1 + c_n^2 + \dots + c_n^{n-1} + c_n^n = 2^n$

19. បង្ហាញថា

$$c_n^0 + c_n^2 + c_n^4 + \dots + c_n^{n-1} = c_n^1 + c_n^3 + c_n^5 + \dots + c_n^n = 2^{n-1}$$

ដោយ $c_n^0;c_n^1;c_n^2;\dots;c_n^n$ ជាមេគុណនៃពន្លាត $(1+x)^n$; n ជាចំនួនគត់សេស

គេមាន $c_n^0 + c_n^1 + c_n^2 + \dots + c_n^n = 2^n$

គេបាន

$$2(c_n^0 + c_n^2 + c_n^4 + \dots + c_n^{n-1}) = 2(c_n^1 + c_n^3 + c_n^5 + \dots + c_n^n) = 2^n$$

ដូចនេះ

$$c_n^0 + c_n^2 + c_n^4 + \dots + c_n^{n-1} = c_n^1 + c_n^3 + c_n^5 + \dots + c_n^n = 2^{n-1}$$

មេរៀនទី ១ អនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែល

1. សង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ខាងក្រោមក្នុងតម្រុយតែមួយ :

ក. $f(x) = 2^x$; $g(x) = 5^x$; $h(x) = 10^x$

ខ. $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$; $g(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^x$; $h(x) = \left(\frac{1}{10}\right)^x$

2. ចូររកតម្លៃ a បើខ្សែកោងនៃ $f(x) = a^x$ កាត់តាមចំណុចនីមួយៗដូចខាងក្រោម :

ក. $A(3, 216)$ ខ. $B(5, 32)$

គ. $C(3, 512)$ ឃ. $D(4, 256)$

ង. $E(-(2, 64))$ ច. $F\left(-3, \frac{1}{216}\right)$

ឆ. $G(3, 343)$ ជ. $H\left(\frac{1}{3}, 3\right)$

3. បង្ហាញថា បើ $f(x) = a^x$ នោះ

$f(x)f(y) = f(x+y)$

4. ក. បើ (x_1, y_1) និង (x_2, y_2) ជាចំណុចពីរនៅលើខ្សែកោង $f(x) = a^x$ នោះចំណុចទាំង $(x_1 + x_2, y_1 y_2)$ និង $\left(x_1 + -x_2, \frac{y_1}{y_2}\right)$ ជាចំណុចនៅលើខ្សែកោង។

ខ. បើ (x_1, y_1) ជាចំណុចពីរនៅលើខ្សែកោង $f(x) = a^x$ នោះចំណុចទាំងពីរ $(2x_1, y_2^1)$ និង $\left(-x_1, \frac{1}{y_1}\right)$ ជាចំណុចនៅលើខ្សែកោង $f(x) = a^x$ ។

5. ក. សង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ $f(x) = 2^x$

ខ. សង់ក្រាបនៃអនុគមន៍នីមួយៗក្នុងតម្រុយតែមួយជាមួយក្រាបនៃអនុគមន៍ $f(x) = 2^x$

i). $y = f(x) - 1$

ii). $y = f(x - 1)$

iii). $y = f(x + 1)$

iv). $y = f(0.5x)$

v). $y = f(2x)$

vi). $y = f(-x)$

6. បើ $a > 0$ ។ ចូររកតម្លៃ a និង x ដែលធ្វើឱ្យសមភាព និងវិសមភាពខាងក្រោមផ្ទៀងផ្ទាត់

ក. $a^x = 1$ ខ. $a^x > 1$ គ. $0 < a^x < 1$

7. សង់ក្រាបនៃអនុគមន៍

ក. $f(x) = 2^{|x|}$ ខ. $f(x) = x(2^x)$ គ. $f(x) = x^x$

8. សង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម

ក. $y = 2^{x-1}$ ឃ. $y = 2^{-x^2}$

ខ. $y = 2^{|x-1|}$ ង. $y = 3^{-|x+1|^2}$

គ. $y = 2^x + 2^{-x}$ ច. $y = 2^{|x^2-8|}$

9. ដោះស្រាយសមីការ

ក. $3^{x^2+4x} = \dfrac{1}{27}$

ខ. $3^{5x} \cdot 9^{x^2} = 27$

គ. $4^{3x^2+2x+1} = 16$ ។

ចម្លើយ

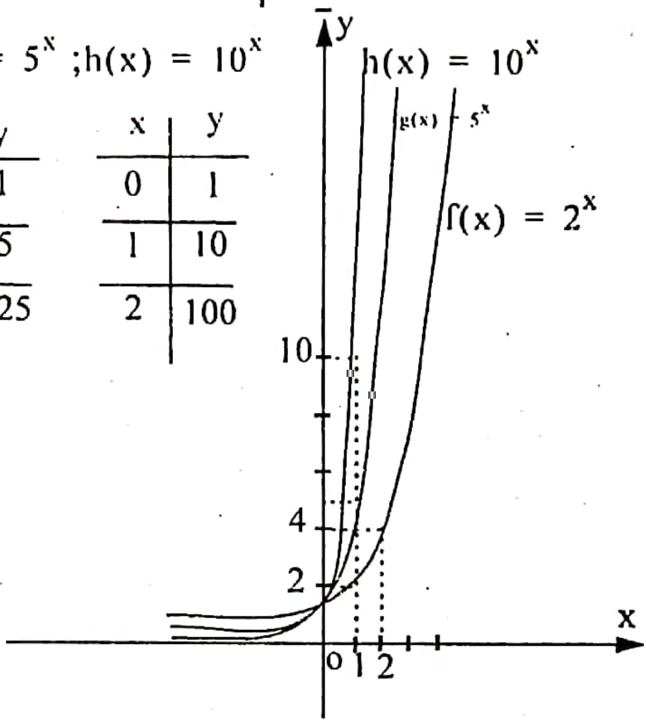
1. សង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ខាងក្រោមក្នុងតម្រុយតែមួយ :

ក. $f(x) = 2^x$; $g(x) = 5^x$; $h(x) = 10^x$

x	y
0	1
1	2
2	4

x	y
0	1
1	5
2	25

x	y
0	1
1	10
2	100

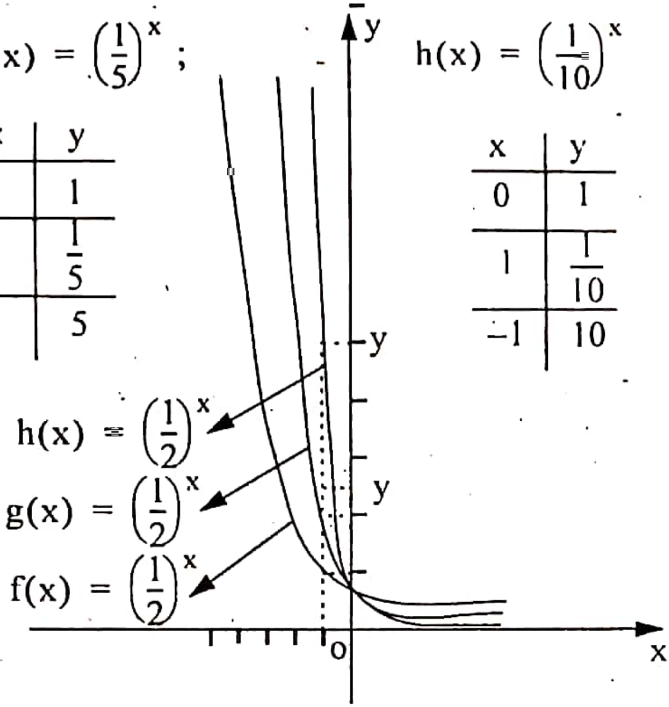


ខ. $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$; $g(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^x$; $h(x) = \left(\frac{1}{10}\right)^x$

x	y
0	1
1	$\frac{1}{2}$
−1	2

x	y
0	1
1	$\frac{1}{5}$
−1	5

x	y
0	1
1	$\frac{1}{10}$
−1	10



2. ចូររកតម្លៃ a បើខ្សែកោងនៃ $f(x) = a^x$ កាត់តាម ចំណុច នីមួយៗ ដូចខាងក្រោម :

ក. A(3, 216) គេបាន $a^3 = 216 \Leftrightarrow a^3 = 6^3$ នោះ $a = 6$

ខ. B(5, 32) គេបាន $a^5 = 32 \Leftrightarrow a^5 = 2^5$ នោះ $a = 2$

គ. C(3, 512) គេបាន $a^3 = 512 \Leftrightarrow a^3 = 8^3$ នោះ $a = 8$

ឃ. D(4, 256) គេបាន $a^4 = 256 \Leftrightarrow a^4 = 4^4$ នោះ $a = 4$

ង. E(−2, 64) គេបាន $a^{-2} = 64 \Leftrightarrow a^{-2} = \left(\frac{1}{8}\right)^{-2}$ នោះ $a = \frac{1}{8}$

ច. $F\left(-3, \frac{1}{216}\right)$ គេបាន $a^{-3} = \frac{1}{216} \Leftrightarrow a^{-3} = 6^{-3}$ នោះ $a = 6$

ឆ. $G(3, 343)$ គេបាន $a^3 = 343 \Leftrightarrow a^3 = 7^3$ នោះ $a = 7$

ជ. $H\left(\frac{1}{3}, 3\right)$ គេបាន $a^{1/3} = 3 \Leftrightarrow a^{1/3} = 27^{1/3}$ នោះ $a = 27$

3. បង្ហាញថា បើ $f(x) = a^x$ នោះ $f(x) \cdot f(y) = f(x+y)$

គេបាន $f(x) \cdot f(y) = a^x \cdot a^y = a^{x+y} = f(x+y)$

4. ក. បើ $(x_1 + x_2; x_1, y_2)$ និង $\left(x_1 - x_2; \frac{y_1}{y_2}\right)$ នៅលើខ្សែ

កោង $f(x) = a^x$

គេមាន $f(x) = a^x$ មានក្រាប (c)

ចំណុច $(x_1; y_1)$ និង $(x_2; y_2)$ នៅលើក្រាប (c)

គេបាន $\begin{cases} y_1 = a^{x_1} \ (1) \\ y_2 = a^{x_2} \ (2) \end{cases}$

- យក (1) គុណ (2) គេបាន $y_1 \cdot y_2 = a^{x_1} \cdot a^{x_2} = a^{x_1 + x_2}$

ដូចនេះ ចំណុច $(x_1 + x_2 \ ; \ y_1 y_2)$ នៅលើ (c)

- យក (1) ចែកនឹង (2) គេបាន $\frac{y_1}{y_2} = \frac{a^{x_1}}{a^{x_2}} = a^{x_1 - x_2}$

ដូចនេះ ចំណុច $\left(x_1 - x_2 \ ; \ \frac{y_1}{y_2}\right)$ នៅលើ (c)

ខ. បង្ហាញថាចំណុច $(2x_1;y_1^2)$ និង $\left(-x_1;\frac{1}{y_1}\right)$ នៅលើ (c)

បើ $(x_1;y_1)$ នៅលើក្រាប (c) : $f(x) = a^x$ គេបាន

$y_1 = a^{x_1}$: (*)

- យក (*) គុណនឹង (*) នោះ

$y_1 \cdot y_1 = a^{x_1} \cdot a^{x_1} \Leftrightarrow y_1^2 = a^{-x_1}$

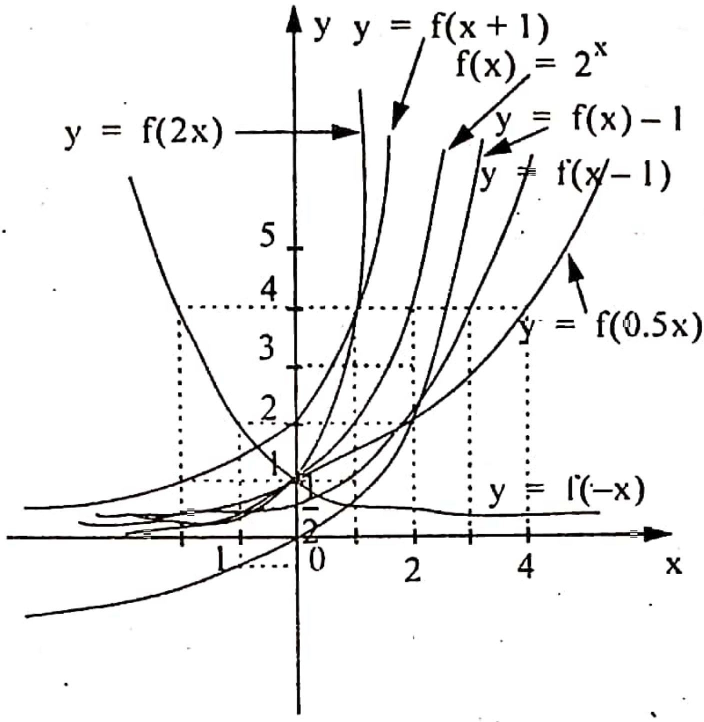
ដូចនេះ ចំណុច $(2x_1;y_1^2)$ នៅលើ (c)

- យកចម្រាសនៃ (*) នោះ $\frac{1}{y_1} = \frac{1}{a^{x_1}} = a^{-x_1}$

ដូចនេះ $\left(-x_1;\frac{1}{y_1}\right)$ នៅលើ (c)

5. ក. សង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ $f(x) = 2^x$

x	−1	0	1
y	$\frac{1}{2}$	1	2



ខ. សង់ក្រាបនៃអនុគមន៍នីមួយៗក្នុងតម្រុយតែមួយជាមួយក្រាបនៃ $f(x) = 2^x$

i). $y = f(x) - 1$ បានដោយរំកិលក្រាបនៃ $f(x) = 2^x$ ចំនួនមួយឯកតាពីឆ្វេងទៅស្តាំស្រប (ox)

ii). $y = f(x - 1)$ បានដោយរំកិលក្រាបនៃ $f(x) = 2^x$ ចំនួនមួយឯកតាពីស្តាំទៅឆ្វេងស្រប (ox) iii). $y = f(x+1)$

iv). $y = f(0.5x) = 2^{0.5x} = \sqrt{2^x}$

v). $y = f(2x) = 2^{2x} = 4^x$

vi). $y = f(-x) = 2^{-x} = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

6. រកតម្លៃ a និង x

ក. $a^x = 1$ បើ $a > 0$ នោះ $x = 0$

បើ $a = 1$ នោះ $x \in \mathbb{R}$

ខ. $a^x > 1$ បើ $a > 1$ នោះ $x > 0$

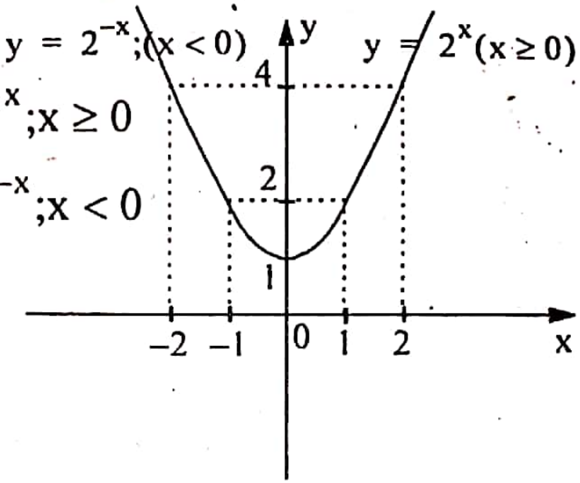
បើ $0 < a < 1$ នោះ $x < 0$

គ. $0 < a^x < 1$ បើ $a > 1$ នោ $x < 0$

បើ $0 < a^x < 1$ នោះ $x > 0$

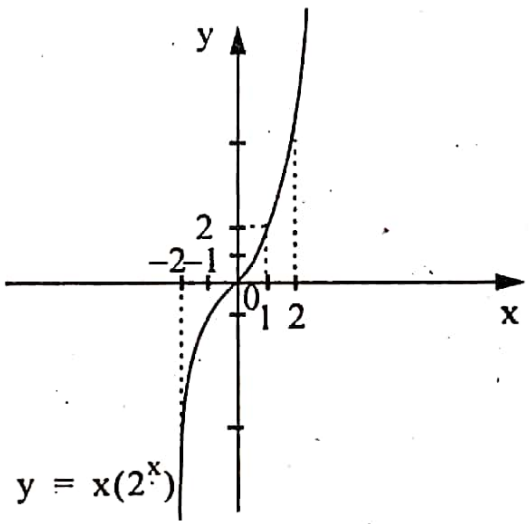
7. សង់ក្រាបនៃអនុគមន៍

ក. $f(x) = 2^{|x|} = \begin{cases} 2^x; x \geq 0 \\ 2^{-x}; x < 0 \end{cases}$



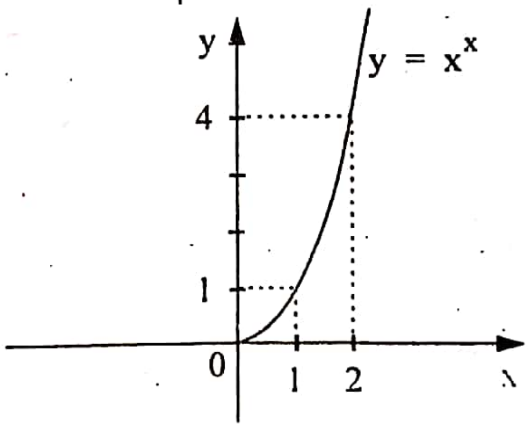
ខ. $f(x) = x(2^x)$

x	−2	−1	0	1	2
y	$-\frac{1}{8}$	$-\frac{1}{2}$	0	2	8



គ. $f(x) = x^x; x > 0$

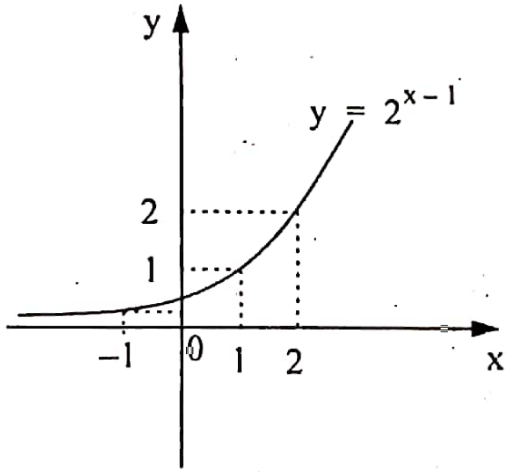
x	1	2	3
y	1	4	27



8. សង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម

ក. $y = 2^{x-1}$

x	-1	0	1	2
y	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2



ខ. $y = 2^{|x-1|}$

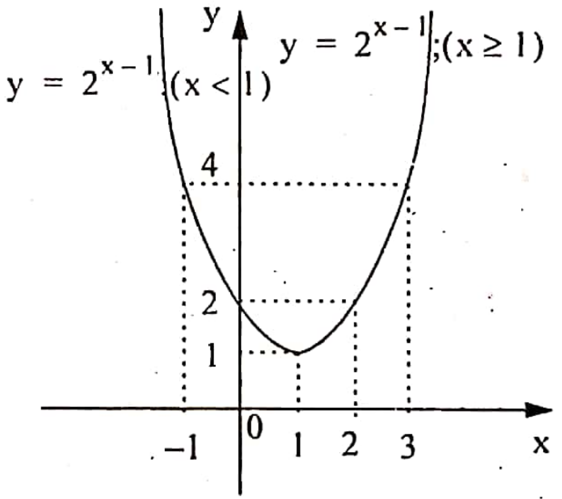
$$= \begin{cases} 2^{x-1} ; x \ge 1 \\ 2^{x-1} ; x < 1 \end{cases}$$

$y = 2^{x-1} ; x \ge 1$

x	1	2	3
y	1	2	4

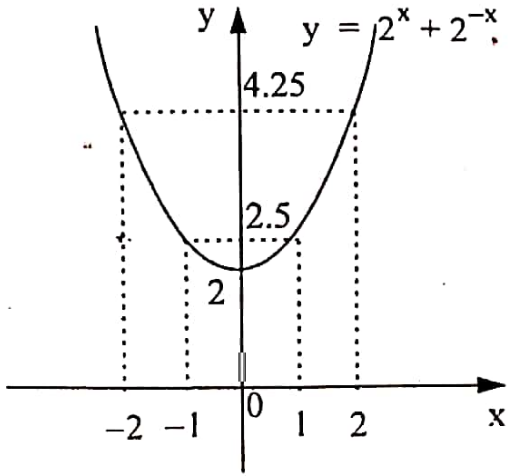
$y = 2^{1-x}$

x	-2	-1	0	1
y	8	4	2	1



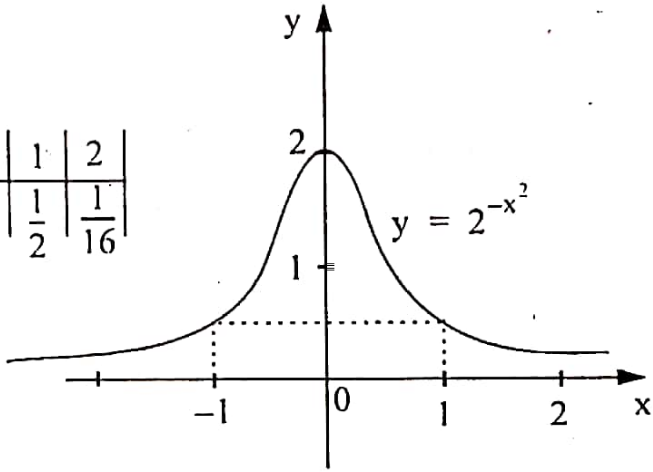
គ. $y = 2^x + 2^{-x}$

x	-2	-1	0	1	2
y	4.25	2.5	2	2.5	4.25



ឃ. $y = 2^{-x^2}$

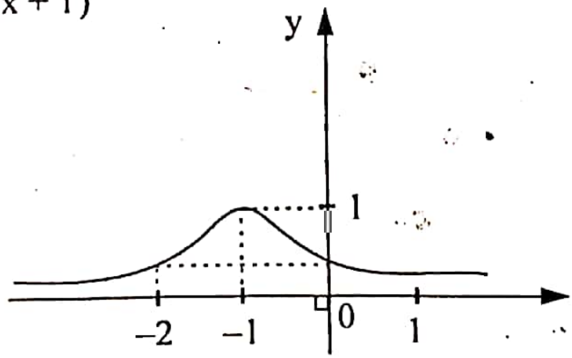
x		-2	-1	0	1	2
y		$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{16}$



ង. $y = 3^{-|x+1|^2} = 3^{-(x+1)^2}$

តារាងតម្លៃលេខ

x	-2	-1	0	1
	$\frac{1}{3}$	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$



ច. $y = 2^{|x^2-8|} = \begin{cases} 2^{x^2-8} ; (x \le -2\sqrt{2} ; x \ge 2\sqrt{2}) \\ 2^{-x^2+8} ; (2\sqrt{2} < x < 2\sqrt{2}) \end{cases}$

តារាងលេខនៃ

$f(x) = 2^{-x^2+8}$;

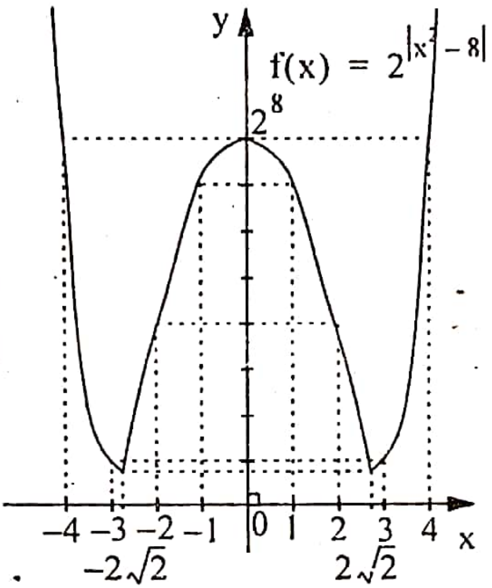
$(-2\sqrt{2} < x < 2\sqrt{2})$

x	$-2\sqrt{2}$	-2	1	0	1	2	$2\sqrt{2}$
y	1	2^4	2^7	2^8	2^7	2^4	1

តារាងលេខនៃ $f(x) = 2^{x^2-8}$;

$(x \le -2\sqrt{2} ; x \ge 2\sqrt{2})$

x	-4	-3	$-2\sqrt{2}$	$2\sqrt{2}$	3	4
y	2^8	2	1	1	2	2^8



9. ដោះស្រាយសមីការ

ក. $3^{x^2+4x} = \frac{1}{27}$

$x^2 + 4x = -3$

$x^2 + 4x + 3 = 0$

ដូចនេះ $x = -1; x_2 = -3$

ខ. $3^{5x} \cdot 9^{x^2} = 27$

$$(27)^{5x^3} = 27$$

$5x^3 = 1$ នោះ $x = \sqrt[3]{\frac{1}{5}}$

គ. $4^{3x^2+2x+1} = 16$

$$3x^2 + 2x + 1 = 2$$

$$3x^2 + 2x - 1 = 0$$

ដូចនេះ $x_1 = -1; x_2 = \frac{1}{3}$

ជំពូក ២

លំហាត់ មេរៀនទី ២ អនុគមន៍លោការីត

1. សរសេរអនុគមន៍ច្រាសនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម :

ក. $f(x) = 10^x$ ខ. $g(x) = 3^x$

គ. $h(x) = 7^x$ ឃ. $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

ង. $g(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^x$ ច. $h(x) = \left(\frac{1}{10}\right)^x$

2. សរសេរអនុគមន៍ច្រាសនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម :

ក. $f(x) = \log x$ ខ. $g(x) = \log_3 x$

គ. $h(x) = \log_5 x$ ឃ. $f(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$

ង. $g(x) = \log_{\frac{5}{4}} x$ ច. $h(x) = \log_{21} x$

3. ក. សង់ក្រាបនៃអនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែល

$f(x) = 5^x$

ខ. សង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ច្រាសរបស់អនុគមន៍ $f(x) = 5^x$ ក្នុងតម្រុយតែមួយ

គ. សរសេរសមីការអនុគមន៍ច្រាសរបស់អនុគមន៍ខាងលើ។

4. សង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម :

ក. $f(x) = \log_6 x$

ខ. $g(x) = \log_{\frac{1}{6}} x$

គ. $h(x) = \log_{0.3} x$

5. បង្ហាញថា បើ $f(x) = \log_a x$ នោះ $f(xy) = f(x) + f(y)$

6. ក. បង្ហាញថា បើ (x_1, y_1) និង (x_2, y_2) ជាចំណុចពីរនៅលើខ្សែកោង $y = \log_a x$ នោះចំណុច $\left(\frac{x_1}{y_2}, y_1 - y_2\right)$ ក៏ស្ថិតនៅលើខ្សែកោង $y = \log_a x$ ។

ខ. បង្ហាញថា បើ (x_1, y_1) ជាចំណុចពីរនៅលើខ្សែកោង $y = \log_a x$ នោះចំណុច $(x_1^2, 2y_1)$ និងចំណុច

$\left(\frac{1}{x_1}, -y_1\right)$ ក៏ស្ថិតនៅលើខ្សែកោង $y = \log_a x$ ។

7. គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x) = a^x$ និងអនុគមន៍ច្រាស $f^{-1}(x) = \log_a x$ ដែល $a > 0$ ។ រកតម្លៃ a ដើម្បីឱ្យខ្សែកោងនៃអនុគមន៍ $f(x)$ និង $f^{-1}(x)$ កាត់គ្នា។

8. គេឱ្យ $f(x) = x - \log_2 x$ ហើយ $g(x) = 2^x$ ។

គណនា

ក. $f(g(x))$ ខ. $g(f(x))$ ។

9. ដោះស្រាយសមីការ និងផ្ទៀងផ្ទាត់

ក. $\log_2(2x+4) - \log_2(x-1) = 3$

ខ. $\log_2 x + \log_4 x = 5$

គ. $\log_5 x + \log_{10} x = 5$

ឃ. $\log(x+10) + \frac{1}{2}\log x^2 = 2 - \log 4$ ។

10. រកតម្លៃ m ដើម្បីឱ្យវិសមីការ

$1 + \log_5(x^2+1) \geq \log_5(mx^2 + 4x + m)$ ផ្ទៀងផ្ទាត់

ចំពោះ $\forall x$ ។

11. រកតម្លៃ a ដើម្បីឱ្យវិសមីការ $\log_{\frac{1}{a+1}}(x^2+2) \geq 1$ មានសំណុំឫសចំពោះ $\forall x$ ។

ចម្លើយ

1. សរសេរអនុគមន៍ច្រាសនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម :

ក. $f(x) = 10^x$ នោះ $x = \log y$ ឬ $f^{-1}(x) = \log x$

ខ. $g(x) = 3^x$ នោះ $x = \log_3 y$ ឬ $g^{-1}(x) = \log_3 x$

គ. $h(x) = 7^x$ នោះ $x = \log_7 y$ ឬ $h^{-1}(x) = \log_7 x$

ឃ. $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ នោះ $x = \log_{\frac{1}{2}} y$ ឬ $f^{-1}(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$

ង. $g(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^x$ នោះ $x = \log_{\frac{1}{5}} y$ ឬ $g^{-1}(x) = \log_{\frac{1}{5}} x$

ច. $h(x) = \left(\frac{1}{10}\right)^x$ នោះ $x = \log_{\frac{1}{10}} y$ ឬ $h^{-1}(x) = \log_{\frac{1}{10}} x$

2. សរសេរអនុគមន៍ច្រាសនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម :

ក. $f(x) = \log x \Leftrightarrow x = 10^y$ ឬ $f^{-1}(x) = 10^x$

ខ. $g(x) = \log_3 x \Leftrightarrow x = 3^y$ ឬ $g^{-1}(x) = 3^x$

គ. $h(x) = \log_5 x \Leftrightarrow x = 5^y$ ឬ $h^{-1}(x) = 5^x$

ឃ. $f(x) = \log_{\frac{1}{3}} x \Leftrightarrow x = \left(\frac{1}{3}\right)^y$ ឬ $f^{-1}(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$

ង. $g(x) = \log_{\frac{5}{4}} x \Leftrightarrow x = \left(\frac{5}{4}\right)^y$ ឬ $g^{-1}(x) = \left(\frac{5}{4}\right)^x$

ច. $h(x) = \log_{21} x \Leftrightarrow x = 21^y$ ឬ $h^{-1}(x) = 21^x$

3. ក. សង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ $f(x) = 5^x$

តារាងតម្លៃលេខ

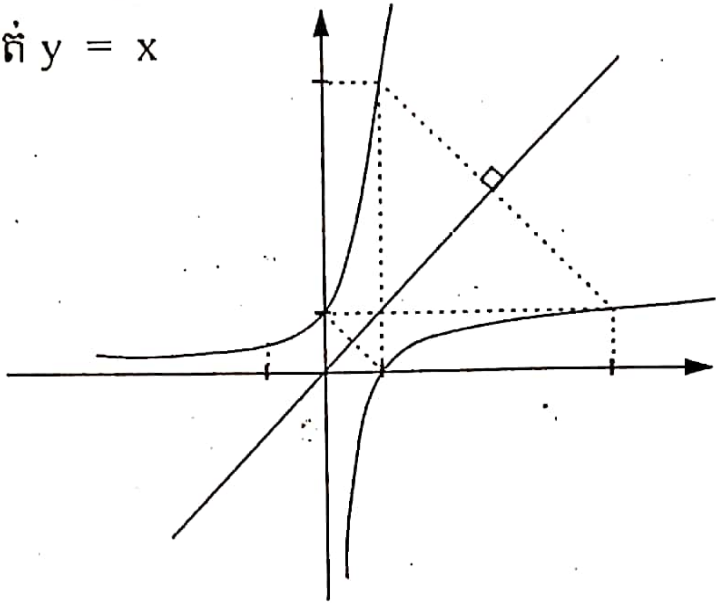
x	-1	0	1
y	$\frac{1}{5}$	1	5

ខ. សង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ច្រាសរបស់អនុគមន៍ $f(x) = 5^x$

ក្រាបនៃអនុគមន៍ច្រាសរបស់អនុគមន៍

$f(x) = 5^x$ គឺជារូបឆ្លុះនៃក្រាបរបស់ $f(x) = 5^x$

ធៀបនឹងបន្ទាត់ $y = x$



គ. សមីការអនុគមន៍ច្រាស

ពាង $y = f(x) = 5^x$ នោះ $x = \log_5 y$

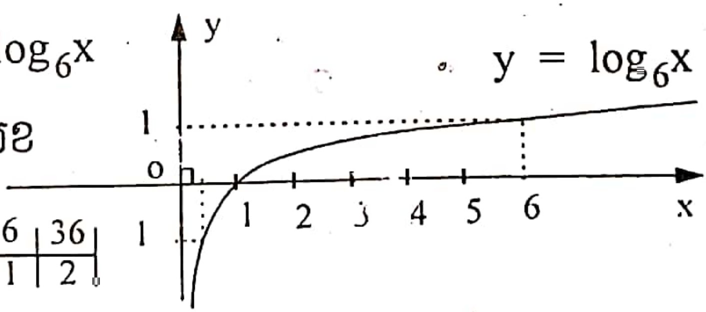
ដូចនេះ $f^{-1}(x) = \log_5 x$

4. សង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម :

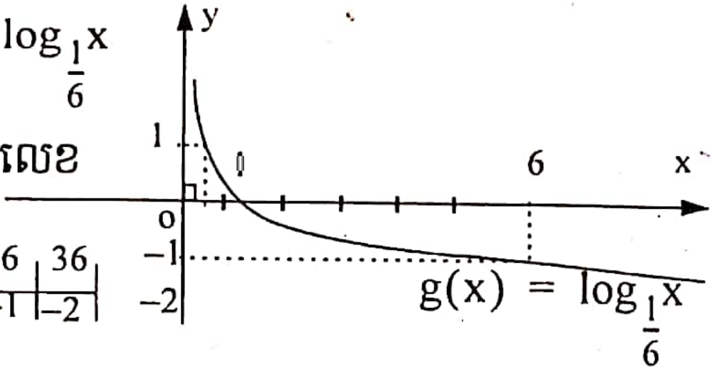
ក. $f(x) = \log_6 x$

តារាងតម្លៃលេខ

x	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{6}$	1	6	36
y	−2	−1	0	1	2



ខ. $g(x) = \log_{\frac{1}{6}} x$



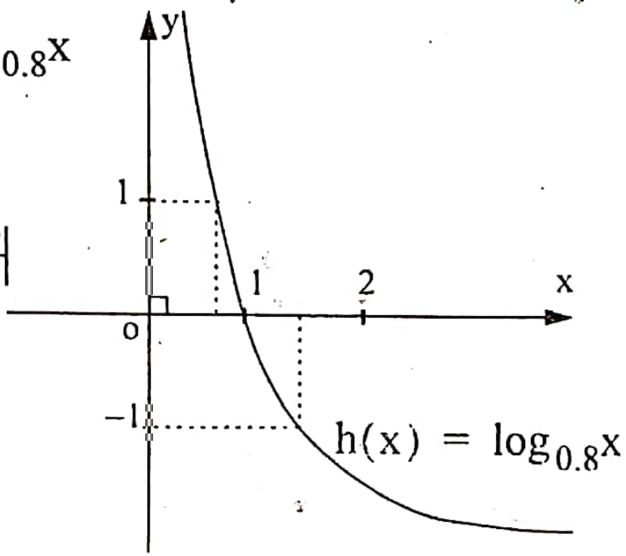
តារាងតម្លៃលេខ

x	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{6}$	1	6	36
y	2	1	0	−1	−2

គ. $h(x) = \log_{0.8} x$

តារាងតម្លៃលេខ

x			1	0.8
y			0	1



5. បង្ហាញថា បើ $f(x) = \log_a x$ នោះ $f(xy) = f(x) + f(y)$:

គេមាន $f(x) = \log_a x$

នោះ $f(xy) = \log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y = f(x) + f(y)$

ដូចនេះ $f(xy) = f(x) + f(y)$

6. ក. បង្ហាញថា បើ $\left(\frac{x_1}{x_2};y_1-y_2\right)$ នៅលើក្រាប (c) :

គេមានអនុគមន៍ $y = \log_a x$ មានក្រាប (c)

បើ (x_1, y_1) នៅលើ (c) នោះ $y_1 = \log_a x_1$: (1)

បើ (x_2, y_2) នៅលើ (c) នោះ $y_2 = \log_a x_2$: (2)

ដក (1) និង (2) : $y_1 - y_2 = \log_a x_1 - \log_a x_2 = \log_a \frac{x_1}{x_2}$

ដូចនេះចំណុច $\left(\frac{x_1}{x_2};y_1-y_2\right)$ នៅលើ (c)

ខ. បង្ហាញថា បើ $(x_1^2, 2y_1)$ និង $\left(\frac{1}{x_1}, -y_1\right)$ នៅលើក្រាប (c) :

តាមសំណួរ ក យើងយក (1) + (1)

$y_1 + y_1 = \log_a x + \log_a x_1 = \log_a x_1^2 \Leftrightarrow 2y_1 = \log_a x_1^2$

ដូចនេះចំណុច $(x_1^2;2y_1)$ នៅលើក្រាប (c) ។

គុណអង្គទាំងពីរនៃ (1) និងចំនួន -1

$-y_1 = -\log_a x_1 = \log_a x_1^{-1} = \log_a \frac{1}{x_1}$

ដូចនេះចំណុច $\left(\frac{1}{x_1};-y_1\right)$ នៅលើក្រាប (c)

7. រកតម្លៃ a ដើម្បីឱ្យក្រាបតាង $f(x)$ និង $f^{-1}(x)$ កាត់គ្នា :

គេមាន $f(x) = a^x$; $f^{-1}(x) = \log_a x$; $(a > 0)$ កាត់គ្នាលុះត្រាតែ $0 < a < 1$

8. ក. $f(g(x)) = g(x) - \log_2 g(x) = 2^x - \log_2 2^x$

$$= 2^x - x\log_2 2 = \boxed{2^x - 2}$$

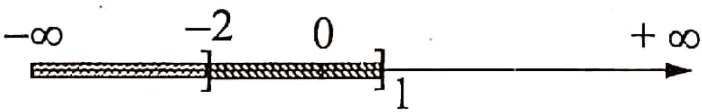
ខ. គណនា $g(f(x)) = 2^{f(x)} = 2^{x - \log_2 x} = 2^x \cdot 2^{\log_2(x^{-1})}$

$$= 2^x \cdot x^{-1} = \boxed{\frac{1}{x} \cdot 2^x}$$

9. ដោះស្រាយសមីការ និងផ្ទៀងផ្ទាត់

ក. $\log_2(2x + 4) - \log_2(x - 1) = 3$

សមីការមានន័យកាលណា $\begin{cases} 2x + 4 > 0 \\ x - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -2 \\ x > 1 \end{cases}$



ដែនកំណត់សមីការ $D = \ ]1;\ +\infty[$

សមីការទៅជា : $\log_2 \dfrac{2x + 4}{x - 1} = \log_2 2^3$

$\frac{2x+4}{x-1} = 8 \Leftrightarrow -6x = -12$ នោះ $x = 2$

ផ្ទៀងផ្ទាត់ : $\log_2(4+4) - \log_2(2-1) = 3$

$\log_2 2^3 - \log_2 1 = 3$

$3 - 0 = 3$ ផ្ទៀងផ្ទាត់

ដូចនេះ $\boxed{x = 2 \text{ ជាឫសសមីការ}}$

ខ. $\log_2 x + \log_4 x = 5$ សមីការមានន័យកាលណា $x > 0$

គេបាន $\log_2 x + \frac{1}{2}\log_4 x = 5 \Leftrightarrow \frac{3}{2}\log_2 x = 5$

$\log_2 x = \frac{10}{3}$ នោះ $x = 2^{10/3}$

ផ្ទៀងផ្ទាត់ : $\log_2 2^{10/3} + \log_4 2^{10/3} = 5$

$\frac{10}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{10}{3} = 5 \Leftrightarrow \frac{15}{3} = 5$ (ផ្ទៀងផ្ទាត់)

ដូចនេះ $\boxed{x = 2^{10/3} \text{ ជាឫសនៃសមីការ}}$

គ. $\log_5 x + \log_{10} x = 5$ សមីការមានន័យកាលណា $x > 0$

គេបាន $\frac{\log x}{\log x} + \frac{\log x}{\log 10} = 5$; $\log 10 = 1$

$$\log x\left(\frac{1}{\log 5}+1\right) = 5$$

$$\log x\left(\frac{1+\log 5}{\log 5}\right) = 5$$ នោះ $$\log x = \frac{5\log 5}{1+\log 5}$$

នាំឱ្យ $x = 10^{\left(\frac{5\log 5}{1+\log 5}\right)}$

ផ្ទៀងផ្ទាត់ :

$$\log_5\left(10^{\frac{5\log 5}{1+\log 5}}\right)+\log_{10}\left(10^{\frac{5\log 5}{1+\log 5}}\right) = 5$$

$$\frac{\log\left(10^{\frac{5\log 5}{1+\log 5}}\right)}{\log 5}+\frac{5\log 5}{1+\log 5} = 5$$

$$\frac{5\log 5}{\log 5(1+\log 5)}+\frac{5\log 5}{1+\log 5} = 5$$

$\frac{5(1+\log 5)}{1+\log 5} = 5 \Leftrightarrow 5 = 5$ (ផ្ទៀងផ្ទាត់)

ដូចនេះ $\boxed{x = 10^{\frac{5\log 5}{1+\log 5}}}$ ជាឫសនៃសមីការ

ឃ. $\log(x+10)+\frac{1}{2}\log x^2 = 2-\log 4$

សមីការមានន័យកាលណា $\begin{cases} x^2 > 0 \\ x + 10 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > -10; x \neq 0$

ដែនកំណត់សមីការ $D = \ ]-10;\infty[-\{0\}$

គេបាន : $\log(x+10) + \log x = \log 10^2 - \log 4$

$\log[x(x+10)] = \log\dfrac{100}{4}$

$x^2 + 10x = 25$

$x^2 + 10x - 25 = 0 \ ; \ \Delta' = 50$

នោះ $x_1 = \dfrac{-5-\sqrt{50}}{1} \ ; \ x_2 = -5 + 5\sqrt{2}$

តែ $x > -10$ នោះ $x = -5 + 5\sqrt{2}$

ផ្ទៀងផ្ទាត់ :

$\log(-5+5\sqrt{2}+10) + \frac{1}{2}\log(-5+5\sqrt{2})^2 = 2 - \log 4$

$\log(5+5\sqrt{2}) + \log(-5+5\sqrt{2}) = \log 10^2 - \log 4$

$\log[(5\sqrt{2})^2 - 25] = \log\left(\dfrac{100}{4}\right)$

$\log(50-25) = \log 25$

$\log 25 = \log 25$ (ផ្ទៀងផ្ទាត់)

ដូចនេះ $\boxed{x = -5 + 5\sqrt{2}}$

10. រកតម្លៃ m ដើម្បីឱ្យវិសមីការផ្ទៀងផ្ទាត់គ្រប់ x :

គេមាន $1 + \log_5(x^2 + 1) \geq \log_5(mx^2 + 4x + m)$

$\log_5 5 + \log_5(x^2 + 1) \geq \log_5(mx^2 + 4x + m)$

$\log_5(x^2 + 1) \geq \log_5(mx^2 + 4x + m)$

វិសមីការផ្ទៀងផ្ទាត់គ្រប់តម្លៃ x កាលណា :

$$\begin{cases} mx^2 + 4x + m > 0 \text{ គ្រប់ } x \\ 5(x^2 + 1) \geq mx^2 + 4x + m \text{ គ្រប់ } x \end{cases}$$

\+ $mx^2 + 4x + m > 0$ គ្រប់ x កាលណា $\begin{cases} \Delta' < 0 \\ a > 0 \end{cases}$

$\Delta' = 4 - m^2 < 0$

m	$-\infty$		-2		2		m
$\Delta' < 0$		$-$		$+$		$-$	

$a > 0 \Leftrightarrow m > 0$

គេបាន $m \in \ ]2; \ +\infty[$: (1)

$+\ \ 5(x^2+1) \geq mx^2+4x+m$

$5x^2+5-mx^2-4x-m \geq 0$

$(5-m)x^2-4x+(5-m) \geq 0$ គ្រប់ x កាលណា $\begin{cases} \Delta' < 0 \\ a > 0 \end{cases}$

$a > 0 \Leftrightarrow 5-m > 0$ នោះ $m < 5$

$\Delta' \leq 0 \Leftrightarrow 4-(5-m)^2 \leq 0$

$4-25+10m-m^2 \leq 0$

$-m^2+10m-21 \leq 0$

$\delta' = 25-21 = 4\ ;\ m_1 = \dfrac{-5-2}{-1} = 7\ ;\ m_2 = \dfrac{-5+2}{-1} = 3$

m	$-\infty$		3		7		$+\infty$
$\Delta' \leq 0$		$-$	0	$+$	0	$-$	

គេបាន $m \in\ ]-\infty;3]$: (2)

តាម (1) និង (2) គេបាន $\boxed{m \in\ ]2;3]}$

11. រកតម្លៃ a ដើម្បីឱ្យវិសមីការមានសំណុំឫសគ្រប់ x :

គេមាន $\log_{\frac{1}{a+1}}(x^2+2) \geq 1 \Leftrightarrow \log_{\frac{1}{a+1}}(x^2+2) \geq \left(\dfrac{1}{a+1}\right)$

វិសមីការមានសំណុំឫសគ្រប់ x កាលណា :

$$\begin{cases} \dfrac{1}{a+1} > 1 \\ \dfrac{1}{a+1} > 0 \\ x^2 + 2 \geq \dfrac{1}{a+1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ a > -1 \\ (a+1)x^2 + 2a + 1 \geq 0 \text{ គ្រប់ } x \end{cases}$$

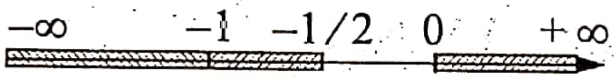
$(a+1)x^2 + 2a + 1 \geq 0$ គ្រប់ x កាលណា :

$a + 1 > 0$ នោះ $a > -1$

$\Delta \leq 0 \Leftrightarrow -4(2a+1)(a+1) \leq 0$ ឬ $(2a+1)(a+1) \geq 0$

a	$-\infty$	-1		$-1/2$	$+\infty$
$(2a+1)(a+1) \geq 0$	$+$	0	$-$	0	$+$

អក្សចម្លើយ



ដូចនេះ $\boxed{-\dfrac{1}{2} < a < 0}$

លំហាត់

មេរៀនទី ១ សមីការ និងវិសមីការត្រីកោណមាត្រ

1. ដោះស្រាយសមីការខាងក្រោម :

ក. $\cos x + \sqrt{3}\sin x = \cos 3x$

ខ. $\sin 3x + 2\cos - 2 = 0$

គ. $\sin 2x + \tan x = 2$

ឃ. $\sin 5x + \cos 5x = 5\sin 2x \cos x$

ង. $6\sin x - 2\cos^3 x = 5\sin 2x \cos x$

ច. $\sqrt{5\cos x - \cos 2x} + 2\sin x = 0$

2. ដោះស្រាយសមីការខាងក្រោម :

ក. $1 + \cot 2x = \dfrac{1 - \cos 2x}{\sin^2 2x}$

ខ. $\cos^6 x + \sin^6 x = \dfrac{7}{16}$

គ. $(1 - \tan x)(1 + \sin 2x) = 1 + \tan x$

ឃ. $3\sin 3x - \sqrt{3}\cos 9x = 1 + 4\sin^3 3x$

ង. $1 + 3\cos x + \cos 2x = \cos 3x + 2\sin x \sin 2x$

ច. $\cos^4 x + \sin^6 x = \cos 2x$

3. គេឱ្យសមីការ $\cos 2x - (2m+1)\cos x + m + 1 = 0$ (1) ។

ក. ដោះស្រាយសមីការ (1) កាលណា $m = \frac{3}{2}$ ។

ខ. រកតម្លៃ m ដែលធ្វើឱ្យសមីការមានឫស x នៅចន្លោះ $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$ ។

4. ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការត្រីកោណមាត្រខាងក្រោម :

ក. $\begin{cases} \sin(x+y) = \frac{1}{2} \\ \cos(x-y) = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$

ខ. $\begin{cases} \sin x + \sin y = \sqrt{2} \\ \cos x + \sin y = \sqrt{2} \end{cases}$

គ. $\begin{cases} \sin(x+y) = \cos(x-y) \\ \tan x - \tan y = 1 \end{cases}$

5. ដោះស្រាយសមីការខាងក្រោម :

ក. $\sin^2\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right) < \cos^2\frac{x}{2}$

ខ. $6\sin^2 x - \sin x\cos x - \cos^2 x > 2$

គ. $\frac{\cos x}{1+2\cos x} > \frac{1-\cos x}{1-2\cos x}$

ឃ. $\frac{1-\sin x}{1-3\sin x} < \frac{1+\sin x}{1-9\sin^2 x}$ ។

6. បង្ហាញថា

ក. $\sin^4\alpha + \cos^4\alpha \geq \frac{1}{2}$

ខ. $\sin^6\alpha + \cos^6\alpha \geq \frac{1}{4}$

គ. $\sin^8\alpha + \cos^8\alpha \geq \frac{1}{8}$ ។

7. បង្ហាញថាក្នុង ΔABC គេបាន : $\sin\frac{A}{2}\cdot\sin\frac{B}{2}\cdot\sin\frac{C}{2} \leq \frac{1}{8}$ ។

8. បង្ហាញថា ΔABC ដែលបំពេញលក្ខខណ្ឌ :

$\tan A \tan B \tan^2\frac{C}{2} = 1$ ជាត្រីកោណកែងសមបាត។

ចម្លើយ

1. ដោះស្រាយសមីការខាងក្រោម :

ក. $\cos x + \sqrt{3}\sin x = \cos 3x$

$$\cos x + \sqrt{3}\sin x = 4\cos^3 x - 3\cos x$$

$$-4\cos^3 x + 4\cos x + \sqrt{3}\sin x = 0$$

$$4\cos x(1-\cos^2 x) + \sqrt{3}\sin x = 0$$

$$4\cos x\sin^2 x + \sqrt{3}\sin x = 0$$

$$\sin x(4\cos x\sin x + \sqrt{3}) = 0$$

+ $\sin x = 0$ នោះ $x = k\pi\ ;\ k = \mathbb{Z}$

+ $4\cos x\sin x + \sqrt{3} = 0$

$$2\sin 2x = -\sqrt{3}$$

$$\sin 2x = -\frac{\sqrt{3}}{2} = \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\left[\begin{array}{l} 2x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ 2x = \pi + \frac{\pi}{3} + 2k\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{6} + k\pi \\ x = \frac{2\pi}{3} + k\pi \end{array}\right.\ ;\ (k \in \mathbb{Z})$$

ដូចនេះ $x \in \left\{k\pi; -\frac{\pi}{6}+k\pi; \frac{2\pi}{3}+k\pi; (k \in \mathbb{Z})\right\}$

ខ. $\sin 5x + \cos 5x = \sqrt{2}\cos 13x$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\sin 5x + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos 5x = \cos 13x$$

$$\sin\frac{\pi}{4}\cos 5x + \cos\frac{\pi}{4}\cos 5x = \cos 13x$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{4} - 5x\right) = \cos 13x$$

$$\left[\begin{array}{l}\frac{\pi}{4} - 5x = 13x + 2k\pi \\ \frac{\pi}{4} - 5x = -13x + 2k\pi\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \frac{\pi}{72} + \frac{\pi}{9}k\pi \\ x = -\frac{\pi}{32} + \frac{\pi}{9}k\pi\end{array}\right. ; (k \in \mathbb{Z})$$

គ. $6\sin x - 2\cos^3 x = 5\sin 2x \cos x$

$$6\sin x - 2\cos^3 x = 10\sin x \cos^2 x$$

$$\frac{6}{\cos^2 x} - \frac{2\cos x}{\sin x} = 10\left(x \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)$$

$$6(1 + \tan^2 x) - \frac{2}{\tan x} = 10$$

$$6\tan^3 x - 4\tan x - 2 = 0$$

$$3\tan^3 x - 2\tan x - 1 = 0$$

ខ. $\sin^6 x + \cos^6 x = \frac{7}{16}$

គេមាន $\sin^6 x + \cos^6 x = (\sin^2 x)^3 + (\cos^2 x)^3$

$$= (\sin^2 x + \cos^2 x)(\sin^4 x - \sin^2 x\cos^2 x + \cos^4 x)$$

$$= (\sin^2 x)^2 + (\cos x \times 10^2)^2 - \sin^2 x\cos^2 x$$

$$= (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x\cos^2 x - \sin^2 x\cos^2 x$$

$$= 1 - 3\sin^2 x\cos^2 x = 1 - \frac{3}{4}\sin^2 2x$$

សមីការទៅជា $1 - \frac{3}{4}\sin^2 2x = \frac{7}{16} \Leftrightarrow -\frac{3}{4}\sin^2 2x = -\frac{9}{16}$

$\sin^2 2x = \frac{3}{4}$ នោះ $\sin 2x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$+ \quad \sin 2x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ 2x = \pi - \frac{\pi}{3} + 2k\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{6} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{3} + k\pi \end{array}\right.$$

$$+ \quad \sin 2x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ 2x = \pi + \frac{\pi}{3} + 2k\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{6} + k\pi \\ x = \frac{2\pi}{3} + k\pi \end{array}\right.$$

គ. $(1 - \tan x)(1 + \sin 2x) = 1 + \tan x$

$$\left(1-\frac{\sin x}{\cos x}\right)(1+\sin 2x) = 1+\frac{\sin x}{\cos x} \ ; \left(x \neq \frac{\pi}{2}+2k\pi\right)$$

$$(\cos x-\sin x)(1+\sin 2x) = \cos x+\sin x$$

$$\cos x+\cos x\sin 2x-\sin x-\sin x\sin 2x-\cos x-\sin x = 0$$

$$2\mathrm{co}^2 x\sin x-2\sin^2 x\cos x-2\sin x = 0$$

$$2\sin x(\cos^2 x-\sin x\cos x-1) = 0$$

$$2\sin x(\cos^2 x-\sin x\cos x-\sin^2 x-\cos^2 x) = 0$$

$$-2\sin^2 x(\cos x+\sin x) = 0$$

+ $-2\sin^2 x = 0$ នោះ $x = 2k\pi$

+ $\cos x = -\sin x = \cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$ នោះ $x = \frac{\pi}{4}+k\pi$

ដូចនេះ $x = 2k\pi \ ; \ x = \frac{\pi}{4}+k\pi \ ; \ k \in \mathbb{Z}$

$$3\tan^3 x-3\tan^2 x+3\tan^2 x-2\tan x-1 = 0$$

$$3\tan^2 x(\tan x-1)+3(\tan x-1)\left(\tan x+\frac{1}{3}\right) = 0$$

$$\tan(x-1)(3\tan^2 x+3\tan x+1) = 0$$

+ $\tan x-1 = 0$ នោះ $x = \frac{\pi}{4}+k\pi \ ; \ k \in \mathbb{Z}$

+ $3\tan^2 x + 3\tan x + 1 = 0$ (គ្មានឫសព្រោះ $\Delta = -3 < 0$

ដូចនេះ $x = \frac{\pi}{4} + k\pi\ ;\ (k \in \mathbb{Z})$

ឃ. $\sqrt{5\cos x - \cos 2x} + 2\sin x = 0$

$$\sqrt{5\cos x - \cos 2x} = -2\sin x$$

$$5\cos x - \cos x = 4\sin^2 x$$

$$5\cos x - (2\cos^2 x - 1) = 4(1 - \cos^2 x)$$

$$2\cos^2 x + 5\cos x - 3 = 0$$

$$\Delta = 25 + 24 = 49$$

$\cos x = \frac{-5-7}{4} = -\frac{12}{4} < -1$ (មិនយក)

$\cos x = \frac{-5+7}{4} = \frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3}$ នោះ $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi$

ដូចនេះ $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi\ ;\ k \in \mathbb{Z}$ ។

2. ដោះស្រាយសមីការខាងក្រោម :

ក. $1 + \cot 2x = \frac{1 - \cos 2x}{\sin^2 2x}\ ;\ x \neq \frac{k\pi}{2}$

$$1+\frac{\cos 2x}{\sin 2x}=\frac{1-\cos 2x}{\sin^2 2x}$$

$$\sin^2 2x+\sin 2x\cos 2x = 1-\cos 2x$$

$$\sin^2 2x+\sin 2x\cos 2x = \cos^2 2x+\sin^2 2x-\cos 2x$$

$$\cos^2 2x-\cos 2x-\sin 2x\cos 2x = 0$$

$$\cos 2x(\cos 2x-1-\sin 2x) = 0$$

$+\quad \cos 2x = 0$ នោះ $x = \frac{k\pi}{2}$ (មិនយក)

$+\quad \cos 2x-1 = \sin 2x$

$$2\cos^2 x-1-1 = 2\sin x\cos x$$

$$2(1-\sin^2 x)-2 = 2\sin x\cos x$$

$$-\sin x = \cos x\ ;\ \left(x\neq\frac{k\pi}{2}\right)$$

$$\tan x = -1$$

ដូចនេះ $x = -\frac{\pi}{4}+k\pi\ ;\ (k\in Z)$

ឃ.$3\sin 3x-\sqrt{3}\cos 9x = 1+4\sin^3 3x$

$$-\sqrt{3}\cos 9x+3\sin 3x-4\sin^3 2x = 1$$

$$-\sqrt{3}\cos 9x + \sin 9x = 1$$

$$r = \sqrt{3+1} = 2 \ ; \ \cos\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2} \ ; \ \sin\theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = \frac{5\pi}{6}$$

គេបាន $r\cos\theta\cos x + r\sin\theta\sin x = C \ ; (x = 9x)$

$$2\left(\cos\frac{5\pi}{6}\cos 9x + \sin\frac{5\pi}{6}\sin 9x\right) = 1$$

$$\cos\left(9x - \frac{5\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3}$$

$$\left[\begin{array}{l} 9x - \frac{5\pi}{6} = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ 9x - \frac{5\pi}{6} = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{7\pi}{54} + \frac{2k\pi}{9} \\ x = \frac{\pi}{18} + \frac{2k\pi}{9} \end{array}\right. ; (k \in \mathbb{Z})$$

ង. $1 + 3\cos x + \cos 2x = \cos 3x + 2\sin x \sin 2x$

$$1 + 3\cos x + \cos 2x = 4\cos^3 x - 3\cos x + 4\sin^2 x\cos x$$

$$1 + 6\cos x + \cos 2x = 4\cos(\cos^2 x + \sin^2 x)$$

$$1 + 2\cos x + \cos^2 x - \sin^2 x = 0$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x + 2\cos x + \cos^2 x - \sin^2 x = 0$$

$$2\cos x(\cos x + 1) = 0$$

$+ \ 2\cos x = 0$ នោះ $x = \pm\frac{\pi}{2} + 2k\pi$

+ $\cos x + 1 = 0$ នោះ $x = \pm\pi + 2k\pi$

ច. $\cos^4 x + \sin^6 x = \cos 2x$

$(\cos^2 x)^2 + \sin^6 x - \cos 2x = 0$

$(1 - \sin^2 x)^2 + \sin^6 x - (1 - 2\sin^2 x) = 0$

$1 - 2\sin^2 x + \sin^4 x + \sin^6 x - 1 + 2\sin^2 x = 0$

$\sin^4 x(1 + \sin^2 x) = 0 \; ; (1 + \sin^2 x > 0)$

$\sin x = 0$ នោះ $x = k\pi \; ; k \in \mathbb{Z}$

3. ក. ដោះស្រាយសមីការកាលណា $m = \dfrac{3}{2}$

គេមានសមីការ $\cos 2x - (2m + 1)\cos x + m + 1 = 0$: (1)

ចំពោះ $m = \dfrac{3}{2}$: $\cos 2x - 4\cos x + \dfrac{5}{2} = 0$

$$2\cos^2 x - 1 - 4\cos x + \frac{5}{2} = 0$$

$$2\cos^2 x - 4\cos x + \frac{3}{2} = 0$$

+ $\cos x = \dfrac{3}{2}$ មិនយកព្រោះ $-1 \le \cos x \le 1$

+ $\cos x = \frac{1}{2}$ នោះ $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$

ខ. រកតម្លៃ m ដើម្បីឱ្យសមីការមានឬសនៅចន្លោះ

$\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$

$\cos 2x - (2m+1)\cos x + m + 1 = 0$: (1)

$2\cos^2 x + -1 - (2m+1)\cos x + m + 1 = 0$

$2\cos^2 x - (2m+1)\cos x + m = 0$

$2t^2 - (2m+1)t + m = 0$: (2) ; $(t = \cos x)$

សមីការ (1) មានឬស $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$ កាលណាសមីការ (2)

មានឬស $-1 < t < 0$

តាង $f(t) = 2t^2 - (2m+1)t + m$

$f(-1) = (2 + 2m + 1 + m) = 3(1+m)$

$f(0) = m$

តាមទ្រឹស្តីបទតម្លៃកណ្តាលគេបាន $f(-1)\cdot f(0) < 0$

$3m(1+m)<0$

m	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$3m(1+m)<0$		$+$	$\circ$	$-$	$\circ$	$+$	

ដូចនេះ $\boxed{m \in \ ]-1;0[}$

4. ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ

ក. $\begin{cases} \sin(x+y) = \dfrac{1}{2} & (1) \\ \cos(x-y) = \dfrac{\sqrt{2}}{2} & (2) \end{cases}$

តាម (1) : $\sin(x+y) = \dfrac{1}{2} = \sin\dfrac{\pi}{6}$

$$\left[\begin{array}{l} x+y = \dfrac{\pi}{6}+2k\pi \\ x+y = \pi-\dfrac{\pi}{6}+2k\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x+y = \dfrac{\pi}{6}+2k\pi & (i) \\ x+y = \dfrac{5\pi}{6}+2k\pi & (ii) \end{array}\right.$$

តាម (2) : $\cos(x-y) = \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \cos\dfrac{\pi}{4}$

$$\left[\begin{array}{ll} x-y = \dfrac{\pi}{4}+2k\pi & (iii) \\ x-y = -\dfrac{\pi}{4}+2k\pi & (iv) \end{array}\right.$$

- តាម (i) និង (iii) :

$$\begin{cases} x+y = \dfrac{\pi}{6}+2k\pi \\ x-y = \dfrac{\pi}{4}+2k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{5\pi}{24}+2k\pi \\ y = -\dfrac{\pi}{24} \end{cases}$$

- តាម (ii) និង (iii) :

$$\begin{cases} x+y = \dfrac{5\pi}{6}+2k\pi \\ x-y = \dfrac{\pi}{4}+2k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{13\pi}{24}+2k\pi \\ y = -\dfrac{7\pi}{24} \end{cases}$$

- តាម (ii) និង (iv) :

$$\begin{cases} x+y = \dfrac{5\pi}{6}+2k\pi \\ x-y = -\dfrac{\pi}{4}+2k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{7\pi}{24}+2k\pi \\ y = \dfrac{13\pi}{24} \end{cases}$$

ខ. $\begin{cases} \sin x + \sin y = \sqrt{2} & (1) \\ \cos x + \cos y = \sqrt{2} & (2) \end{cases}$

$$(\sin x + \cos x) + (\sin y + \cos y) = 2\sqrt{2}$$

$$\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right) + \sqrt{2}\sin\left(y+\frac{\pi}{4}\right) = 2\sqrt{2}$$

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\sin\left(y+\frac{\pi}{4}\right) = 2$$

$$\left[\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-1\right]+\left[\sin\left(y+\frac{\pi}{4}\right)-1\right] = 0$$

$$\begin{cases}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right) = 1\\ \sin\left(y+\frac{\pi}{4}\right) = 1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x = \frac{\pi}{4}+2k\pi\\ y = \frac{\pi}{4}+2k\pi\end{cases}$$

គ. $\begin{cases}\sin(x+y) = \cos(x-y) & (1)\\ \tan x-\tan y = 1 & (2)\end{cases}$

តាម (2) : $\frac{\sin x}{\cos x}-\frac{\sin y}{\cos y} = 1 \Leftrightarrow \frac{\sin(x-y)}{\cos x\cos y} = 1$

$$\sin(x-y) = \cos x\cos y$$

តាម (1) : $\sin(x+y) = \cos(x-y)$

$$\sin x\cos y+\sin y\cos x = \cos x\cos y+\sin x\sin y$$

$$\sin x\cos y+\sin y\cos x = \sin(x-y)+\sin x\sin y$$

$$\sin x\cos y+\sin y\cos x = \sin x\cos y-\sin y\cos x+\sin x\sin y$$

$$2\sin y\cos x-\sin x\sin y = 0$$

$\sin y(2\cos x - \sin x) = 0$

$+ \quad \sin y + 0 \Rightarrow y = k\pi$

$+ \quad 2\cos x - \sin x = 0$

$2\cos x = \sin x \Leftrightarrow \tan x = 2 \Rightarrow x = 63.43° + 180°k$

5. ដោះស្រាយវិសមីការ

ក. $\sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) < \cos^2\frac{x}{2}$

$$\sin^2\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) < \sin^2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2}\right)$$

ដូចនេះ $\frac{\pi}{4} + 2k\pi < x < \frac{5\pi}{4} + 2k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$

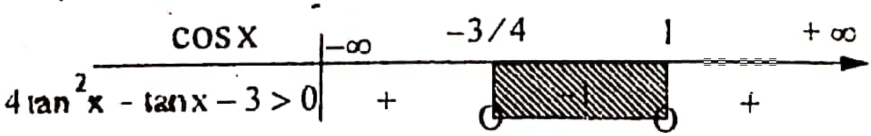
ខ. $6\sin^2 x - \sin x\cos x - \cos^2 x > 2$

$6\tan^2 x - \tan x - 1 > \frac{2}{\cos^2 x}$; ($\cos x \neq 0$ ឬ

$x \neq \pm\frac{\pi}{2} + 2k\pi$)

$6\tan^2 x - \tan x - 1 > 2(1 + \tan^2 x)$

$$4\tan^2 x - \tan x - 3 > 0$$



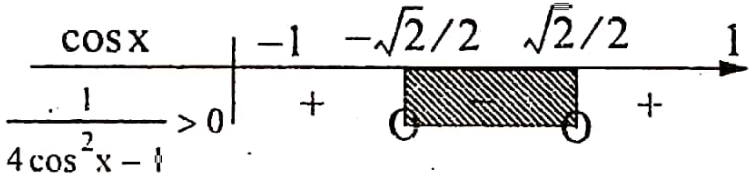
គេបាន $\tan x < -\dfrac{3}{4}$ ឬ $\tan x > 1$

ដូចនេះ $-\dfrac{3\pi}{4} + k\pi < x < -36.86° + k\pi$; $\tan -36.86° = -0.75°$

គ. $\dfrac{\cos x}{1 + 2\cos x} > \dfrac{1 - \cos x}{1 - 2\cos x}$

$$\frac{\cos x(1 - 2\cos x) - (1 - \cos x)(1 + 2\cos x)}{(1 + 2\cos x)(1 - 2\cos x)} > 0$$

$$\frac{1}{4\cos^2 x - 1} > 0$$



គេបាន $-1 < \cos x < -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ឬ $\dfrac{\sqrt{2}}{2} < \cos x < 1$

ដូចនេះ $-\dfrac{\pi}{3} + k\pi < x < \dfrac{\pi}{3} + k\pi$

ឃ. $\dfrac{1 - \sin x}{1 - 3\sin x} < \dfrac{1 + \sin x}{1 - 9\sin^2 x}$

$$\frac{(1-\sin x)(1+3\sin x)-(1+\sin x)}{1-9\sin^2 x}<0$$

$$\frac{-3\sin^2 x+\sin x}{1-9\sin^2 x}<0$$

ដូចនេះ $\left[\begin{array}{l}-\pi+2k\pi<x<-\pi+\alpha+2k\pi\\ -\alpha+2k\pi<x<2k\pi;\left(\sin\alpha=-\frac{1}{3}\right)\end{array}\right.$

6. បង្ហាញថា:

ក. $\sin^4\alpha+\cos^4\alpha\geq\frac{1}{2}$

គេមាន $\sin^4\alpha+\cos^4\alpha=(\sin^2\alpha)^2+(\cos^2\alpha)^2$

$$=(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)^2-2\sin^2\alpha\cos^2\alpha$$

$$=1-2\sin^2\alpha\cos^2\alpha$$

$$=1-\frac{1}{2}\sin^2 2\alpha$$

$$=\frac{1}{2}(2-\sin^2 2\alpha)=\frac{1}{2}[1+(1-\sin^2\alpha)]$$

$\frac{1}{2}(1+\cos^2 2\alpha)\geq\frac{1}{2}$ (ពិត)

ដូចនេះ $\boxed{\sin^4\alpha+\cos^4\alpha\geq\frac{1}{2}}$

ខ. $\sin^6\alpha + \cos^6\alpha \geq \frac{1}{4}$

គេមាន $\sin^6\alpha + \cos^6\alpha - \frac{1}{4} = (\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) - \frac{1}{4}$

$$-3\sin^2\alpha\cos^2\alpha(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)$$

$$= 1 - \frac{1}{4} - \frac{3}{4}\sin^2 2\alpha = \frac{3}{4}(1 - \sin^2 2x)$$

$$= \frac{3}{4}\cos^2 2\alpha \geq \frac{1}{4}$$

ដូចនេះ $\boxed{\sin^6\alpha + \cos^6\alpha \geq \frac{1}{4}}$

គ. $\sin^8\alpha + \cos^8\alpha \geq \frac{1}{8}$

គេមាន

$\sin^8\alpha + \cos^8\alpha - \frac{1}{8} = (\sin^4\alpha + \cos^4\alpha)^2 - \frac{1}{8} - 2\sin^4\alpha\cos^4\alpha$

តែ $\sin^4\alpha + \cos^4\alpha \geq \frac{1}{2}$ នោះ $(\sin^4\alpha + \cos^4\alpha) \geq \frac{1}{4}$

គេបាន $\sin^8\alpha + \cos^8\alpha = (\cos^4\alpha + \sin^4\alpha) - \frac{1}{8} - \frac{1}{8}\sin^4 2\alpha \geq \frac{1}{4}$

$$-\frac{1}{8} - \frac{1}{8}\sin^4 2\alpha$$

$\sin^8\alpha + \cos^8\alpha \geq \frac{1}{8}\cos^4 2\alpha$ (ពិត)

ដូចនេះ $\boxed{\sin^{8}\alpha + \cos^{8}\alpha \geq \frac{1}{8}}$

7.បង្ហាញថា $\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} \leq \frac{1}{8}$

គេបាន : $\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} \leq \frac{1}{8}$

$$\frac{1}{2}\sin\frac{A}{2}\left[\cos\left(\frac{B-C}{2}\right) - \cos\left(\frac{B+C}{2}\right)\right] \leq \frac{1}{8}$$

$$\sin^{2}\frac{A}{2} - \sin\frac{A}{2}\cos\left(\frac{B-C}{2}\right) + \frac{1}{4} \geq 0$$

$$\left[\sin\frac{A}{2} - \frac{1}{2}\cos\left(\frac{B-C}{2}\right)\right]^{2} + \frac{1}{2}\sin^{2}\left(\frac{B-C}{2}\right) \geq 0$$ (ពិត)

ដូចនេះ $\boxed{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} \leq \frac{1}{8}}$

8. បង្ហាញថា ΔABC កែងសមបាត

គេមាន $\tan A \cdot \tan B \cdot \tan^{2}\frac{C}{2} = 1$

$$\left(\frac{\sin A}{\cos A}\right)\cdot\left(\frac{\sin B}{\cos B}\right)\cdot\left(\frac{\sin^{2}\frac{C}{2}}{\cos^{2}\frac{C}{2}}\right) = 1$$

$$\sin A \cdot \sin B \sin^2\frac{C}{2} = \cos A \cos B \cos^2\frac{C}{2}$$

$$\frac{1}{2}[\cos(A-B) - \cos(A+B)]\sin^2\frac{C}{2}$$

$$= \frac{1}{2}[\cos(A+B) + \cos(A-B)]\cos^2\frac{C}{2}$$

$$\cos(A-B) - \sin^2\frac{C}{2} - \cos(A+B)\sin^2\frac{C}{2}$$

$$= \frac{1}{2}[\cos(A+B) + \cos(A-B)]\cos^2\frac{C}{2}$$

$$\cos(A-B)\left(\sin^2\frac{C}{2} - \cos^2\frac{C}{2}\right) - \cos(A+B) = 0$$

$$-\cos(A-B)\cos C + \cos C = 0$$

$$\cos C[1 - \cos(A-B)] = 0$$

$$\left[\begin{array}{l} \cos C = 0 \text{ នោះ} C = \frac{\pi}{2} \\ 1 - \cos(A-B) = 0 \text{ នោះ } A = B \end{array}\right.$$

ដូចនេះ $\boxed{\Delta ABC \text{ ជាត្រីកោណកែងសមបាត}}$

លំហាត់

ជំពូក ៣

1. ដោះស្រាយសមីការខាងក្រោម :

ក. $2\cos 3x + \sqrt{3}\sin x + \cos x = 0$

ខ. $\sin^6 x + \cos^3 x = 2(\sin^6 x + \cos^8 x)$

គ. $\dfrac{\sin 5x}{5\sin x} = 1$

ឃ. $\sin^2 x + \sin^2 3x = \cos^2 2x + \cos^2 4x$

ង. $\cos^3 x + \dfrac{3\sqrt{2}}{4}\sin 2x - 2\cos x = 0$

ច. $\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \sin 4x + \sin 5x + \sin 6x = 0$ ។

2. ដោះស្រាយវិសមីការខាងក្រោម :

ក. $2\cos^2 x - \cos x + 1 \le 0$ ក្នុង $[0, \pi]$

ខ. $\dfrac{2\sin^2 x - \sin x - 1}{\sin x} > 0$ ក្នុង $[0, \pi]$

គ. $\dfrac{\sin x - \cos x + 1}{\sin x + \cos x - 1} > 0$ ។

3. ក. ពន្លាតកន្សោម $\left(x+\frac{1}{2}\right)(x-8)(x-1)$

ខ. ដោះស្រាយសមីការ $2\sin^3 x - 17\sin^2 x + 7\sin x + 8 = 0$

4. គេឱ្យសមីការ $\cos 2x - (2m+1)\cos x + m + 1 = 0$ (1)

ក. ដោះស្រាយសមីការ (1) កាលណា $m = 1$

ខ. រកតម្លៃ m ដែលធ្វើឱ្យសមីការមានឫសនៅចន្លោះ

$[0, \pi]$ ។

5. គេមានវិសមីការ (E) : $2\sin^2 x - 5\sin x + 2 > 0$

គេតាង $X = \sin x$ វិសមីការសរសេរ $2X^2 - 5X + 2 > 0$

ក. ដាក់ជាផលគុណកត្តាកន្សោម $2x^2 - 5x + 2$

ខ. បង្ហាញថាវិសមីការ (E) សរសេរជារាង

$2(\sin x - 2)\left(\sin x - \frac{1}{2}\right) > 0$

គ. សិក្សាសញ្ញា $(\sin x - 2)\left(\sin x - \frac{1}{2}\right)$ នៅលើចន្លោះ

$[0, \pi]$

ឃ. រកសំណុំចម្លើយនៃវិសមីការ (E) ។

6. ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការត្រីកោណមាត្រខាងក្រោម :

ក. $\begin{cases} \sin x + \sin y = \dfrac{3}{2} \\ \sin^2 x + \sin^2 y = \dfrac{5}{4} \end{cases}$

ខ. $\begin{cases} \cos^3 x - \cos x + \sin y = 0 \\ \sin^3 x - \sin y + \cos x = 0 \end{cases}$

គ. $\begin{cases} \dfrac{1 - \tan x}{1 + \tan x} = \tan y \\ x - y = \dfrac{\pi}{6} \end{cases}$

7. គេមាន ΔABC ដែលមានមុំ និងជ្រុងបំពេញលក្ខខណ្ឌ $\dfrac{1 + \cos A}{1 + \cos B} = \dfrac{2a + c}{2a - c}$ ។ បង្ហាញថា ΔABC ជាត្រីកោណសមបាត។

8. មុំ A, B, C និង ΔABC មួយមាន $\dfrac{A + C}{2} = B$ ។ រករង្វាស់មុំនៃត្រីកោណនោះ បើគេដឹងថា $\sin A + \sin B + \sin C = \dfrac{3 + \sqrt{3}}{2}$ ។

ចម្លើយ

1. ដោះស្រាយសមីការ

ក. $2\cos 3x + \sqrt{3}\sin x + \cos x = 0$

$$\cos 3x = -\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x + \frac{1}{2}\cos x\right)$$

$$\cos 3x = -\left(\sin x \cos\frac{\pi}{6} + \cos x \sin\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\left[\begin{array}{l} \frac{\pi}{2} - 3x = -x - \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ \frac{\pi}{2} - 3x = \pi - \left(-x - \frac{\pi}{6}\right) + 2k\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \end{array}\right.$$

ខ. $\sin^6 x + \cos^3 x = 2(\sin^6 x + \cos^8 x)$

$$-\sin^6 x = 2\cos^8 x - \cos^3 x$$

$$-(1 - \cos^2 x)^3 = 2\cos^8 x - \cos^3 x$$

$$2\cos^8 x - \cos^6 x + 3\cos^4 x - \cos^3 x - 3\cos^2 x + 1 = 0$$

$$2t^8 - t^6 + 3t^4 - t^3 - 3t^2 + 1 = 0 \; ; (t = \cos x; -1 \le t \le 1)$$

(ដោះស្រាយខ្លួនឯង)

គ. $\dfrac{\sin 5x}{5\sin x} = 1$

ដោយ

$$\sin 5x = \sin(2x+3x) = \sin 2x\cos 3x + \sin 3x\cos 2x$$

$$= 2\sin x\cos x(4\cos^3 x - 3\cos x) + (3\sin x - 4\sin^3 x)\cos 2x$$

គេបាន

$$5\sin x = 2\sin x\cos x(4\cos^3 x - 3\cos x) + (3\sin x - 4\sin^3 x)\cos 2x$$

$$5 = 2\cos x(4\cos^3 x - 3\cos x) + (4\cos^2 x - 1)(2\cos^2 x - 1)$$

$$4\cos^4 x - 3\cos^2 x - 1 = 0$$

$$4tt^4 - 3t^2 - 1 = 0 \; ; (t = \cos x; -1 \le t \le 1)$$

$t^2 = 1$ នោះ $t = \pm 1$

$t^2 = -\frac{1}{4} < 0$ (មិនយក)

$t = 1$ នោះ $\cos x = -1$ ឬ $x = \pm\pi + 2k\pi \; ; k \in \mathbb{Z}$

$t = -1$ នោះ $\cos x = -1$ ឬ $x = k\pi$

ដូចនេះឫសនៃសមីការគឺ $x = k\pi ; k \in Z$

ឃ. $\sin^2 x + \sin^2 3x = \cos^2 2x + \cos^2 4x$

$$\frac{1-\cos 2x}{2}+\frac{1-\cos 6x}{2}=\frac{1+\cos 4x}{2}+\frac{1+\cos 8x}{2}$$

$$-\cos 2x-\cos(6x+\cos 4x\cos 8x)$$

$$(\cos 6x+\cos 4x)+(\cos 8+\cos 2x)=0$$

$$2\cos 5x\cos x+2\cos 5x\cos 3x=0$$

$$2\cos 5x(\cos x+\cos 3x)=0$$

$+\quad 2\cos 5x=o$ នោះ $x=\frac{\pi}{10}+\frac{1k\pi}{5}$

$$+\quad \cos x+\cos 3x=0$$

$$\cos 2x\cos x=0$$

$$2\cos 2x\cos x=0$$

$\cos 2x=0$ នោះ $x=\pm\frac{\pi}{4}+k\pi$

$\cos x=0$ នោះ $x=\pm\frac{\pi}{2}+2k\pi$

ឃ. $\cos^3 x+\frac{3\sqrt{2}}{4}\sin 2x-2\cos x=0$

$$\cos^3 x+\frac{3\sqrt{2}}{2}\sin x\cos x-2\cos x=0$$

$$\cos x\left(\cos^2 x + \frac{2\sqrt{2}}{\sin x}\right) = 0$$

- $\cos x = 0$ នោះ $x = \pm\frac{\pi}{2} + 2k\pi$

- $\cos^2 x + \frac{3\sqrt{2}}{2}\sin C = 2$

$$r = \sqrt{1^2 + \left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{11}{2}};$$

$$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{\frac{11}{2}}} = 0.4264 \; ; \; \sin\theta = \frac{\frac{3\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{\frac{11}{2}}} = 0.9045$$

នោះ $\theta = 64.76°$

គេបាន $\cos^2 x + \frac{3\sqrt{2}}{2}\sin x = 2$ ទៅជា

$$\sqrt{\frac{11}{2}}\sin(x + 64.76°) = 2$$

$$\sin(x + 64.76°) = 0.8528 = \sin 58.51°$$

$$\left[\begin{array}{l} x + 64.76° = 58.51° + 2k\pi \\ x + 64.76° = 18.° - 58.51° + 2k\pi \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x = 6.24° + 2k\pi \\ x = 56.73° + 2k\pi \end{array}\right.$$

ឆ. $\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \sin 4x + \sin 5x + \sin 6x = 0$

$$(\sin x + \sin 6x) + (\sin 2x + \sin 5x) + (\sin 3x + \sin 4x) = 0$$

$$2\sin\left(\frac{7x}{2}\right)\cos\left(-\frac{5x}{2}\right) + 2\sin\left(\frac{7x}{2}\right)\cos\left(-\frac{3x}{2}\right) +$$

$$+ 2\sin\left(\frac{7x}{2}\right)\cos\left(-\frac{x}{2}\right) = 0$$

$$2\sin\frac{7x}{2}\left(\cos\frac{x}{2} + \cos\frac{3x}{2} + \cos\frac{5x}{2}\right) = 0$$

\+ $\sin\frac{7x}{2} = 0$ នោះ

$$\left[\begin{array}{l} \frac{7x}{2} = 2k\pi \\ \frac{7x}{2} = \pi + 2k\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{4}{7}k\pi \\ x = \frac{2\pi}{7} + \frac{4}{7}k\pi \end{array}\right.$$

\+ $\cos\frac{x}{2} + \cos\frac{3x}{2} + \cos\frac{5x}{2} = 0$

$$2\cos\frac{3x}{2}\cos(-x) + \cos\frac{3x}{2} = 0$$

$$\cos\frac{3x}{2}(2\cos x + 1) = 0$$

$\cos\frac{3x}{2} = 0$ នោះ $\frac{3}{2}x = \pm\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ ឬ

$$x = \pm\frac{\pi}{3} + \frac{4}{3}k\pi$$

$$(2\cos x + 1 = 0) \Leftrightarrow \cos x = -\frac{1}{2} = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$$

នោះ $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$

2. ដោះស្រាយសមីការខាងក្រោម :

ក. $2\cos^2 x - \cos x + 1 \le 0$ ក្នុង $[0;\pi]$

តាង $t = \cos x \;; -1 \le t \le 1$

$2t^2 - t + 1 \le 0 \;; \Delta = 1 - 8 = -7 < 0$

នោះ $2t^2 - 7 + 1 > 0$ គ្រប់ t

ដូចនេះ វិសមីការគ្មានឫស

ខ. $\dfrac{2\sin^2 x - \sin x - 1}{\sin x} > 0$ ក្នុង $[0;\pi]$

$\dfrac{2t\sqrt{2} - t - 1}{t} > 0 \;; t = \sin x \;;(-1 \le t \le 1)$

គេបាន $-\frac{1}{2} < t < 0$

$\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) < \sin x < 0$ នោះ $-\frac{\pi}{6} < x < k\pi$

t	-1		$-1/2$		0		1
$2t^2-t-1$		$+$	0	$-$		$-$	0
t		$-$		$-$	‖	$+$	
$\dfrac{2t^2-t-1}{t}>0$		$-$	0	$+$	‖	$-$	

តែ $x \in [0;\pi]$ នោះវិសមីការដែលឱ្យជាវិសមីការគ្មានឫស ។

3. ក. ពន្លាតកន្សោម $\left(x+\frac{1}{2}\right)(x-8)(x-1)$

$$= \left(x^2-8x+\frac{1}{2}x-4\right)(x-1)$$

$$= x^3-\frac{17}{2}x^2+\frac{7}{2}x+4$$

ខ. ដោះស្រាយសមីការ

$$2\sin^3 x-17\sin^2 x+7\sin x+8 = 0$$

$$\sin^3 x-\frac{17}{2}\sin^2 x+\frac{7}{2}\sin x+4 = 0$$

$$\left(\sin x+\frac{1}{2}\right)(\sin x-8)(\sin x-1) = 0 \text{ (តាមសំនួរ ក)}$$

$+\quad \sin x+\frac{1}{2}=0 \Leftrightarrow \sin x=\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$

$$\left[\begin{array}{l} x=-\frac{\pi}{6}+2k\pi \\ x=\frac{7\pi}{6}+2k\pi \quad ; \quad k \in Z \end{array}\right.$$

$+\quad \sin x-8=0 \Leftrightarrow \sin x=8$ (មិនយកព្រោះ $-1 \leq \sin x \leq 1$)

$+\quad \sin x-1=0 \Leftrightarrow \sin x=\sin\frac{\pi}{2}$

$$\Rightarrow x=\frac{\pi}{2}+2k\pi \quad ; \quad (k \in \mathbb{Z})$$

4. គេមានសមីការ $\cos 2x-(2m+1)\cos x+m+1=0$: (1)

ក. ដោះស្រាយសមីការ (1) បើ $m=1$

ពី (1) : $2\cos^2 x-1-(2m+1)\cos x+m+1=0$

$$2\cos^2 x-(2m+1)\cos x+m=0 : (2)$$

$m=1$ នោះ $2\cos^2 x-3\cos x+1=0$

$+\quad \cos x=1 \Rightarrow x=k\pi\ ;\ k \in \mathbb{Z}$

$+ \quad \cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi \; ; \; k \in \mathbb{Z}$

ខ. រកតម្លៃ m ដើម្បីឱ្យសមីការមានឫសចន្លោះ $[0;\pi]$

សមីការ (1) មានឫសចន្លោះ $[0;\pi]$ កាលណាសមីការ (2)

មានឫស $[-1;1]$

តាង $f(t) = 2t^2 - (2m+1)t + m \; ; \; (t = \cos x \; ; \; (-1) \le t \le 1)$

$f(-1) \times f(1) = (2 + 2m + 1m)(2 - 2m - 1 + m)$

$$= (3m+3)(1-m)$$

សមីការ (2) មានឫសចន្លោះ $[-1;1]$ កាលណា :

$f(-1) \times f(1) < 0 \Leftrightarrow 3(m+1)(1-m) < 0$

m	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f(-1) \times f(1) < 0$		$-$	0	$+$	0	$-$	

ដូចនេះ $\boxed{m \in \;]-\infty;-1] \cup [1; \; +\infty[}$

5. គេឱ្យ (E) : $2\sin^2 x - 5\sin x + 2 > 0$

តាង $x = \sin x$ ហើយ $2x^2 - 5x + 2 > 0$

ក. ដាក់កន្សោមជាផលគុណកត្តា : $2x^2 - 5x + 0$:

$2x^2 - 5x + 2 = 2x^2 - 4x - x + 2 = (2x-1)(x-2)$

ខ. បង្ហាញថា (E) អាចសរសេរជារាង

$$2(\sin x - 2)\left(\sin x - \frac{1}{2}\right) > 0$$

គេមាន (E) : $2\sin^2 x - 5\sin x + 2 > 0$

$(2\sin x - 1)(\sin x - 2) > 0$ (តាមសំណួរ ក)

$2\left(\sin x - \frac{1}{2}\right)(\sin x - 2) > 0$ (ពិត)

គ. សិក្សាសញ្ញា $(\sin x - 2)\left(\sin x - \frac{1}{2}\right)$ លើចន្លោះ $[0;2\pi]$

តាង $f(t) = (t-2)\left(t - \frac{1}{2}\right)$; $t = \sin$; $(-1 \le t \le 1)$

$$f(t) = 0 \Leftrightarrow t - 2 = 0 \Rightarrow t = 2$$

$$t - \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow t = \frac{1}{2}$$

t	-1		$1/2$		$f(t)$	2
$f(t)$		$+$	0	$-$		

+ $f(t) > 0$: $-1 < t < \frac{1}{2} \Leftrightarrow -1 < \sin x < \frac{1}{2}$ នោះ $x \notin \left[\frac{\pi}{6};\frac{5\pi}{6}\right]$

+ $f(t) = 0$ នោះ $\sin x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{6}$; $x = \frac{5\pi}{6}$

$+\quad f(t) < 0 : \frac{1}{2} < t < 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2} < \sin x < 1$ នោះ

$$\frac{\pi}{6} < x < \frac{5\pi}{6}$$

ឃ.រកសំណុំចម្លើយនៃ (E) :

ដូចនេះ $x \notin \left[\frac{\pi}{6} + 2k\pi \ ; \ \frac{5\pi}{6} + 2k\pi\right]$

6. ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ

ក. $\begin{cases} \sin x + \sin y = \frac{3}{2} & (1) \\ \sin^2 x + \sin^2 y = \frac{5}{4} & (2) \end{cases}$

តាម (1) : $\sin x = \frac{3}{2} - \sin y$

តាម (2) : $\left(\frac{3}{2} - \sin y\right)^2 + \sin^2 y = \frac{5}{4}$

$$2\sin^2 y - 3\sin y + 1 = 0$$

នោះ $\sin y = 1 \Rightarrow y = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

$$\sin y = \frac{1}{2} \Rightarrow y = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \ ; \ y = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$$

ចំពោះ $y = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \Rightarrow \sin x = \frac{3}{2} - \sin\frac{\pi}{2} = \frac{1}{2}$

នោះ $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \; ; \; x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$

ចំពោះ $y = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$

$y = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \Rightarrow \sin x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

ដូចនេះ $\left(x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \; ; \; y = \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)$;

$$\left(x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \; ; \; y = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi\right)$$

$$\left(x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \; ; \; y = \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right);$$

$$\left(x = \frac{5\pi}{2} + 2k\pi \; ; \; y = \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)$$

ខ. $\begin{cases} \cos^3 x - \cos x + \sin y = 0 \; (1) \\ \sin^3 x - \sin y + \cos x = 0 \; (2) \end{cases}$

យក $(1) + (2)$: $\cos^3 x + \sin^3 x = 0$

$$(\cos x + \sin x)(\cos^2 x - \sin x \cos x + \sin^2 x) = 0$$

$$(\cos x + \sin x)(1 - \sin x \cos x) = 0$$

$$(\cos x + \sin x)\left(1 - \frac{1}{2}\sin 2x\right) = 0$$

$1 - \frac{1}{2}\sin 2x = 0 \Leftrightarrow \sin 2x = 0$ (មិនយក)

$$\cos x + \sin x = 0 \Leftrightarrow \cos x = -\sin x$$

$\cos x = \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$ នោះ $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \; ; k \in \mathbb{Z}$

តាម (2) : $\sin y = \sin^3 x + \cos x$

$$= \left(\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)^3 + \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$= \sin 20.7^\circ$$

$$\left[\begin{array}{l} y = 20.7^\circ + 2k\pi \\ y = 159.3^\circ + 2k\pi \end{array}\right.$$

ដូចនេះ $\left(-\frac{\pi}{4} + k\pi \;\; ; \;\; 20.7^\circ + 2k\pi\right)$;

$$\left(-\frac{\pi}{4} + k\pi \;\; ; \;\; 159.3^\circ + 2k\pi\right)$$

គ. $\begin{cases} \dfrac{1 - \tan x}{1 + \tan x} = \tan y \quad (1) \\ x - y = \dfrac{\pi}{6} \qquad (2) \end{cases}$

តាម (2) : $y = x - \frac{\pi}{6}$

តាម (1) : $\frac{1 - \tan x}{1 + \tan x} = \tan\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$

$$\frac{\tan\frac{\pi}{4} - \tan x}{1 + \tan\frac{\pi}{4}\tan x} = \tan\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \tan\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$$

នោះ $\frac{\pi}{4} - x = x - \frac{\pi}{6} + k\pi$

$$-2x = -\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{4} - k\pi$$

$$= \frac{-5\pi}{12} + k\pi$$

$$x = \frac{5\pi}{24} + \frac{k\pi}{2} \; ; k \in \mathbb{Z}$$

$$y = \frac{5\pi}{24} - \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}$$

$$= \frac{\pi}{24} + \frac{k\pi}{2}$$

ដូចនេះ $\boxed{\begin{array}{l} x + \dfrac{5\pi}{24} = \dfrac{k\pi}{2} \\ y = \dfrac{\pi}{24} + \dfrac{k\pi}{2} \end{array}}$

8. រករង្វាស់មុំ A;B;C

គេមាន $\dfrac{A+C}{2} = B$ តែ $A + B + C = \pi$

នោះ $3B = \pi \Rightarrow B = \dfrac{\pi}{3}$

$$\sin A + \sin\frac{\pi}{3} + \sin C = \frac{3+\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin A + \sin C = \frac{3}{2}$$

$$2\cos\frac{\pi}{6}\cos\left(\frac{A-C}{2}\right) = \frac{3}{2}$$

$$2 \times \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\left(\frac{A-C}{2}\right) = \frac{3}{2}$$

$$\cos\left(\frac{A-C}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\frac{\pi}{6}$$

$$A - C = \frac{\pi}{3}$$

តែ $A + C = \pi - B = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$

$$\begin{cases} A - C = \frac{\pi}{3} \\ A + C = \frac{2\pi}{3} \end{cases} \Rightarrow A = \frac{\pi}{2} \ ; \ C = \frac{\pi}{6}$$

ដូចនេះ $\boxed{A = \frac{\pi}{2} \ ; \ B = \frac{\pi}{3} \ ; \ C = \frac{\pi}{6}}$

លំហាត់

មេរៀន បំលែងលីនេអ៊ែរ

1. តើបំលែងនីមួយៗដែលប្តូរចំណុច $P(x, y)$ ទៅចំណុច $P'(x', y')$ នៅលើប្លង់មួយដែលបញ្ជាក់បំលែងលីនេអ៊ែរ ឬមិនបំលែងលីនេអ៊ែរខាងក្រោម :

   ក. ចំណុច P' គឺជាចំណុចឆ្លុះទៅនឹងចំណុច P ធៀបទៅនឹងបន្ទាត់ $x = 1$ ។

   ខ. ចំណុច P' ជាចំណុចកែងទៅនឹងបន្ទាត់ P ទៅអ័ក្សអាប់ស៊ីស។

   គ. ចំណុច P' ជាចំណុចដែលបានដោយការបំលែងចំណុច P តាមវ៉ិចទ័រ $(1, -2)$ ។

   ឃ. ចំណុច P' ជាចំណុចដែលបន្ទាត់កាត់តាមចំណុច P ដែលមានមេគុណប្រាប់ទិស 2 ហើយស្របទៅនឹងបន្ទាត់ $y = x$ ។

2. យក f ជាបំលែងលីនេអ៊ែរ ដែលប្តូរពីរចំណុច $(1, 0)$ និង $(0, 1)$ ទៅចំណុច $(-1, 2)$ និង $(3, 1)$ ។

ក. រកម៉ាទ្រីសនៃ f។

ខ. រកភាពនៃចំណុច $(-3, 2)$ តាម f។

គ. រករូបភាពនៃចំណុច $(5, -3)$ តាមបំលែងច្រាសនៃ f។

3. គេឱ្យបំលែងលីនេអ៊ែរ f។ រក $f(3\vec{u}-2\vec{v})$ ចំពោះ $f(\vec{u}) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ និង $f(\vec{v}) = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$។

4. តើរូបអ្វីដែលប្លង់មួយប្លង់កាត់បំលែងលីនេអ៊ែរ ដែលបង្ហាញដោយម៉ាទ្រីសខាងក្រោម :

ក. $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ ខ. $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$ គ. $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

5. ករូបធរណីមាត្រដែលបន្ទាត់ $2x - y + 3 = 0$ ប្លែងតាមបំលែងលីនេអ៊ែរ $(x, y) \to (3x - y, -2x + y)$។

6. រកម៉ាទ្រីសនៃបំលែងលីនេអ៊ែរដែលប្លែងដោយពីរចំណុច $(2, 1)$ និង $(-1, 3)$ ទៅចំណុច $(8, -5)$ និង $(11, -6)$ រៀងគ្នា។

7. រករូបភាពនៃចំណុច $(-6, 7)$ តាមបំលែងបណ្តាក់ $g\circ f^{-1}$ ដែលឱ្យដោយម៉ាទ្រីសនៃបំលែងលីនេអ៊ែរ f និង g គឺ $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}$ និង $\begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ រៀងគ្នា។

ចម្លើយ

1. ក. ជាបំលែងលីនេអ៊ែរ ខ. មិនមែនជាបំលែងលីនេអ៊ែរ

គ. ជាបំលែងលីនេអ៊ែរ ឃ. មិនមែនជាបំលែងលីនេអ៊ែរ

2. ក. រកម៉ាទ្រីសនៃ f :

ដោយ f ជាបំលែងលីនេអ៊ែរពីរចំណុច $(1;0)$ និង $(0;1)$ ទៅចំណុច $(-1;2)$ និង $(3;1)$

ដូចនេះម៉ាទ្រីស f គឺ : $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

ខ. រកភាពនៃចំណុច $(-3, 2)$ តាម f គេបាន

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = f\begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ -4 \end{bmatrix}$$

គ. រករូបភាពនៃចំណុច $(5, -3)$ តាមបំលែងច្រាសនៃ f

គេមាន $f = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix}$ នោះ $f^{-1} = -\frac{1}{7}\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$

គេបាន $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = -\frac{1}{7}\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$

3. រក $f(3\vec{u} - 2\vec{v})$ ចំពោះ $f(\vec{u}) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$; $f(\vec{v}) = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$

ដោយ f ជាបំលែងលីនេអ៊ែរ

គេបាន $f(3\vec{u} - 2\vec{v}) = 3f(\vec{u}) - 2f(\vec{v})$

$$= 3\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \end{bmatrix}$$

4. រករូបភាពនៃ $M(x;y)$

តាង $M'(x';y')$ ជារូបភាពនៃ $M(x;y)$:

ក. $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

គេបាន $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x - y \\ x + y \end{bmatrix}$

ដូចនេះ $\boxed{x' = 2x - 3y ; y' = x + y}$

ខ. $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x + y \\ 6x + 3y \end{bmatrix}$$

ដូចនេះ $x' = 2x + y; y' = 6x + 3y$

គ. $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ នោះ $x' = 0; y' = 0$

5. រករូបធរណីមាត្រដែលបន្ទាត់ $2x - y + 3 = 0$ ប្តូង តាមបំលែងលីនេអ៊ែរ $(x, y) \to (3x - y, -2x + y)$:

គេបាន $(x'; y') = (3x - y; -2x + y)$

តាម (1) $2(3x - y) - (-2x + y) + 3 = 0$

$$8x - 3y + 3 = 0 \text{ ជាបន្ទាត់ ។}$$

6. រកម៉ាទ្រីសនៃបំលែងលីនេអ៊ែរ

តាង $A = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$ ជាម៉ាទ្រីសនៃបំលែងលីនេអ៊ែរនេះ

គេឱ្យចំណុច $(8;-5)$ ជារូបភាពនៃចំណុច $(2;1)$

គេបាន $\begin{bmatrix} 8 \\ -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2a + c \\ 2b + d \end{bmatrix}$

នោះ $\begin{cases} 2a + c = 8 & (1) \\ 2b + d = -5 & (2) \end{cases}$

ចំណុច $(-11;6)$ ជារូបភាពនៃចំណុច $(-1;3)$

$$\begin{bmatrix}-11\\6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a & c\\b & d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-a+3c\\-b+3d\end{bmatrix}$$

នោះ $\begin{cases}-a+3c=-11 & (3)\\-b+3d=6 & (4)\end{cases}$

តាម (1) និង (3) គេបាន $a=5;c=-2$

តាម (2) និង (4) គេបាន $b=(-3);d=1$

ដូចនេះ $A=\begin{bmatrix}5 & -2\\-3 & 1\end{bmatrix}$

7. រករូបភាពនៃចំណុច $(-6,7)$ តាមបំលែងបណ្តាក់ $g\circ f^{-1}$

គេបាន $f=\begin{bmatrix}1 & 2\\-1 & -3\end{bmatrix}$ នោះ $f^{-1}=-\begin{bmatrix}-3 & -2\\1 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & 2\\-1 & -1\end{bmatrix}$

គេបានរូបភាពនៃ $(-6,7)$ តាមបំលែងបណ្តាក់ $g\circ f^{-1}$ គឺ

$$\begin{bmatrix}x''\\y''\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2 & 2\\1 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 2\\-1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-6\\7\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-9 & -7\\5 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-6\\7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\\-2\end{bmatrix}$$

ដូចនេះរូបភាពនៃចំណុច $(-6,7)$ គឺ $(5;-2)$

លំហាត់

ជំពូក ៤

1. រកតម្លៃ x និង y ដែល $x\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix} + y\begin{bmatrix}2 & 1\\0 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2 & 1\\0 & 1\end{bmatrix}^3$ ពិត។

2. រកតម្លៃ x និង y ដែលម៉ាទ្រីស $\begin{bmatrix}x & 5\\-7 & y\end{bmatrix}$ ជាម៉ាទ្រីសច្រាសនៃខ្លួនវា។

3. កំណត់តម្លៃនៃចំនួនថេរ k ដែលប្រព័ន្ធសមីការ $\begin{cases}2x + 3y = kx\\4x + 3y = ky\end{cases}$ មានចម្លើយផ្សេងគ្នា $x = y = 0$ ។

4. បង្ហាញថា $ps - qr = (ad - bc)(a'd' - b'c')$ បើ $\begin{bmatrix}a & b\\c & d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a' & b'\\c' & d'\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}p & q\\r & s\end{bmatrix}$ ។

5. រកម៉ាទ្រីសនៃបំលែងចាំងដែលប៉ារ៉ាបូល $y = ax^2$ ប្លែងទៅប៉ារ៉ាបូល $y = x^2$ ។

6. រកម៉ាទ្រីសនៃបំលែងលីនេអ៊ែរដែលប្លែងទៅគ្រប់ចំណុចទាំងអស់នៅលើបន្ទាត់ $3x + 2y - 1 = 0$ ទៅចំណុច $(-1, 1)$ ។

7. រកម៉ាទ្រីសនៃបំលែងលីនេអ៊ែរដែលប្លែងទៅគ្រប់ចំណុចទាំងអស់លើប្លង់ទៅបន្ទាត់ $y = 2x$ ។

8. យក L ជាបន្ទាត់ដែលកាត់តាមចំណុចគល់តម្រុយ ហើយបង្កើតបានមុំ θ ជាមួយអ័ក្សអាប់ស៊ីស។

ក. យក p' ជាចំណុចឆ្លុះគ្នាជាមួយចំណុច p ធៀបទៅនឹងអ័ក្សអាប់ស៊ីស ហើយបំលែងវិលជុំវិញគល់តម្រុយតាមមុំ 2θ ។ បង្ហាញថា p' ស៊ីមេទ្រីទៅនឹង p ធៀបទៅនឹងបន្ទាត់ L ។

ខ. រកម៉ាទ្រីសនៃបំលែងលីនេអ៊ែរដែលបង្ហាញពីការឆ្លុះគ្នាធៀបទៅនឹងបន្ទាត់ L ។

9. គេតាងប៉ារ៉ាម៉ែតនៃបន្ទាត់ L គឺ $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ ។ តើរូបនៃ L ប្លែងតាមបំលែងលីនេអ៊ែរដែលបញ្ជាក់

ដោយម៉ាទ្រីស $\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$ គឺជារូបអ្វី ?

10. យក $\begin{bmatrix} -2 & a \\ a & 0 \end{bmatrix}$ ជាម៉ាទ្រីសនៃបំលែងលីនេអ៊ែរ f ដែល $a \neq 0$ ។

ក. តើរូបអ្វីដែលអ័ក្សអាប់ស៊ីស និងអ័ក្សអរដោនេប្លែងតាម f។

ខ. បង្ហាញថាមានបន្ទាត់ពីរកាត់តាមគល់តម្រុយដែលមិនប្លែងតាម f ហើយវាប្រសព្វគ្នាបានមុំកែង។

11. រកតម្លៃនៃ a និង b បើបន្ទាត់ $3x - 4y + 1 = 0$ ប្លែងទៅបន្ទាត់ $3x + 2y - 1 = 0$ តាមបំលែងលីនេអ៊ែរដែលបញ្ជាក់ដោយម៉ាទ្រីស $\begin{bmatrix} 1 & a \\ b & 5 \end{bmatrix}$ ។

12. បន្ទាត់ពីរ $x + y = 1$ និង $2x - y = 1$ ប្លែងទៅនឹមួយៗផ្សេងទៀតតាមបំលែងលីនេអ៊ែរ f។ រកម៉ាទ្រីស f។

13. បើចំណុច P_1 និង P_2 ប្លែងទៅចំណុច P'_1 និង P_2' តាមបំលែងលីនេអ៊ែរ f: $(x, y) \rightarrow ax + by, (cx + dy)$

ហើយបើ $P_1P_2 = P'_1P'_2$ ពិតនោះ $a^2 + c^2 = b^2 + d^2 = 1$

និង $ab + cd = 0$ ។

14. យក f ជាបំលែងលីនេអ៊ែរដែលបញ្ជាក់ដោយម៉ាទ្រីស

$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -5 \end{bmatrix}$ ។ រកសមីការនៃបន្ទាត់ L_1 និង L_2 បើ L_1

ប្លែងទៅ L_2 តាម f ហើយ L_1 និង L_2 ប្រសព្វគ្នាត្រង់

ចំណុច $P(0, 1)$ ។

ចម្លើយ

1. រកតម្លៃ x និង y :

គេមាន : $x\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^3$

$$\begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2y & y \\ 0 & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x + 2y & y \\ 0 & x + y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 7 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\begin{cases} x + 2y = 8 \\ y = 7 \end{cases}$ នោះ $x = -6; y = 7$

2. រកតម្លៃ x និង y :

ដោយម៉ាទ្រីស $\begin{bmatrix} x & 5 \\ -7 & y \end{bmatrix}$ ជាម៉ាទ្រីសច្រាសនៃខ្លួនវា

គេបាន $\begin{bmatrix} x & 5 \\ -7 & y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & 5 \\ -7 & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} x^2-35 & 5x+5y \\ -7x-7y & -35+y^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x^2-35 = 1 \\ 5x+5y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 6 \\ y = \pm 6 \end{cases}$$

3. កំណត់តម្លៃនៃចំនួនថេរ k :

គេមាន $\begin{cases} 2x+3y = kx \\ 4x+3y = ky \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2-k)x+3y = 0 \\ 4x+(3-k)y = 0 \end{cases}$

ប្រព័ន្ធសមីការមានឫសផ្សេងទៀត

$$\frac{2-k}{4} = \frac{3}{3-k} \Leftrightarrow (2-k)(3-k) = 12$$

$k^2-5k-6 = 0$ នោះ $k = -1; k = 6$

4. បង្ហាញថា $ps-qr = (ad-bc)(a'd'-b'c')$

គេមាន $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix}$

ដូចនេះ $(ad - bc)(a'd' - b'c') = ps - qs$ (ពិត)

5. រកម៉ាទ្រីសនៃបំលែងចាំងដែលប៉ារ៉ាបូល $y = ax^2$

ប្លែងទៅប៉ារ៉ាបូល $y = x^2$

បំលែងចាំងនេះមានផ្ចិត 0 ផលធៀប a ឬ $H(0;a)$

ដូចនេះ ម៉ាទ្រីសបំលែងចាំងគឺ $\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}$

6. រកម៉ាទ្រីសនៃបំលែងលីនេអ៊ែរ

គេមាន $3x + 2y - 1 = 0$

យកចំណុច $\left(0;\frac{1}{2}\right);(-1;1)$ ជាពីរចំណុចនៅលើបន្ទាត់នេះ

យកចំណុច $(-1;1)$ ជារូបភាពនៃចំណុច $\left(0;\frac{1}{2}\right)$ និង $(1;-1)$

$$+\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 + \frac{1}{2}C \\ 0 + \frac{d}{2} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\frac{1}{2}C = -1 \\ +\frac{d}{2} = 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C = -2 \\ d = +2\end{cases}$$

$$+\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}a & c\\ b & d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}a & -2\\ b & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}a+2\\ b-2\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}a+2 = -1\\ b-2 = 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a = -3\\ b = 3\end{cases}$$

ដូចនេះ ម៉ាទ្រីសបំលែងលីនេអ៊ែរគឺ $\begin{bmatrix}-3 & -2\\ 3 & 2\end{bmatrix}$

7. រកម៉ាទ្រីសនៃបំលែងលីនេអ៊ែរ :

គេមាន $y = 2x$ យក $(a;2a);(b;2b)$ នៅលើបន្ទាត់នេះ

គេបាន $\begin{bmatrix}a & b\\ 2a & 2b\end{bmatrix}$

8. ក. បង្ហាញថា p' ស៊ីមេទ្រីទៅនឹង p ធៀបទៅនឹងបន្ទាត់ L

យក $(x';y')$ និង $(x;y)$ ជាកូអរដោនេនៃ p' និង p

រៀងគ្នា

គេបាន $\begin{bmatrix}x'\\ y'\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\cos 2\theta & -\sin 2\theta\\ \sin 2\theta & \cos 2\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos 2\theta & -\sin 2\theta\\ \sin 2\theta & \cos 2\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\-y\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos 2\theta & \sin 2\theta\\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$$

ដូចនេះ p' ស៊ីមេទ្រីទៅនឹង p ធៀបទៅនឹងបន្ទាត់ L

ខ. រកម៉ាទ្រីសនៃបំលែងលីនេអ៊ែរដែលបង្ហាញពីការឆ្លុះគ្នាធៀបទៅនឹងបន្ទាត់ L

តាមសំរាយ ក គេបាន $\begin{bmatrix}\cos 2\theta & \sin 2\theta\\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta\end{bmatrix}$

9. រូបភាពនៃ L

$$\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\3\end{bmatrix}+t\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$$

គេបាន $\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & -3\\-2 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$

$$=\begin{bmatrix}4 & -3\\-2 & 2\end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix}4\\3\end{bmatrix}+t\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}\right)$$

$$=\begin{bmatrix}16+8t-9-3t\\-8-4t+6+2t\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7+5t\\-2-2t\end{bmatrix}$$

$=\begin{bmatrix}7\\-2\end{bmatrix}+t\begin{bmatrix}5\\-2\end{bmatrix}$ ជាសមីការប៉ារ៉ាម៉ែតនៃបន្ទាត់

10. គ. រគូបភាព :

- អ័ក្ស ox :

យក M(x;0) ប្តូរទៅ M(x';0) តាមម៉ាទ្រីស $\begin{bmatrix}-2 & a\\ a & 0\end{bmatrix}$

នោះយើងបាន $\begin{bmatrix}x'\\ y'\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-2 & a\\ a & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}$

ដោយ M នៅលើអ័ក្ស (ox) នោះ M មានកូអរដោនេ

(m;0)

គេបាន $\begin{bmatrix}x'\\ y'\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-2 & a\\ a & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}m\\ 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-2m\\ ma\end{bmatrix}$

នោះ $x' = -2m$ នោះ $m = -\dfrac{x'}{2}$

$$y' = ma = -\frac{1}{2}ax'$$

ដូចនេះ $y = -\dfrac{1}{2}ax$

- អ័ក្សអរដោនេ (oy) :

យក N(x;y) ប្តូរទៅ N'(x';y')

$\begin{bmatrix}x'\\ y'\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-2 & a\\ a & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}$

ដោយ N នៅលើ (oy) នោះ (0;n)

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & a \\ a & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0+an \\ 0+0 \end{bmatrix}$$

នោះ $x' = an; y' = 0$

ដូចនេះ (oy)

ខ. បង្ហាញថាមានបន្ទាត់ពីរកាត់តាមគល់តម្រុយដែលមិនប្លែងតាម f ហើយវាប្រសព្វគ្នាបានមុំកែង :

ម៉ាទ្រីសនៃបំលែងរ៉ុលតាមមុំ 90°

$$\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 90^\circ & -\sin 90^\circ \\ \sin 90^\circ & \cos 90^\circ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

រូបភាពនៃ D តាម R តាងដោយ D' ហើយ

$$An;-\frac{an}{2};B\left(m;-\frac{an}{2}\right)$$

$$A' = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} n \\ -\frac{an}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +\frac{an}{2} \\ n \end{bmatrix}; B' = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} m \\ -\frac{am}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{am}{2} \\ m \end{bmatrix}$$

សមីការបន្ទាត់ D' កំណត់ដោយ:

$$\frac{x-\frac{a}{2}}{\frac{am}{2}-\frac{an}{2}}=\frac{y-n}{m-n}\Leftrightarrow (y-n)\times\frac{a}{2}(m-n)=(m-n)\left(x-\frac{an}{2}\right)$$

$$\frac{a}{2}y-\frac{an}{2}=x-\frac{an}{2}$$ នោះ $$y=\frac{2}{a}x$$

ដូចនេះគេមានបន្ទាត់ពីរ $D: y=-\frac{1}{2}ax$ និង $D': y=\frac{2}{a}x$

កាត់តាម o ហើយមិនមែនជាបំលែងលីនេអ៊ែរកាត់គ្នាបានមុំ $90°$ ។

11. រកតម្លៃនៃ a និង b :

តាម $L': 3x+2y-1=0$ ជាបំលាស់ទីនៃ

$L: 3x-4y+1=0$ មានម៉ាទ្រីស $\begin{bmatrix}1 & a\\ b & 5\end{bmatrix}$

យក $A\left(0;\frac{1}{4}\right);B\left(-\frac{1}{3};0\right)$ ជាចំណុចនៃ L គេបាន :

$$A'=\begin{bmatrix}1 & a\\ b & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ \frac{1}{4}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{4} & a\\ \frac{5}{4}\end{bmatrix};B'=\begin{bmatrix}1 & a\\ b & 5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{3}\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{3}\\ -\frac{b}{3}\end{bmatrix}$$

យក $A'\left(\frac{a}{4};\frac{5}{4}\right)$ និង $B'\left(-\frac{1}{3};-\frac{b}{3}\right)$ ជំនួសក្នុង L'

$$\begin{cases} \frac{3a}{4}+\frac{5}{2}-1 = 0 \\ -1-\frac{2b}{3}-1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3a}{4} = -\frac{3}{2} \\ -2\frac{b}{3} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = -3 \end{cases}$$

ដូចនេះ $\boxed{a = -2; b = -3}$

12. រកម៉ាទ្រីស f :

ចម្លើយ : $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

14. $L_1 : x + y - 1 = 0$; $L_2 : 3x + y - 1 = 0$

លំហាត់

មេរៀន អនុវត្តដេរីវេចំពោះសមីការ និងវិសមីការ

1. អនុគមន៍ $y = x^3 - 3x^2$ មានក្រាប C។

ក. សង់ក្រាប C នៃអនុគមន៍។

ខ. សិក្សាទៅតាមតម្លៃប៉ារ៉ាម៉ែត m ពីអត្ថិភាពនិងចំនួនឫសនៃសមីការ $x^3 - 3x^2 = m$ តាមក្រាប។

2. អនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x) = x^3 - 6x + 5$ ។

ក. សង់ក្រាបនៃ f។

ខ. សិក្សាទៅតាមតម្លៃ a ពីអត្ថិភាពនិងសញ្ញាឫសនៃសមីការ $x^3 - 6x + 5 - a = 0$ ។

3. គេឱ្យសមីការ $2x^3 - 3x^2 - 12x - k = 0$ ដែលមានអញ្ញាត x និងប៉ារ៉ាម៉ែត k។

ក. រកតម្លៃ k ដើម្បីឱ្យសមីការមានឫសបីផ្សេងគ្នា។

ខ. រកតម្លៃ k ដើម្បីឱ្យសមីការមានឫសវិជ្ជមានពីរផ្សេងគ្នានិងឫសអវិជ្ជមានមួយទៀត។

4. អនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x) = x^3 - 3x + 1$ មានក្រាប C។

ក. សង់ក្រាប C នៃ f។

ខ. សិក្សាលើក្រាបទៅតាមតម្លៃ p ពីអត្ថិភាពនិងទីតាំងឫសនៃសមីការ $f(x) = p$ ធៀបនឹងចំនួន -1 និង 1។

5. ក. សង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ $y = \frac{3}{2}x^4 + \frac{1}{2}x^2 - 4$។

ខ. សិក្សាលើក្រាបទៅតាមតម្លៃ m ពីអត្ថិភាពនិងទីតាំងឫសនៃសមីការ $\frac{3}{2}x^4 + \frac{1}{2}x^2 - 4 - m = 0$ ធៀបនឹង -1 និង 2។

6. គេឱ្យសមីការ $-2x^4 + 3x^2 - 1 = a$។

ក. រកតម្លៃ a ដើម្បីឱ្យសមីការមានឫសបួនផ្សេងគ្នា។

ខ. រកតម្លៃ a ដើម្បីឱ្យសមីការគ្មានឫស។

7. ក. សង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - 3x - 1$។

ខ. ដោះស្រាយវិសមីការ $f(x) + 1 \leq 0$ តាមក្រាប។

8. អនុគមន៍ $y = x^2 + 3x^2 - 4$ មានក្រាប C ។

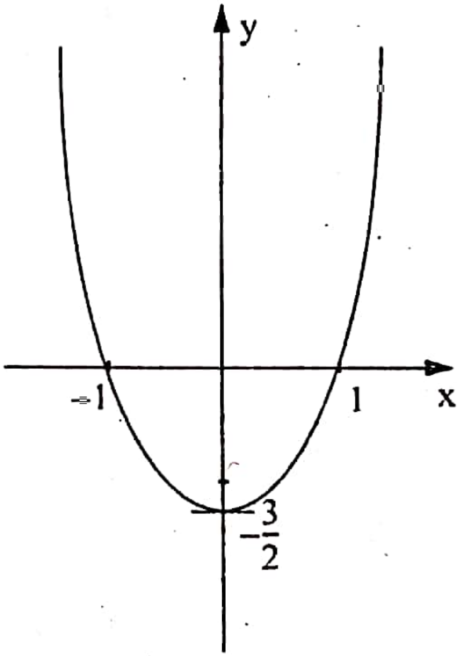
ក. សង់ក្រាប C នៃអនុគមន៍។

ខ. បង្ហាញថា $x^2 + 3x^2 - 4 \leq 0$ ចំពោះ $x \leq -2$ ។

9. គេឱ្យក្រាប C នៃអនុគមន៍ $y = \frac{1}{2}x^4 + x^2 - \frac{3}{2}$ ។

ក. ដោះស្រាយវិសមីការ $\frac{1}{2}x^4 + x^2 - \frac{3}{2} \geq 0$ តាមក្រាប។

ខ. បង្ហាញថា $\frac{1}{2}x^4 + x^2 - \frac{3}{2} < 0$ ចំពោះ $x \in (-1, 1)$



10. f ជាអនុគមន៍កំណត់ដោយ $f(x) = -x^4 + 2x^2 - 2$ ។

ក. សង់ក្រាបនៃ f ។

ខ. ដោះស្រាយទ្វេវិសមីការ $-2 \leq f(x) \leq -1$ តាមក្រាប។

គ. បង្ហាញថា $f(x) < -2$ ចំពោះ

$x \in (-\infty, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, \ +\infty)$ តាមក្រាប។

11.ក. សង់ក្រាប C_1 នៃ $y = 3x^4 + 1$ និង C_2 នៃ

$y = 8x^3 - 18x^2$ នៅក្នុងតម្រុយតែមួយ។

ខ. បង្ហាញថា $3x^4 + 1 > 8x^3 - 18x^2$ ចំពោះ $x \geq 0$

តាមក្រាប។

គ. រកដេរីវេនៃអនុគមន៍ $f(x) = 3x^4 - 8x^3 + 18x^2 + 1$ និង

គណនា $f(0)$ ។

ឃ. បង្ហាញថា $f(x) > 0$ ចំពោះ $x \geq 0$ ហើយទាញ

បញ្ជាក់ថា $3x^4 + 1 > 8x^3 - 18x^2$ ចំពោះ $x \geq 0$ ។

ចម្លើយ

1. ក. សង់ក្រាប C នៃអនុគមន៍ $y = x^3 - 3x^2$

- ដែនកំណត់ $D = \mathbb{R}$

- ទិសដៅអថេរភាព

+ ដេរីវេ : $f'(x) = 3x^2 - 6x$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x = 0$$

នោះ $x = 0; x = 2$

\+ ចំណុចបរមា : $f(0) = 0; f(2) = -4$

\+ លីមីត : $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to \pm\infty} x^3 = \pm\infty$

\+ តារាងអថេរភាព

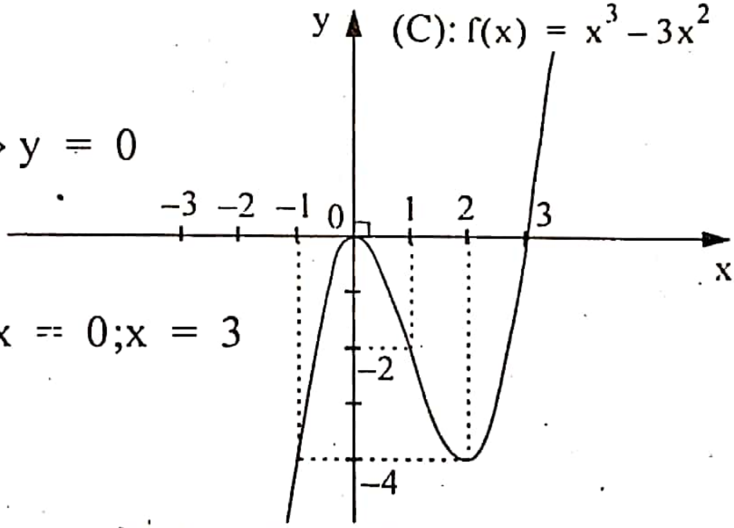
x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	-4	$\nearrow$	$+\infty$

\- សង់ក្រាប C

បើ $x = 0 \Rightarrow y = 0$

បើ

$y = 0 \Rightarrow x = 0; x = 3$



ខ. សិក្សាទៅតាមតម្លៃប៉ារ៉ាម៉ែត m ពីអត្ថិភាពឫសនៃ

សមីការ $x^3 - 3x^2 = m$

ចំនួនឫសនៃសមីការជាចំនួនចំណុចប្រសព្វនៃក្រាប C:

$f(x) = x^2 - 3x^2$ និង D: $y = m$ ចលតដោយស្រប

អ័ក្ស ox

- បើ $m > 0$ សមីការមានឫសមួយគឺ $x > 3$

- បើ $m = 0$ សមីការមានឫសពីរផ្សេងគ្នាគឺ

$$x_1 = 0 < x_2 = 3$$

- បើ $-4 < m < 0$ សមីការមានឫសបីផ្សេងគ្នាគឺ

$$-1 < x_1 < 0 < x_2 < x_3 < 3$$

- បើ $m = -4$ សមីការមានឫសមួយគឺ $x_1 = -1 < x_2 = 2$

- បើ $m < -4$ សមីការមានឫសពីរគឺ $-1 < x$

2. ក. សង់ក្រាបនៃ f :

$$f(x) = x^3 - 6x + 5$$

- ដែនកំណត់ $D = \mathbb{R}$

- ទិសដៅអថេរភាព

+ ដេរីវេ : $f'(x) = 3x^2 - 6$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6 = 0$$

$$x(x^2 - 1) = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}$$

+ ចំណុចបរមា : $f(\sqrt{2}) = 2\sqrt{2} - 6\sqrt{2} + 5 = 5 - 4\sqrt{2}$

$$f(-\sqrt{2}) = -2\sqrt{2} + 6\sqrt{2} + 5 = 5 + 4\sqrt{2}$$

+ លីមីត : $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to \pm\infty} (x^3 - 6x + 5) = \pm\infty$

+ តារាងអថេរភាព

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$5+4\sqrt{2}$	$\searrow$	$5-4\sqrt{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

៥. សិក្សាអត្ថិភាពឫសសមីការ

$$x^3 - 6x + 5 - a = 0$$

$$x^3 - 6x + 5 = a$$

ចំនួនឫសនៃសមីការគឺជាចំនួនចំណុចប្រសព្វរវាងក្រាប $C : f(x) = x^3 - 6x + 5$ និងបន្ទាត់ $D : y = a$ ចល័តស្របអ័ក្ស xo

- បើ $a > 5 + 4\sqrt{2}$ សមីការមានឫស $x > 0$

- បើ $a = 5+4\sqrt{2}$ សមីការមានឫស $x_1 = x_2 < 0 < x_3$

- បើ $5 < a < 5+4\sqrt{2}$ សមីការមានឫស $x_1 < x_2 < 0 < x_3$

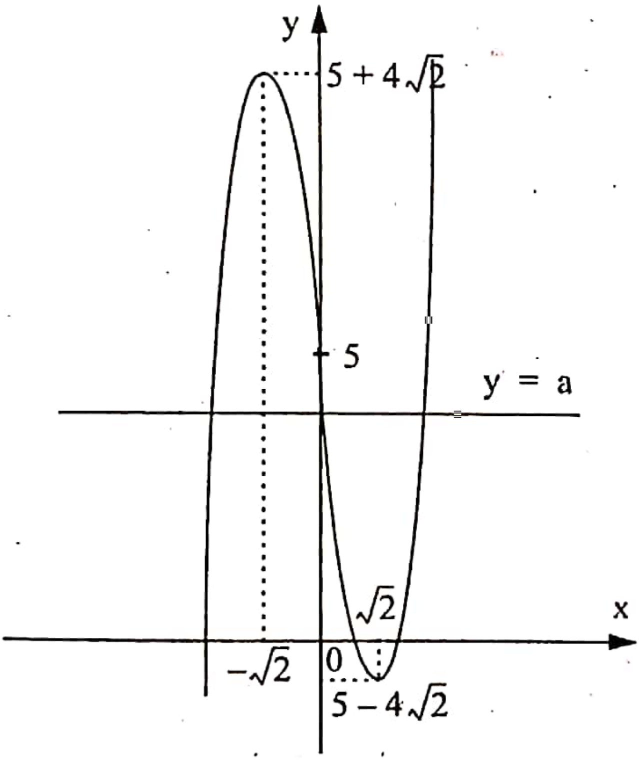
- បើ $a = 5$ សមីការមានឫស $x_1 < x_2 = 0 < x_3$

- បើ $5-4\sqrt{2} < a < 5$ សមីការមានឫស $x_1 < 0 < x_2 < x_3$

- បើ $a = 5+4\sqrt{2}$ សមីការមានឫស

$x_1 < 0 < x_2 = x_3 = \sqrt{2}$

- បើ $a < 5+4\sqrt{2}$ សមីការមានឫស $x < 0$



ក. រកតម្លៃ k ដើម្បីឱ្យសមីការមានឫសបីផ្សេងគ្នា

គេមាន $2x^3 - 3x^2 - 12x - k = 0$

គេបាន $2x^3 - 3x^2 - 12x = k$ ឫសនៃសមីការជាចំនួន

ចំណុចប្រសព្វនៃក្រាប $C:\ f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x$

និងបន្ទាត់ $y = k$

$$f'(x) = 6x^2 - 6x - 12$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 6x^2 - 6x - 12 = 0$$

$$\Rightarrow x = -1; x = 2$$

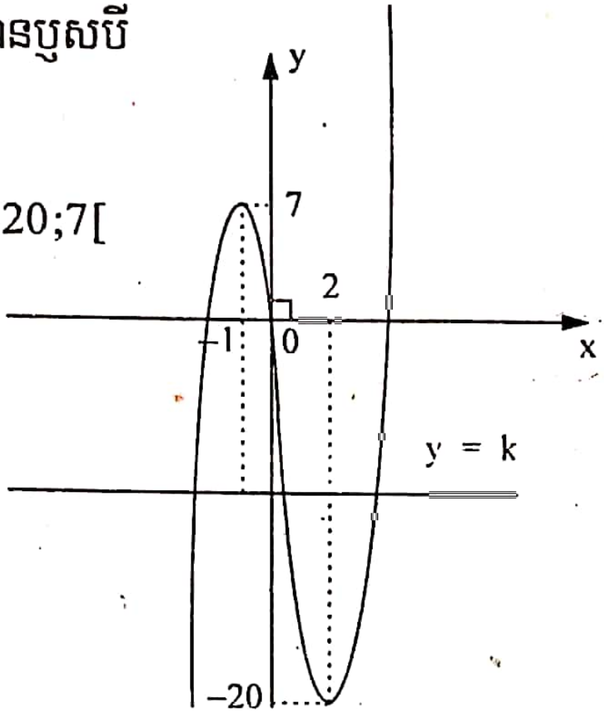
$$f(2) = -20; f(-1) = 7$$

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	7	$\searrow$	-20	$\nearrow$	$+\infty$

ស្របតាមសមីការមានឬសបី

ផ្សេងគ្នា

កាលណា $k \in \;]-20;7[$



ខ. រកតម្លៃ k ដើម្បីឱ្យសមីការមានឬសវិជ្ជមានពីរផ្សេងគ្នា និង

ឬសអវិជ្ជមានមួយទៀត

កាលណា $k \in \;]-20;0[$

4. ក. សង់ក្រាប C នៃ f :

$f(x) = x^3 - 3x + 1$

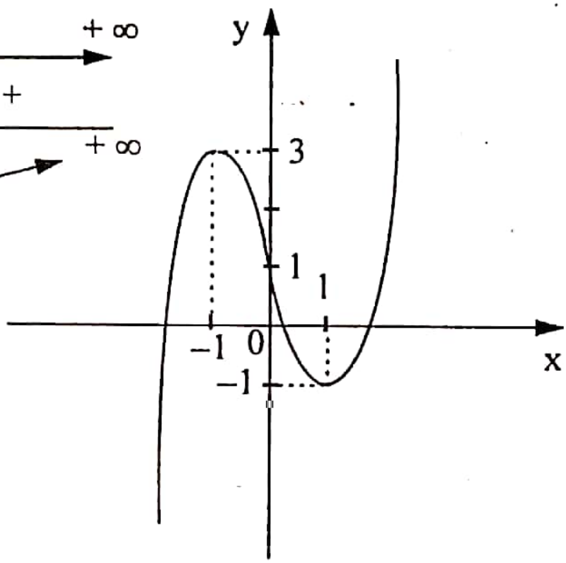
$f'(x) = 3x^3 - 3$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3(x^2 - 1) = 0$ នោះ $x = \pm 1$

$f'(1) = 1 - 3 + 1 = -1$;

$f(-1) = -1 + 3 + 1 = 3$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$



ខ. សិក្សាតម្លៃ p :

គេមាន $f(x) = p \Leftrightarrow x^3 - 3x + 1 = P$

-បើ $P > 3$ សមីការមានឫស x_3 ដែល $-1 < 1 < x_3$

- បើ $P = 3$ សមីការមានឫស $x_1 = x_2 = -1 < 1 < x_3$

- បើ $-1 < P < 3$ សមីការមានឫស $x_1 < -1 < x_2 < 1 < x_3$

- បើ $P = -1$ សមីការមានឫស $x_1 < -1 < x_2 = x_3 = 1$

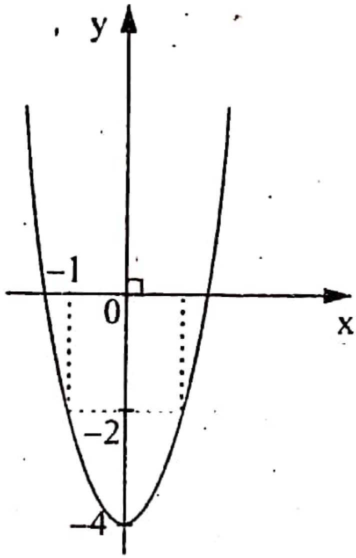
-បើ $P < 1$ សមីការមានឫស $x_1 < -1 < 1$

5. ក. សង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ $y = \frac{3}{2}x^4 + \frac{1}{2}x^2 - 4$

$f'(x) = 6x^3 + x$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x(3x^2 + 1) = 0$ នោះ $x = 0$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\searrow$	-4	$\nearrow$	$+\infty$



$f(0) = -4;$

$f(-1) = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} - 4 = -2$

$f(2) = 24 + 2 - 4 = 22$;

$f(1) = -2$

ខ. សិក្សាលើក្រាបទៅតាមតម្លៃ m ពីអត្ថិភាពនិងទីតាំងឫសនៃសមីការ $\frac{3}{2}x^4 + \frac{1}{2}x^2 - 4 - m = 0$ ធៀបនឹង -1 និង 2 :

- បើ $m > 22$ មានឫស $x_1 < 1 < 2 < x_2$

- បើ $m = 22$ មានឫស $x_1 < -1 < x_2 = 2$

- បើ $-2 < m < 22$ មានឫស $x_1 < -1 < x_2 < 2$

- បើ $m = -1$ មានឫស $x_1 = -1 < x_2 < 2$

- បើ $-4 < m < -2$ មានឫស $-1 < x_1 < x_2 < 2$

- បើ $m = -4$ មានឫស $-1 < x_1 = x_2 < 2$

- បើ $m < -4$ គ្មានឫស

6.ក. រកតម្លៃ a ដើម្បីឱ្យសមីការមានឫស 4 ផ្សេងគ្នា :

គេមានសមីការ $-2x^4 + 3x^2 - 1 = a$ ចំនួនឫសនៃ

សមីការជាចំនួនចំណុចប្រសព្វរវាង

$C: f(x) = -2x^4 + 3x^2 - 1$ និង $D: y = a$

$f'(x) = 8x^3 + 6x$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x(-4x^2 + 3) = 0$

$$x = 0; x = \frac{\sqrt{3}}{2}; x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$f\left(\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -2\left(\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^4 + 3\left(\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - 1 = \frac{1}{8}$$

x	$-\infty$		$\frac{-\sqrt{3}}{2}$		0		$\frac{\sqrt{3}}{2}$		$+\infty$
$2x$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$-4x^2+3$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{8}$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$\frac{1}{8}$	$\searrow$	$-\infty$

$f(0) = -1$

ដូចនេះ $\boxed{a \in \left]-1;\frac{1}{8}\right[}$

ខ. រកតម្លៃ a ដើម្បីឱ្យសមីការគ្មានឫស

គេបាន $a \in \left]\frac{1}{8};\ +\infty\right[$

7. ក. សង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - 3x - 1$

$f'(x) = -x^2 + 4x - 3$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -x^2 + 4x - 3 = 0$

នោះ $x = 1; x = 3$

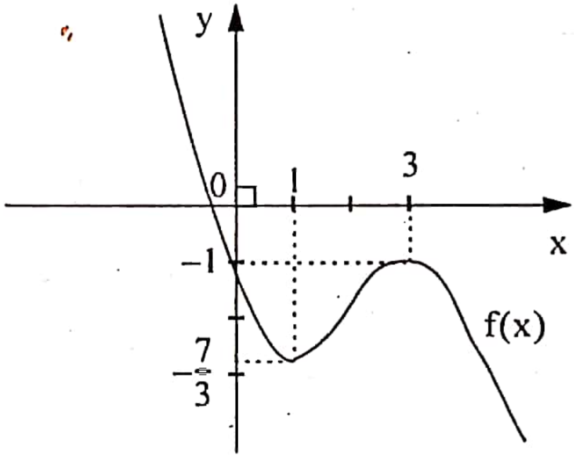
$$f(1) = -\frac{7}{3}; f(3) = -1$$

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{-\sqrt{7}}{3}$	$\nearrow$	-1	$\searrow$	$-\infty$

ខ. ដោះស្រាយវិសមីការ $f(x) + 1 \leq 0$ តាមក្រាប

តាមក្រាប យើងបាន

$x \in [0; \ +\infty[$



8.ក. សង់ក្រាបតាង $f(x) = x^2 + 3x^2 - 4$

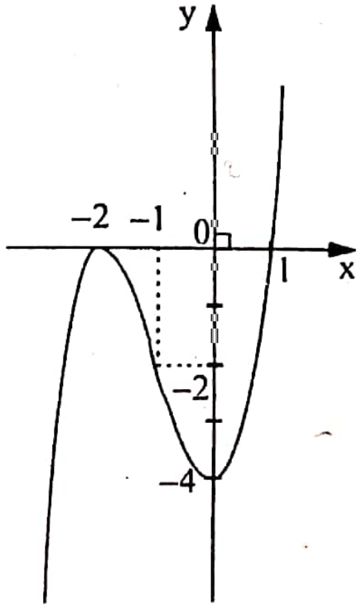
$f'(x) = 3x^2 + 6x$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x(x + 2) = 0$

$x = 0; x = -2$

$f(0) = -4; f(-2) = -8+12-4 = 0$

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	-4	$\nearrow$	$+\infty$



ខ. បង្ហាញថា $x^2+3x^2-4\le 0$ គ្រប់ $x\le -2$

តាមក្រាប យើងឃើញថា ក្រាបនៅពីក្រោម ឬប៉ះអ័ក្សអាប់ស៊ីសគ្រប់ $x\le -2$

ដូចនេះ គ្រប់ $x\le -2$ គេបាន $x^2+3x^2-4\le 0$

9. ក. ដោះស្រាយវិសមីការ $\frac{1}{2}x^4+x^2-\frac{3}{2}\ge 0$

តាង $f(x) = \frac{1}{2}x^4+x^2-\frac{3}{2}$

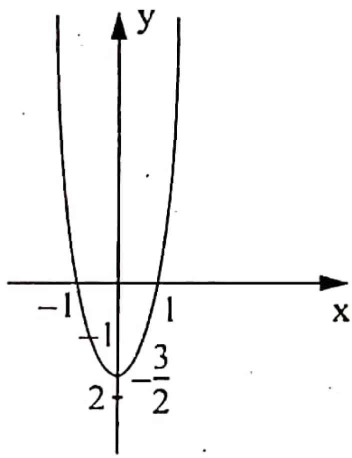
$f'(x) = 2x^3+2x$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x(x^2+1) = 0$$

នោះ $x = 0$

$$f(0) = -\frac{3}{2}$$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-\frac{3}{2}$	$\nearrow$	$-\infty$



តាមក្រាបគេបានសំណុំឫសនៃសមីការ គឺ

$x \in \left]-\infty;-1\right[\cup [1; +\infty[$

ខ. បង្ហាញថា $\frac{1}{2}x^4 + x^2 - \frac{3}{2} < 0$ ចំពោះ $x \in \left]-1, 1\right[$

ចំពោះ $x \in \left]-1, 1\right[$ ក្រាប C តាង f នៅខាងក្រោមអ័ក្ស ox

ដូចនេះ $\frac{1}{2}x^4 + x^2 - \frac{3}{2} < 0$ គ្រប់ $x \in \left]-1, 1\right[$

10. ក. សង់ក្រាប C : $f(x) = -x^4 + 2x^2 - 2$

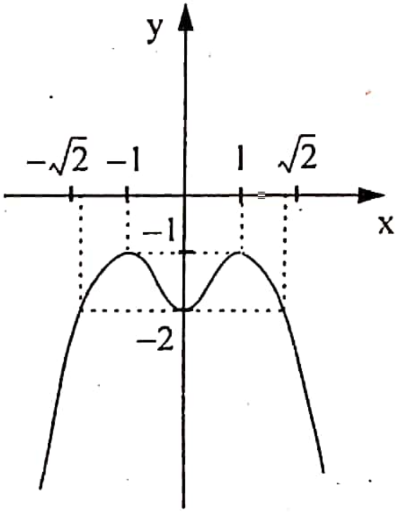
$$f'(x) = -4x^3 + 4x$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -4x(x^2 - 1) = 0$$

នោះ $x = 0; x = -1$

$$f(0) = -2; f(1) = -1; f(-1) = -1$$

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$-4x$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$x^2 - 1$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-1	$\searrow$	-2	$\nearrow$	-1	$\searrow$	$-\infty$



ខ. ដោះស្រាយទ្វេវិសមីការ $-2 \le f(x) \le -1$ តាមក្រាប

- បើ $y = -2$ នោះ $x = -\sqrt{2}; x = \sqrt{2}$

- បើ $y = -1$ នោះ $x = -1; x = 1$

តាមក្រាប គេបានសំណុំចម្លើយគឺ : $S = [-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$

គ. បង្ហាញថា $f(x) < -2$ គ្រប់

$x \in (-\infty, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, +\infty)$ ក្រាបនៃ f ស្ថិតនៅ

ក្រោមបន្ទាត់ $y = -2$ ចំពោះ $x < -\sqrt{2}$ ឬ $x > \sqrt{2}$

ដូចនេះ $f(x) < -2$ ចំពោះ $x < -\sqrt{2}$ ឬ $x > \sqrt{2}$

11. ក. សង់ក្រាប C_1 និង C_2 :

$C_1 : y = 3x^4 + 1$

$y' = 12x^3$

$y' = 0$ នោះ $x = 0$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

- បើ $x = 0$ នោះ $y = 1$

- បើ $x = 1$ នោះ $y = 4$

- បើ $x = -1$ នោះ $y = 4$

$C_2 : y = 8x^3 - 18x^2$

$y' = 24x^2 - 36x$

$y' = 0 \Leftrightarrow 6x(4x-6) = 0$

នោះ $x = 0; x = \frac{3}{2}$

x	$-\infty$		0		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$		$\nearrow$	$+\infty$

- បើ $x = 0$ នោះ $y = 0$

- បើ $x = \frac{3}{2}$ នោះ $y = -\frac{13}{2}$

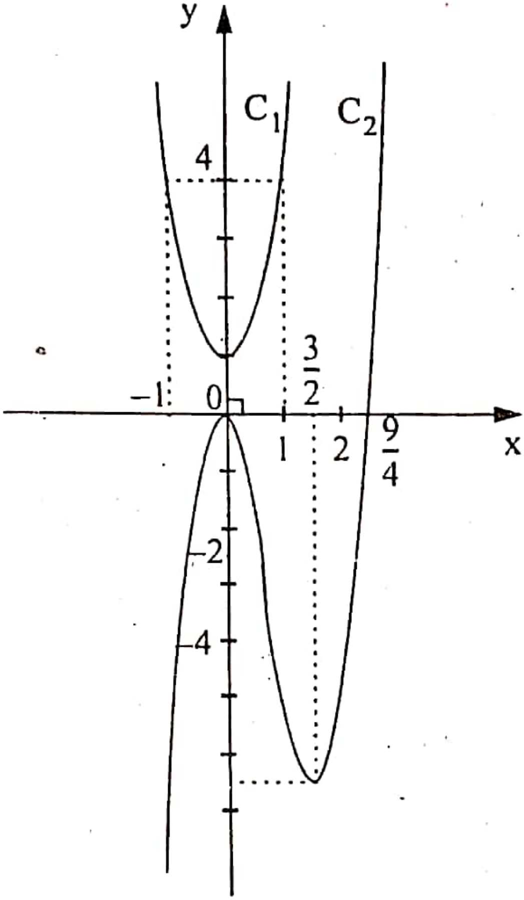
- បើ $y = 0$ នោះ $y = \frac{9}{4}$

ខ. បង្ហាញថា $3x^4 + 1 > 8x^3 - 18x^2$ ចំពោះ $x \geq 0$

តាមក្រាប C_1 ស្ថិតនៅពីខាងក្រោម C_2 ចំពោះ $x \geq 0$

ដូចនេះ $3x^4 + 1 > 8x^3 - 18x^2$ ចំពោះ $x \geq 0$

ក្រាប C_1 និង C_2



គ. រក $f'(x)$:

$$f(x) = 3x^4 - 8x^3 + 18x^2 + 1$$

$$f'(x) = 12x^3 - 24x^2 + 36x$$

$$f(0) = 0 - 0 + 0 + 1 = 1$$

ឃ. បង្ហាញថា $f(x) > 0$ ចំពោះ $x \geq 0$

$$f'(x) = 12x(x^2 - 2x + 3)$$

ដោយ $x^2 - 2x + 3 > 0$ គ្រប់ x

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

តាមតារាងអថេរភាព យើងបាន $f(x) > 0$ គ្រប់ $x \geq 0$

- ទាញថា $3x^4 - 8x^3 > 8x^3 - 18x^2$

គេមាន $f(x) > 0$ គ្រប់ $x \geq 0$

$$3x^4 - 8x^3 + 18x^2 + 1 > 0$$

ដូចនេះ $3x^4 - 8x^3 > 8x^3 - 18x^2$