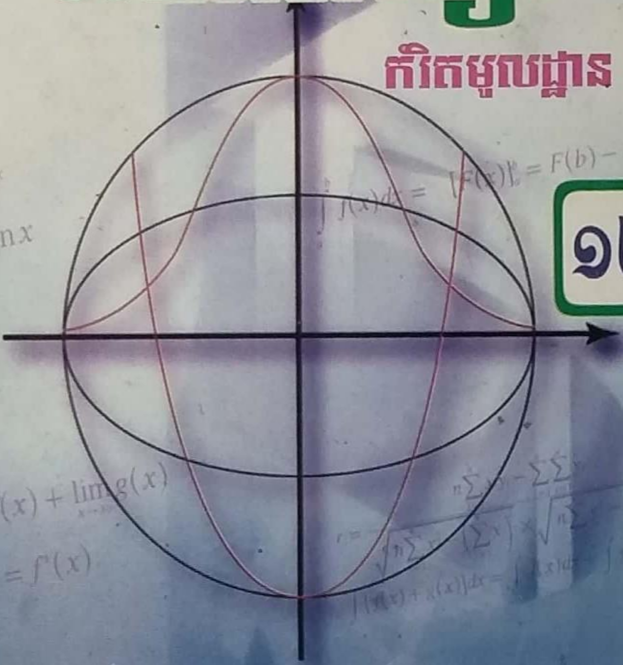
អយ ស៊ីណា

កំណែលំហាត់

គណិតវិទ្យា

កម្រិតមូលដ្ឋាន

១២



ស្របតាមកម្មវិធីសិក្សាថ្មី

អារម្ភកថា

សូស្តីប្រិយមិត្តអ្នកអានទាំងអស់ជាទីស្នេហា ! សៀវភៅ **កំណែលំហាត់គណិតវិទ្យាថ្នាក់ទី១២កំរិតមូលដ្ឋាន** ស្របតាមកម្មវិធីក្រសួងអប់រំនេះ ត្រូវបានយើងខ្ញុំរៀបចំឡើងដើម្បី ឆ្លើយតបនឹងតំរូវការរបស់ប្អូនៗ ។ នៅក្នុងសៀវភៅនេះមានវិធីដោះស្រាយងាយយល់ ងាយចងចាំ ។ បើទោះជាយ៉ាងណាក៏ដោយក៏យើងខ្ញុំសង្ឃឹមថា ប្អូនៗក៏ដូចជាប្រិយមិត្តអ្នកអានទាំងអស់ នឹងយកសៀវភៅនេះ ដើម្បីជាប្រទីបមួយជួយបំភ្លឺដល់ប្អូនៗអោយកាន់តែច្បាស់ហើយយល់កាន់ខ្លាំងអំពីមេរៀននីមួយៗ ។

ជាទីបញ្ចប់ យើងខ្ញុំទាំងអស់គ្នាសូមអភ័យទោសទុកជាមុននូវរាល់កំហុសឆ្គងទាំងឡាយដែលបាន កើតមានឡើងដោយអចេតនាហើយសូមជូនពរឱ្យមិត្តអានទាំងអស់ជួបប្រទះតែសេចក្តីសុខគ្រប់គ្នា និងទទួលបានលទ្ធផលល្អក្នុងការសិក្សា ក៏ដូចជាការប្រលងនាពេលខាងមុខនេះ ។ **សូមអរគុណ !**

អ្នកវាយកុំព្យូទ័រ :

១-លោក អយ ស៊ីណា ២-កៅ សេដា

គណៈកម្មាធិការត្រួតពិនិត្យ

១-លោក អយ ស៊ីណា

២-លោក ជឿន ហ៊ុយ

៣-លោក វ៉ាន លៀប

គណៈកម្មាធិការរៀបរៀង :

១-លោក អយ ស៊ីណា

២-លោក យូ ផាត

៣-លោក យ៉ុង ឡៃហេង

៤-លោក ឈុំ សៅ

៥-លោក ទូ ចន្ធូ

មេរៀនទី១ : លីមីតនៃអនុគមន៍

លំហាត់ :

1- ស្រាយបញ្ជាក់ថា លីមីតខាងក្រោមនេះពិតដោយប្រើនិយមន័យ:

ក. $\lim_{x \to 3}(5x-2)=13$

ខ. $\lim_{x \to 2^-}\sqrt{(x-2)(x-3)}=0$

គ. $\lim_{x \to x_0}(ax+b)=ax_0+b$ ។

សំរាយបញ្ជាក់

ស្រាយបញ្ជាក់ថា លីមីតខាងក្រោមនេះពិតដោយប្រើនិយមន័យ:

ក. យើងមាន : $\lim_{x \to 3}(5x-2)=13$

តាមនិយមន័យ ចំពោះគ្រប់ចំនួន $\varepsilon > 0$ មានចំនួន $\delta > 0$ដែល

$|x-a| < \delta$ នាំឱ្យ $|f(x)-l| < \varepsilon$:

ដោយ $|f(x)-l| < \varepsilon \Rightarrow |5x-2-13| < \varepsilon$

$\Rightarrow |5x-15| < \varepsilon \Rightarrow |x-3| < \dfrac{\varepsilon}{5}$

យក $\delta = \dfrac{\varepsilon}{5} > 0$គេបាន $|x-3| < \varepsilon$

នេះបញ្ជាក់ថា មាន $\delta = \frac{\varepsilon}{5} > 0$ ដែល $|x-3| < \delta$ នាំឱ្យ

$|f(x)-13| < \varepsilon$.

ដូចនេះ $\boxed{\lim_{x\to 3}(5x-2)=13}$

ខ. $\lim_{x\to 2^-}\sqrt{(x-2)(x-3)}=0$

តាមនិយមន័យ ចំពោះគ្រប់ចំនួន $\varepsilon > 0$ មានចំនួន $\delta > 0$ ដែល

$|x-a| < \delta$ នាំឱ្យ $|f(x)-l| < \varepsilon$.

យើងមាន $|f(x)-L| < \varepsilon \Rightarrow \left|\sqrt{(x-2)(x-3)}\right| < \varepsilon$

$\Rightarrow |(x-2)(x-3)| < \varepsilon^2$ តែ $0 < x < 2 \Rightarrow |x-3| < 3$

$\Rightarrow |x-2| < \frac{\varepsilon^2}{3} \Rightarrow |(x-2)(x-3)| < \frac{\varepsilon^2}{3}\times 3 = \varepsilon^2$

នេះបញ្ជាក់ថា មាន $\delta = \frac{\varepsilon^2}{3} > 0$ ដែល $|x-2| < \delta$ នាំឱ្យ

$\left|\sqrt{(x-2)(x-3)}-0\right| < \varepsilon$.

ដូចនេះ យើងបាន $\boxed{\lim_{x\to 2^-}\sqrt{(x-2)(x-3)}=0}$

គ. $\lim_{x\to x_0}(ax+b)=ax_0+b$

យើងមាន : $|f(x)-l| < \varepsilon$ ដែល $\varepsilon > 0$

$\Rightarrow |ax+b-ax_o-b|<\varepsilon \Rightarrow |a||x-x_o|<\varepsilon$

$\Rightarrow |x-x_o|<\dfrac{\varepsilon}{|a|}=\delta$

នេះបញ្ជាក់ថា មាន $\delta=\dfrac{\varepsilon}{|a|}>0$ ដែល $|x-x_o|<\varepsilon$ នាំឱ្យ

$|ax+b-ax_o-b|<\varepsilon$.

ដូចនេះ យើងបាន : $\boxed{\lim\limits_{x\to x_o}(ax+b)=ax_o+b}$

2- បើ $\lim\limits_{x\to a}f(x)=M$ និង $\lim\limits_{x\to a}g(x)=L$ ដែល M និង

L ជាចំនួនថេរនោះ ។ ចូរបង្ហាញថា :

ក. $\lim\limits_{x\to a}kf(x)=kM$

ខ. $\lim\limits_{x\to a}[f(x)\pm g(x)]=M\pm L$ ។

សំរាយបញ្ជាក់

បង្ហាញថា :

ក. $\lim\limits_{x\to a}kf(x)=kM$

គេត្រូវស្រាយថា $|x-a|<\delta$ នាំឱ្យ $|Kf(x)-KM|<\varepsilon$

ដោយ $|Kf(x)-KM|=|K||f(x)-M|<|K|\times\dfrac{\varepsilon}{|K|}=\varepsilon$

ដូចនេះ $|x-a|<\delta$ នាំឱ្យ $|Kf(x)-KM|<\varepsilon$

ខ. $\lim\limits_{x\to a}[f(x)\pm g(x)]=M\pm L$

ដោយ$|x-a|<\delta$ នាំឱ្យ $|[f(x)+g(x)]-(M+L)|<\varepsilon$

$|x-a|<\delta$ នាំឱ្យ $|[f(x)-g(x)]-(M+L)|<\varepsilon$

តាមសម្មតិកម្ម :

$|x-a|<\delta_1$ នាំឱ្យ $|f(x)-M|<\dfrac{\varepsilon}{2}$

$|x-a|<\delta_2$ នាំឱ្យ $|g(x)-L|<\dfrac{\varepsilon}{2}$

តែដោយ :

$|[f(x)+g(x)]-(M+L)|<|f(x)-M|+|g(x)-L|$

$<\dfrac{\varepsilon}{2}+\dfrac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$

ដូចគ្នាចំពោះ $|[f(x)-g(x)]-(M+L)|<\varepsilon$

3- គណនាលីមីតខាងក្រោម:

ក. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2-x+1}-1}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}$ ខ. $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{(x-1)(2x+3)(2-x)}{(x^2+1)(2x+1)}$

គ. $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x^2+x}{|x|}$ ឃ. $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\sqrt{x^2+8x-1}-\sqrt{x^2-3}\right)$

សំរាយបញ្ជាក់ :

គណនាលីមីតខាងក្រោម:

ក. យើងមាន : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2-x+1}-1}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}$ រាងមិនកំណត់ $\dfrac{0}{0}$

នោះយើងបាន :

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2-x+1}-1}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{x^2-x+1}-1\right)\left(\sqrt{x^2-x+1}+1\right)\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)}{\left(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}\right)\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)\left(\sqrt{x^2-x+1}+1\right)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left(x^2-x+1-1\right)\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)}{(1+x-1+x)\left(\sqrt{x^2-x+1}+1\right)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x(x-1)\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)}{2x\left(\sqrt{x^2-x+1}+1\right)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(x-1)\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)}{2\left(\sqrt{x^2-x+1}+1\right)}$$

$$=\frac{(0-1)\left(\sqrt{1+0}+\sqrt{1-0}\right)}{2\left(\sqrt{0-0+1}+1\right)}=\frac{-2}{4}=-\frac{1}{2}$$

ដូចនេះ $\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2-x+1}-1}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}=-\frac{1}{2}}$

ខ. $\lim_{x\to+\infty}\frac{(x-1)(2x+3)(2-x)}{(x^2+1)(2x+1)}$ រាងមិនកំណត់ $\frac{\infty}{\infty}$

នោះយើងបាន :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(x-1)(2x+3)(2-x)}{(x^2+1)(2x+1)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3\left(1-\frac{1}{x}\right)\left(2+\frac{3}{x}\right)\left(\frac{2}{x}-1\right)}{x^3\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\left(2+\frac{1}{x}\right)}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(1-\frac{1}{x}\right)\left(2+\frac{3}{x}\right)\left(\frac{2}{x}-1\right)}{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\left(2+\frac{1}{x}\right)}$$

$$=\frac{(1-0)(2+0)(0-1)}{(1+0)(2+0)}=\frac{-2}{2}=-1$$

ដូចនេះ $\boxed{\lim_{x\to+\infty}\frac{(x-1)(2x+3)(2-x)}{(x^2+1)(2x+1)}=-1}$

គ. $\lim_{x\to 0^-}\frac{x^2+x}{|x|}$

ពេល $x\to 0^-$ យើងបាន $|x|=-x$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{x^2+x}{|x|}=\lim_{x\to 0^-}\frac{x^2+x}{-x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{x(x+1)}{-x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{x+1}{-1}=-1$$

ដូចនេះ $\boxed{\lim_{x\to 0^-}\frac{x^2+x}{|x|}=-1}$

ឃ. $\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+8x-1}-\sqrt{x^2-3}\right)$ រាងមិនកំណត់ $\infty-\infty$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+8x-1}-\sqrt{x^2-3}\right)$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+8x-1}-\sqrt{x^2-3}\right)\left(\sqrt{x^2+8x-1}+\sqrt{x^2-3}\right)}{\left(\sqrt{x^2+8x-1}+\sqrt{x^2-3}\right)}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(x^2+8x-1\right)-\left(x^2-3\right)}{\left(\sqrt{x^2+8x-1}+\sqrt{x^2-3}\right)}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{8x+2}{\left(\sqrt{x^2+8x-1}+\sqrt{x^2-3}\right)}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{x\left(8+\frac{2}{x}\right)}{x\left(-\sqrt{1+\frac{8}{x}-\frac{1}{x^2}}-\sqrt{1-\frac{3}{x^2}}\right)}$$

$$\left(\lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^2}=\lim_{x\to-\infty}(-x)\right)$$

$$=\frac{(8+0)}{\left(-\sqrt{1+0-0}-\sqrt{1-0}\right)}=\frac{8}{-2}=-4$$

ដូចនេះ $\boxed{\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+8x-1}-\sqrt{x^2-3}\right)=-4}$

4- កំណត់តម្លៃនៃចំនួនថេរ a ដើម្បីឱ្យ លីមីតខាងក្រោមជាលីមីតនៃចំនួនថេរហើយកំណត់លីមីតនេះផង ។

ក. $\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x+3}-a}{x-1}$ ខ. $\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+3x}+a}{x}$

គ. $\lim_{x\to2}\frac{\sqrt{x+a}-1}{x-2}$ ឃ. $\lim_{x\to-1}\frac{\sqrt{x^2+ax}-1}{x^2-1}$ ។

សំរាយបញ្ជាក់ :

ក. $\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x+3}-a}{x-1}$

ដោយ $\lim_{x\to1}(x-1)=0$ ដូចនេះភាគយកត្រូវតែស្មើសូន្យ ទើបធ្វើឱ្យលីមីតនេះជាចំនួនថេរ ។ នោះយើងបាន :

$\lim_{x\to1}\left(\sqrt{x+3}-a\right)=0\Rightarrow\sqrt{1+3}-a=0\Rightarrow a=2$

- កំណត់លីមីត $\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x+3}-a}{x-1}$ ចំពោះ $a=2$

យើងបាន : $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}$ រាងមិនកំណត់ $\frac{0}{0}$

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\left(\sqrt{x+3}-2\right)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}{(x-1)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x+3-4}{(x-1)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)}{(x-1)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{1}{\sqrt{x+3}+2}=\frac{1}{4}$$

ដូចនេះ $\boxed{\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}=\frac{1}{4}}$

ខ. $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+3x}+a}{x}$

ដោយ $\lim_{x\to 0}x=0$ ដូចនេះភាគយកត្រូវតែស្មើសូន្យ ទើបធ្វើឱ្យលីមីតនេះជាចំនួនថេរ ។ នោះយើងបាន :

$$\lim_{x\to 1}\left(\sqrt{1+3x}+a\right)=0\Rightarrow\sqrt{1+0}+a=0\Rightarrow a=-1$$

គណនាលីមីត $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+3x}+a}{x}$ ចំពោះ $a=-1$ នោះគេបាន

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+3x}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{1+3x}-1\right)\left(\sqrt{1+3x}+1\right)}{x\left(\sqrt{1+3x}+1\right)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1+3x-1}{x\left(\sqrt{1+3x}+1\right)} = \lim_{x\to 0} \frac{3x}{x\left(\sqrt{1+3x}+1\right)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{3}{\sqrt{1+3x}+1} = \frac{3}{2}$$

ដូចនេះ $\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+3x}-1}{x} = \frac{3}{2}}$

គ. $\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x+a}-1}{x-2}$

ដោយ $\lim_{x\to 2}(x-2) = 0$ ដូចនេះភាគយកត្រូវតែស្មើសូន្យ ទើបធ្វើឱ្យលីមីតនេះជាចំនួនថេរ ។ នោះយើងបាន :

$$\Rightarrow \lim_{x\to 2}\left(\sqrt{x+a}-1\right) = 0 \Rightarrow \sqrt{2+a}-1 = 0 \Rightarrow \sqrt{2+a} = 1$$

$$\Rightarrow 2+a = 1 \Rightarrow a = -1$$

គណនាលីមីត : ចំពោះ $a = -1$ នោះយើងបាន :

$$\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x-1}-1}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{\left(\sqrt{x-1}-1\right)\left(\sqrt{x-1}+1\right)}{(x-2)\left(\sqrt{x-1}+1\right)}$$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{x-1-1}{(x-2)\left(\sqrt{x-1}+1\right)} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)}{(x-2)\left(\sqrt{x-1}+1\right)}$$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{1}{\sqrt{x-1}+1} = \frac{1}{\sqrt{2-1}+1} = \frac{1}{2}$$

ដូចនេះ $\boxed{\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x-1}-1}{x-2}=\frac{1}{2}}$

ឃ. $\lim_{x\to -1}\frac{\sqrt{x^2+ax}-1}{x^2-1}$

ដោយ $\lim_{x\to -1}\left(x^2-1\right)=0$ ដូចនេះភាគយកត្រូវតែស្មើសូន្យទើប

ធ្វើឱ្យលីមីតនេះជាចំនួនថេរ ។ នោះយើងបាន :

$$\Rightarrow \lim_{x\to -1}\left(\sqrt{x^2+ax}-1\right)=0\Rightarrow\left(\sqrt{1-a}-1\right)=0\Rightarrow a=0$$

កំណត់លីមីត : ចំពោះ $a=0$ នោះយើងបាន :

$$\lim_{x\to -1}\frac{\sqrt{x^2}-1}{x^2-1}=\lim_{x\to -1}\frac{-x-1}{x^2-1}=\lim_{x\to -1}\frac{-(x+1)}{(x-1)(x+1)}$$

$$=\lim_{x\to -1}\frac{-1}{x-1}=\frac{-1}{-1-1}=\frac{1}{2}$$

ព្រោះ $x\to -1$, $\sqrt{x^2}=-x$

ដូចនេះ $\boxed{\lim_{x\to -1}\frac{\sqrt{x^2}-1}{x^2-1}=\frac{1}{2}}$

5- គណនាលីមីតខាងក្រោម:

ក. $\lim_{x\to 0}\frac{x\sin 3x}{\sin^2 5x}$ **ខ.** $\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)^2}{\tan^3 x-\sin^3 x}$

គ. $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{2}-\sqrt{1+\cos x}}{\sin^2 x}$ ឃ. $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x}{\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^2}$

ង. $\lim_{x\to\pm\infty} x\sin\frac{1}{x}$ ច. $\lim_{x\to+\infty} x^2\left(1-\cos\frac{1}{x}\right)$ ។

សំរាយបញ្ជាក់

គណនាលីមីតខាងក្រោម៖

ក. $\lim_{x\to 0}\frac{x\sin 3x}{\sin^2 5x}$ រាងមិនកំណត់ $\frac{0}{0}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\sin 3x}{\sin^2 5x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}\times\left(\frac{5x}{\sin 5x}\right)^2\times\frac{3}{5^2}=\frac{3}{25}$$

ដូចនេះ $\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{x\sin 3x}{\sin^2 5x}=\frac{3}{25}}$

ខ. $\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)^2}{\tan^3 x-\sin^3 x}$ រាងមិនកំណត់ $\frac{0}{0}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)^2}{\tan^3 x-\sin^3 x}=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)^2}{\frac{\sin^3 x}{\cos^3 x}-\sin^3 x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)^2\cos^3 x}{\sin^3 x\left(1-\cos^3 x\right)}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)^2\cos^3 x}{\sin^3 x(1-\cos x)\left(1+\cos x+\cos^2 x\right)}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)\cos^3 x}{\sin^3 x\left(1+\cos x+\cos^2 x\right)}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}\times\cos^3 x}{\sin^3 x\left(1+\cos x+\cos^2 x\right)}$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2\times\left(\frac{x}{\sin x}\right)^3\times\frac{\cos^3 x}{1+\cos x+\cos^2 x}\times\frac{1}{2x}$$

$$= 1^2\times 1^3\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{0}=\infty$$

ដូចនេះ $\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)^2}{\tan^3 x-\sin^3 x}=\infty}$

ឥ. $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{2}-\sqrt{1+\cos x}}{\sin^2 x}$ រាងមិនកំណត់ $\frac{0}{0}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{2}-\sqrt{1+\cos x}}{\sin^2 x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{2}-\sqrt{1+\cos x}\right)\left(\sqrt{2}+\sqrt{1+\cos x}\right)}{\sin^2 x\left(\sqrt{2}+\sqrt{1+\cos x}\right)}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{2 - 1 - \cos x}{\sin^2 x\left(\sqrt{2} + \sqrt{1 + \cos x}\right)}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{\sin^2 x\left(\sqrt{2} + \sqrt{1 + \cos x}\right)}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{2\sin^2 \frac{x}{2}}{\sin^2 x\left(\sqrt{2} + \sqrt{1 + \cos x}\right)}$$

$$= \lim_{x \to 0} \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2 \times \left(\frac{x}{\sin x}\right)^2 \times \frac{2}{\sqrt{2} + \sqrt{1 + \cos x}} \times \frac{1}{4}$$

$$= 1 \times 1 \times \frac{2}{\sqrt{2} + \sqrt{2}} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{4\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{8}$$

ដូចនេះ $\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{2} - \sqrt{1 + \cos x}}{\sin^2 x} = \frac{\sqrt{2}}{8}}$

ឃ. $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{\left(\frac{\pi}{2} - x\right)^2}$

តាង $t = \frac{\pi}{2} - x \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} - t$ ពេល $x \to \frac{\pi}{2} \Rightarrow t \to 0$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x}{\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^2}=\lim_{t\to 0}\frac{1-\sin\left(\frac{\pi}{2}-t\right)}{t^2}=\lim_{t\to 0}\frac{1-\cos t}{t^2}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{2\sin^2\frac{t}{2}}{t^2}=\lim_{t\to 0}\left(\frac{\sin\frac{t}{2}}{\frac{t}{2}}\right)^2\times\frac{2}{4}=1\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

ដូចនេះ $\boxed{\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x}{\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^2}=\frac{1}{2}}$

ង. $\lim_{x\to\pm\infty} x\sin\frac{1}{x}$

តាង $t=\frac{1}{x}\Rightarrow x=\frac{1}{t}$ ពេល $x\to\pm\infty\Rightarrow t\to 0$

$$\lim_{x\to\pm\infty} x\sin\frac{1}{x}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=1$$

ដូចនេះ $\boxed{\lim_{x\to\pm\infty} x\sin\frac{1}{x}=1}$

ច. $\lim_{x\to+\infty} x^2\left(1-\cos\frac{1}{x}\right)$

តាង $t=\frac{1}{x}\Rightarrow x=\frac{1}{t}$ ពេល $x\to+\infty\Rightarrow t\to 0$

$$\lim_{x\to+\infty} x^2\left(1-\cos\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{t^2}(1-\cos t)$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{2\sin^2\frac{t}{2}}{t^2} = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\sin\frac{t}{2}}{\frac{t}{2}}\right)^2 \times\frac{1}{2} = 1\times\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

ដូចនេះ $\boxed{\lim_{x\to+\infty} x^2\left(1-\cos\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{2}}$

6- គណនាលីមីតខាងក្រោម:

ក. $\lim_{x\to\pm\infty}\left(x^2+xe^x\right)$ ខ. $\lim_{x\to+\infty}(1-x)e^x$

គ. $\lim_{x\to+\infty}(x+2)e^{-x}$ ឃ. $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x-x}{2e^x+1}$

ង. $\lim_{x\to0}\ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$ ច. $\lim_{x\to\pm\infty} x\ln\left(x^2+1\right)$

ឆ. $\lim_{x\to-4} x\ln\left(4-3x-x^2\right)$ ជ. $\lim_{x\to+\infty}\left\{x\left[\ln(x+1)-\ln x\right]\right\}$

សំរាយបញ្ជាក់

គណនាលីមីតខាងក្រោម:

ក. $\lim_{x\to\pm\infty}\left(x^2+xe^x\right)$

ពេល $x\to+\infty$ យើងបាន $\lim_{x\to\pm\infty}\left(x^2+xe^x\right) = +\infty$

ពេល $x \to -\infty$ តាង $t = -x \Rightarrow x = -t$

ពេល $x \to -\infty \Rightarrow t \to +\infty$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(x^2 + xe^x\right) = \lim_{t\to+\infty}\left(t^2 - te^{-t}\right) = \lim_{t\to+\infty}\left(t^2 - \frac{t}{e^t}\right)$$

$= +\infty - 0 = +\infty$

ដូចនេះ $\boxed{\lim_{x\to\pm\infty}\left(x^2 + xe^x\right) = +\infty}$

ខ. $\lim_{x\to+\infty}(1-x)e^x = (-\infty)(+\infty) = -\infty$

គ. $\lim_{x\to+\infty}(x+2)e^{-x} = \lim_{x\to+\infty}\left(xe^{-x} + 2e^{-x}\right)$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{e^x} + 2e^{-x}\right) = 0 + 0 = 0$$

ឃ. $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x - x}{2e^x + 1} = \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x\left(1 - \frac{x}{e^x}\right)}{e^x\left(2 + \frac{1}{e^x}\right)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1 - \frac{x}{e^x}}{2 + \frac{1}{e^x}}$

$$= \frac{1-0}{2+0} = \frac{1}{2}$$

ង. $\lim_{x\to0}\ln\left(\frac{x}{x+1}\right) = \ln 0^+ = -\infty$

ច. $\lim_{x\to\pm\infty} x\ln\left(x^2+1\right)$

ពេល $x \to +\infty$ យើងបាន $\lim_{x\to+\infty} x\ln\left(x^2+1\right) = +\infty$

ពេល $x \to -\infty$ យើងបាន

$$\lim_{x\to-\infty} x\ln\left(x^2+1\right) = (-\infty)(+\infty) = -\infty$$

ដូចនេះ $\boxed{\lim_{x\to\pm\infty} x\ln\left(x^2+1\right) = \pm\infty}$

ឆ. $\lim_{x\to-4} x\ln\left(4-3x-x^2\right)$

$$= (-4)(\ln 0) = (-4).(-\infty) = +\infty$$

ដូចនេះ $\boxed{\lim_{x\to-4} x\ln\left(4-3x-x^2\right) = +\infty}$

ជ. $\lim_{x\to+\infty} \left\{x\left[\ln(x+1)-\ln x\right]\right\}$

$$\lim_{x\to+\infty} \left\{x\left[\ln(x+1)-\ln x\right]\right\} = \lim_{x\to+\infty} x\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$$

$$\lim_{x\to+\infty} x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \ln e = 1$$

ដូចនេះ $\boxed{\lim_{x\to+\infty} \left\{x\left[\ln(x+1)-\ln x\right]\right\} = 1}$

7- គណនាលីមីតខាងក្រោម:

ក. $\lim_{x\to0} \dfrac{\tan x - \sin x}{x^3}$ ខ. $\lim_{x\to0} \dfrac{1+\sin x - \cos x}{1-\sin x - \cos x}$

គ. $\lim_{x\to0} \dfrac{1-\cos x\sqrt{\cos 2x}}{x^2}$ ឃ. $\lim_{x\to0} \dfrac{1-\cos x.\cos 2x}{x^2}$

ស៊ះាយបញ្ជាក់

គណនាលីមីតខាងក្រោមៈ

ក. $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}$ រាងមិនកំណត់ $\frac{0}{0}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin x}{\cos x}-\sin x}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x(1-\cos x)}{x^3\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x\times 2\sin^2\frac{x}{2}}{x^3\cos x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\times\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2\times\frac{1}{2\cos x}=1\times 1\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

ដូចនេះ $\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}=\frac{1}{2}}$

ខ. $\lim_{x\to 0}\frac{1+\sin x-\cos x}{1-\sin x-\cos x}$ រាងមិនកំណត់ $\frac{0}{0}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1+\sin x-\cos x}{1-\sin x-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}+2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{2\sin^2\frac{x}{2}-2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin\frac{x}{2}\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)}{2\sin\frac{x}{2}\left(\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}}$$

$$=\frac{0+1}{0-1}=-1$$

ដូចនេះ $\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{1+\sin x-\cos x}{1-\sin x-\cos x}=-1}$

ត. $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x\sqrt{\cos 2x}}{x^2}$ រាងមិនកំណត់ $\frac{0}{0}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x\sqrt{\cos 2x}}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x+\cos x-\cos x\sqrt{\cos 2x}}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\cos x}{x^2}+\frac{\cos x\left(1-\sqrt{\cos 2x}\right)}{x^2}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}+\frac{\cos x\left(1-\cos 2x\right)}{x^2\left(1+\sqrt{\cos 2x}\right)}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\left[\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2\times\frac{1}{2}+\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\times\frac{2\cos x}{\left(1+\sqrt{\cos 2x}\right)}\right]$$

$$=1\times\frac{1}{2}+1\times\frac{2}{2}=\frac{3}{2}$$

ដូចនេះ $$\boxed{\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x\sqrt{\cos 2x}}{x^2}=\frac{3}{2}}$$

ឃ. $\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x.\cos 2x}{x^2}$ រាងមិនកំណត់ $\frac{0}{0}$

$$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x.\cos 2x}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x+\cos x-\cos x.\cos 2x}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to0}\left[\frac{1-\cos x}{x^2}+\frac{\cos x(1-\cos 2x)}{x^2}\right]$$

$$=\lim_{x\to0}\left(\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}+\frac{\cos x\times 2\sin^2 x}{x^2}\right)$$

$$=\lim_{x\to0}\left[\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2\times\frac{1}{2}+\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\times 2\cos x\right]$$

$$=1\times\frac{1}{2}+1\times2=\frac{5}{2}$$

ដូចនេះ $$\boxed{\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x.\cos 2x}{x^2}=\frac{5}{2}}$$

8- គណនាលីមីតខាងក្រោម:

ក. $\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{2\sin^2 x-3\sin x+1}{4\sin^2 x-1}$

ខ. $\lim_{x\to 0}\frac{1+x\sin x-\cos 2x}{\sin^2 x}$

គ. $\lim_{x\to 0}\frac{x(a-b)}{\sin ax-\sin bx}\quad (a\neq 0,b\neq 0,a\neq b)$

ឃ. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{\sqrt{1+x\sin x}-\cos x}$

ង. $\lim_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x^2+3x}-\sqrt{x^2+1}-1\right)$

ច. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}$

សំរាយបញ្ជាក់

គណនាលីមីតខាងក្រោម:

ក. $\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{2\sin^2 x-3\sin x+1}{4\sin^2 x-1}$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{2\sin^2 x-3\sin x+1}{4\sin^2 x-1}$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{(2\sin x-1)(\sin x-1)}{(2\sin x-1)(2\sin x+1)}$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{\sin x-1}{2\sin x+1}=\frac{\frac{1}{2}-1}{2\times\frac{1}{2}+1}=-\frac{1}{4}$$

ដូចនេះ $\boxed{\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{2\sin^2 x-3\sin x+1}{4\sin^2 x-1}=-\frac{1}{4}}$

ខ. $\lim_{x\to 0}\frac{1+x\sin x-\cos 2x}{\sin^2 x}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1+x\sin x-\cos 2x}{\sin^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x+x\sin x}{\sin^2 x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 x+x\sin x}{\sin^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x(2\sin x+x)}{\sin^2 x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin x+x}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\left(2+\frac{x}{\sin x}\right)=2+1=3$$

ដូចនេះ $\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{1+x\sin x-\cos 2x}{\sin^2 x}=3}$

គ. $\lim_{x\to 0}\frac{x(a-b)}{\sin ax-\sin bx}\quad(a\neq 0,b\neq 0,a\neq b)$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x(a-b)}{\sin ax-\sin bx}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x(a-b)}{\frac{\sin ax}{ax}\times ax-\frac{\sin bx}{bx}\times bx}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{a-b}{\frac{\sin ax}{ax}\times a-\frac{\sin bx}{bx}\times b}=\frac{a-b}{a-b}=1$$

ដូចនេះ $\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{x(a-b)}{\sin ax-\sin bx}=1}$

ឃ. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{\sqrt{1+x\sin x}-\cos x}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{\sqrt{1+x\sin x}-\cos x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x\left(\sqrt{1+x\sin x}+\cos x\right)}{\left(\sqrt{1+x\sin x}-\cos x\right)\left(\sqrt{1+x\sin x}+\cos x\right)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x\left(\sqrt{1+x\sin x}+\cos x\right)}{1+x\sin x-\cos^2 x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x\left(\sqrt{1+x\sin x}+\cos x\right)}{\sin^2 x+x\sin x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x\left(\sqrt{1+x\sin x}+\cos x\right)}{\sin x+x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin x}{x}\left(\sqrt{1+x\sin x}+\cos x\right)}{\frac{\sin x}{x}+1}$$

$$=\frac{1\left(\sqrt{1+0}+1\right)}{1+1}=1$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x\left(\sqrt{1+x\sin x}+\cos x\right)}{1+x\sin x-\cos^2 x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x\left(\sqrt{1+x\sin x}+\cos x\right)}{\sin^2 x+x\sin x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x\left(\sqrt{1+x\sin x}+\cos x\right)}{\sin x+x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin x}{x}\left(\sqrt{1+x\sin x}+\cos x\right)}{\frac{\sin x}{x}+1}$$

ដូចនេះ $\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{\sqrt{1+x\sin x}-\cos x}=1}$

ង. $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+3x}-\sqrt{x^2+1}-1\right)$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+3x}-\sqrt{x^2+1}-1\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left[\sqrt{x^2+3x}-\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)\right]\left[\sqrt{x^2+3x}+\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)\right]}{\left[\sqrt{x^2+3x}+\left(\sqrt{x^2-1}+1\right)\right]}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 + 3x - \left(x^2 + 1 + 1 + 2\sqrt{x^2+1}\right)}{\left[\sqrt{x^2+3x} + \left(\sqrt{x^2+1}+1\right)\right]}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{3x - 2 - 2\sqrt{x^2+1}}{\left[\sqrt{x^2+3x} + \left(\sqrt{x^2+1}+1\right)\right]}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\left(3x - 2 - 2\sqrt{x^2+1}\right)\left(3x - 2 + 2\sqrt{x^2+1}\right)}{\left[\sqrt{x^2+3x} + \left(\sqrt{x^2+1}+1\right)\right]\left(3x - 2 + 2\sqrt{x^2+1}\right)}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{9x^2 - 12x + 4 - 4x^2 - 4}{\left[\sqrt{x^2+3x} + \left(\sqrt{x^2+1}+1\right)\right]\left(3x - 2 + 2\sqrt{x^2+1}\right)}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{5x^2 - 12x}{\left[\sqrt{x^2+3x} + \left(\sqrt{x^2+1}+1\right)\right]\left(3x - 2 + 2\sqrt{x^2+1}\right)}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2\left(5 - \frac{12}{x}\right)}{x^2\left[\sqrt{1+\frac{3}{x}} + \left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} + \frac{1}{x}\right)\right]\left(3 - \frac{2}{x} + 2\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)}$$

$$= \frac{5-0}{\left(\sqrt{1+0} + \sqrt{1+0} + 0\right)\left(3 - 0 + 2\sqrt{1+0}\right)} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

ដូចនេះ $\boxed{\lim_{x \to +\infty}\left(\sqrt{x^2+3x} - \sqrt{x^2+1} - 1\right) = \frac{1}{2}}$

ច. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{2}\right)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{2}\right)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}\times 3\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{2}\right)$$

$$=1\times 3\left(\sqrt{0+2}+\sqrt{2}\right)=6\sqrt{2}$$

ដូចនេះ $\boxed{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}=6\sqrt{2}}$

9- កំណត់អនុគមន៍ដឺក្រេទី 2 : $y=f(x)$ ដែលបំពេញលក្ខខណ្ឌលីមីតខាងក្រោម:

ក. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x^2-1}=1$　　　ខ. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{x^2-1}=-1$

សំរាយបញ្ជាក់

កំណត់អនុគមន៍ដឺក្រេទី 2 $y=f(x)$

អនុគមន៍ដឺក្រេទី២ កំណត់ដោយ $y=f(x)=ax^2+bx+c$

នោះ យើងបាន :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x^2-1}=1\Leftrightarrow\lim_{x\to+\infty}\frac{ax^2+bx+c}{x^2-1}=1$$

$\Leftrightarrow \frac{a}{1}=1 \Rightarrow a=1$

ម្យ៉ាងវិញទៀត :

$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x^2-1}=-1 \Rightarrow \lim_{x\to 1}\frac{x^2+bx+c}{x^2-1}=-1$

$\Rightarrow \lim_{x\to 1}\left(x^2+bx+c\right)=0 \Rightarrow 1+b+c=0$

$\Rightarrow c=-1-b$

យើងបាន : $f(x)=x^2+bx-1-b=(x-1)(x+b+1)$

$\Rightarrow \lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+b+1)}{(x-1)(x+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{x+b+1}{x+1}$

$=\frac{1+b+1}{1+1}=\frac{2+b}{2} \Rightarrow \frac{2+b}{2}=-1 \Rightarrow b=-4$

នោះ $c=3$ ។ ចំពោះ $a=1;b=-4$ និង $c=3$ នោះយើងបាន

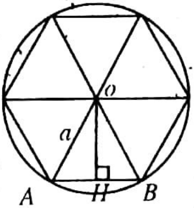
ដូចនេះ $\boxed{f(x)=x^2-4x+3}$

10- គេមានពហុកោណចារឹកក្នុងរង្វង់ដែលមាន n ជ្រុងនិងកាំស្មើនឹង a ។ តាង S_n ជាផ្ទៃក្រឡានៃពហុកោណនេះ ។ គណនា S_n រួចកំណត់រកតម្លៃ $\lim_{n\to+\infty} S_n$ ។

សំរាយបញ្ជាក់

តាង a ជាកាំនៃរង្វង់ : បើពហុកោណចារឹកក្នុងរង្វង់មាន n ជ្រុង

នោះមុំផ្ចិតស្មើ $\frac{2\pi}{n}$



គេបាន $S_n = n\times S_{oAB}$

តែ $\sin\frac{\pi}{n}=\frac{AH}{a}$, $AH = a\sin\frac{\pi}{n}$

$OH^2 = OA^2 + AH^2 \Rightarrow OH^2 = a^2 - AH^2$

$$\Rightarrow OH^2 = a^2 - a^2\sin^2\frac{\pi}{n} = a^2\left(1-\sin^2\frac{\pi}{n}\right) = a^2\cos^2\frac{\pi}{n}$$

$$\Rightarrow OH = a\cos\frac{\pi}{n}; AB = 2AH = 2a\sin\frac{\pi}{n}$$

$$S_{OAB} = \frac{1}{2}OH\times AB = \frac{1}{2}\times a\cos\frac{\pi}{n}\times 2a\sin\frac{\pi}{n} = \frac{a^2}{2}\sin\frac{2\pi}{n}$$

យើងបាន $\boxed{S_n = n\frac{a^2}{2}\sin\frac{2\pi}{n}}$

គណនា $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} n\frac{a^2}{2}\sin\frac{2\pi}{n} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\sin\frac{2\pi}{n}}{\frac{2\pi}{n}}\times\pi a^2 = \pi a^2$$

ដូចនេះ $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \pi a^2}$

មេរៀនទី២ : ភាពជាប់នៃអនុគមន៍

លំហាត់ :

1- បញ្ជាក់ថា តើអនុគមន៍ខាងក្រោមជាប់ត្រង់តម្លៃ x ដែរឬទេ?

ក. $f(x)=5x^2-6x+1\,;x=2$

ខ. $f(x)=\dfrac{x+2}{x+1}\,;x=1$

គ. $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}-2}{x-4}\,;x=4$

ឃ. $f(x)=\dfrac{|x+2|}{x+2}\,;x=-2$

ង. $f(x)=\begin{cases}x+1 & \text{បើ } x\le 2\\ 2 & \text{បើ } x>2\end{cases}\,;x=2$

ច. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{x+1} & \text{បើ } x<-1\\ x^2-3 & \text{បើ } x\ge -1\end{cases}\,;x=-1$

សំរាយបញ្ជាក់

តើអនុគមន៍ខាងក្រោមជាប់ត្រង់តម្លៃ x ដែរឬទេ?

ក. យើងមាន : $f(x)=5x^2-6x+1\,;x=2$

ដោយអនុគមន៍ $f(x)$ កំណត់ចំពោះ $x=2$ ហើយ

$$f(2)=\lim_{x\to 2} f(x)=9$$

ដូចនេះ អនុគមន៍ $f(x)$ ជាប់ចំពោះ $x=2$ ។

ខ. ចំពោះ $f(x)=\dfrac{x+2}{x+1}\,;x=1$

ដោយ $f(x)$ កំណត់ចំពោះ $x=1$ ហើយ

$$f(x)=\lim_{x\to 1} f(x)=\frac{3}{2}$$

ដូចនេះ $f(x)$ ជាប់ចំពោះ $x=1$ ។

គ. $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}-2}{x-4}\,;x=4$

ដោយ $f(x)$ មិនកំណត់ចំពោះ $x=4$

ដូចនេះ $f(x)$ ដាច់ចំពោះ $x=4$ ។

ឃ. $f(x)=\dfrac{|x+2|}{x+2}\quad;x=-2$

ដោយ $f(x)$ មិនកំណត់ចំពោះ $x=-2$

ដូចនេះ $f(x)$ ដាច់ចំពោះ $x=-2$ ។

ង. $f(x)=\begin{cases} x+1 & \text{បើ } x\le 2 \\ 2 & \text{បើ } x>2 \end{cases}\,;x=2$

ដោយ $f(2)=2+1=3$

$\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^-}(x+1)=3$

$\lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2^+}(2)=2$

យើងបាន $\lim_{x\to 2^-} f(x)\neq \lim_{x\to 2^+} f(x)$ រឺ $3\neq 2$

ដូចនេះ $f(x)$ មិនជាប់នៅត្រង់ $x=2$ ។

ច. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{x+1} & \text{បើ } x<-1\\ x^2-3 & \text{បើ } x\geq -1\end{cases}$; $x=-1$

ដោយ $f(-1)=1-3=-2$

$\lim_{x\to -1^-} f(x)=\lim_{x\to -1^-}\left(\dfrac{x^2-1}{x+1}\right)=\lim_{x\to -1^-}(x-1)=-1-1=-2$

$\lim_{x\to -1^+} f(x)=\lim_{x\to -1^+}\left(x^2-3\right)=1-3=-2$

យើងបាន $\lim_{x\to -1^-} f(x)=\lim_{x\to -1^+} f(x)=f(-1)=-2$

ដូចនេះ $f(x)$ ជាប់ត្រង់ $x=-1$ ។

2- រកតម្លៃ x ដែលធ្វើឱ្យអនុគមន៍ខាងក្រោមជាអនុគមន៍ដាច់ ។

ក. $f(x)=\dfrac{3x-1}{2x-6}$ **ខ.** $f(x)=\dfrac{x}{x^2+4x-5}$

គ. $f(x)=\dfrac{x^2-2x+1}{x^2-x-2}$ ឃ. $f(x)=\dfrac{3x-2}{x^2-3x-18}$

ង. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{2}+1 & \text{បើ } x\le 2\\ 3-x & \text{បើ } x>2\end{cases}$

ច. $f(x)=\begin{cases}-x+1 & \text{បើ } x\le -1\\ 2 & \text{បើ } x -1<x<1\\ -x+3 & \text{បើ } x>1\end{cases}$

សំរាយបញ្ជាក់

រកតម្លៃ x ដែលធ្វើឱ្យអនុគមន៍ខាងក្រោមជាអនុគមន៍ដាច់ :

ក. $f(x)=\dfrac{3x-1}{2x-6}$

អនុគមន៍ f ដាច់កាលណា អនុគមន៍នេះគ្មានន័យ ។

អនុគមន៍គ្មានន័យលុះត្រាតែ $2x-6=0\Rightarrow x=3$

ដូចនេះ f ដាច់កាលណា $\boxed{x=3}$

ខ. $f(x)=\dfrac{x}{x^2+4x-5}$

យើងបាន $x^2+4x-5=0\Rightarrow x=1; x=5$

ដូចនេះ $\boxed{x=1; x=5}$

គ. $f(x)=\dfrac{x^2-2x+1}{x^2-x-2}$

យើងបាន $x^2-x-2=0 \Rightarrow x=-1; x=2$

ដូចនេះ $\boxed{x=-1; x=2}$

ឃ. $f(x)=\dfrac{3x-2}{x^2-3x-18}$

យើងបាន $x^2-3x-18=0 \Rightarrow x=-3; x=6$

ដូចនេះ $\boxed{x=-3; x=6}$

ង. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{2}+1 & \text{បើ } x\le 2\\ 3-x & \text{បើ } x>2\end{cases}$

ដោយ $f(2)=\dfrac{2}{2}+1=2$

$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}\left(\dfrac{x}{2}+1\right)=2; \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}(3-x)=1$

ដូចនេះ $\boxed{x=2}$

ច. $f(x)=\begin{cases}-x+1 & \text{បើ } x\le -1\\ 2 & \text{បើ } x-1<x<1\\ -x+3 & \text{បើ } x>1\end{cases}$

- ចំពោះ $x=-1$ យើងបាន :

$f(-1)=1+1=2;\ \lim_{x\to -1^-} f(x)=2;\ \lim_{x\to -1^+} f(x)=2$

ដោយ $\lim_{x\to -1^-} f(x)=\lim_{x\to -1^+} f(x)=f(-1)=2$

នោះយើងបាន : $f(x)$ ជាប់ត្រង់ $x=-1$

- ចំពោះ $x=1$

$f(x)$ មិនកំណត់ត្រង់ $x=1$ នាំឱ្យ $f(x)$ ដាច់ត្រង់ $x=1$ ។

3- សិក្សាភាពជាប់នៃអនុគមន៍ខាងក្រោមលើចន្លោះដែលឱ្យ ។

ក. $f(x)=\dfrac{x-3}{4+x}$ លើចន្លោះ $(0;1)$ និង $[-4;1]$ ។

ខ. $f(x)=x\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$ លើចន្លោះ $(0;1)$ និង $[0;1]$ ។

គ. $f(x)=\begin{cases} x(x-1) & \text{បើ } x\le 3 \\ \dfrac{x^2-9}{x-3} & \text{បើ } x\ge 3 \end{cases}$ លើចន្លោះ $(0;3)$ និង $[0;3]$

សំរាយបញ្ជាក់

សិក្សាភាពជាប់នៃអនុគមន៍ខាងក្រោមលើចន្លោះដែលឱ្យ

ក. $f(x)=\dfrac{x-3}{4+x}$ ជាប់លើចន្លោះ $(0;1)$ ព្រោះ $f(x)$ មិនកំណត់ត្រង់ $x=-4$ ។

ខ. $f(x)=x\left(1+\frac{1}{x}\right)$ ជាប់លើចន្លោះ $(0;1)$ ព្រោះ $f(x)$ មិនកំណត់ត្រង់ $x=0$ ។

គ. $f(x)=\begin{cases} x(x-1) & \text{បើ } x\leq 3 \\ \frac{x^2-9}{x-3} & \text{បើ } x\geq 3 \end{cases}$ ជាប់លើចន្លោះ $[0;3]$ ។

ព្រោះ ចំពោះ $x\geq 3$ នោះយើងបាន $f(x)=\frac{x^2-9}{x-3}=x+3$

4- រកតម្លៃ A ដែលធ្វើឱ្យអនុគមន៍ $f(x)$ ជាប់គ្រប់តម្លៃ x :

ក. $f(x)=\begin{cases} Ax-3 & \text{បើ } x<2 \\ 3-x+2x^2 & \text{បើ } x\geq 2 \end{cases}$

ខ. $f(x)=\begin{cases} 1-3x & \text{បើ } x<4 \\ Ax^2+2x-3 & \text{បើ } x\geq 4 \end{cases}$

សំរាយបញ្ជាក់

រកតម្លៃ A ដែលធ្វើឱ្យអនុគមន៍ $f(x)$ ជាប់គ្រប់តម្លៃ x :

ក. យើងមាន : $f(x)=\begin{cases} Ax-3 & \text{បើ } x<2 \\ 3-x+2x^2 & \text{បើ } x\geq 2 \end{cases}$

ដោយ $f(2)=3-2+8=9; \lim_{x\to 2^+} f(x)=9$

$\lim_{x\to 2^-} f(x)=2A-3$

យើងបាន $f(x)$ ជាប់គ្រប់តម្លៃ x លុះត្រាតែ :

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^-} f(x) = f(2)$$

$\Leftrightarrow 2A-3=9 \Rightarrow A=6$

ដូចនេះ $\boxed{A=6}$

ខ. $f(x) = \begin{cases} 1-3x & \text{បើ } x<4 \\ Ax^2+2x-3 & \text{បើ } x\geq 4 \end{cases}$

ដោយ $f(4)=16A+8-3=16A+5; \lim\limits_{x\to 4^-} f(x) = -11$

$\lim\limits_{x\to 4^+} f(x) = 16A+5$

យើងបាន $f(x)$ ជាប់គ្រប់តម្លៃ x លុះត្រាតែ :

$$\lim_{x\to 4^+} f(x) = \lim_{x\to 4^-} f(x) = f(4)$$

$\Leftrightarrow 16A+5=-11 \Rightarrow A=-1$

ដូចនេះ $\boxed{A=-1}$

5- រកតម្លៃ A និង B ដែលធ្វើឱ្យអនុគមន៍កំណត់ដោយ :

$$f(x) = \begin{cases} Ax^2+5x-9 & \text{បើ } x<1 \\ B & \text{បើ } x=1 \\ (3-x)(A-2x) & \text{បើ } x>1 \end{cases}$$ ជាប់គ្រប់តម្លៃ x ។

សំរាយបញ្ជាក់

រកតម្លៃ A និង B

ដោយ $f(1)=B; \lim_{x\to 1^-} f(x)=A-4$ និង

$\lim_{x\to 1^+} f(x)=2(A-2)=2A-4$

យើងបាន $f(x)$ ជាប់គ្រប់តម្លៃ x លុះត្រាតែ :

$$B=A-4=2A-4 \Rightarrow \begin{cases} A-4=2A-4 \\ B=A-4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=0 \\ B=-4 \end{cases}$$

ដូចនេះ $\boxed{A=0; B=-4}$

6- ក្នុងបណ្ដាអនុគមន៍ខាងក្រោម តើ f អាចមានបន្លាយតាមភាពជាប់ត្រង់ a ឬទេ?

ក. $f(x)=\dfrac{x^2-9}{x-3}$; $a=3$ ។

ខ. $f(x)=\dfrac{x^2+3x-10}{x-2}$; $a=2$ ។

គ. $f(x)=\dfrac{x^3-1}{x-1}$; $a=1$ ។

ឃ. $f(x)=\dfrac{x^2-16}{x^2-3x+4}$; $a=4$ ។

សំរាយបញ្ជាក់

ក. $f(x)=\dfrac{x^2-9}{x-3}\;;a=3$

ដោយ f គ្មានន័យត្រង់ $x=3$ នាំឱ្យ f មិនជាប់ត្រង់ $x=3$ ទេ។

$$\lim_{x\to3} f(x)=\lim_{x\to3}\frac{x^2-9}{x-3}=\lim_{x\to3}(x+3)=6$$

តាង $g(x)$ ជាអនុគមន៍បន្លាយនៃ $f(x)$ យើងបាន :

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-9}{x-3} & \text{បើ } x\neq 3\\ 6 & \text{បើ } x=3\end{cases}$$

ខ. $f(x)=\dfrac{x^2+3x-10}{x-2}\;;a=2$

ដោយ f គ្មានន័យត្រង់ $x=2$ នាំឱ្យ f មិនជាប់ត្រង់ $x=2$ ទេ។

$$\lim_{x\to2} f(x)=\lim_{x\to2}\frac{x^2+3x-10}{x-2}=\lim_{x\to2}(x+5)=7$$

តាង $g(x)$ ជាអនុគមន៍បន្លាយនៃ $f(x)$ យើងបាន :

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+3x-10}{x-2} & \text{បើ } x\neq 2\\ 7 & \text{បើ } x=2\end{cases}$$

គ. $f(x)=\dfrac{x^3-1}{x-1}\;;a=1$ ។

ដូចគ្នាដែរ

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3-1}{x-1} & \text{បើ } x\neq 1\\ 3 & \text{បើ } x=1\end{cases}$$

ឃ. $f(x)=\dfrac{x^2-16}{x^2-3x+4}\ ,a=4$

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-16}{x^2-3x+4} & \text{បើ } x\neq 4\\ \dfrac{8}{3} & \text{បើ } x=4\end{cases}$$

7- ប្រើទ្រឹស្តីបទតម្លៃកណ្តាល បង្ហាញថា អនុគមន៍ខាងក្រោមមា

ចំនួន c ក្នុងចន្លោះដែលឱ្យ:

ក. $f(x)=x^2+x-1\ ;[0;5]\ ;f(c)=11$ ។

ខ. $f(x)=x^2-6x+8\ ;[0;3]\ ;f(c)=0$ ។

គ. $f(x)=x^3-x^2+x-2\ ;[0;3]\ ;f(c)=4$ ។

ឃ. $f(x)=\dfrac{x^2+x}{x-1}\ ;\left[\dfrac{5}{2};4\right]\ ;f(c)=6$ ។

សំរាយបញ្ជាក់

ក. $f(x)=x^2+x-1\ ;[0;5]\ ;f(c)=11$

ដោយ $f(0)=-1$ និង $f(5)=25+5-1=29$

យើងបាន $f(0) < f(c) < f(5)$

ដូចនេះ $f(c) = 11$ មានឫសយ៉ាងតិចមួយនៅចន្លោះ $[0;5]$

ខ. $f(x) = x^2 - 6x + 8 \quad ;[0;3] \quad ; f(c) = 0$

ដោយ $f(0) = 8; f(3) = 9 - 18 + 8 = -1$.

យើងបាន $f(3) < f(c) < f(0)$

ដូចនេះ $f(c) = 0$ មានឫសយ៉ាងតិចមួយនៅចន្លោះ $[0;3]$

គ. $f(x) = x^3 - x^2 + x - 2 \quad ;[0;3] \quad ; f(c) = 4$

ដោយ $f(0) = -2; f(3) = 27 - 9 + 3 - 2 = 19$

យើងបាន : $f(0) < f(c) < f(3)$

ដូចនេះ $f(c) = 4$ មានឫសយ៉ាងតិចមួយនៅចន្លោះ $[0;3]$

ឃ. $f(x) = \dfrac{x^2 + x}{x - 1} \quad ;\left[\dfrac{5}{2},4\right] \quad ; f(c) = 6$

ដោយ $f\left(\dfrac{5}{2}\right) = \dfrac{\dfrac{25}{4} + \dfrac{5}{2}}{\dfrac{5}{2} - 1} = \dfrac{35}{4} \times \dfrac{2}{3} = \dfrac{35}{6}$.

$f(4) = \dfrac{16 + 4}{4 - 1} = \dfrac{20}{3}$

យើងបាន $f\left(\frac{5}{2}\right) < f(x) < f(4)$

ដូចនេះ $f(c) = 6$ មានឫសយ៉ាងតិចមួយនៅចន្លោះ $\left[\frac{5}{2};4\right]$

8- គេឱ្យអនុគមន៍និងចន្លោះបិទដូចខាងក្រោម ។

ដោយប្រើទ្រឹស្តីបទតម្លៃកណ្តាល រកតម្លៃ c បើគេស្គាល់តម្លៃ k ។

ក. $f(x) = 2 + x - x^2 \quad ; [0;3] ; k = 1$ ។

ខ. $f(x) = \sqrt{25 - x^2} \quad ;[-4.5;3] ; k = 3$ ។

សំរាយបញ្ជាក់

ក. $f(x) = 2 + x - x^2 \quad ;[0;3] ; k = 1$

ដោយ $f(0) = 2; f(3) = -4$ នាំឱ្យ $f(3) < f(c) < f(0)$ ពិត

យើងបាន សមីការ $f(c) = 1$ ត្រូវមានឫសយ៉ាងតិចមួយនៅ

ចន្លោះ $[0;3]$:

$$\Rightarrow 2 + c - c^2 = 1 \Rightarrow c^2 - c - 1 = 0 \Rightarrow c = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

យើងឃើញថា $c = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \in [0,3]$ ពិត ។

ខ. $f(x) = \sqrt{25 - x^2} \quad ;[-4.5;3] ; k = 3$

ដោយ $f(-4.5)=\sqrt{25-(-4.5)^2}=\frac{\sqrt{19}}{2}; f(3)=4$

នាំឱ្យ $f(-4.5)<f(c)<f(3)$ ពិត យើងបានសមីការ

$f(c)=3$ ត្រូវមានឫសយ៉ាងតិចមួយនៅចន្លោះ$[-4.5,3]$

$\Rightarrow \sqrt{25-c^2}=3 \Rightarrow c^2=16 \Rightarrow c=\pm 4$

យើងឃើញថា $c=-4\in[-4.5,3]$ ពិត ។

9- **ក**. ស្រាយបញ្ជាក់ថាសមីការ $x\tan x=\cos x$ យ៉ាងហោចណាស់មានឫសពិតមួយចន្លោះ $\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$ ។

ខ. ស្រាយបញ្ជាក់ថាសមីការ$\left(x^n-1\right)\cos x+\sqrt{2}\sin x-1=0$ យ៉ាងហោចណាស់មានឫសពិតមួយចន្លោះ $(0;1)$ ។

សំរាយបញ្ជាក់

ក. ស្រាយបញ្ជាក់ថាសមីការ $x\tan x=\cos x$ យ៉ាងហោចណាស់មានឫសពិតមួយចន្លោះ $\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$

ដោយ $x\tan x=\cos x \Rightarrow x\tan x-\cos x=0$

តាង $f(x)=x\tan x-\cos x$ ជាប់លើចន្លោះ $\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$

គេបាន $f(c)=0$ មានឫសតែគ្រាន់តែគណនា

$$f(0)=-1<0 \text{ និង } f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{4}-\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{2\pi-\sqrt{2}}{4}>0$$

យើងបាន $f(0)<f(c)<f\left(\frac{\pi}{4}\right)$

ដូចនេះ $x\tan x=\cos x$ យ៉ាងហោចណាស់មានឫសពិតមួយនៅ

ចន្លោះ $\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$ ។

ខ. ស្រាយបញ្ជាក់ថាសមីការ $\left(x^n-1\right)\cos x+\sqrt{2}\sin x-1=0$

យ៉ាងហោចណាស់មានឫសពិតមួយចន្លោះ $(0;1)$ ។

តាង $f(x)=\left(x^n-1\right)\cos x+\sqrt{2}\sin x-1$ ជាប់លើ $(0;1)$

គេបាន $f(c)=0$ មានឫសគេគ្រាន់តែគណនា :

$f(0)=-1-1=-2$ និង

$$f(1)=\sqrt{2}\sin 1-1>\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{4}-1$$

នាំឱ្យ $f(0)<f(c)<f(1)$ ហេតុនេះសមីការពិតជាមានឫស

ស្ថិតនៅចន្លោះ $(0;1)$ ។

ចំណាំ : $1rd>\frac{\pi}{4}rd \Rightarrow \sin 1>\sin\frac{\pi}{4}$ ...... !!!!!!!

លំហាត់ជំពូកទី១ :

1- គណនាលីមីតខាងក្រោម៖

ក. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2+x+2}-\sqrt{x^2-x+3}\right)$

ខ. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x+2}-\sqrt{x^2-x+3}\right)$

គ. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2-x\sin x}{x^2-\sin^2 x}$ **ឃ.** $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2x-\sin x}{\sqrt{1-\cos x}}$ ។

សំរាយបញ្ជាក់

គណនាលីមីតខាងក្រោម៖

ក. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2+x+2}-\sqrt{x^2-x+3}\right)$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{4x^2+x+2-\left(x^2-x+3\right)}{\sqrt{4x^2+x+2}+\sqrt{x^2-x+3}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2\left(3+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}\right)}{x\sqrt{4+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}+x\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(3+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}\right)}{\sqrt{4+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}}}=+\infty$$

ដូចនេះ $\boxed{\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2+x+2}-\sqrt{x^2-x+3}\right)=+\infty}$

ខ. $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x+2}-\sqrt{x^2-x+3}\right)$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+x+2-(x^2-x+3)}{\sqrt{x^2+x+2}+\sqrt{x^2-x+3}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x-1}{x\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}+x\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(2-\frac{1}{x}\right)}{x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}}\right)}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(2-\frac{1}{x}\right)}{\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}}\right)}$$

$$=\frac{2-0}{\sqrt{1+0+0}+\sqrt{1-0+0}}=1$$

ដូចនេះ យើងបាន : $\boxed{\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x+2}-\sqrt{x^2-x+3}\right)=1}$

គ. $\lim_{x\to0}\frac{x^2-x\sin x}{x^2-\sin^2 x}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x(x-\sin x)}{(x-\sin x)(x+\sin x)}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x+\sin x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+\frac{\sin x}{x}}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$$

ដូចនេះ $\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{x^2-x\sin x}{x^2-\sin^2 x}=\frac{1}{2}}$

ឃ. $\lim_{x\to 0}\frac{2x-\sin x}{\sqrt{1-\cos x}}=\lim_{x\to 0}\frac{2x-2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\sqrt{2\sin^2\frac{x}{2}}}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\left(x-\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\right)}{\sqrt{2}\left|\sin\frac{x}{2}\right|}$$

បើ $x\to 0^-$ យើងបាន $\left|\sin\frac{x}{2}\right|=-\sin\frac{x}{2}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{2x-\sin x}{\sqrt{1-\cos x}}=\lim_{x\to 0}\frac{2\left(x-\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\right)}{-\sqrt{2}\sin\frac{x}{2}}$$

$$=\lim_{x\to 0}-\sqrt{2}\left(\frac{x}{\sin\frac{x}{2}}-\cos\frac{x}{2}\right)=\lim_{x\to 0}-\sqrt{2}\left(\frac{\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\times 2-\cos\frac{x}{2}\right)$$

$$= -\sqrt{2}(1\times 2-1) = -\sqrt{2}$$

បើ $x \to 0^+$ យើងបាន $\left|\sin\frac{x}{2}\right| = \sin\frac{x}{2}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{2x-\sin x}{\sqrt{1-\cos x}} = \lim_{x\to 0^+}\frac{2\left(x-\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\right)}{\sqrt{2}\sin\frac{x}{2}}$$

$$= \lim_{x\to 0^+}\sqrt{2}\left(\frac{x}{\sin\frac{x}{2}}-\cos\frac{x}{2}\right) = \lim_{x\to 0^+}\sqrt{2}\left(\frac{\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\times 2-\cos\frac{x}{2}\right)$$

$$= \sqrt{2}(1\times 2-1) = \sqrt{2}$$

ដូចនេះ $\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{2x-\sin x}{\sqrt{1-\cos x}} = \begin{cases}\sqrt{2} & \text{បើ } x\to 0^+\\ -\sqrt{2} & \text{បើ } x\to 0^-\end{cases}}$

2- កំណត់តម្លៃ a ដែលបំពេញលក្ខខណ្ឌ $\lim_{x\to 0}\frac{1+ax-\sqrt{1+x}}{x^2} = \frac{1}{8}$

សំរាយបញ្ជាក់

កំណត់តម្លៃ a

$\lim_{x\to 0}\frac{1+ax-\sqrt{1+x}}{x^2} = \frac{1}{8}$ យើងបាន :

$$\lim_{x\to 0}\frac{1+ax-\sqrt{1+x}}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{(1+ax)^2-(1+x)}{x^2\left(1+ax+\sqrt{1+x}\right)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1+2ax+a^2x^2-1-x}{x^2\left(1+ax+\sqrt{1+x}\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{a^2x^2+2ax-x}{x^2\left(1+ax+\sqrt{1+x}\right)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{xa^2+2a-1}{x\left(1+ax+\sqrt{1+x}\right)}$$

ដោយ $\lim_{x\to 0}x\left(1+ax+\sqrt{1+x}\right)=0$ និងតម្លៃលីមីតខាងលើស្មើ

នឹង $\frac{1}{8}$ ជាចំនួនថេរ នោះ យើងបាន $\lim_{x\to 0}\left(xa^2+2a-1\right)=0$

$$\Rightarrow 2a-1=0\Rightarrow a=\frac{1}{2}$$

ដូចនេះ $\boxed{a=\frac{1}{2}}$

3- គណនាលីមីតខាងក្រោម:

ក. $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[n]{x}-1}{\sqrt[m]{x}-1}$

ខ. $\lim_{x\to a}\frac{\sqrt{x-b}-\sqrt{a-b}}{x^2-a^2}$ ($a>0$ និង $b<0$) ។

សំរាយបញ្ជាក់

គណនាលីមីតខាងក្រោម:

ក. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[n]{x}-1}{\sqrt[m]{x}-1}$

តាង $t=\sqrt[mn]{x}\Rightarrow x=t^{nm}$ ពេល $x\to 1\Rightarrow t\to 1$ យើងបាន :

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[n]{x}-1}{\sqrt[m]{x}-1}=\lim_{t\to 1}\frac{t^m-1}{t^n-1}=\lim_{t\to 1}\frac{(t-1)\left(\overbrace{t^{m-1}+t^{m-2}+..+t+1}^{m\text{តួ}}\right)}{(t-1)\left(\underbrace{t^{n-1}+t^{n-2}+..+t+1}_{n\text{តួ}}\right)}$$

$$=\lim_{t\to 1}\frac{\left(\overbrace{t^{m-1}+t^{m-2}+..+t+1}^{m\text{តួ}}\right)}{\left(\underbrace{t^{n-1}+t^{n-2}+..+t+1}_{n\text{តួ}}\right)}=\frac{\overbrace{1+1+...+1+1}^{m\text{តួ}}}{\underbrace{1+1+..+1+1}_{n\text{តួ}}}=\frac{m}{n}$$

ដូចនេះ $\boxed{\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[n]{x}-1}{\sqrt[m]{x}-1}=\dfrac{m}{n}}$

ខ. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sqrt{x-b}-\sqrt{a-b}}{x^2-a^2}$ ($a>0$ និង $b<0$)

$$\lim_{x\to a}\frac{\sqrt{x-b}-\sqrt{a-b}}{x^2-a^2}$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{x-b-(a-b)}{(x-a)(x+a)\left(\sqrt{x-b}+\sqrt{a-b}\right)}$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{(x-a)}{(x-a)(x+a)\left(\sqrt{x-b}+\sqrt{a-b}\right)}$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{1}{(x+a)\left(\sqrt{x-b}+\sqrt{a-b}\right)}=\frac{1}{4a\sqrt{a-b}}$$

ដូចនេះ $\boxed{\lim_{x\to a}\frac{\sqrt{x-b}-\sqrt{a-b}}{x^2-a^2}=\frac{1}{4a\sqrt{a-b}}}$

4- គេមានអនុគមន៍ $y=f(x)$ កំណត់លើចន្លោះ $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ ដែល

$$f(x)=\begin{cases}\sin x+\dfrac{\sqrt{1-\cos 2x}}{\sin x} & \text{បើ } x\neq 0\\ \sqrt{2} & \text{បើ } x=0\end{cases}$$

តើ $f(x)$ ជាប់ត្រង់ $x=0$ ឬទេ?

សំរាយបញ្ជាក់

តើ $f(x)$ ជាប់ត្រង់ $x=0$ ឬទេ?

យើងមាន :

$$\sin x+\frac{\sqrt{1-\cos 2x}}{\sin x}=\sin x+\frac{\sqrt{2\sin^2 x}}{\sin x}=\sin x+\frac{\sqrt{2}|\sin x|}{\sin x}$$

យើងបាន $f(0)=\sqrt{2}$

$$\lim_{x\to 0^-} ff(x) = \lim_{x\to 0^-}\left(\sin x + \frac{\sqrt{2}(-\sin x)}{\sin x}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0^-}\left(\sin x - \sqrt{2}\right) = -\sqrt{2}$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\left(\sin x + \frac{\sqrt{2}(\sin x)}{\sin x}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0^+}\left(\sin x + \sqrt{2}\right) = \sqrt{2}$$

យើងបាន $\lim_{x\to 0^-} f(x) \neq \lim_{x\to 0^+} f(x)$

ដូចនេះ $f(x)$ មិនជាប់ត្រង់ $x = 0$

5- កំណត់តម្លៃ a ដើម្បីឱ្យអនុគមន៍ខាងក្រោមជាប់លើ IR :

ក. $f(x) = \begin{cases} -2x + a & \text{បើ } x \leq 1 \\ \log_3 x & \text{បើ } x > 1 \end{cases}$

ខ. $f(x) = \begin{cases} a & \text{បើ } x \leq 0 \\ x\sin\frac{1}{x} & \text{បើ } x > 0 \end{cases}$ ។

សំរាយបញ្ជាក់

កំណត់តម្លៃ a ដើម្បីឱ្យអនុគមន៍ខាងក្រោមជាប់លើ IR

ក. $f(x) = \begin{cases} -2x + a & \text{បើ } x \leq 1 \\ \log_3 x & \text{បើ } x > 1 \end{cases}$

ដោយ $f(1)=-2+a; \lim_{x\to 1^-} f(x)=-2+a; \lim_{x\to 1^+} f(x)=0$

ដើម្បីឱ្យ $f(x)$ ជាប់លើ IR លុះត្រាតែ $-2+a=0 \Rightarrow a=2$

ដូចនេះ $\boxed{a=2}$

ខ. $f(x)=\begin{cases} a & \text{បើ } x\le 0 \\ x\sin\dfrac{1}{x} & \text{បើ } x>0 \end{cases}$

ដោយ $f(0)=a; \lim_{x\to 0^-} f(x)=a; \lim_{x\to 0^+} f(x)=0$

ដើម្បីឱ្យ $f(x)$ ជាប់លើ IR លុះត្រាតែ $a=0$

ដូចនេះ $\boxed{a=0}$

6- ស្រាយបញ្ជាក់ថា សមីការខាងក្រោម មានឬសយ៉ាងតិចមួយនៅចន្លោះដែល ឱ្យ:

ក. $\sin x = x-1 \quad ;(0;\pi)$

ខ. $20\log_{10} x - x = 0 \ ;(1;10)$

សំរាយបញ្ជាក់

ក. $\sin x = x-1 \quad ;(0;\pi)$

ដោយ $\sin x = x-1 \Rightarrow x-1-\sin x = 0$

តាង $f(x)=x-1-\sin x$ និង $f(c)=0$ យើងបាន :

$f(0)=-1; f(\pi)=\pi-1=2.14$

$\Rightarrow f(0)<f(c)<f(\pi)$

ដូចនេះ $\boxed{c\in[0;\pi]}$

ខ. $20\log_{10}x-x=0\ ;(1;10)$

តាង $f(x)=20\log_{10}x-x$ និង $f(c)=0$ យើងបាន

$f(1)=-1; f(10)=10$

$\Rightarrow f(1)<f(c)<f(10)$

ដូចនេះ $\boxed{c\in[1;10]}$

7- គេឱ្យសមីការដឺក្រេទីពីរ $ax^2+bx+c=0\ (a\neq 0)$ មានលេខមេគុណ a,b,c បំពេញលក្ខខណ្ឌ $2a+3b+6c=0$ ។ បង្ហាញថាសមីការនេះមានឫសយ៉ាងតិចមួយនៅចន្លោះ $\left[0,\frac{2}{3}\right]$ ។

សំរាយបញ្ជាក់

បង្ហាញថាសមីការនេះមានឫសយ៉ាងតិចមួយនៅចន្លោះ $\left[0,\frac{2}{3}\right]$

តាង $f(x)=ax^2+bx+c$ ជាប់លើចន្លោះ $\left[0;\frac{2}{3}\right]$

ដែល $f(0)=c; f\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{4a}{9}+\frac{2b}{3}+c=\frac{4a+6b+9c}{9}$

$\Rightarrow f(0)\times f\left(\frac{2}{3}\right)=c\times\frac{4a+6b+9c}{9}$

តែ $2a+3b+6c=0 \Rightarrow 4a+6b+12c=0$

$\Rightarrow 4a+6b+9c=-3c$

$\Rightarrow f(0)\times f\left(\frac{2}{3}\right)=c\times\frac{-3c}{9}=-\frac{c^2}{3}<0$

យើងបាន $f(c)=0$ ដែលនៅចន្លោះ $f(0)$ និង $f\left(\frac{2}{3}\right)$

ដូចនេះ សមីការមានឫសមួយយ៉ាងតិច ។

8-គេឱ្យអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ បើ $x\neq 0; f(x)=\frac{|x|+2x^2}{x}$

បើ $x=0\ ; f(0)=1$ ។

ក. តើអនុគមន៍ f ជាប់ត្រង់ $x=0$ ឬទេ?

ខ. សង់ក្រាបតាងអនុគមន៍ f ។

សំរាយបញ្ជាក់

ក. តើអនុគមន៍ f ជាប់ត្រង់ $x=0$ ឬទេ?

ដោយ $f(x)=\dfrac{|x|+2x^2}{x}$

ពេល $x\to 0^- \Rightarrow |x|=-x \Rightarrow f(x)=-1+2x$ យើងបាន

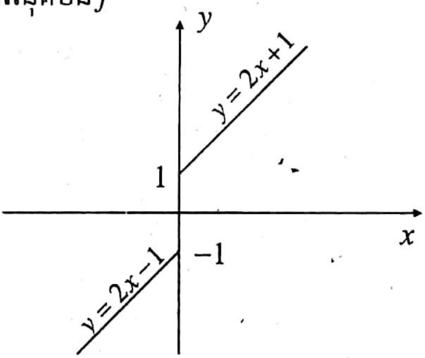
$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(-1+2x)=-1$

ពេល $x\to 0^+ \Rightarrow |x|=x \Rightarrow f(x)=1+2x$ យើងបាន :

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(1+2x)=1$

ដូចនេះ $f(0)$ មិនជាប់ត្រង់ $x=0$

ខ. សង់ក្រាបតាងអនុគមន៍ f



ជំពូក២ : ដេរីវេនៃអនុគមន៍

មេរៀនទី១ : ដេរីវេនៃអនុគមន៍

លំហាត់ :

1-គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម:

ក. $f(x)=(2x+1)^4$ ខ. $f(x)=\sqrt{5x^6-12}$

គ. $f(x)=(x^5-4x^2+8)^8$ ឃ. $f(x)=(3x^4-7x^2+9)^5$

ង. $f(x)=\dfrac{1}{5x^2-6x+2}$ ច. $f(x)=\dfrac{2}{(6x^2+5x+1)^2}$

សំរាយបញ្ជាក់ :

គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម:

យើងមាន :

ក. $f(x)=(2x+1)^4$ រាង $y=u^n \Rightarrow y'=nu'u^{n-1}$

នោះយើងបាន $f'(x)=4\times(2x+1)'(2x+1)^3=8(2x+1)^3$

ដូចនេះ $\boxed{f'(x)=8(2x+1)^3}$

ខ. $f(x)=\sqrt{5x^6-12}$ រាង $y=\sqrt{u} \Rightarrow y'=\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$

នោះយើងបាន :

$$f'(x)=\frac{\left(5x^6-12\right)'}{2\sqrt{5x^6-12}}=\frac{30x^5}{2\sqrt{5x^6-12}}=\frac{15x^5}{\sqrt{5x^6-12}}$$

ដូចនេះ $\boxed{f'(x)=\frac{15x^5}{\sqrt{5x^6-12}}}$

គ. $f(x)=\left(x^5-4x^2+8\right)^8$ រាង $y=u^n \Rightarrow y'=nu'u^{n-1}$

នោះយើងបាន :

$$f'(x)=8\times\left(x^5-4x^2+8\right)'\left(x^5-4x^2+8\right)^7$$

$$=8\left(5x^4-8x\right)\left(x^5-4x^2+8\right)^7$$

ដូចនេះ $\boxed{f'(x)=8\left(5x^4-8x\right)\left(x^5-4x^2+8\right)^7}$

ឃ. $f(x)=\left(3x^4-7x^2+9\right)^5$ រាង $y=u^n \Rightarrow y'=nu'u^{n-1}$

នោះយើងបាន :

$$f'(x)=5\times\left(3x^4-7x^2+9\right)'\left(3x^4-7x^2+9\right)^4$$

$$=5\left(12x^3-14x\right)\left(3x^4-7x^2+9\right)^4$$

ដូចនេះ $\boxed{f'(x)=5\left(12x^3-14x\right)\left(3x^4-7x^2+9\right)^4}$

ង. $f(x)=\frac{1}{5x^2-6x+2}$ រាង $y=\frac{1}{u}\Rightarrow y'=-\frac{u'}{u^2}$

នោះយើងបាន :

$$\Rightarrow f'(x) = -\frac{\left(5x^2-6x+2\right)'}{\left(5x^2-6x+2\right)^2} = -\frac{10x-6}{\left(5x^2-6x+2\right)^2}$$

ដូចនេះ យើងបាន : $\boxed{f'(x) = -\frac{10x-6}{\left(5x^2-6x+2\right)^2}}$

ច. $f(x) = \frac{2}{\left(6x^2+5x+1\right)^2}$ រាង $y = \frac{a}{u} \Rightarrow y' = -\frac{au'}{u^2}$

នោះយើងបាន :

$$\Rightarrow f'(x) = -\frac{2\left[\left(6x^2+5x+1\right)^2\right]'}{\left(6x^2+5x+1\right)^4}$$

$$= -\frac{2\times 2\left(6x^2+5x+1\right)'\left(6x^2+5x+1\right)}{\left(6x^2+5x+1\right)^4}$$

$$= -\frac{4(12x+5)}{\left(6x^2+5x+1\right)^3}$$

ដូចនេះ យើងបាន : $\boxed{f'(x) = -\frac{4(12x+5)}{\left(6x^2+5x+1\right)^3}}$

2-គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម:

ក. $y=\dfrac{1}{\sqrt{4x^2+1}}$ ខ. $y=\dfrac{1}{\sqrt{5x^3+2}}$

គ. $y=\sqrt{\dfrac{3x+1}{2x-1}}$ ឃ. $y=\left(\dfrac{x+2}{2-x}\right)^3$

ង. $y=(x+2)^3(2x-1)^5$ ច. $y=2(3x+1)^4(5x-3)^2$

សំរាយបញ្ជាក់ :

ក. $y=\dfrac{1}{\sqrt{4x^2+1}}$ ប្រើ $y=\dfrac{1}{\sqrt{u}}\Rightarrow y'=-\dfrac{u'}{2\sqrt{u^3}}$

នោះយើងបាន :

$$y'=-\frac{(4x^2+1)'}{2\sqrt{(4x^2+1)^3}}=-\frac{8x}{2\sqrt{(4x^2+1)^3}}=-\frac{4x}{\sqrt{(4x^2+1)^3}}$$

ដូចនេះ យើងបាន $\boxed{y'=-\dfrac{4x}{\sqrt{(4x^2+1)^3}}}$

ខ. $y=\dfrac{1}{\sqrt{5x^3+2}}$ ប្រើ $y=\dfrac{1}{\sqrt{u}}\Rightarrow y'=-\dfrac{u'}{2\sqrt{u^3}}$

នោះយើងបាន :

$$y'=-\frac{(5x^3+2)'}{2\sqrt{(5x^3+2)^3}}=-\frac{15x^2}{2\sqrt{(5x^3+2)^3}}$$

ដូចនេះ យើងបាន : $\boxed{y' = -\frac{15x^2}{2\sqrt{(5x^3+2)^3}}}$

គ. $y = \sqrt{\frac{3x+1}{2x-1}}$ ប្រើ $y = \sqrt{u} \Rightarrow y' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$

នោះយើងបាន :

$$y' = \frac{\left(\frac{3x+1}{2x-1}\right)'}{2\sqrt{\frac{3x+1}{2x-1}}} = \frac{\frac{3(2x-1)-2(3x+1)}{(2x-1)^2}}{2\sqrt{\frac{3x+1}{2x-1}}}$$

$$= \frac{-5}{(2x-1)^2} \times 2\sqrt{\frac{2x-1}{3x+1}}$$

ដូចនេះ : $\boxed{y' = \frac{-10}{(2x-1)^2} \times \sqrt{\frac{2x-1}{3x+1}}}$

ឃ. $y = \left(\frac{x+2}{2-x}\right)^3$ ប្រើ $y = u^n \Rightarrow y' = n \times u' \times u^{n-1}$

និង $y = \frac{u}{v} \Rightarrow y' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$ នោះយើងបាន :

$$y' = 3\times\left(\frac{x+2}{2-x}\right)'\left(\frac{x+2}{2-x}\right)^2$$

$$= 3\times\left[\frac{(2-x)+(x+2)}{(2-x)^2}\right]\left(\frac{x+2}{2-x}\right)^2$$

$$= \frac{12}{(2-x)^2}\times\left(\frac{x+2}{2-x}\right)^2$$

ដូចនេះ $\boxed{y' = \frac{12}{(2-x)^2}\times\left(\frac{x+2}{2-x}\right)^2}$

ចំណាំ : $y = \frac{ax+b}{cx+d} \Rightarrow y' = \frac{ad-cb}{(cx+d)^2}$

ង. $y = (x+2)^3(2x-1)^5$ ប្រើ $y = u\times v \Rightarrow y' = u'v + v'u$

នោះយើងបាន :

$$y' = \left[(x+2)^3\right]'(2x-1)^5 + \left[(2x-1)^5\right]'(x+2)^3$$

$$= 3(x+2)^2(2x-1)^5 + 10(2x-1)^4(x+2)^3$$

$$= (x+2)^2(2x-1)^4[3(2x-1)+10(x+2)]$$

$$= (x+2)^2(2x-1)^4(6x-3+10x+20)$$

$$= (x+2)^2(2x-1)^4(16x+17)$$

ដូចនេះ $\boxed{y' = (x+2)^2(2x-1)^4(16x+17)}$

ច. $y=2(3x+1)^4(5x-3)^2$ ប្រើ $y=u\times v\Rightarrow y'=u'v+v'u$

នោះយើងបាន :

$$y'=2\left\{\left[(3x+1)^4\right]'(5x-3)^2+\left[(5x-3)^2\right]'(3x+1)^4\right\}$$

$$=2\left[12\times(3x+1)^3(5x-3)^2+10\times(5x-3)(3x+1)^4\right]$$

$$=2(3x+1)^3(5x-3)\left[12(5x-3)+10(3x+1)\right]$$

$$=2(3x+1)^3(5x-3)(60x-36+30x+10)$$

$$=2(3x+1)^3(5x-3)(90x-26)$$

$$=4(3x+1)^3(5x-3)(45x-13)$$

ដូចនេះ $\boxed{y'=4(3x+1)^3(5x-3)(45x-13)}$

. គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ $f(x)$ តាមវិធីពីរយ៉ាងគឺ តាមរូបមន្ត ដេរីវេនៃផលគុណ និងដេរីវេនៃស្វ័យគុណ រួចបង្ហាញថាវិធីទាំងពីរ មានលទ្ធផលដូចគ្នា:

ក. $f(x)=(3x+5)^2$ ខ. $y=(7-4x)^2$

សំរាយបញ្ជាក់ :

គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ $f(x)$ តាមវិធីពីរយ៉ាងគឺ តាមរូបមន្ត ដេរីវេនៃផលគុណ និងដេរីវេនៃស្វ័យគុណ :

តាមរូបមន្តដេរីវេនៃផលគុណ $y=u.v \Rightarrow y'=u'v+v'u$

តាមរូបមន្តដេរីវេនៃស្វ័យគុណ $y=u^n=n.u'.u^{n-1}$

ក. $f(x)=(3x+5)^2=(3x+5)(3x+5)$

តាមដេរីវេនៃផលគុណ $y=uv \Rightarrow y'=u'v+v'u$ គេបាន :

$f'(x)=3(3x+5)+3(3x+5)=6(3x+5) \quad (1)$

តាមដេរីវេនៃស្វ័យគុណ $y=u^n=n.u'.u^{n-1}$ នោះយើងបាន :

$y'=2\times3\times(3x+5)=6(3x+5) \quad (2)$

តាម (1) និង (2) រូបមន្តទាំងពីរនេះ លទ្ធផលមានចម្លើយដូចគ្នា ។

ខ. $y=(7-4x)^2=(7-4x)(7-4x)$

តាមដេរីវេនៃផលគុណ យើងបាន :

$f'(x)=-4(7-4x)-4(7-4x)=-8(7-4x) \quad (1)$

តាមដេរីវេនៃស្វ័យគុណ យើងបាន :

$y'=2(7-4x)\times(7-4x)=-8(7-4x) \quad (2)$

តាម (1) និង (2) រូបមន្តទាំងពីរលទ្ធផលមានចម្លើយដូចគ្នា :

4- គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម:

ក. $\text{in}^2 x + \cos^2 x$ ខ. $y = 5x^3 - 2\sin x\cos x$

គ. $y = (\ \ \ \text{in}\, x)^3$ ឃ. $y = \sin x - x^2\cos x$

ង. $y = x^2 - \tan^2 x$ ច. $y = 3x\cot^2 x$ ។

សំរាយបញ្ជាក់ :

គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម:

យើងមាន :

ក. $y = \sin^2 x + \cos^2 x$ នោះយើងបាន :

$y' = 2\times(\sin x)'\times\sin x + 2\times(\cos x)'\times\cos x$

$= 2\cos x\sin x - 2\sin x\cos x = 0$

ដូចនេះ $\boxed{y' = 0}$

ខ. $y = 5x^3 - 2\sin x\cos x$ នោះយើងបាន :

$y' = 15x^2 - 2[(\sin x)'\cos x + (\cos x)'\sin x]$

$= 15x^2 - 2(\cos^2 x - \sin^2 x)$

$= 15x^2 - 2\cos 2x$

ដូចនេះ $\boxed{y' = 15x^2 - 2\cos 2x}$

គ. $y = (2x - \sin x)^3$ នោះយើងបាន :

$$y' = 3\times(2x-\sin x)'(2x-\sin x)^2$$

$$= 3(2-\cos x)(2x-\sin x)^2$$

ដូចនេះ $\boxed{y' = 3(2-\cos x)(2x-\sin x)^2}$

ឃ. $y = \sin x - x^2\cos x$ នោះយើងបាន :

$$y' = (\sin x)' - \left[(x^2)'\cos x + (\cos x)'x^2\right]$$

$$= \cos x - \left(2x\cos x - x^2\sin x\right)$$

$$= \cos x - 2x\cos x + x^2\sin x$$

ដូចនេះ $\boxed{y' = \cos x - 2x\cos x + x^2\sin x}$

ង. $y = x^2 - \tan^2 x$ នោះយើងបាន :

$$y' = (x^2)' - 2\times(\tan x)'\tan x$$

$$= 2x - 2\tan x\left(1+\tan^2 x\right)$$

ដូចនេះ $\boxed{y' = 2x - 2\tan x\left(1+\tan^2 x\right)}$

ច. $y = 3x\cot^2 x$ នោះយើងបាន :

$$y' = 3\left[(x)'\cot^2 x + (\cot^2 x)'x\right]$$

$$= 3\left[\cot^2 x - 2x\cot x\left(1+\cot^2 x\right)\right]$$

ដូចនេះ $\boxed{y' = 3\left[\cot^2 x - 2x\cot x\left(1+\cot^2 x\right)\right]}$

5- គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម:

ក. $f(x)=\sin^2 x^2$ ខ. $f(x)=x^3-\cos^2 5x$

គ. $f(x)=\dfrac{\tan 2x}{1-\cos x}$ ឃ. $f(x)=x^3-\sin\left(x^2-5x\right)$

ង. $f(x)=\sin 3x+\cos\left(x^3-1\right)$

ច. $f(x)=\tan\left(2x^3-5x\right)$

សំរាយបញ្ជាក់ :

គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម:

យើងមាន :

ក. $f(x)=\sin^2 x^2$

$f'(x)=2\times\left(\sin x^2\right)'\left(\sin x^2\right)=2\times\left(x^2\right)\cos x^2\times\sin x^2$

$=4x\cos x^2\sin x^2$

ដូចនេះ $\boxed{f'(x)=4x\cos x^2\sin x^2}$

ខ. $f(x)=x^3-\cos^2 5x$ នោះយើងបាន :

$f'(x)=3x^2-2\times(\cos 5x)'\cos 5x$

$=3x^2+10\sin 5x.\cos 5x$

$=3x^2+5\sin 10x$

ព្រោះ $\sin 10x = 2\sin 5x.\cos 5x$

ដូចនេះ $\boxed{f'(x) = 3x^2 + 5\sin 10x}$

គ. $f(x) = \dfrac{\tan 2x}{1-\cos x}$ នោះយើងបាន :

$$f'(x) = \frac{(\tan 2x)'(1-\cos x) - (1-\cos x)'\tan 2x}{(1-\cos x)^2}$$

$$= \frac{2\left(1+\tan^2 2x\right)(1-\cos x) - \sin x \tan 2x}{(1-\cos x)^2}$$

ដូចនេះ $\boxed{f'(x) = \dfrac{2\left(1+\tan^2 2x\right)(1-\cos x) - \sin x \tan 2x}{(1-\cos x)^2}}$

ឃ. $f(x) = x^3 - \sin\left(x^2 - 5x\right)$ នោះយើងបាន :

$$f'(x) = 3x^2 - \left(x^2 - 5x\right)'\cos\left(x^2 - 5x\right)$$

$$= 3x^2 - (2x-5)\cos\left(x^2 - 5x\right)$$

ដូចនេះ $\boxed{f'(x) = 3x^2 - (2x-5)\cos\left(x^2 - 5x\right)}$

ង. $f(x) = \sin 3x + \cos\left(x^3 - 1\right)$ នោះយើងបាន :

$$f'(x) = 3\cos 3x - \left(x^3 - 1\right)'\sin\left(x^3 - 1\right)$$

$$= 3\cos 3x - 3x^2 \sin\left(x^3 - 1\right)$$

ដូចនេះ $f'(x)=3\cos 3x-3x^2\sin\left(x^3-1\right)$

ច. $f(x)=\tan\left(2x^3-5x\right)$ នោះយើងបាន :

$$f'(x)=\left(2x^3-5x\right)'\left[1+\tan^2\left(2x^3-5x\right)\right]$$

$$=\left(6x^2-5\right)\left[1+\tan^2\left(2x^3-5x\right)\right]$$

ដូចនេះ $f'(x)=\left(6x^2-5\right)\left[1+\tan^2\left(2x^3-5x\right)\right]$

6- គណនាដេរីវេទី 2 នៃអនុគមន៍:

ក. $y=3x^2-\sin 2x$ ខ. $y=-3x^4+2x^2$

គ. $y=x+\dfrac{1}{x}$ ឃ. $g(x)=\dfrac{x^2}{x+1}$

ង. $g(x)=\left(x^2+4\right)^3$ ច. $g(x)=\left(x^3-1\right)^4$ ។

សំរាយបញ្ជាក់ :

គណនាដេរីវេទី 2 នៃអនុគមន៍:

យើងមាន :

ក. $y=3x^2-\sin 2x$

$$y'=6x-2\cos 2x\Rightarrow y''=6+4\sin 2x$$

ដូចនេះ $y''=6+4\sin 2x$

ខ. $y=-3x^4+2x^2 \Rightarrow y'=-12x^3+4x \Rightarrow y''=-36x^3+4$

ដូចនេះ $\boxed{y''=-36x^3+4}$

គ. $y=x+\dfrac{1}{x} \Rightarrow y'=1-\dfrac{1}{x^2} \Rightarrow y''=\dfrac{2}{x^3}$

ដូចនេះ $\boxed{y''=\dfrac{2}{x^3}}$

ឃ. $g(x)=\dfrac{x^2}{x+1}$ នោះយើងបាន :

$$g'(x)=\frac{2x(x+1)-x^2}{(x+1)^2}=\frac{x^2+2x}{(x+1)^2}$$

$$\Rightarrow g''(x)=\frac{(2x+2)(x+1)^2-2(x+1)(x^2+2x)}{(x+1)^4}$$

$$=\frac{(2x+2)(x+1)-2(x^2+2x)}{(x+1)^3}$$

$$=\frac{2x^2+2x+2x+2-2x^2-4x}{(x+1)^3}$$

$$=\frac{2}{(x+1)^3}$$

ដូចនេះ $\boxed{g''(x)=\dfrac{2}{(x+1)^3}}$

ង. $g(x)=\left(x^2+4\right)^3$ នោះយើងបាន :

$$g'(x)=3\times\left(x^2+4\right)'\left(x^2+4\right)^2=6x\left(x^2+4\right)^2$$

$$g''(x)=(6x)'\left(x^2+4\right)^2+\left[\left(x^2+4\right)^2\right]'\times 6x$$

$$=6\left(x^2+4\right)^2+24x^2\left(x^2+4\right)$$

$$=\left(x^2+4\right)\left(30x^2+24\right)$$

ដូចនេះ $\boxed{g''(x)=\left(x^2+4\right)\left(30x^2+24\right)}$

ច. $g(x)=\left(x^3-1\right)^4$ នោះយើងបាន :

$$g'(x)=12x^2\left(x^3-1\right)^3$$

$$\Rightarrow g''(x)=24x\left(x^3-1\right)^3+12x^2\times 9x^2\left(x^3-1\right)^2$$

$$=24x\left(x^3-1\right)^3+108x^4\left(x^3-1\right)^2$$

ដូចនេះ $\boxed{g''(x)=24x\left(x^3-1\right)^3+108x^4\left(x^3-1\right)^2}$

7- រក y'ជាអនុគមន៍នៃ x និង y :

ក. $x=\tan y$

ខ. $x=\sin y$

គ. $xy+\sin y=0$

ឃ. $x+\sin y=xy$

ង. $x+\tan(xy)=0$

ច. $y^2=\sin^4 2x+\cos^4 2x$ ។

សំរាយបញ្ជាក់ :

រក y' ជាអនុគមន៍នៃ x និង y :

ក. $x = \tan y$ យើងបាន :

ដោយធ្វើដេរីវេលើអង្គទាំងពីរនោះ យើងបាន :

$$(x)' = (\tan y)' \Rightarrow 1 = y'(1+\tan^2 y) \Rightarrow y' = \frac{1}{1+\tan^2 y}$$

ដូចនេះ $\boxed{y' = \frac{1}{1+\tan^2 y}}$

ខ. $x = \sin y$ យើងបាន :

$$(x)' = (\sin y)' \Rightarrow 1 = y'\cos y \Rightarrow y' = \frac{1}{\cos y}$$

ដូចនេះ $\boxed{y' = \frac{1}{\cos y}}$

គ. $xy + \sin y = 0 \Rightarrow xy = -\sin y$ យើងបាន :

$$(xy)' = -(\sin y)' \Rightarrow y + xy' = -y'\cos y$$

$$\Rightarrow y'(x+\cos y) = -y \Rightarrow y' = \frac{-y}{x+\cos y}$$

ដូចនេះ $\boxed{y' = \frac{-y}{x+\cos y}}$

ឃ. $x + \sin y = xy$ យើងបាន :

$$(x+\sin y)'=(xy)'\Rightarrow 1+y'\cos y=y+xy'$$

$$\Rightarrow y'(\cos y-x)=y-1\Rightarrow y'=\frac{y-1}{\cos y-x}$$

ដូចនេះ $\boxed{y'=\frac{y-1}{\cos y-x}}$

ង. $x+\tan(xy)=0\Rightarrow x=-\tan(xy)$ យើងបាន :

$$(x)'=[-\tan(xy)]'\Rightarrow 1=-(xy)'\left[1+\tan^2(xy)\right]$$

$$\Rightarrow 1=-(y+y'x)\left[1+\tan^2(xy)\right]$$

$$\Rightarrow y+y'x=\frac{-1}{1+\tan^2(xy)}\Rightarrow y'=\frac{-1}{x\left[1+\tan^2(xy)\right]}-\frac{y}{x}$$

ដូចនេះ $\boxed{y'=\frac{-1}{x\left[1+\tan^2(xy)\right]}-\frac{y}{x}}$

ច. $y^2=\sin^4 2x+\cos^4 2x$ យើងបាន :

$$(y^2)'=\left(\sin^4 2x+\cos^4 2x\right)'$$

$$2yy'=4\times(2\cos 2x)\times\sin^3 2x+4\times(-2\sin 2x)\times\cos^3 2x$$

$$=8\cos 2x\sin^3 2x-8\sin 2x\cos^3 2x$$

$$\Rightarrow y'=\frac{4\cos 2x\sin^3 2x-4\sin 2x\cos^3 2x}{y}$$

ដូចនេះ $\boxed{y'=\frac{4\cos 2x\sin^3 2x-4\sin 2x\cos^3 2x}{y}}$

8- រក y' និង y'' ជាអនុគមន៍នៃ x និង y:

ក. $2x^2+y^2=4$　　　　ខ. $2x^3+y^3=8$

គ. $x^2+xy+y^2=-1$　　　　ឃ. $x^3+2xy-y^2=3$

ង. $x^3+y^3=3xy$　　　　ច. $x^3y+xy^3=3x^2$

សំរាយបញ្ជាក់ :

រក y' និង y'' ជាអនុគមន៍នៃ x និង y:

ក. $2x^2+y^2=4$ យើងបាន :

$$\left(2x^2+y^2\right)'=(4)'\Rightarrow 4x+2yy'=0\Rightarrow y'=-\frac{2x}{y}$$

ហើយ គេបាន $4+2y'y'+2yy''=0\Rightarrow y''=\frac{-2-(y')^2}{y}$

$$=\frac{-2-\left(-\frac{2x}{y}\right)^2}{y}=\frac{-2y^2-4x^2}{y^3}$$

ដូចនេះ $\boxed{y'=-\frac{2x}{y};\ y''=\frac{-4x^2-2y^2}{y^3}}$

ខ. $2x^3+y^3=8$ យើងបាន :

$$\left(2x^3+y^3\right)'=(8)'\Rightarrow 6x^2+3y^2y'=0\Rightarrow y'=-\frac{2x^2}{y^2}$$

$$12x+6yy'y'+3y^2y''=0 \Rightarrow y''=\frac{-4x-2y(y')^2}{y^2}$$

$$=\frac{-4x-2y\left(\frac{-2x^2}{y^2}\right)^2}{y^2}=\frac{-4xy^4-8yx^4}{y^6}=\frac{-4x\left(y^3+2x^3\right)}{y^5}$$

ដូចនេះ $\boxed{y'=-\frac{2x^2}{y^2};\, y''=\frac{-4x\left(y^3+2x^3\right)}{y^5}}$

គ. $x^2+xy+y^2=-1$ យើងបាន :

$$\left(x^2+xy+y^2\right)'=(-1)' \Rightarrow 2x+y+xy'+2yy'=0$$

$$\Rightarrow y'=-\frac{2x+y}{x+2y}$$

គេបាន $2+y'+y'+xy''+2y'y'+2yy''=0$

$$\Rightarrow y''=\frac{-2-2y'-2(y')^2}{x+2y}$$

$$=\frac{-2-2\left(-\frac{2x+y}{x+2y}\right)-2\left(-\frac{2x+y}{x+2y}\right)^2}{x+2y}$$

$$=\frac{-y^2-6x^2-6xy}{(x+2y)^3}$$

ដូចនេះ $y' = -\dfrac{2x+y}{x+2y}; y'' = \dfrac{-6y^2-6x^2-6xy}{(x+2y)^3}$

ឃ. $x^3+2xy-y^2=3$ យើងបាន :

$$(x^3+2xy-y^2)' = (3)' \Rightarrow 3x^2+2y+2xy'-2yy'=0$$

$$\Rightarrow y' = \frac{-3x^2-2y}{2x-2y}$$

ហើយ $6x+2y'+2y'+2xy''-2y'y'-2yy''=0$

$$\Rightarrow y'' = \frac{-3x-2y'+(y')^2}{x-y}$$

$$= \frac{-3x-2\left(\dfrac{-3x^2-2y}{2x-2y}\right)+\left(\dfrac{-3x^2-2y}{2x-2y}\right)^2}{x-y}$$

$$= \frac{18x^4+48x^2y-8y^2-24xy^2+16xy}{8(x-y)^3}$$

ដូចនេះ $y' = \dfrac{-3x^2-2y}{2x-2y}$

និង $y'' = \dfrac{18x^4+48x^2y-8y^2-24xy^2+16xy}{8(x-y)^3}$

ង. $x^3 + y^3 = 3xy$ នោះយើងបាន ៖

$$\left(x^3 + y^3\right)' = (3xy)' \Rightarrow 3x^2 + 3y'y^2 = 3y + 3xy'$$

$$\Rightarrow y' = \frac{y - x^2}{y^2 - x}$$

ហើយយើងបាន $2x + 2yy'y' + y^2y'' = y' + y' + xy''$

$$\Rightarrow y'' = \frac{-2x - 2y\left(\frac{y - x^2}{y^2 - x}\right)^2 + 2\left(\frac{y - x^2}{y^2 - x}\right)}{y^2 - x}$$

$$= \frac{6x^2y^2 - 2xy^4 - 2yx^4 - 2xy}{\left(y^2 - x\right)^3}$$

ដូចនេះ $\boxed{y' = \frac{y - x^2}{y^2 - x};\ y'' = \frac{6x^2y^2 - 2xy^4 - 2yx^4 - 2xy}{\left(y^2 - x\right)^3}}$

ច. $x^3y + xy^3 = 3x^2$ យើងបាន ៖

$$\left(x^3y + xy^3\right)' = (3x)^2 \Rightarrow 3x^2y + x^3y' + y^3 + 3xy^2y' = 6x$$

$$\Rightarrow y' = \frac{6x - 3x^2y - y^3}{x^3 + 3xy^2}$$

គេបាន ៖

$$6xy+3x^2y'+3x^2y'+x^3y''+3y^2y'+3y^2y'$$
$$+6xy(y')^2+3xy^2y''=6$$
$$\Rightarrow y''=\frac{6-6xy-6x^2y'-6y^2y'-6xy(y')^2}{x^3+3xy^2}$$
$$=\frac{12x^3y\left(x^4-18\right)+x^2y^2\left(234y^2+108x^2\right)}{\left(x^3+3xy^2\right)^3}$$
$$+\frac{-12x^3y^3\left(x^2+y^2\right)+6xy^2(3-y)-30x^6}{\left(x^3+3xy^2\right)^3}$$

9- គណនា:

ក. $f^{(4)}(x)$ បើ $f(x)=x^3-3x^2+2x$

ខ. $f^{(6)}(x)$ បើ $f(x)=\frac{1}{7}x^7-\sin 2x$

គ. $f^{(8)}(x)$ បើ $f(x)=x^8-5x^2+\cos x$

ឃ. $f^{(10)}(x)$ បើ $f(x)=\frac{120}{x^6}$ ។

សំរាយបញ្ជាក់ :

ក. $f^{(4)}(x)$ បើ $f(x)=x^3-3x^2+2x$ នោះយើងបាន :

$f'(x)=3x^2-6x+2; f''(x)=6x-6$

$; f'''(x)=6; f^{(4)}(x)=0$

ដូចនេះ $\boxed{f^{(4)}(x)=0}$

ខ. $f^{(6)}(x)$ បើ $f(x)=\frac{1}{7}x^7-\sin 2x$ នោះយើងបាន :

$f'(x)=x^6-2\cos 2x; f''(x)=6x^5+4\sin 2x$

$f'''(x)=30x^4+8\cos 2x; f^{(4)}(x)=120x^3-16\sin 2x$

$f^{(5)}(x)=360x^2-32\cos 2x; f^6(x)=720x+64\sin 2x$

ដូចនេះ $\boxed{f^6(x)=720x+64\sin 2x}$

គ. $f^{(8)}(x)$ បើ $f(x)=x^8-5x^2+\cos x$ នោះយើងបាន :

$f'(x)=8x^7-10x-\sin x; f''(x)=7\times 8x^6-10-\cos x$

$f'''(x)=6\times 7\times 8x^5+\sin x; f^{(4)}(x)=5\times 6\times 7\times 8x^4+\cos x$

$f^{(5)}(x)=4\times 5\times 6\times 7\times 8x^3-\sin x$

$f^{(6)}(x)=3\times 4\times 5\times 6\times 7\times 8x^2-\cos x$

$f^{(7)}(x)=2\times 3\times 4\times 5\times 6\times 7\times 8x+\sin x$

$f^{(8)}(x)=2\times 3\times 4\times 5\times 6\times 7\times 8+\cos x=8!+\cos x$

ដូចនេះ $\boxed{f^{(8)}(x)=8!+\cos x}$

សំគាល់: $n!=n\times(n-1)\times(n-2)...\times 2\times 1$

ឃ. $f^{(10)}(x)$ បើ $f(x)=\frac{120}{x^6}$

យើងមាន $f(x)=\frac{120}{x^6}=120.x^{-6}$ នោះយើងបាន :

$$f'(x) = 120\times(-6)x^{-7}$$

$$f''(x) = 120\times(-6)\times(-7)x^{-8} = (-1)^2\times120\times6\times7x^{-8}$$

$$f^{(3)}(x) = 120\times(-6)\times(-7)\times(-8)x^{-9}$$

$$= (-1)^3\times120\times6\times7\times8x^{-9}$$

....

....

$$f^{(10)}(x) = (-1)^{10}\times120\times6\times7\times8\times\ldots\times15x^{-16}$$

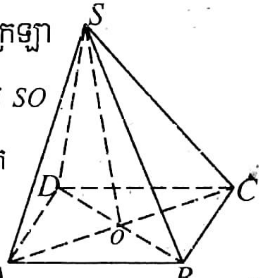
ដោយ $120 = 1\times2\times3\times4\times5$ យើងបាន :

$$f^{(10)}(x) = 1\times2\times3\times4\times5\times6\times7\times\ldots\times15x^{-16} = \frac{15!}{x^{16}}$$

ដូចនេះ $\boxed{f^{(10)}(x) = \frac{15!}{x^{16}}}$

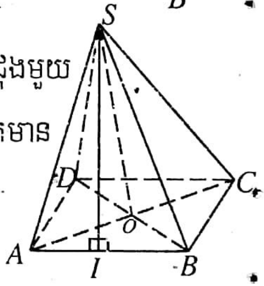
មេរៀនទី២ : **អនុវត្តន៍ដេរីវេ**

លំហាត់ :



1-ពីរ៉ាមីតចតុមុខនិយ័ត $SABCD$ មានផ្ទៃក្រឡាខាងS_l ។ គណនាផលធៀបរង្វាស់កម្ពស់ SO និងជ្រុងមួយនៃបាតដើម្បីឱ្យមានពីរ៉ាមីតចតុមុខនិយ័តមានតម្លៃអតិបរមា ។

សំរាយបញ្ជាក់ :



គណនាផលធៀបរង្វាស់កម្ពស់ SO និងជ្រុងមួយនៃបាតដើម្បីឱ្យមានពីរ៉ាមីតចតុមុខនិយ័តមានតម្លៃអតិបរមា :

តាង $|AB| = x \;; x > 0$ រង្វាស់ជ្រុងបាត

យក I ជាចំណុចកណ្ដាល $[AB]$ នាំឱ្យ $[SI]$ ជាអាប៉ូតែម :

គេបាន $S_l = \frac{1}{2} \times 4x \times SI \Rightarrow SI = \frac{S_l}{2x}$

ត្រីកោណ SOI កែងត្រង់ O យើងបាន :

$$SO^2 = SI^2 - OI^2 = \left(\frac{S_l}{2x}\right)^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2 = \frac{S_l^2 - x^4}{4x^2}$$

តែ $S_l^2 - x^4 > 0 \Rightarrow x^4 < S_l^2 \Rightarrow x^2 < S_l$

$\Rightarrow x < \sqrt{S_l} \Rightarrow 0 < x < \sqrt{S_l}$

យើងបាន $SO = \dfrac{\sqrt{S_l^2 - x^4}}{2x}$

តាង $V(x)$ ជាមាឌនៃពីរ៉ាមីត :

នោះ $V(x) = \dfrac{1}{3}x^2\dfrac{\sqrt{S_l^2 - x^4}}{2x} = \dfrac{x}{6}\sqrt{S_l^2 - x^4}$

$\Rightarrow V'(x) = \dfrac{S_l^2 - 3x^4}{6\sqrt{S_l^2 - x^4}}$

ដោយ $V'(x) = 0 \Rightarrow 3x^4 = S_l^2 \Rightarrow x = \sqrt[4]{\dfrac{S_l^2}{3}}$

x	0		$\sqrt[4]{\dfrac{S_l^2}{3}}$		$\sqrt{S_l}$
$V'(x)$		$+$	0	$-$	
$V(x)$		$\nearrow$	អតិបរមា	$\searrow$	

តាមតារាង យើងបាន :

$$\frac{SO}{x} = \frac{\sqrt{S_l^2 - x^4}}{2x^2} = \frac{\sqrt{S_l^2 - \frac{S_l^2}{3}}}{2\sqrt{\frac{S_l^2}{3}}} = \frac{\sqrt{\frac{2S_l^2}{3}}}{2\sqrt{\frac{S_l^2}{3}}} = \frac{\sqrt{2}\times\sqrt{\frac{S_l^2}{3}}}{2\sqrt{\frac{S_l^2}{3}}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

ដូចនេះ ផលធៀបរង្វាស់កម្ពស់និងជ្រុងបាតនៃពីរ៉ាមីតគឺ $\boxed{\dfrac{\sqrt{2}}{2}}$

2- ផលបូកបរិមាត្រការេមួយ និងរង្វង់មួយមានប្រវែង l ។

គណនាផលធៀបរង្វាស់កាំរង្វង់និងជ្រុងការេ ដើម្បីឱ្យផលបូកផ្ទៃក្រឡាការេនិងរង្វង់មាន តម្លៃអប្បបរមា។

សំរាយបញ្ជាក់ :

គណនាផលធៀបរង្វាស់កាំរង្វង់និងជ្រុងការេ ដើម្បីឱ្យផលបូកផ្ទៃក្រឡាការេនិងរង្វង់មាន តម្លៃអប្បបរមា :

តាង x ជាជ្រុងការេ និង r ជាកាំនៃរង្វង់

ផលបូកបរិមាត្រ $l = 4x + 2\pi r \Rightarrow r = \dfrac{l - 4x}{2\pi}$

ក្រឡាផ្ទៃ: $S = x^2 + \pi r^2 = x^2 + \pi \times \dfrac{(l - 4x)^2}{4\pi^2}$

$= x^2 + \dfrac{16x^2 - 8lx + l^2}{4\pi}$

$\Rightarrow S' = 2x + \dfrac{8x}{\pi} - \dfrac{2l}{\pi} = x\left(2 + \dfrac{8}{\pi}\right) - \dfrac{2l}{\pi}$

ដោយ $S'(x) = 0 \Rightarrow x = \dfrac{2l}{\pi} \times \dfrac{\pi}{2\pi + 8} = \dfrac{l}{\pi + 4}$

តាងអថេរភាព :

$x=\dfrac{l}{\pi+4}$

x	0		$\dfrac{l}{\pi+4}$		$+\infty$
S'		$-$	0	$+$	
S		$\searrow$		$\nearrow$	

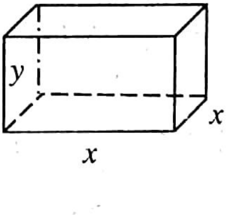
$$\Rightarrow r=\frac{l-\dfrac{4l}{\pi+4}}{2\pi}=\frac{l(\pi+4)-4l}{2\pi(\pi+4)}=\frac{l}{2(\pi+4)}$$

យើងបាន $\dfrac{r}{x}=\dfrac{l}{2(\pi+4)}\times\dfrac{(\pi+4)}{l}=\dfrac{1}{2}$

ដូចនេះ ផលធៀបជ្រុងការេនិងកាំរង្វង់ស្មើនឹង $\boxed{\dfrac{1}{2}}$

3- ប្រអប់ត្រង់មួយមានគម្របលើនិងបាតក្រោមជាការេ ហើយមាន មាឌ$250cm^3$ ។សម្ភារៈសម្រាប់ធ្វើគម្របលើនិងបាតក្រោមតម្លៃ 2000៛$/cm^2$ ហើយសម្ភារៈសម្រាប់ធ្វើផ្ទៃខាងតម្លៃ1000៛$/cm^2$ កំណត់រង្វាស់ទ្រនុងនៃប្រអប់ដើម្បីឱ្យប្រាក់ចំណាយលើសម្ភារៈ មានតម្លៃអប្បបរមា រួចគណនាប្រាក់ចំណាយអប្បបរមានោះ ។

សំរាយបញ្ជាក់ :



តាង $x; y$ ជាវិមាត្រនៃប្រអប់ :

យើងមាន មាឌនៃប្រអប់កំណត់ដោយ :

$$V = x^2 y = 250 \Rightarrow y = \frac{250}{x^2}$$

តាង S ជាផ្ទៃសរុប យើងបាន :

$$S = 2x^2 + 4xy = 2x^2 + 4x\left(\frac{250}{x^2}\right) = 2x^2 + \frac{1000}{x}$$

$$\Rightarrow S' = 4x - \frac{1000}{x^2} = \frac{4\left(x^3 - 250\right)}{x^2}$$

ដោយ $S' = 0 \Rightarrow x^3 - 250 = 0 \Rightarrow x = \sqrt[3]{250} = 6.3$

តារាងអថេរភាព :

x	0		6.3	
S'		$-$	0	$+$
S		↘		↗

ផ្ទៃក្រឡាមានតម្លៃ

អប្បបរមាត្រង់ $x = 6.3$ ហើយ $\Rightarrow y = \frac{250}{(6.3)^2} = 6.3$

យើងបាន ប្រាក់ចំណាយសរុប :

$$C = 2(6.3)^2 \times 2000 + 4(6.3)^2 \times 1000 = 317520 \text{ ៛}$$

ដូចនេះ ប្រាក់ចំណាយសរុប $\boxed{317520}$ ៛

ទូកមួយចាប់ផ្ដើមចេញដំណើរពីចំណុចត្រួតពិនិត្យ ដែលរយៈពេល t នាទីក្រោយមក ទូកនោះមានចម្ងាយពីចំណុចត្រួតពិនិត្យដែល គាងដោយអនុគមន៍ $S(t) = t^3 + 60t$ គិតជាម៉ែត្រ ។

ក. រកល្បឿននៃទូកត្រង់ចំណុចចាប់ផ្ដើម

ខ. កំណត់ល្បឿននៃទូកខណៈ $t = 3mn$ ។

សំរាយបញ្ជាក់ :

ក. រកល្បឿននៃទូកត្រង់ចំណុចចាប់ផ្ដើម

ដោយ $S(t) = t^3 + 60t$ នោះយើងបាន :

$$V(x) = \frac{ds}{dt} = 3t^2 + 60$$

ល្បឿននៃទូកត្រង់ចំណុចចាប់ផ្ដើមត្រូវនឹងខណៈ $t = 0$

$$\Rightarrow V(0) = 60m/mn$$

ខ. កំណត់ល្បឿននៃទូកខណៈ $t = 3mn$

ដោយ $V(x) = \frac{ds}{dt} = 3t^2 + 60$ នោះចំពោះ $t = 3mn$ គេបាន :

$$V(3) = 3(3)^2 + 60 = 87m/mn$$

ដូចនេះ ល្បឿននៃទូកខណៈ $t = 3mn$ គឺ $\boxed{V(3) = 87m/mn}$

5-រថយន្តមួយ ចាប់ផ្ដើមចេញដំណើរដោយល្បឿនដែលតាងដោយអនុគមន៍ $V(t) = \frac{100t}{t+15}\ m/s$ ។ កំណត់សំទុះនៃរថយន្តខណៈពេលៈ

ក. $t=5s$ ខ. $t=10s$ គ. $t=20s$ ។

សំរាយបញ្ជាក់ :

កំណត់សំទុះនៃរថយន្តនៅខណៈនីមួយៗ :

យើងមាន : $V(t)=\dfrac{100t}{t+15}\,m/s$

$$\Rightarrow a(t)=\frac{dv}{dt}=\frac{100(t+15)-100t}{(t+15)^2}=\frac{1500}{(t+15)^2}$$

កំណត់សំទុះនៃរថយន្តខណៈពេល:

ក. ចំពោះ $t=5s$ នោះយើងបាន :

$$a(5)=\frac{1500}{20^2}=3.75m/s^2$$

ខ. ចំពោះ $t=10s$

$$a(10)=\frac{1500}{25^2}=2.4m/s^2$$

គ. ចំពោះ $t=20s$ នោះ $a(20)=\dfrac{1500}{35^2}=1.22m/s^2$

6-រថយន្តមួយផ្តើមចេញដំណើរដោយល្បឿនដែល t វិនាទីតាងដោយអនុគមន៍ $V(t)=\dfrac{22t}{0.44t+3.3}$ ម៉ែត្រក្នុងមួយវិនាទី ។

កំណត់សំទុះ របស់រថយន្តនៅខណៈពេល:

ក. 5វិនាទី ខ. 10វិនាទី គ. 20វិនាទី ឃ. 30វិនាទី ។

ដំណោះស្រាយ :

កំណត់សំទុះ របស់រថយន្តនៅខណៈពេលនីមួយៗ :

យើងមាន : $V(t)=\dfrac{22t}{0.44t+3.3}$ យើងបាន សំទុះកំណត់ដោយ

$$a(t)=\frac{22(0.44t+3.3)-22t\times 0.44}{(0.44t+3.3)^2}=\frac{72.6}{(0.44t+3.3)^2}$$

ក. ចំពោះ t= 5វិនាទី យើងបាន :

$$a(5)=\frac{72.6}{(0.44\times 5+3.3)^2}=2.4m/s^2$$

ខ. ចំពោះ t=10វិនាទី :

$$a(10)=\frac{72.6}{(0.44\times 10+3.3)^2}=1.22m/s^2$$

គ. ចំពោះ t= 20វិនាទី :

$$a(20)=\frac{72.6}{(0.44\times 20+3.3)^2}=0.49m/s^2$$

ឃ.ចំពោះ t=30វិនាទី :

$$a(30)=\frac{72.6}{(0.44\times 30+3.3)^2}=0.26m/s^2$$

លំហាត់ជំពូក២

1- គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍:

ក. $f(x)=(7x+2)^2$ ខ. $g(x)=\left(x^2-8\right)^{-1}$

គ. $y=\left(4x^2+9x-3\right)^3$ ឃ. $f(x)=\sqrt[3]{5x^3-4}$

ង. $g(x)=x\left(4-3x^2\right)^2$ ច. $y=\dfrac{\sqrt{5x-2}}{x^3}$ ។

សំរាយបញ្ជាក់ :

ក. $f(x)=(7x+2)^2 \Rightarrow f'(x)=14(7x+2)$

ខ. $g(x)=\left(x^2-8\right)^{-1} \Rightarrow g'(x)=-2x\left(x^2-8\right)^{-2}$

គ. $y=\left(4x^2+9x-3\right)^3 \Rightarrow y'=3(8x+9)\left(4x^2+9x-3\right)^2$

ឃ. $f(x)=\sqrt[3]{5x^3-4}=\left(5x^3-4\right)^{\frac{1}{3}}$

$$\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{3}\times 15x^2\times\left(5x^3-4\right)^{-\frac{2}{3}}=5x^2\left(5x^3-4\right)^{-\frac{2}{3}}$$

ង: $g(x)=x\left(4-3x^2\right)^2$

$$\Rightarrow g'(x)=\left(4-3x^2\right)^2+2x\times(-6x)\times\left(4-3x^2\right)$$

$$=\left(4-3x^2\right)\left(4-3x^2-12x^2\right)$$

$$=\left(4-3x^2\right)\left(4-15x^2\right)$$

ច. $y=\frac{\sqrt{5x-2}}{x^3}$ នោះយើងបាន :

$$\Rightarrow y'=\frac{\left(\sqrt{5x-2}\right)'x^3-3x^2\left(\sqrt{5x-2}\right)}{x^6}$$

$$=\frac{\frac{5}{2\sqrt{5x-2}}\times x^3-3x^2\left(\sqrt{5x-2}\right)}{x^6}$$

$$=\frac{5x-6(5x-2)}{2x^4\sqrt{5x-2}}=\frac{-25x+12}{2x^4\sqrt{5x-2}}$$

ដូចនេះ $\boxed{y'=\frac{-25x+12}{2x^4\sqrt{5x-2}}}$

2- គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍:

ក. $y=x^3\sin 2x$

ខ. $y=3x^3-x\cos 3x$

គ. $y=-x\cos\left(4-3x^2\right)$

ឃ. $f(x)=\frac{\sin^2 3x}{x^2}$

ង. $f(x)=\frac{\tan 2x}{x^2-1}$

ច. $f(x)=\cos\left(\sin^2 3x\right)$

សំរាយបញ្ជាក់ :

គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍:

យើងមាន :

ក. $y = x^3 \sin 2x \Rightarrow y' = 3x^2 \sin 2x + 2x^3 \cos 2x$

ខ. $y = 3x^3 - x\cos 3x \Rightarrow y' = 9x^2 - \cos 3x + 3x\sin 3x$

គ. $y = -x\cos\left(4-3x^2\right)$

$\Rightarrow y' = -\cos\left(4-3x^2\right) - 6x^2 \sin\left(4-3x^2\right)$

ឃ. $f(x) = \dfrac{\sin^2 3x}{x^2}$ នោះយើងបាន :

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{2.3.x^2.\cos 3x \sin 3x - 2x.\sin^2 3x}{x^4}$$

$$= \frac{2.3.x.\cos 3x \sin 3x - 2\sin^2 3x}{x^3}$$

$$= \frac{2\sin 3x(3\cos 3x - \sin 3x)}{x^3}$$

ង. $f(x) = \dfrac{\tan 2x}{x^2-1}$ នោះយើងបាន :

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{2\left(1+\tan^2 2x\right)\left(x^2-1\right) - 2x\tan 2x}{\left(x^2-1\right)^2}$$

ច. $f(x) = \cos\left(\sin^2 3x\right)$

$\Rightarrow y' = -6\cos 3x \sin 3x \sin\left(\sin^2 3x\right)$

3- គណនាដេរីវេទី 2 នៃអនុគមន៍ :

ក. $f(x)=x^3-4x^2-x+8$

ខ. $f(x)=x^4+6x^{\frac{3}{2}}-9$

គ. $f(x)=\left(2x^2+7\right)^{\frac{2}{3}}$

ឃ. $f(x)=5x+\dfrac{2}{x+1}$

ង. $f(x)=x^2-\dfrac{14}{x-2}$

ច. $f(x)=\dfrac{7x+2}{x^3}$

សំរាយបញ្ជាក់ :

គណនាដេរីវេទី 2 នៃអនុគមន៍ :

យើងមាន :

ក. $f(x)=x^3-4x^2-x+8 \Rightarrow f'(x)=3x^2-8x$

នោះ $f''(x)=6x-8$

ដូចនេះ $\boxed{f''(x)=6x-8}$

ខ. $f(x)=x^4+6x^{\frac{3}{2}}-9 \Rightarrow f'(x)=4x^3+9x^{\frac{1}{2}}$

នោះ $f''(x)=12x^2+\dfrac{9}{2}x^{-\frac{1}{2}}$

ដូចនេះ $\boxed{f''(x)=12x^2+\dfrac{9}{2}x^{-\frac{1}{2}}}$

គ. $f(x)=\left(2x^2+7\right)^{\frac{2}{3}} \Rightarrow f'(x)=\dfrac{8}{3}x\left(2x^2+7\right)^{-\frac{1}{3}}$

នោះ យើងបាន :

$$f''(x)=\frac{8}{3}\left[\left(2x^2+7\right)^{-\frac{1}{3}}-\frac{4}{3}x^2\left(2x^2+7\right)^{-\frac{4}{3}}\right]$$

ដូចនេះ $\boxed{f''(x)=\frac{8\left(2x^2+7\right)^{-\frac{1}{3}}}{3}-\frac{32\left(2x^2+7\right)^{-\frac{4}{3}}}{9}}$

ឃ. $f(x)=5x+\frac{2}{x+1}\Rightarrow f'(x)=5-\frac{2}{(x+1)^2}$

នោះយើងបាន : $\boxed{f''(x)=\frac{4}{(x+1)^3}}$

ង. $f(x)=x^2-\frac{14}{x-2}\Rightarrow f'(x)=2x+\frac{14}{(x-2)^2}$

នោះ យើងបាន : $\boxed{f''(x)=2-\frac{28}{(x-2)^3}}$

ច. $f(x)=\frac{7x+2}{x^3}=\frac{7}{x^2}+\frac{2}{x^3}\Rightarrow f'(x)=-\frac{14}{x^3}-\frac{6}{x^4}$

នោះយើងបាន : $\boxed{f''(x)=\frac{42}{x^4}+\frac{24}{x^5}}$

4- រក y'ជាអនុគមន៍នៃ x និង y:

ក. $x^3+y^3=5$ ខ. $xy^2=-1$

គ. $x-\sqrt{y}=2$ ឃ. $2y+\sqrt{xy}=5x^2$

ង. $x^2+4(y+3)^2=9$ ច. $x^3y+xy^3=3x^3$

សំរាយបញ្ជាក់ :

រក y' ជាអនុគមន៍នៃ x និង y:

ក. $x^3+y^3=5 \Leftrightarrow 3x^2+3y'y^2=0 \Rightarrow y'=\dfrac{-3x^2}{y^2}$

ខ. $xy^2=-1 \Leftrightarrow y^2+2xy'y=0 \Rightarrow y'=\dfrac{-y}{2x}$

គ. $x-\sqrt{y}=2 \Leftrightarrow 1-\dfrac{y'}{2\sqrt{y}}=0 \Rightarrow y'=2\sqrt{y}=2(x-2)$

ព្រោះ $x-\sqrt{y}=2 \Rightarrow \sqrt{y}=x-2$

ឃ. $2y+\sqrt{xy}=5x^2$ នោះយើងបាន :

$$2y'+\frac{(xy)'}{2\sqrt{xy}}=10x$$

$$2y'+\frac{y+y'x}{2\sqrt{xy}}=10 \Leftrightarrow \frac{4y'\sqrt{xy}+y+y'x}{2\sqrt{xy}}=10$$

$$y'(4\sqrt{xy}+x)=20\sqrt{xy}-y \Rightarrow y'=\frac{20x\sqrt{xy}-y}{4\sqrt{xy}+x}$$

ង. $x^2+4(y+3)^2=9 \Rightarrow y'=\dfrac{-x}{4y+12}$

ច. $x^3y+xy^3=3x^3 \Rightarrow y'=\dfrac{9x^2-y^3-3x^2y}{x^3+3y^2x}$

5- រក y' និង y''ជាអនុគមន៍ xនិង y:

ក. $x^2+xy=5$ ខ. $x^2y^2-2x=3$

គ. $x^2-y^2=16$ ឃ. $1-xy=x-y$

ង. $y^2=x^3$ ច. $y^2=4x$

សំរាយបញ្ជាក់ :

ក. $x^2+xy=5 \Rightarrow y'=\dfrac{-2x-y}{x}; y''=\dfrac{2x+2y}{x^2}$

ខ. $x^2y^2-2x=3$

$\Rightarrow y'=\dfrac{1-xy^2}{x^2y}; y''=-\dfrac{2x^4y^4-2x^3y^2-x^2}{\left(x^2y\right)^3}$

គ. $x^2-y^2=16 \quad \Rightarrow y'=\dfrac{x}{y}; y''=\dfrac{y^2-x^2}{y^3}$

ឃ. $1-xy=x-y \Rightarrow y'=\dfrac{1+y}{1-x}; y''=\dfrac{2+2y}{(1-x)^2}$

ង. $y^2=x^3 \Rightarrow y'=\dfrac{3x^2}{2y}; y''=\dfrac{12xy^2-9x^4}{4y^3}$

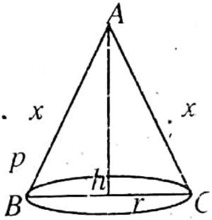
ច. $y^2=4x \Rightarrow y'=\dfrac{2}{y}; y''=\dfrac{4}{y^3}$

6. ត្រីកោណABC មួយមានបរិមាត្រ $2p$ វិលជុំវិញកម្ពស់ដែលគូស

ចេញពីកំពូល A កំណត់បានសូលីតមួយមានមាឌធំបំផុត ។

គណនារង្វាស់ជ្រុងនិងកម្ពស់នៃត្រីកោណសមបាតនោះ ។

សំរាយបញ្ជាក់ :



តាង ABC ជាត្រីកោណសមបាត

$AB = AC = x; BC = 2r$

យើងបាន $x + x + 2r = 2p \Rightarrow x + r = p$

$\Rightarrow r = p - x$

• $[AH]$ ជាកម្ពស់នៃត្រីកោណសមបាត ABC យើងបាន :

$h = \sqrt{x^2 - (p-x)^2} = \sqrt{2px - p^2}; 2px - p^2 \geq 0 \Rightarrow x \geq \frac{p}{2}$

មាឌនៃសូលីតជាកោណដែលមានផ្ទៃបាត $\pi r^2 = \pi (p-x)^2$

និងកម្ពស់ h គឺ : $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi\sqrt{2px - p^2} \times (p-x)$

$$= \frac{\pi\sqrt{p}}{3}\sqrt{2x-p}\,(p-x)^2$$

$$\Rightarrow V' = \frac{\pi\sqrt{p}}{3}\left[-2(p-x)\sqrt{2x-p} + \frac{(p-x)^2}{\sqrt{2x-p}}\right]$$

$$= \frac{\pi\sqrt{p}}{3}\left(\frac{5x^2 - 8px + 3p^2}{\sqrt{2x-p}}\right)$$

$$V' = 0 \Rightarrow 5x^2 - 8px + 3p^2 = 0 \Rightarrow x = \frac{3p}{5}; x = p$$

តារាងសញ្ញា :

x	$\frac{p}{2}$		$\frac{3p}{5}$		p
V'		$+$	0	$-$	
V		$\nearrow$		$\searrow$	

យើងឃើញថា V មានតម្លៃអតិបរមាត្រង់ $x = \frac{3p}{5}$ យើងបាន :

$$r = \frac{2p}{5}; BC = \frac{4p}{5}; h = \sqrt{2p \times \frac{3p}{5} - p^2} = \sqrt{\frac{p^2}{5}} = \frac{p\sqrt{5}}{5}$$

ដូចនេះ $\boxed{AB = AC = \frac{3p}{5}; BC = \frac{4p}{5}; AH = \frac{p\sqrt{5}}{5}}$

7- រថយន្តមួយចាប់ផ្តើមចេញដំណើរ ពីចំណុចត្រួតពិនិត្យមួយ ។ នៅខណៈ t វិនាទីរថយន្តនោះឃ្លាតពីចំនុចត្រួតពិនិត្យ ដែលតាងដោយអនុគមន៍ចម្ងាយចរ $S(t) = 4.4t^2$ គិតជាម៉ែត្រហើយ $0 \le t \le 10$

ប្រើអនុគមន៍ខាងលើ រួចបំពេញតារាងខាងក្រោម:

t	0	2	4	6	8	10
$S(t)$						
$V(t)$						
$a(t)$						

សំរាយបញ្ជាក់ :

បំពេញតារាងដោយប្រើ $S(t)=4.4t^2$ យើងបាន :

$v(t)=8.8t$ និង $a(t)=8.8$

t	0	2	4	6	8	10
$S(t)$	0	17.6	70.4	158.4	281.6	440
$V(t)$	0	17.6	35.2	52.8	70.4	88
$a(t)$	8.8	8.8	8.8	8.8	8.8	8.8

ជំពូក ៣ **សិក្សាអថេរភាព និងសង់ក្រាប**

មេរៀនទី១ : អនុគមន៍សនិទាន

លំហាត់ :

1- រកអាស៊ីមតូតនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម:

ក. $y=\dfrac{x^2+4x+1}{x+2}$ ខ. $y=\dfrac{x^2+3x+1}{x^2-1}$

គ. $y=-x+3+\dfrac{3}{x-1}$

សំរាយបញ្ជាក់ :

រកអាស៊ីមតូតនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម:

ក. យើងមាន : $y=\dfrac{x^2+4x+1}{x+2}=x+2-\dfrac{3}{x+2}$

ដោយ $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{3}{x+2}=0$ នោះយើងបាន បន្ទាត់ $y=x+2$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃខ្សែកោង ។

ម្យ៉ាងទៀត $\lim\limits_{x\to-2}f(x)=\infty$ នោះ $x=-2$ ជាអាស៊ីមតូតឈរ

ខ. $y=\dfrac{x^2+3x+1}{x^2-1}$

យើងមាន $\lim\limits_{x\to\pm1}f(x)=\lim\limits_{x\to\pm1}\dfrac{x^2+3x+1}{x^2-1}=\infty$

នោះយើងបានបន្ទាត់ $x=\pm 1$ ជាអាស៊ីមតូតឈរនៃខ្សែកោង (C) ·

ម្យ៉ាងទៀត $\lim_{x\to\infty} f(x)=1$ នោះបន្ទាត់ $y=1$ ជាអសីុមតូតដេក

គ. $y=-x+3+\dfrac{3}{x-1}$

យើងបាន $\lim_{x\to 1} f(x)=\infty$ នោះ $x=1$ ជាអសីុមតូតឈរក្រាប (C)

ម្យ៉ាងទៀត $\lim_{x\to\infty}\left[f(x)-(-x+3)\right]=0$ នោះ $y=-x+3$

ជាអសីុមតូតទ្រេត ។

2- សិក្សាអថេរភាព និងសង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម:

ក. $y=\dfrac{x^2-2x+6}{2x+2}$ ខ. $y=\dfrac{x^2-4x+3}{x^2-3x+2}$

គ. $y=\dfrac{x^2-9}{4-x^2}$

សំរាយបញ្ជាក់ :

សិក្សាអថេរភាព និងសង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម:

ក. យើងមាន : $y=\dfrac{x^2-2x+6}{2x+2}=\dfrac{x}{2}-\dfrac{3}{2}+\dfrac{9}{2x+2}$

+ **ដែនកំណត់ :** $D=IR-\{-1\}$

+ **ទិសដៅអថេរភាព :**

- ដេរីវេទី១ : $y'=\frac{(2x-2)(2x+2)-2(x^2-2x+6)}{(2x+2)^2}$

$$y'=\frac{4x^2-4-2x^2+4x-12}{(2x+2)^2}=\frac{2(x^2+2x-8)}{(2x+2)^2}$$

$$y'=0\Rightarrow x^2+2x-8=0\Rightarrow x=2;x=-4$$

សញ្ញាដេរីវេ :

x	$-\infty$	-4		-1		2	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	−	‖	−	0	+

+ចំណុចបរមា :

- អនុគមន៏ f មានអតិបរមានៅត្រង់ $x=-4$ ដែល $f(-4)=-5$

- អនុគមន៏ f មានអប្បបរមានៅត្រង់ $x=2$ ដែល $f(2)=1$

+ លីមីត :

$$\lim_{x\to\pm\infty}f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2-2x+6}{2x+2}=\pm\infty$$

$$\lim_{x\to-1}f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2-2x+6}{2x+2}=\pm\infty$$

+ អាស៊ីមតូត :

ដោយ $\lim_{x\to-1}f(x)=\pm\infty$ យើងបានបន្ទាត់ $x=-1$ ជាអាស៊ីមតូត

ឈរនៃក្រាប (C) ។

ម្យ៉ាងទៀត $\lim_{x\to\pm\infty}\left[f(x)-\left(\frac{x}{2}-\frac{3}{2}\right)\right]=0$ នោះ $y=\frac{x}{2}-\frac{3}{2}$

ជាអាស៊ីមតូត ទ្រេត ។

តារាងអថេរភាព :

x	$-\infty$		-4		-1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	||	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	-5	↘	$-\infty$ || $+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$

\+ **សំណង់ខ្សែកោង :**

\- ចំណុចប្រសព្វរវាងក្រាបនឹងអ័ក្ស$(x'ox)$:

$\Rightarrow y=0\Rightarrow x^2-2x+6=0;\Delta'=1-6=-5<0$

សមីការគ្មានឬស បញ្ជាក់ថាខ្សែកោងមិនកាត់អក្សអាប់ស៊ីសទេ ។

\- ចំណុចប្រសព្វរវាងក្រាបនឹងអ័ក្ស$(y'oy)\Rightarrow x=0;y=3$

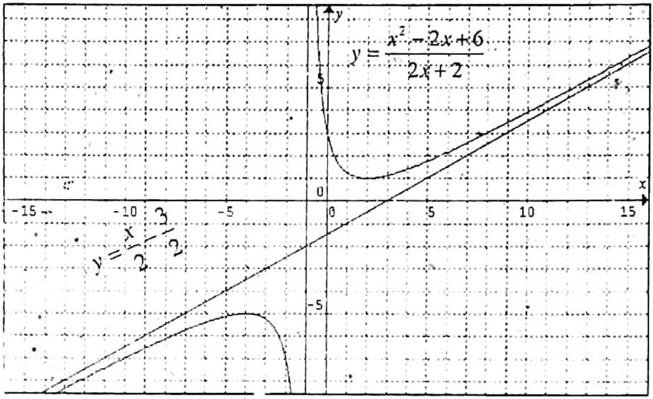
\- **ផ្ចិតឆ្លុះ:** ជាចំណុចប្រសព្វរវាងអាស៊ីមតូតឈរ និងអាស៊ីមតូត

ទ្រេត ដែលកំណត់ដោយ $I(-1,-2)$

តាមរូបមន្ត $f(2a-x)+f(x)=2b$ នោះយើងបាន :

$f(-2-x)+f(x)=-4$ នោះចំណុច$I(-1,-2)$ជាផ្ចិតឆ្លុះ

នៃក្រាប ។ **សង់ក្រាប :**



៣. បើ $x \neq 1$: $y=\frac{x^2-4x+3}{x^2-3x+2}=\frac{(x-1)(x-3)}{(x-1)(x-2)}=\frac{x-3}{x-2}$

- ដែនកំណត់ : $D = IR-\{1;2\}$

- **ទិសដៅអថេរភាព :**

-**ដេរីវេទី១ :** $y'=\frac{1}{(x-2)^2}>0\ ;\forall x \in D_f$

ដោយ $y'>0 \forall x \in D$ នោះបញ្ជាក់ថា f ជាអនុគមន៍កើនជានិច្ច ហើយគ្មានចំនុចបរមាទេ ។

- **លីមីត និង អាស៊ីមតូត :**

$\lim_{x\to 1} f(x)=\infty ; \lim_{x\to 2} f(x)=\infty$ នោះបន្ទាត់ $x=1$ និង $x=2$ ជា

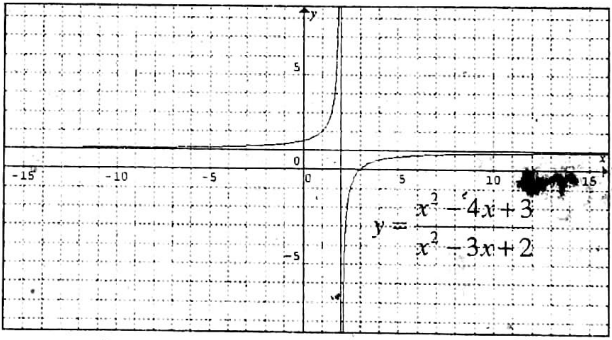
អាស៊ីមតូតឈរ ។

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=1$ នោះបន្ទាត់ $y=1$ ជាអាស៊ីមតូតដេក ។

តារាងអថេរភាព :

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
y'		$+$	‖	$+$	‖	$+$	
y	1	↗ $+\infty$	‖ $-\infty$	↗ $+\infty$	‖ $-\infty$	↗	1

សង់ក្រាប :



គ. $y=\dfrac{x^2-9}{4-x^2}$

+ **ដែនកំណត់ :** $D=IR-\{-2;2\}$

+ **ទិសដៅអថេរភាព :**

-ដេរីវេ $y' = \dfrac{2x(4-x^2)+2x(x^2-9)}{(4-x^2)^2} = \dfrac{-10x}{(4-x^2)^2}$

$\Rightarrow y' = 0 \Rightarrow x = 0; y = -\dfrac{9}{4}$

x	$-\infty$	-2		0		2	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	‖	$+$	0	$-$	‖	$-$

ចំនុចបរមា :

- អនុគមន៍ f អតិបរមានៅត្រង់ $x=0$ ដែល $f(0) = -\dfrac{9}{4}$

- លីមីត និង អាស៊ីមតូត :

$\lim\limits_{x\to -2} f(x) = \infty; \lim\limits_{x\to 2} f(x) = \infty$ នោះបន្ទាត់ $x=-2$ និង

$x = 2$ ជាអាស៊ីមតូតឈរ ។

$\lim\limits_{x\to \pm\infty} f(x) = -1$ នោះបន្ទាត់ $y=-1$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេត ។

តារាងអថេរភាព :

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$+$	0	$-$	‖	$-$	
$f(x)$	1 ↗		$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$-\dfrac{9}{4}$	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	1

+ សំណង់ក្រាប :

- ចំណុចប្រសព្វរវាងក្រាបនឹងអ័ក្ស$(x'ox)$: $y=0 \Rightarrow x = \pm 3$

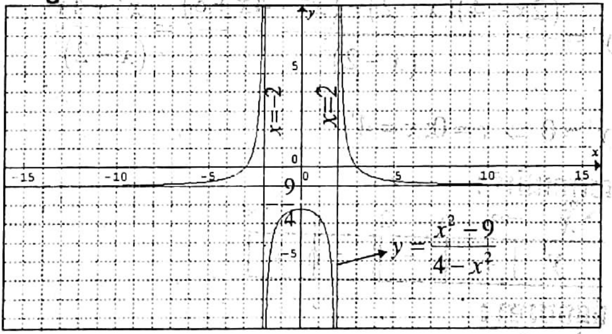
- ចំណុចប្រសព្វរវាងក្រាបនឹងអ័ក្ស$(y'oy)$: $x=0 \Rightarrow y=-\dfrac{9}{4}$

ដោយ $f(-x)=\dfrac{(-x)^2-9}{4-(-x)^2}=\dfrac{x^2-9}{4-x^2}=f(x)$

ដោយ $f(-x)=f(x)$ នោះ $f(x)$ ជាអនុគមន៍គូនាំអោយ $f(x)$

មានអ័ក្ស $(y'y)$ ជាអ័ក្សឆ្លុះ ។

សង់ក្រាប :



3- **ក.** សិក្សាអថេរភាពនិងសង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ $y=\dfrac{x^2-4x+8}{x-2}$

ខ. សិក្សាទៅតាមតម្លៃ m អត្ថិភាព និងសញ្ញាឫសសមីការ :

$x^2-(m+4)x+2m+8=0$ ដោយប្រើក្រាបតាង y ។

សំរាយបញ្ជាក់ :

ក. សិក្សាអថេរភាពនិងសង់ក្រាបនៃអនុគមន៍

យើងមាន : $y=\dfrac{x^2-4x+8}{x-2}$ មាន :

+ដែនកំណត់ : $D=IR-\{2\}$

+ទិសដៅអថេរភាព :

- ដេរីវេទី១ :

$$y'=\frac{(2x-4)(x-2)-\left(x^2-4x+8\right)}{(x-2)^2}=\frac{x^2-4x}{(x-2)^2}$$

$y'=0\Rightarrow x=0;x=4$

សញ្ញាដេរីវេ :

x	$-\infty$		0		2		4		$+\infty$
y'		+	0	−	‖	−	0	+	

ចំនុចបរមា :

- អនុគមន៍ f មានអតិបរមានៅត្រង់ $x=0$ ដែល $f(0)=-4$

- អនុគមន៍ f មានអប្បបរមានៅត្រង់ $x=4$ ដែល $f(4)=4$

+លីមីត និងអាស៊ីមតូត :

$\lim\limits_{x\to 2} f(x)=\infty$ នោះយើងបាន បន្ទាត់ $x=2$ ជាអាស៊ីមតូតឈរ

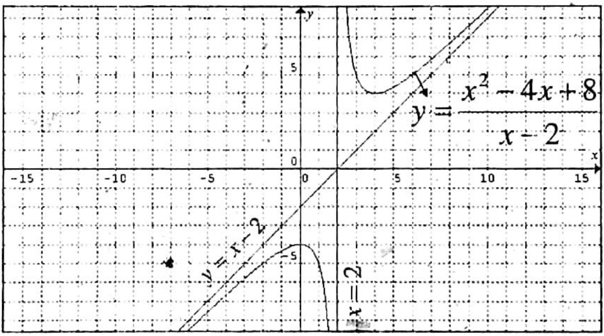
ម្យ៉ាងទៀត $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left[f(x)-(x-2)\right]=0$ នោះ យើងបានបន្ទាត់

$y=x-2$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេត

តារាងអថេរភាព :

x	$-\infty$		0		2		4		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$ ↗		-4	↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	4	↗ $+\infty$	

សង់ក្រាប :



ខ. សិក្សាទៅតាមតម្លៃ m អត្ថិភាព និងសញ្ញាឫសសមីការ :

$x^2-(m+4)x+2m+8=0$ ដោយប្រើក្រាបតាង y :

យើងមាន : $x^2-(m+4)x+2m+8=0 \Rightarrow \dfrac{x^2-4x+8}{x-2}=m$

ជាសមីការអាប់ស៊ីសរវាងក្រាបនិងបន្ទាត់ដេក $y=m$ ។

តាមក្រាបយើងបាន :

-បើ $m<-4$ សមីការមានឫសពីរសញ្ញាផ្ទុយគ្នា $x_1<0<x_2$

-បើ $m=-4$ សមីការមានឫសឌុប $x_1=x_2=0$

-បើ $-4<m<4$ សមីការគ្មានឫស

-បើ $m=4$ សមីការមានឫសឌុប $x_1=x_2=4$

-បើ $m>4$ សមីការមានឫសពីរសញ្ញាវិជ្ជមាន $0<x_1<x_2$

4- កំណត់តម្លៃ a ដើម្បីឱ្យអនុគមន៍ $y=\dfrac{x^2-2ax+3a^2}{x-2a}$ កើនលើចន្លោះ $(1;+\infty)$ ។

សំរាយបញ្ជាក់ :

កំណត់តម្លៃ a

យើងមាន : $y=\dfrac{x^2-2ax+3a^2}{x-2a}$ នោះយើងបាន :

$$y'=\frac{(2x-2a)(x-2a)-\left(x^2-2ax+3a^2\right)}{(x-2a)^2}=\frac{x^2-4ax+a^2}{(x-2a)^2}$$

ដើម្បីអនុគមន៍ y ឱ្យកើនលើចន្លោះ $(1;+\infty)$ លុះត្រាតែ $y'>0$

ដោយ $y'=0\Leftrightarrow f'(x)=x^2-4ax+a^2=0$

$\Delta' = 4a^2 - a^2 = 3a^2 \geq 0$

$x_1 = 2a + a\sqrt{3}; x_2 = 2a - a\sqrt{3}$

- បើ $a \geq 0 \Rightarrow x_1 \geq x_2$

x		x_2		x_1	
$f'(x)$	+	0	−	0	+

យើងបាន y កើនចំពោះ $1 \leq x$ លុះត្រាតែ :

$2a + a\sqrt{3} \leq 1 \Rightarrow a \leq \frac{1}{2+\sqrt{3}} = 2 - \sqrt{3}$ និង $a \geq 0$ នោះ

$a \in \left[0, 2-\sqrt{3}\right]$ (1)

- បើ $a < 0 \Rightarrow x_1 < x_2$

x		x_1		x_2	
$f'(x)$	+	0	−	0	+

យើងបាន y កើនចំពោះ $1 \leq x$ លុះត្រាតែ

$2a - a\sqrt{3} \leq 1 \Rightarrow a \leq \frac{1}{2-\sqrt{3}} = 2 + \sqrt{3}$ និង $a < 0$ នោះ

$a \in (-\infty; 0)$. (2)

យក $(1) \cup (2)$ យើងបាន $\boxed{a \leq 2 - \sqrt{3}}$

5- គេឱ្យអនុគមន៍ : $y = \frac{mx^2 + 3mx + 2m + 1}{x + 2}$ ។

ក. ស្រាយបញ្ជាក់ថា អាស៊ីមតូតទ្រេត កាត់តាមចំណុចនឹងមួយ

ចំពោះគ្រប់ប៉ារ៉ាម៉ែត m ដែលត្រូវកំណត់កូអរដោនេ ។

ខ. រកតម្លៃ m ដើម្បីឱ្យបន្ទាត់ $y = m$ ប៉ះនឹងក្រាប ។

គ. សិក្សាអថេរភាព និងសង់ក្រាបចំពោះ $m = -1$ ។

សំរាយបញ្ជាក់ :

ក. ស្រាយបញ្ជាក់ថា អាស៊ីមតូតទ្រេត កាត់តាមចំណុចនឹងមួយចំពោះគ្រប់ប៉ារ៉ាម៉ែត m ដែលត្រូវកំណត់កូអរដោនេ :

យើងមាន $y = \dfrac{mx^2 + 3mx + 2m + 1}{x+2} = mx + m + \dfrac{1}{x+2}$

ដោយ $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x+2} = 0$ នោះយើងបានបន្ទាត់ $y = mx + m$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃខ្សែកោង ។ ផ្ទៀងផ្ទាត់គ្រប់តម្លៃ m យើងបាន :

$$y = mx + m \Leftrightarrow m(x+1) - y = 0$$

$$\begin{cases} x+1=0 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow x=-1; y=0$$

ដូចនេះ $\boxed{x=-1; y=0}$

ខ. រកតម្លៃ m ដើម្បីឱ្យបន្ទាត់ $y = m$ ប៉ះនឹងក្រាប :

សមីការអាប់ស៊ីសរវាងក្រាបនឹងបន្ទាត់ $y = m$ កំណត់ដោយ:

$$\frac{mx^2+3mx+2m+1}{x+2}=m \Rightarrow mx^2+3mx+2m+1=xm+2m$$

$\Rightarrow mx^2+2mx+1=0 \Leftrightarrow \Delta'=m^2-m$

បន្ទាត់ប៉ះនឹងក្រាបលុះត្រាតែ :

$\Delta'=0 \Rightarrow m(m-1)=0 \Rightarrow m=0; m=1$

តែ $m=0 \Rightarrow y=\dfrac{1}{x+2}$ បើ $y=0 \Rightarrow \dfrac{1}{x+2}=0$ គ្មានឫស

ដូចនេះ $\boxed{m=1}$

គ. សិក្សាអថេរភាព និងសង់ក្រាបចំពោះ $m=-1$

ចំពោះ $m=-1 \Rightarrow y=\dfrac{-x^2-3x-1}{x+2}=-x-1+\dfrac{1}{x+2}$

+ដែនកំណត់ : $D=IR-\{-2\}$

+ទិសដៅអថេរភាព :

-ដេរីវេ $y'=\dfrac{(-2x-3)(x+2)-(-x^2-3x-1)}{(x+2)^2}=\dfrac{-x^2-4x-5}{(x+2)^2}$

$y'=0 \Rightarrow -x^2-4x-5=0; \Delta'=4-5=-1<0$ គ្មានឫស

នោះយើងបានអនុគមន៍ f ចុះជានិច្ច និងគ្មានចំនុចបរមាទេ ។

+លីមីត និងអាស៊ីមតូត :

$\lim\limits_{x\to -2} f(x) = \lim\limits_{x\to -2}\dfrac{-x^2-3x-1}{x+2} = \infty$ នោះ $x = -2$ ជាអាស៊ីមតូតឈរ ។

ម្យ៉ាងទៀត $\lim\limits_{x\to \pm\infty}\left[f(x)-(-x-1)\right] = 0$ នោះយើងបានបន្ទាត់ $y = -x-1$ ជាអាស៊ីតតូតទ្រេត ។

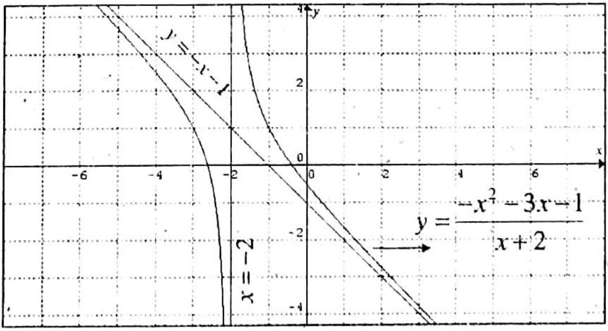
តារាងអថេរភាព :

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
y'		$-$	‖	$-$	
y	$+\infty$ ↘	$-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	$-\infty$

+ សំណង់ខ្សែកោង :

-ចំណុចប្រសព្វរវាងក្រាបនឹងអ័ក្ស $(x'ox)$: $y=0 \Rightarrow x = \dfrac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$

-ចំណុចប្រសព្វរវាងក្រាបនឹងអ័ក្ស $(y'oy)$: $x=0 \Rightarrow y = -\dfrac{1}{2}$



6- គេឱ្យអនុគមន៍ : $y=\frac{x^2+2(m+1)x+2}{x+1}$ ។

ក. ចំពោះ $m=0$ សិក្សាអថេរភាពនិងសង់ក្រាប C របស់អនុគ ខាងលើ រួចរកតម្លៃរបស់ a ដើម្បីឱ្យក្រាប (C) ប៉ះនឹងបះ $(P): y=-x+a$ ។

ខ. រកតម្លៃ m ដើម្បីឱ្យអនុគមន៍កើនលើចន្លោះ $[0;+\infty)$ ។

សំរាយបញ្ជាក់ :

ក.សិក្សាអថេរភាព និងសង់ក្រាប $m=0$

យើងមាន $y=\frac{x^2+2(m+1)x+2}{x+1}$ ចំពោះ $m=0$

យើងបាន $f(x)=\frac{x^2+2x+2}{x+1}=x+1+\frac{1}{x+1}$

+ **ដែនកំណត់ :** $D=IR-\{-1\}$

+ **ទិសដៅអថេរភាព :**

- ដេរីវេទី១ : $f'(x)=\frac{x^2+2x}{(x+1)^2}$

ដោយ $(x+1)^2>0 \forall x\in D_f$ នោះយើងបាន :

$f'(x)=0 \Leftrightarrow x^2+2x=0 \Rightarrow x=0; x=-2$

សញ្ញាដេរីវេ :

x	$-\infty$		-2		-1		0		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	

ចំនុចបរមា :

- អនុគមន៍ f មានអតិបរមានៅត្រង់ $x=-2$ ដែល $f(-2)=-2$

- អនុគមន៍ f មានអប្បបរមានៅត្រង់ $x=0$ ដែល $f(0)=2$

+លីមីត និងអាស៊ីមតូត :

$\lim\limits_{x\to-1} f(x)=\infty$ នោះយើងបានបន្ទាត់ $x=-1$ ជាអាស៊ីមតូតឈរ

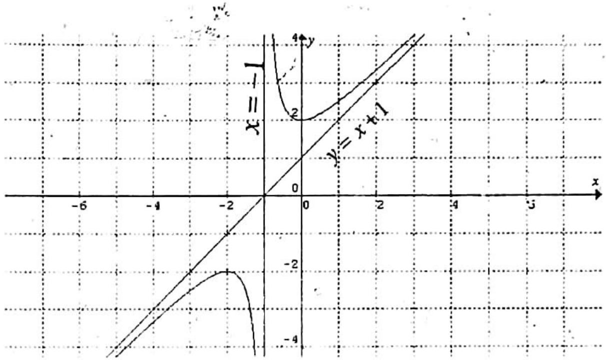
ម្យ៉ាងទៀត $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left[f(x)-(x+1)\right]=0$ នោះ យើងបានបន្ទាត់

$y=x+1$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេត

តារាងអថេរភាព :

x	$-\infty$		-2		-1		0		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	-2	↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	2	↗	$+\infty$

+សង់ក្រាប



+រកតម្លៃរបស់ a :

សមីការអាប់ស៊ីសរវាងក្រាប C និងបន្ទាត់ P កំណត់ដោយៈ

$$\frac{x^2+2x+2}{x+1}=-x^2+a$$

$$\Rightarrow x^3+2x^2+(x+1)(2-a)=0$$

ដើម្បីឱ្យក្រាប C ប៉ះនឹងបន្ទាត់ P លុះត្រាតែសមីការមានឫសឌុប

យើងបាន : $2-a=0 \Rightarrow a=2$

ដូចនេះ យើងបាន : $\boxed{a=2}$

ខ. រកតម្លៃ m ដើម្បីឱ្យអនុគមន៍កើនលើចន្លោះ $[0;+\infty)$

ដោយ $y=\dfrac{x^2+2(m+1)x+2}{x+1}$ នោះយើងបាន :

$$' = \frac{(2x+2m+2)(x+1)-(x^2+2mx+2x+2)}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{2x^2+2x+2mx+2m+2x+2-x^2-2mx-2x-2}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{x^2+2x+2m}{(x+1)^2}$$

ម្បីឱ្យ y កើនលើ $[0,+\infty)$ លុះត្រាតែ $y'>0$ លើចន្លោះ $[0,+\infty)$

បើងបាន : $x^2+2x+2m>0$ មាន $\Delta'=1-2m$

បើ $\Delta'<0 \Rightarrow m>\frac{1}{2}$ នោះ y' យកសញ្ញាតាម $a=1>0$

ាះ $y'>0$ គ្រប់តម្លៃ x (1) ។

បើ $\Delta'>0 \Rightarrow m<\frac{1}{2}$ យើងបានតារាងសញ្ញា :

x		$-1-\sqrt{1-2m}$		$-1+\sqrt{1-2m}$	
y'	+	0	−	0	+

កើនលើ $[0,+\infty)$ នោះ $-1+\sqrt{1-2m}\le 0 \Rightarrow m\ge 0$ (2)

ម (1) និង (2) យើងបាន $m\ge 0$

ដូច្នេះ $\boxed{m\ge 0}$

7- ចូររកតម្លៃបរមាធៀបរបស់អនុគមន៍ $y=\frac{20x^2+10x+3}{3x^2+2x+1}$ ។

សំរាយបញ្ជាក់ :

រកតម្លៃបរមាធៀបរបស់អនុគមន៍

យើងមាន : $y=\frac{20x^2+10x+3}{3x^2+2x+1}$

មានន័យកាលណា $3x^2+2x+1\neq 0$

ដោយ $\Delta=4-12=-8<0\Rightarrow 3x^2+2x+1>0\forall x\in IR$

ដូចនេះ ដែនកំណត់នៃអនុគមន៍គឺ $D=IR$

នោះយើងបាន :

$$y'=\frac{(40x+10x)(3x^2+2x+1)-(6x+2)(20x^2+10x+3)}{(3x^2+2x+1)^2}$$

$$=\frac{10x^2+22x+4}{(3x^2+2x+1)^2}$$

ដោយ $3x^2+2x+1>0\forall x\in IR$ នោះយើងបាន :

$y'=0\Rightarrow 10x^2+22x+4=0\Rightarrow x_1=2;x_2=-\frac{1}{5}$

បើ $x=2\Rightarrow y=7$ និង $x=-\frac{1}{5}\Rightarrow y=\frac{5}{2}$

តារាងអថេរភាព :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{5}$		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{5}{2}$	$\searrow$	7	$\nearrow$	$+\infty$

ចំនុចបរមា :

- អនុគមន៍ f មានអតិបរមានៅត្រង់ $x=-\frac{1}{5}$ ដែល $f(-\frac{1}{5})=\frac{5}{2}$
- អនុគមន៍ f មានអប្បបរមានៅត្រង់ $x=2$ ដែល $f(2)=7$

ដូចនេះ តម្លៃបរិមាគឺ 7 និង $\frac{5}{2}$

8- ចូរកតម្លៃបរមាធៀបរបស់អនុគមន៍ :

$y=x^2+2x+1+\frac{a^2}{(x+1)^2}$ ។ដែល a ជាប៉ារ៉ាម៉ែតខុសពីសូន្យ ។

សំរាយបញ្ជាក់ :

យើងមាន : $y=x^2+2x+1+\frac{a^2}{(x+1)^2}$

នោះយើងបាន :

$$y' = 2x+2-\frac{a^2\times 2(x+1)}{(x+1)^4} = \frac{2(x+1)\left[(x+1)^4-a^2\right]}{(x+1)^4}$$

$$= \frac{2(x+1)\left[(x+1)^2-a\right]\left[(x+1)^2+a\right]}{(x+1)^4}$$

$$= \frac{2(x+1)\left(x^2+2x+1-a\right)\left(x^2+2x+1+a\right)}{(x+1)^4}$$

$$y'=0 \Rightarrow \begin{cases} x^2+2x+1-a=0 & (1) \\ x^2+2x+1+a=0 & (2) \end{cases}$$

សមីការ $(1): \Delta' = 1-1+a = a$

សមីការ $(2): \Delta' = 1-1-a = -a$

- បើ $a>0$ សមីការ (1) មានឫសពីរគឺ :

$x_1 = -1+\sqrt{a}; y = 2a$ និង $x_2 = -1-\sqrt{a}; y = 2a$

យើងបាន តម្លៃបរមាគឺ $2a$

- បើ $a<0$ សមីការ (2) មានឫសពីរគឺ :

$x_1 = -1+\sqrt{-a}; y = -2a$ និង $x_2 = -1-\sqrt{-a}; y = -2a$

យើងបាន តម្លៃបរមាគឺ $-2a$

ដូចនេះ តម្លៃបរមានៃអនុគមន៍គឺ $\boxed{2|a|}$

9- សិក្សាអថេរភាព និងសង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ $y = x+1+\frac{1}{x+1}$ ។

សំរាយបញ្ជាក់ :

សិក្សាអថេរភាព និងសង់ក្រាបនៃអនុគមន៍

យើងមាន : $y = x+1+\frac{1}{x+1}$

+ **ដែនកំណត់** : $D = IR-\{-1\}$

+ **ទិសដៅអថេរភាព :**

- ដេរីវេទី១ : $f'(x) = \frac{x^2+2x}{(x+1)^2}$

ដោយ $(x+1)^2 > 0 \forall x \in D_f$ នោះយើងបាន :

$f'(x)=0 \Leftrightarrow x^2+2x=0 \Rightarrow x=0; x=-2$

សញ្ញាដេរីវេ :

x	$-\infty$		-2		-1		0		$+\infty$
y'		+	0	−	‖	−	0	+	

ចំនុចបរមា :

- អនុគមន៍ f មានអតិបរមានៅត្រង់ $x=-2$ ដែល $f(-2)=-2$

- អនុគមន៍ f មានអប្បបរមានៅត្រង់ $x=0$ ដែល $f(0)=2$

+ **លីមីត និងអាស៊ីមតូត :**

$\lim\limits_{x\to-1} f(x)=\infty$ នោះយើងបានបន្ទាត់ $x=-1$ ជាអាស៊ីមតូតឈរ

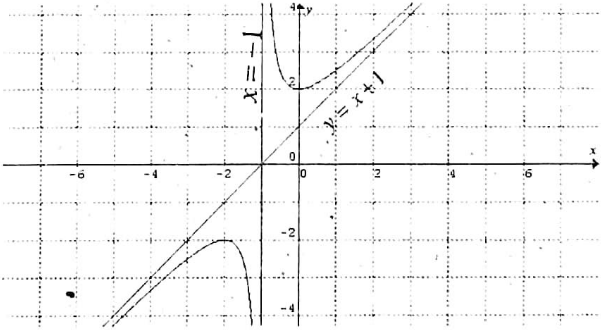
ម្យ៉ាងទៀត $\lim\limits_{x\to\pm\infty}[f(x)-(x+1)]=0$ នោះ យើងបានបន្ទាត់

$y=x+1$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេត ។

តារាងអថេរភាព :

x	$-\infty$		-2		-1		0		$+\infty$
y'		+	0	−	‖	−	0	+	
y	$-\infty$	↗	-2	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	2	↗	$+\infty$

+សង់ក្រាប



10-គេឱ្យ C_m ជាក្រាបតាងអនុគមន៍ $y=x+1+\dfrac{4}{(x+m)^2}$ ។

ក. តើមានក្រាប C_m ចំនួនប៉ុន្មាន ដែលកាត់តាមចំណុច $A(1;3)$ ។

ខ. ស្រាយបញ្ជាក់ថា បន្ទាត់ប៉ះនឹងក្រាប C_m ត្រង់ចំណុចមានអាប់ស៊ីស $x = 2-m$ ស្របនឹងអ័ក្ស Ox ។

សំរាយបញ្ជាក់ :

ក. តើមានក្រាប C_m ចំនួនប៉ុន្មាន ដែលកាត់តាមចំណុច $A(1;3)$

យើងមាន : $y = x+1+\dfrac{4}{(x+m)^2}$

ដោយ C_m កាត់តាមចំនុច $A(1;3)$ នោះយើងយកកូអរដោនេរបស់ A ទៅជំនួសក្នុង y យើងបាន :

$3 = 1+1+\dfrac{4}{(1+m)^2} \Rightarrow (1+m)^2 = 4$

$\Rightarrow 1+m = \pm 2 \Rightarrow m = 1; m = -3$

- បើ $m = 1 \Rightarrow y = x+1+\dfrac{4}{(x+1)^2}$

- បើ $m = -3 \Rightarrow y = x+1+\dfrac{4}{(x-3)^2}$

ខ. ស្រាយថា បន្ទាត់ប៉ះត្រង់ $x = 2-m$ ស្របនឹងអ័ក្សអាប់ស៊ីស

ដោយ $y = x+1+\dfrac{4}{(x+m)^2} \Rightarrow y' = 1-\dfrac{8}{(x+m)^3}$

ត្រង់ $x=2-m$ យើងបាន $y'=1-\dfrac{8}{(2-m+m)^2}=0$

យើងបាន បន្ទាត់មានមេគុណប្រាប់ទិសស្មើនឹង 0 នោះបន្ទាត់ស្រប

នឹង អក្ស័អាប់ស៊ីស ។

មេរៀនទី២ : **អនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែល**

លំហាត់ :

1- គណនាលីមីតខាងក្រោម:

ក. $\lim_{x \to +\infty} e^{3x}$ **ខ.** $\lim_{x \to -\infty} e^{5x}$ **គ.** $\lim_{x \to +\infty} 6e^{2x}$

សំរាយបញ្ជាក់ :

គណនាលីមីតខាងក្រោម:

ក. $\lim_{x \to +\infty} e^{3x} = +\infty$ **ខ.** $\lim_{x \to -\infty} e^{5x} = 0$ **គ.** $\lim_{x \to +\infty} 6e^{2x} = +\infty$

2- គណនាលីមីតខាងក្រោម:

ក. $\lim_{x \to +\infty} xe^{x+1}$ **ខ.** $\lim_{x \to -\infty} x^2e^{4x}$ **គ.** $\lim_{x \to +\infty}\left(1+\frac{n}{x}\right)^x$

សំរាយបញ្ជាក់ :

ក. $\lim_{x \to +\infty} xe^{x+1} = +\infty$ **ខ.** $\lim_{x \to -\infty} x^2e^{4x} = 0$

គ. $$\lim_{x \to +\infty}\left(1+\frac{n}{x}\right)^x = \lim_{x \to +\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{x}{n}}\right)^{\frac{x}{n}}\right]^n = e^n$$

3- គណនាលីមីតនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម:

ក. $\lim_{x\to+\infty}\frac{3e^{x-2}}{x^3}$ ខ. $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+3}{x-1}\right)^{x+2}$ គ. $\lim_{x\to0}\left(\frac{e^x-e^{-x}}{x}\right)$

សំរាយបញ្ជាក់ :

គណនាលីមីតនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម:

ក. $\lim_{x\to+\infty}\frac{3e^{x-2}}{x^3}=\lim_{x\to+\infty}3e^{-2}\left(\frac{e^x}{x^3}\right)=+\infty$

ខ. $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+3}{x-1}\right)^{x+2}=\lim_{x\to+\infty}\left[\left(1+\frac{4}{x-1}\right)^{\frac{x-1}{4}}\right]^{\frac{4(x+2)}{x-1}}$

$=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{4x+8}{x-1}}=e^4$

គ. $\lim_{x\to0}\left(\frac{e^x-e^{-x}}{x}\right)=\lim_{x\to0}\left(\frac{e^{2x}-1}{xe^x}\right)$

$=\lim_{x\to0}\left[\frac{(e^x-1)(e^x+1)}{xe^x}\right]=\lim_{x\to0}\frac{(e^x-1)}{x}\times\frac{e^x+1}{e^x}=1\times2=2$

ព្រោះ $=\lim_{x\to0}\frac{e^{ax}-1}{x}=a$

4- គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម:

ក. $y=xe^{-x}$ ខ. $f(x)=x^2e^x$ គ. $g(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$

សំរាយបញ្ជាក់ :

គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម:

ក. $y = xe^{-x} \Rightarrow y' = e^{-x} - xe^{-x} = e^{-x}(1-x)$

ខ. $f(x) = x^2e^x \Rightarrow f'(x) = 2xe^x + x^2e^x = e^x(x^2+2x)$

គ. $g(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

$$g'(x) = \frac{(e^x+e^{-x})(e^x+e^{-x}) - (e^x-e^{-x})(e^x-e^{-x})}{(e^x+e^{-x})^2}$$

$$= \frac{e^{2x} + e^x.e^{-x} + e^{-x}.e^x + e^{-2x} - e^{2x} + e^{-x}.e^x + e^{-x}.e^x - e^{-2x}}{(e^x+e^{-x})^2}$$

$$= \frac{e^0+e^0+e^0+e^0}{(e^x+e^{-x})^2} = \frac{1+1+1+1}{(e^x+e^{-x})^2} = \frac{4}{(e^x+e^{-x})^2}$$

5- គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម:

ក. $y = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ **ខ.** $f(x) = \dfrac{e^x(1+\cos x)}{1-\cos x}$

គ. $g(x) = e^{\frac{x-1}{x+1}}$

សំរាយបញ្ជាក់ :

គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម:

ក. $y=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}\Rightarrow y'=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$

ខ. $f(x)=\dfrac{e^x(1+\cos x)}{1-\cos x}$ នោះយើងបាន

$$\Rightarrow f'(x)=\frac{\left[e^x(1+\cos x)\right]'(1-\cos x)-(1-\cos x)'\left[e^x(1+\cos x)\right]}{(1-\cos x)^2}$$

$$=\frac{\left[e^x(1+\cos x)-e^x\sin x\right](1-\cos x)-\sin x\left[e^x(1+\cos x)\right]}{(1-\cos x)^2}$$

$$=\frac{e^x\left(1-2\sin x-\cos^2 x\right)}{(1-\cos x)^2}=\frac{e^x\sin x(\sin x-2)}{(1-\cos x)^2}$$

គ. $g(x)=e^{\frac{x-1}{x+1}}\Rightarrow g'(x)=\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)'e^{\frac{x-1}{x+1}}=\dfrac{2}{(x+1)^2}e^{\frac{x-1}{x+1}}$

6- សិក្សាអថេរភាពនិងសង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម:

ក. $y=x^2e^{-x}$ ខ. $y=5+2e^{-x}$

គ. $g(x)=e^x-x^2$

សំរាយបញ្ជាក់ :

សិក្សាអថេរភាពនិងសង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម:

ក. $y = x^2 e^{-x}$

+**ដែនកំណត់ :** $D = IR$

ដេរីវេ $y' = 2xe^{-x} - x^2 e^{-x} = \dfrac{x(2-x)}{e^x}$

$y' = 0 \Rightarrow x = 0; x = 2$

យើងបាន $f(0) = 0; f(2) = \dfrac{4}{e^2} = 0.6$

+**លីមីត អាស៊ីមតូត :**

$\lim\limits_{x \to -\infty} y = +\infty; \lim\limits_{x \to +\infty} y = 0$ នោះបន្ទាត់ $y = 0$ ជាអាស៊ីមតូត

ដេក នៃខ្សែកោង ។

+**តារាងអថេរភាព :**

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	0.6	$\searrow$	0

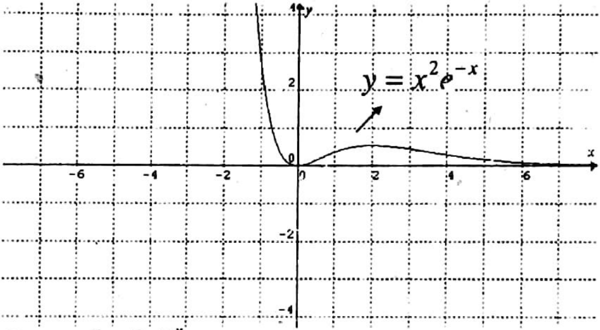
+**ចំនុចបរមា :**

- អនុគមន៍ f មានអប្បបរមានៅត្រង់ $x = 0$ ដែល $f(0) = 0$
- អនុគមន៍ f មានអតិបរមានៅត្រង់ $x = 2$ ដែល $f(2) = 0.6$

+**ចំណុចរបត់ :** ដោយ $y' = \dfrac{x(2-x)}{e^x}$ នោះយើងបាន :

$$y''=\frac{x^2-4x+2}{e^x}$$

$$y''=0\Rightarrow x^2-4x+2=0\Rightarrow x=2+\sqrt{2};x=2-\sqrt{2}$$



ខ. $y=5+2e^{-x}$

+ **ដែនកំណត់ :** $D=IR$

+ **ទិសដៅអថេរភាព :**

- ដេរីវេទី១ : $y'=-2e^{-x}<0$ នោះយើងបាន អនុគមន៍ចុះជានិច្ច ហើយគ្មានចំនុចបរមាទេ ។

+ **លីមីត និងអាស៊ីមតូត :**

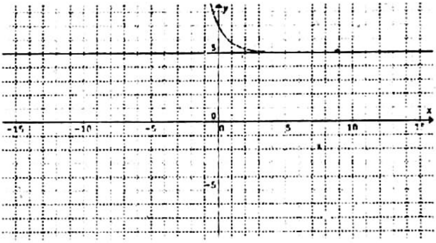
$\lim\limits_{x\to-\infty} y=+\infty;\lim\limits_{x\to+\infty} y=5$ នោះបន្ទាត់ $y=5$ ជាអាស៊ីមតូតដេកនៃក្រាប ។

តារាងអថេរភាព

x	$-\infty$	$+\infty$
y'	$-$	
y	$+\infty$ ↘	5

ខ្សែកោង y កាត់ $(y'oy)$ ត្រង់ : $x = 0 \Rightarrow y = 5 + 2e^0 = 7$

+ចំណុចរបត់ $y'' = 2e^{-x} > 0$ ។ ដោយ $y'' > 0$ នោះ y គ្មានចំណុចរបត់ទេ ។



គ. $g(x) = e^x - x^2$

+ដែនកំណត់ : $D = IR$

+ដេរីវេ $g'(x) = e^x - 2x > 0$ នោះ f ជាអនុគមន៍កើនជានិច្ច ។

+លីមីត :

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = -\infty;\ \lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$$

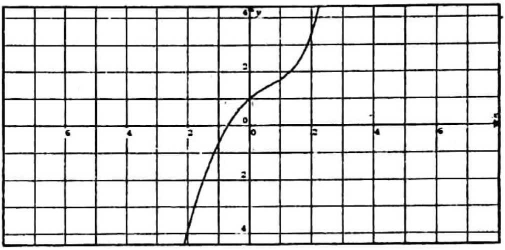
+តារាងអថេរភាព :

x	$-\infty$	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	
$g(x)$	$-\infty$ ↗	$+\infty$

ខ្សែកោង $g(x)$ កាត់ $(y'oy)$ ត្រង់ $x=0 \Rightarrow y=1$

+ចំណុចរបត់ : $g''(x)=e^x-2; g''(x)=0 \Rightarrow x=\ln 2$

និង $y=2-(\ln 2)^2=1.5$



7- សិក្សាអថេរភាពនិងសង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម:

ក. $f(x)=\dfrac{1}{2-e^{-x}}$ ខ. $g(x)=\dfrac{e^x}{x^2}$ គ. $g(x)=\dfrac{x}{e^x}$

សំរាយបញ្ជាក់ :

សិក្សាអថេរភាពនិងសង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម:

ក. $f(x)=\dfrac{1}{2-e^{-x}}$

អនុគមន៍មានន័យលុះត្រាតែ $2-e^{-x}\neq 0 \Rightarrow x\neq -\ln 2$

ដូចនេះ $D=IR-\{-\ln 2\}$

ដេរីវេ $f'(x)=-\dfrac{e^{-x}}{\left(2-e^{-x}\right)^2}<0$ នោះ f ជាអនុគមន៍ចុះជានិច្ច ។

+លីមីត និងអាស៊ីមតូត :

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0; \lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{1}{2}$ យើងបានបន្ទាត់ $y = 0$ និង

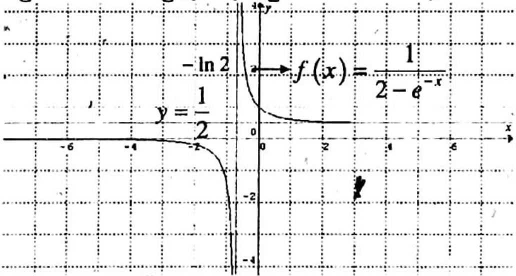
$y = \frac{1}{2}$ ជាអាស៊ីមតូតដេក ។

$\lim_{x\to-\ln 2} f(x) = \pm\infty$

+តារាងអថេរភាព :

x	$-\infty$		$-\ln 2$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$\Vert$	$-$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-\infty \Vert +\infty$	$\searrow$	$\frac{1}{2}$

ខ្សែកោងកាត់អ័ក្ស$(y'oy)$ ត្រង់ $x = 0 \Rightarrow y = 1$



ខ. $g(x) = \frac{e^x}{x^2}$

+ដែនកំណត់ : $D = IR - \{0\}$

- ដេរីវេ $g'(x) = \frac{e^x x^2 - 2xe^x}{x^4} = \frac{e^x x(x-2)}{x^4}$

$g'(x) = 0 \Rightarrow x = 2; y = \frac{e^2}{4} = 1.8$

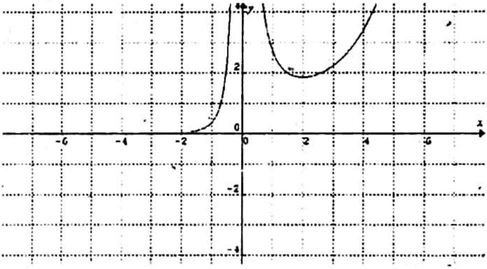
+លីមីត និងអាស៊ីមតូត :

$\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = 0; \lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$ នោះបន្ទាត់ $y = 0$ ជាអាស៊ីមតូតដេក ។

+តារាងអថេរភាព :

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	‖	$-$	0	$+$	
$g(x)$	0	↗ $+\infty$	‖	$+\infty$ ↘	1.8	↗	$+\infty$

+សង់ក្រាប



ក. $g(x) = \dfrac{x}{e^x}$

+ដែនកំណត់ $D = IR$

បដេរីវេ $g'(x) = \dfrac{e^x - xe^x}{e^{2x}} = \dfrac{e^x(1-x)}{e^{2x}}$

$g'(x) = 0 \Rightarrow x = 1; y = \dfrac{1}{e} = 0.4$

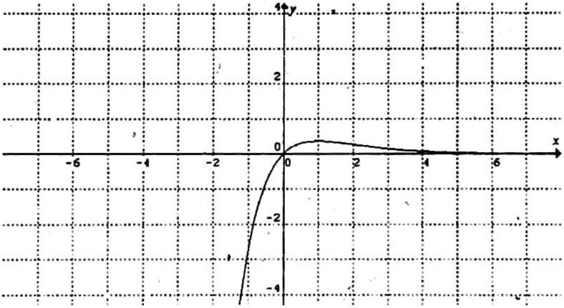
+លីមីត: $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = -\infty; \lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0$ នោះបន្ទាត់ $y = 0$ ជាអាស៊ីមតូតដេក ។

+ តារាងអថេរភាព :

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	0	$-$
$g(x)$	$-\infty \nearrow$	0.4	$\searrow 0$

ក្រាបកាត់អ័ក្ស $(y'oy)$ ត្រង់ $x=0; y=0$

+ សង់ក្រាប :



8- រកប្រាក់សរុបនៃប្រាក់ដើមចំនួន 2000ដុល្លា ដែលគេបានធ្វើវិនិយោគ ក្នុងរយៈពេល 4 ឆ្នាំ ដោយទទួលអត្រាការប្រាក់ 6% តាមរយៈពេលកំណត់ដូចខាងក្រោម:

ក. គិតជាឆ្នាំ ខ. គិតជាឆមាស គ. គិតជាត្រីមាស ឃ. គិតជាខែ

សំរាយបញ្ជាក់ :

តាមរូបមន្ត $p = p_o\left(1+\frac{r}{n}\right)^{tn}$

ក. គិតជាឆ្នាំ យើងបាន $n=1$

$$\Rightarrow p=2000(1+0.06)^4=2525 \text{ ដុល្លា}$$

ខ. គិតជាឆមាស យើងបាន $n=2$

$$\Rightarrow p=2000\left(1+\frac{0.06}{2}\right)^8=2533 \text{ ដុល្លា}$$

គ. គិតជាត្រីមាស យើងបាន $n=4$

$$\Rightarrow p=2000\left(1+\frac{0.06}{4}\right)^{16}=2537 \text{ ដុល្លា}$$

ឃ. គិតជាខែ យើងបាន $n=12$

$$\Rightarrow p=2000\left(1+\frac{0.06}{12}\right)^{48}=2541 \text{ ដុល្លា}$$

9- ឧបមាថា គេយកប្រាក់ 5000 ដុល្លាទៅផ្ញើរនៅធនាគារមួយដោយទទួលបានអត្រាការប្រាក់សមាស 11% ក្នុងមួយឆ្នាំ។ បើគេផ្ញើប្រាក់រយៈពេល 10ឆ្នាំ តើគេទទួលបានប្រាក់សរុបទាំងអស់ចំនួនប៉ុន្មាន បើការទូទាត់ច្រើនដងក្នុងមួយឆ្នាំ?

សំរាយបញ្ជាក់ :

ដោយការទូទាត់ច្រើនដងគឺ 10 ឆ្នាំ យើងបាន :

តាមរូបមន្ត : $p=p_0e^{rt}=5000e^{0.11\times10}=15020$ ដុល្លា

10- ឧបមាថា បើគេយកប្រាក់ទៅ ផ្ញើនៅធនាគារមួយដោយទទួលបាន អត្រាការសមាស 7% នោះ តើប៉ុន្មានឆ្នាំទើបគេទទួលបានប្រាក់សរុប ស្មើនឹងបីដងនៃប្រាក់ដើម បើការទូទាត់ច្រើនដងក្នុងមួយឆ្នាំ? ចម្លើយគិតជាឆ្នាំ?

សំរាយបញ្ជាក់ :

ដោយការទូទាត់ច្រើនដង យើងបាន :

$p = p_o e^{rt}$ តែ $p = 3p_o$ យើងបាន

$$3p_o = p_o e^{rt} \Rightarrow e^{0.07t} = 3 \Rightarrow t = \frac{\ln 3}{0.07} = 15.7$$

ដូចនេះ គេប្រើរយៈពេលពី 15ទៅ16 ឆ្នាំ

មេរៀនទី៣ : អនុគមន៍លោការីត

លំហាត់ :

1 គណនាតម្លៃនៃកន្សោមខាងក្រោម:

ក. $e^{\ln 7}$ ខ. $\ln e^{x-2}$ គ. $\ln e^{7x}$

សំរាយបញ្ជាក់ :

ក. $e^{\ln 7} = 7$ ខ. $\ln e^{x-2} = x-2$ គ. $\ln e^{7x} = 7x$

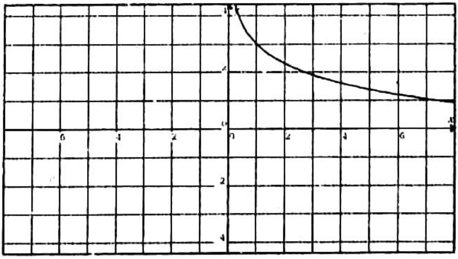
2- សង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ :

ក. $y = 3 - \ln x$ ខ. $y = \ln(x-3)$

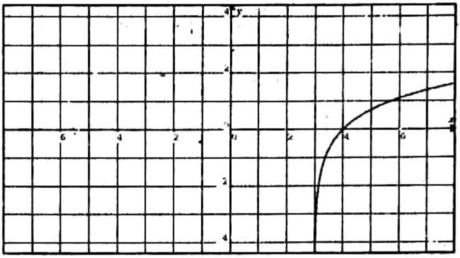
គ. $y = \ln\left(2+e^{x}\right)$

សំរាយបញ្ជាក់ :

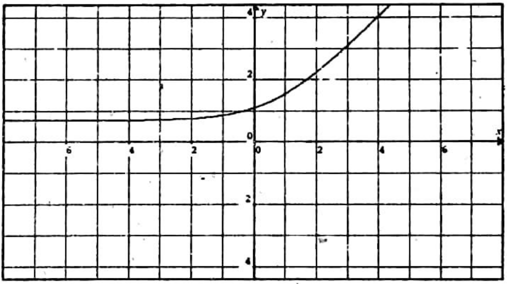
ក. $y = 3 - \ln x$



ខ. $y=\ln(x-3)$



គ. $y=\ln\left(2+e^{x}\right)$



3- គណនាលីមីតនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម:

ក. $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{-5}\ln x$ ខ. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(1+\ln x)}{x^{2}}$

គ. $\lim\limits_{x\to 0}(x\ln x)$

សំរាយបញ្ជាក់ :

គណនាលីមីតនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម:

ក. $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{-5}\ln x = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^5} = 0$

ខ. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(1+\ln x)}{x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x^2}+\frac{\ln x}{x^2}\right) = 0$

គ: $\lim\limits_{x\to 0}(x\ln x)$ តាង $t=\frac{1}{x}\Rightarrow x=\frac{1}{t}$ ពេល

$x\to 0\Rightarrow t\to+\infty$ យើងបាន :

$\lim\limits_{x\to 0}(x\ln x) = \lim\limits_{t\to+\infty}\left(\frac{1}{t}\ln\frac{1}{t}\right) = \lim\limits_{t\to+\infty}-\frac{\ln t}{t} = 0$

4- គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម:

ក. $y=\sqrt{x}.\ln x$ ខ. $y=x\sqrt[3]{\ln x}$ គ. $y=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$

សំរាយបញ្ជាក់ :

គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម:

ក. $y=\sqrt{x}.\ln x\Rightarrow y'=\frac{\ln x}{2\sqrt{x}}+\frac{\sqrt{x}}{x}=\frac{\ln x+2}{2\sqrt{x}}$

ខ. $y=x\sqrt[3]{\ln x}\Rightarrow y'=\sqrt[3]{\ln x}+\frac{1}{3}x\times\frac{1}{x}\times(\ln x)^{\frac{1}{3}-1}$

យើងបាន $y'=\sqrt[3]{\ln x}+\frac{1}{3}(\ln x)^{-\frac{2}{3}}=(\ln x)^{\frac{1}{3}}+\frac{1}{3(\ln x)^{\frac{2}{3}}}$

ដូចនេះ $y' = \dfrac{3\ln x+1}{3\sqrt[3]{\ln^2 x}}$

គ. $y = \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$ យើងបាន :

$$y' = \frac{\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)'}{x+\sqrt{1+x^2}} = \frac{1+\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{x+\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

5- គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ខាងក្រោមៈ

ក. $y = \ln\dfrac{e^x}{e^x+1}$ ខ. $y = x\ln x - x$

គ. $y = x^2\ln\dfrac{1}{x^2}$

សំរាយបញ្ជាក់ :

គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ខាងក្រោមៈ

ក. $y = \ln\dfrac{e^x}{e^x+1}$ យើងបាន

$$y' = \frac{\left(\dfrac{e^x}{e^x+1}\right)'}{\dfrac{e^x}{e^x+1}} = \frac{e^x\left(e^x+1\right)-e^{2x}}{\left(e^x+1\right)^2}\times\frac{e^x+1}{e^x} = \frac{1}{e^x+1}$$

ខ. $y = x\ln x - x$ យើងបាន $y' = \ln x + 1 - 1 = \ln x$

គ. $y = x^2 \ln \frac{1}{x^2}$ នោះយើងបាន :

$$y' = 2x\ln\frac{1}{x^2} + x^2 \times \frac{-2}{x^3} \times x^2 = -2x\ln x^2 - 2x$$

6- សិក្សាអថេរភាពនិងសង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម:

ក. $y = \frac{x}{\ln x}$ ខ. $y = \ln x + e^x$, គ. $y = \ln^2 x + \frac{1}{\ln^2 x + 2}$

សំរាយបញ្ជាក់ :

សិក្សាអថេរភាពនិងសង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម:

ក. យើងមាន : $y = \frac{x}{\ln x}$

អនុគមន៍មានន័យលុះត្រាតែ $\begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \end{cases} \Rightarrow x \in (0,1) \cup (1,+\infty)$

- ដេរីវេ : $y' = \frac{\ln x - 1}{\ln^2 x}$

$y' = 0 \Rightarrow x = e; y = e$

+លីមីត: $\lim\limits_{x\to 0} y = \lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\ln x} = 0; \lim\limits_{x\to+\infty} y = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{\ln x} = +\infty$

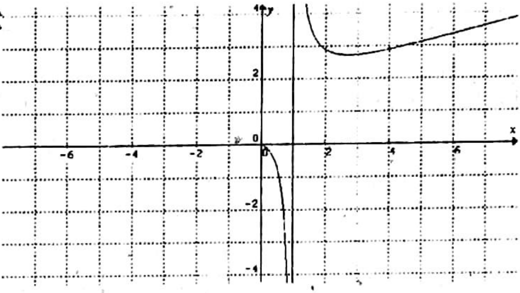
និង $\lim\limits_{x\to 1} y = \lim\limits_{x\to 1}\frac{x}{\ln x} = \pm\infty$

+តារាងអថេរភាព :

x	$-\infty$		1		e		$+\infty$
y'		$-$	‖	$-$	0	$+$	
y	0	↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	e	↗	$+\infty$

យើងបាន អនុគមន៍មានតម្លៃអប្បបរមាត្រង់ $x = e; y = e$

+ សង់ក្រាប :



ខ. $y = \ln x + e^{x}$

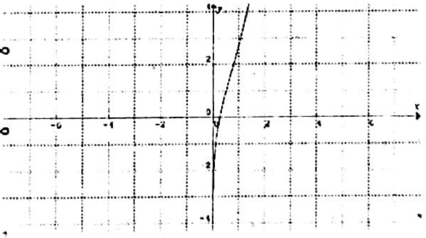
+ ដែនកំណត់ : អនុគមន៍មានន័យលុះត្រាតែ $x > 0$

- ដេរីវេ : $y' = \dfrac{1}{x} + e^{x} > 0$ នោះ f កើនជានិច្ច ហើយគ្មានបរមាទេ

លីមីត: $\lim\limits_{x \to 0} y = \lim\limits_{x \to 0}\left(\ln x + e^{x}\right) = -\infty; \lim\limits_{x \to +\infty} y = +\infty$

+ តារាងអថេរភាព :

x	0		$+\infty$
y'		$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$



+ សង់ក្រាប :

បើ $x = 1 \Rightarrow y = e$

គ. $y=\ln^2 x+\dfrac{1}{\ln^2 x+2}$

+ ដែនកំណត់ $D=(0,+\infty)$

-ដេរីវេ $y'=\dfrac{2}{x}\ln x-\dfrac{\dfrac{2}{x}\ln x}{\left(\ln^2 x+2\right)^2}=\dfrac{\dfrac{2}{x}\ln x\left[\left(\ln^2 x+2\right)^2-1\right]}{\left(\ln^2 x+2\right)^2}$

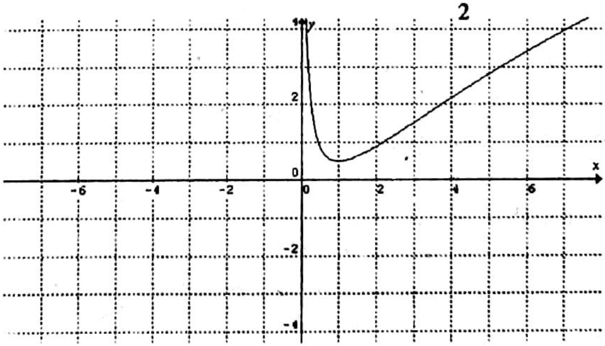
$$=\frac{\dfrac{2}{x}\ln x\left(\ln^2 x+1\right)\left(\ln^2 x+3\right)}{\left(\ln^2 x+2\right)^2}$$

$y'=0\Rightarrow \ln x=0\Rightarrow x=1; y=\dfrac{1}{2}$

+ លីមីត: $\lim\limits_{x\to+\infty} y=+\infty;\ \lim\limits_{x\to 0^+} y=+\infty$

+ តារាងអថេរភាព :

x	0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	↘	$\frac{1}{2}$	↗	$+\infty$



7. សិក្សាអថេរភាព និងសង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម:

ក. $y = 2x - x\ln x$

ខ. $y = f(x) = \begin{cases} x(1-\ln x) & \text{បើ } x > 0 \\ 0 & \text{បើ } x = 0 \end{cases}$

ដំណោះស្រាយ :

សិក្សាអថេរភាព និងសង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម:

ក. $y = 2x - x\ln x$

+ **ដែនកំណត់** $D = (0, +\infty)$

- ដេរីវេ : $y' = 2 - (\ln x + 1) = 1 - \ln x$

$y' = 0 \Rightarrow x = e; y = e$

- **លីមីត:** $\lim_{x\to+\infty} y = \lim_{x\to+\infty} x(2 - \ln x) = -\infty$

$\lim_{x\to 0} y = \lim_{x\to 0}(2x - x\ln x)$

តាង $t = \frac{1}{x} \Rightarrow x = \frac{1}{t}$ ពេល $x \to 0^+ \Rightarrow t \Rightarrow +\infty$

$\lim_{x\to 0}(2x - x\ln x) = \lim_{t\to+\infty}\left(\frac{2}{t} + \frac{\ln t}{t}\right) = 0$

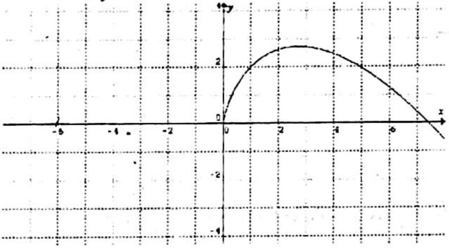
+ **តារាងអថេរភាព :**

x	0		e		$+\infty$
y'		+	0	−	
y	0	↗	e	↘	$-\infty$

ខ្សែកោងកាត់អ័ក្សអាប់ស៊ីសត្រង់

$y=0\Rightarrow x(2-\ln x)=0\Rightarrow \ln x=2\Rightarrow x=e^{2}$

បើ $x=1; y=2$



ខ. $y=f(x)=\begin{cases} x(1-\ln x) & \text{បើ } x>0 \\ 0 & \text{បើ } x=0 \end{cases}$

អនុគមន៍ $y=x(1-\ln x)$

+ **ដែនកំណត់** $D=(0;+\infty)$

+ **ដេរីវេ** $y'=1-\ln x-1=-\ln x$

$y'=0\Rightarrow x=1; y=1$

+ **លីមីត:** $\lim_{x\to+\infty} y=-\infty; \lim_{x\to 0} y=0$

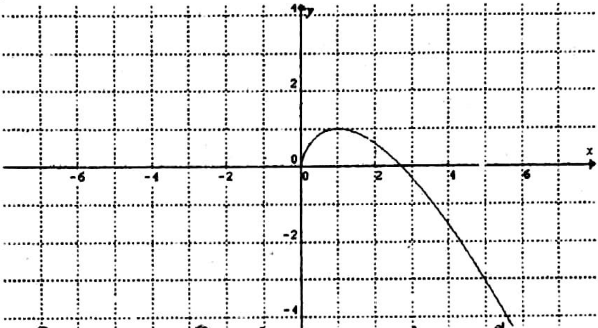
ដោយ $\lim_{x\to 0} y=f(0)=0$ យើងបាន y ជាប់ត្រង់ $x=0$ ។

+ **តារាងអថេរភាព :**

x	0		1		$+\infty$
y'		+	0	−	
y		↗	1	↘	$-\infty$

ខ្សែកោងកាត់អ័ក្សអាប់ស៊ីសត្រង់

$y = 0 \Rightarrow x = e$



8- ក. សិក្សាអថេរភាព និងសង់ក្រាប (c) របស់អនុគមន៍

$y = -2\ln|x| + x - 2$ ។

ខ. ក្រាប C កាត់ Ox ត្រង់បីចំណុច $P; Q; R$ ដែលមានអាប់ស៊ីសរៀងគ្នា $p; q; r$ ។ ចូរប្រៀបធៀប $P; Q; R$ និងបណ្ដាចំនួនខាងក្រោម : $-1; 0; 1; 5; 6$ ។

សំរាយបញ្ជាក់ :

ក. $y = -2\ln|x| + x - 2$

- បើ $x > 0$ យើងបាន :

$$y = -2\ln x + x - 2 = x\left(\frac{-2\ln x}{x} + 1 - \frac{2}{x}\right)$$

ដេរីវេ $y' = -\frac{2}{x} + 1 = \frac{-2 + x}{x}$

$y' = 0 \Rightarrow x = 2; y = -2\ln 2 = -2\times 0.7 = -1.4$

+ លីមីត: $\lim\limits_{x\to+\infty} y = +\infty; \lim\limits_{x\to 0^+} y = +\infty$

+ តារាងអថេរភាព :

x	0		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-1.4	$\nearrow$	$+\infty$

-បើ $x<0$ យើងបាន :

$$y=-2\ln(-x)+x-2=x\left(\frac{-2\ln(-x)}{x}+1-\frac{2}{x}\right)$$

- ដេរីវេ $y' = -\frac{2}{x}+1 = \frac{-2+x}{x} = 1-\frac{2}{x} > 0$

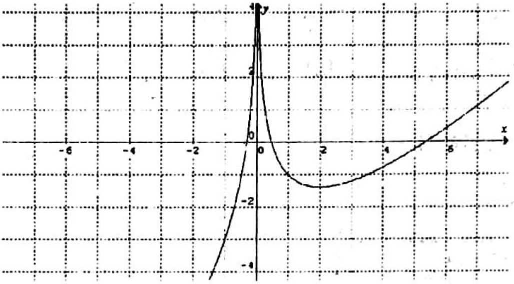
នោះយើងបាន f ជាអនុគមន៍កើនជានិច្ចចំពោះ $x<0$ ។

+ លីមីត: $\lim\limits_{x\to-\infty} y = -\infty; \lim\limits_{x\to 0} y = +\infty$

+ តារាងអថេរភាព :

x	$-\infty$		0
y'		$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

+ សំណង់ខ្សែកោង :



8. ដោយ $f(-1)=-1-2=-3; f(0)=-2$

$$f(5)=-0.2; f(6)=0.4; \lim_{x\to 0} y=+\infty; f\left(-\frac{1}{100}\right)>0$$

$f\left(\frac{1}{100}\right)>0$ ដែល $-\frac{1}{100}\simeq 0; \frac{1}{100}\simeq 0$ យើងបាន :

$$f(-1).f\left(-\frac{1}{100}\right)<0 \Rightarrow -1<P<0$$

$$f\left(\frac{1}{100}\right).f(1)<0 \Rightarrow 0<Q<1$$

$$f(5).f(6)<0 \Rightarrow 5<P<6$$

9- រោងចក្រឧស្សាហកម្មមួយបានទិញម៉ាស៊ីនហ្វាក់តម្លៃ250ដុល្លារហើយមានអត្រាតម្លៃថយចុះ 25% ក្នុងមួយឆ្នាំ។ តើបីឆ្នាំក្រោយ ម៉ាស៊ីនហ្វាក់នេះនឹងមានតម្លៃប៉ុន្មាន?

សំរាយបញ្ជាក់ :

ដោយប្រើរូបមន្ត $c=c_o(1-r)^t$ ដែល

$c_o=250\$;r=0.25;t=3$ យើងបាន

$c=250(1-0.25)^3=105.5\$$

ដូចនេះ $\boxed{c=105.5\$}$

10- បាត់តេរីមួយប្រភេទបំបែកខ្លួន ដោយមានមេគុណអត្រាកំណើន $k=0.872$ ដែល t គិតជាថ្ងៃ ។បើដើមដំបូងមានបាត់តេរីចំនួន 9 តើរយៈពេលប៉ុន្មានថ្ងៃ ទើបចំនួនបាត់តេរីកើនដល់ 738 ?

សំរាយបញ្ជាក់ :

ដោយប្រើ $A=A_oe^{kt}$ ដែល $A_o=9;k=0.872;A=738$

យើងបាន $738=9e^{0.872}\Rightarrow e^{0.872t}=\frac{738}{9}=82$

$\Rightarrow t=\frac{\ln 82}{0.872}=5.05$

ដូចនេះ $\boxed{t=5.05}$ ថ្ងៃ

11- នៅទីក្រុងមួយកាលពី 10 ឆ្នាំមុន មានប្រជាជនចំនួន 45600 នាក់ ហើយចំនួនប្រជាជនមានការកើន ឡើងដោយអត្រាមួយថេរជារៀងរាល់ឆ្នាំ ។ បើបច្ចុប្បន្នមានប្រជាជនចំនួន 64800 នាក់ រកអត្រាកំណើននៃប្រជាជនប្រចាំឆ្នាំក្នុងទីក្រុងនេះ ។

សំរាយបញ្ជាក់ :

ដោយប្រើ $p = p_o e^{rt}$ ដែល $p = 64800; p_o = 45600; t = 10$

យើងបាន $64800 = 45600e^{10r} \Rightarrow r = 0.036 = 3.6\%$

ដូចនេះ $\boxed{r = 3.6\%}$

លំហាត់ជំពូក៣

1- រកដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ខាងក្រោម:

ក. $y = \sqrt{x^2 - 2\sqrt{x^2 - 1}} + \sqrt{x - 3 + 2\sqrt{x - 4}}$

ខ. $y = \lg\left(\dfrac{2^{1-x} - 2x + 1}{2^x - 1}\right)$

សំរាយបញ្ជាក់ :

ក. $y = \sqrt{x^2 - 2\sqrt{x^2 - 1}} + \sqrt{x - 3 + 2\sqrt{x - 4}}$

អនុគមន៍មានន័យលុះត្រាតែ :

$$\begin{cases} x^2 - 1 \geq 0 \\ x^2 - 2\sqrt{x^2 - 1} \geq 0 \\ x - 4 \geq 0 \\ x - 3 + 2\sqrt{x - 4} \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 1 \geq 0 \\ \left(\sqrt{x^2 - 1} - 1\right)^2 \geq 0 \\ x - 4 \geq 0 \\ \left(\sqrt{x - 4} + 1\right)^2 \geq 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x \le -1; x \ge 1 \\ x \ge 4 \end{cases} \Rightarrow x \ge 4$$

ដូចនេះ $\boxed{x \ge 4}$

៨. $y = \lg\left(\dfrac{2^{1-x} - 2x + 1}{2^x - 1}\right)$

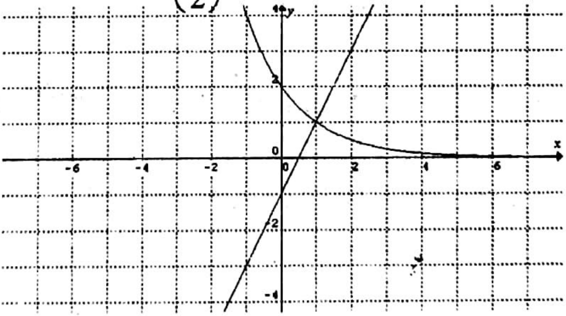
អនុគមន៍ y មានន័យកាលណា :

$$\begin{cases} \dfrac{2^{1-x} - 2x + 1}{2^x - 1} > 0 \\ 2^x - 1 \ne 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{2\left(\dfrac{1}{2}\right)^x - 2x + 1}{2^x - 1} > 0 \\ x \ne 0 \end{cases}$$

បើ $2^x - 1 > 0 \Rightarrow x > 0$ យើងបាន

$$2\left(\frac{1}{2}\right)^x - 2x + 1 > 0 \Rightarrow 2\left(\frac{1}{2}\right)^x > 2x - 1$$

តាង $f(x) = 2\left(\dfrac{1}{2}\right)^x ; g(x) = 2x - 1$ យើងឃើញថា :



ក្រាបទាំងពីរកាត់គ្នាត្រង់ $x=1; y=1$

$$2\left(\frac{1}{2}\right)^x > 2x-1 \Rightarrow 0<x<1$$

បើ បើ $2^x-1<0 \Rightarrow x<0$ យើងបាន :

$2\left(\frac{1}{2}\right)^x -2x+1<0 \Rightarrow 2\left(\frac{1}{2}\right)^x < 2x-1$ យើងឃើញថាគ្មាន

តម្លៃxដែលធ្វើឱ្យ $f<g$ ក្នុងចន្លោះ $(+\infty,0)$ទេ

ដូចនេះ $\boxed{0<x<1}$

2. រកអាស៊ីមតូតរបស់ក្រាបនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម:

ក. $y=\dfrac{4x-3}{2x+5}$ ខ. $y=\dfrac{3x^2-7x+15}{x-1}$

គ. $y=\dfrac{2x-1}{x^2-7x+10}$

សំរាយបញ្ជាក់ :

ក. យើងមាន : $y=\dfrac{4x-3}{2x+5}$

មាន $\lim\limits_{x\to\infty}=\dfrac{4x-3}{2x+5}=2$និង$\lim\limits_{x\to-\frac{5}{2}}=\dfrac{4x-3}{2x+5}=\infty$នោះយើងបាន

អាស៊ីមតូតឈរ $x=-\dfrac{5}{2}$; អាស៊ីមតូតដេក $y=2$

ខ. $y=\dfrac{3x^2-7x+15}{x-1}$

$$f(x)=\frac{3x^2-7x+15}{x-1}=3x-4+\frac{11}{x-1}$$

ដោយ $\lim\limits_{x\to\infty}=\dfrac{11}{x-1}=0$ នោះយើងបានបន្ទាត់ $y=3x-4$ ជាអាអាស៊ីមតូតទ្រេត $y=3x-4$ ហើយ $\lim\limits_{x\to1}=f(x)=\infty$ នោះយើងបន្ទាត់ $x=1$ ជាអាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាប ។

គ. $y=\dfrac{2x-1}{x^2-7x+10}=\dfrac{2x-1}{(x-2)(x-5)}$

ដោយ $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{2x-1}{(x-2)(x-5)}=\infty$ និង $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{2x-1}{(x-2)(x-5)}=\infty$

នោះយើងបានបន្ទាត់ $x=2$ និង $x=5$ អាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាប និងមានបន្ទាត់ $y=0$ ជាអាស៊ីមតូតដេក ។

3- សិក្សាអថេរភាពនិងសង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម:

ក. $y=\dfrac{x^2+3x+3}{x+2}$ ខ. $y=\dfrac{x^2}{x-1}$

គ. $y=\dfrac{x-2}{x^2-2x+1}$

សំរាយបញ្ជាក់ :

សិក្សាអថេរភាពនិងសង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម:

ក. $y = \dfrac{x^2+3x+3}{x+2} = x+1+\dfrac{1}{x+2}$

+ដែនកំណត់ $D = IR - \{-2\}$

+ទិសដៅអថេរភាព :

- ដេរីវេ $f'(x) = \dfrac{x^2+4x+3}{x+2}$

$f'(x) = 0 \Rightarrow x = -1; x = -3$ ដែល $f(-1) = 1; f(-3) = -3$

- លីមីត និង អាស៊ីមតូត:

$\lim\limits_{x\to-2} f(x) = \lim\limits_{x\to-2} \dfrac{x^2+3x+3}{x+2} = \infty$ ៊ យើងបានបន្ទាត់ $x = -2$ ជាអាស៊ីមតូតឈរ ។

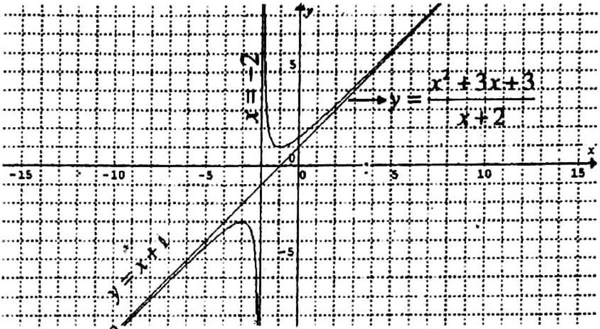
$\lim\limits_{x\to\infty} [f(x) - (x+1)] = 0$ នោះយើងបាន បន្ទាត់ $y = x+1$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេត ។

+តារាងអថេរភាព :

x	$-\infty$		-3		-2		-1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	-3	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	-1	↗	$+\infty$

+សង់ក្រាប :

ក្រាបកាត់អ័ក្ស $(y'oy): x = 0 \Rightarrow y = \dfrac{3}{2}$



៨. $y=\dfrac{x^2}{x-1}=x+1+\dfrac{1}{x-1}$

+ ដែនកំណត់ $D=IR-\{1\}$

- ដេរីវេ $y'=\dfrac{x^2-2x}{(x+2)^2};y'=0\Rightarrow x=0;x=2$ ដែល

$y(0)=0;y(2)=4$ ។

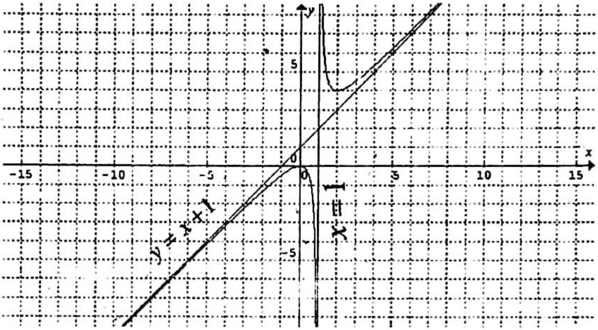
+ លីមីត និង អាស៊ីមតូត:

$\lim\limits_{x\to\pm\infty}y=\pm\infty;\lim\limits_{x\to 1}y=\pm\infty$ យើងបានបន្ទាត់ $x=1$ ជាអាស៊ីមតូតឈរ ។ $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left[f(x)-(x+1)\right]=0$ យើងបាន បន្ទាត់ $y=x+1$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេត ។

+ តារាងអថេរភាព:

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
y'		+	0	−	‖	−	0	+	
y	$-\infty$	↗	0	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	4	↗	$+\infty$

+សង់ក្រាប :



គ. $y = \dfrac{x-2}{x^2-2x+1}$

+ដែនកំណត់ : $D = IR - \{1\}$

- ដេរីវេ $y' = \dfrac{-x^2+4x-3}{(x-1)^2}; y' = 0 \Rightarrow x = 3; y = \dfrac{1}{4}$

+លីមីត និង អាស៊ីមតូត:

$\lim\limits_{x\to 1} y = -\infty$ យើងបាន បន្ទាត់ $x = 1$ ជាអាស៊ីមតូតឈរ

$\lim\limits_{x\to \pm\infty} y = 0$ យើងបាន បន្ទាត់ $y = 0$ ជាអាស៊ីមតូតដេក

+តារាងអថេរភាព :

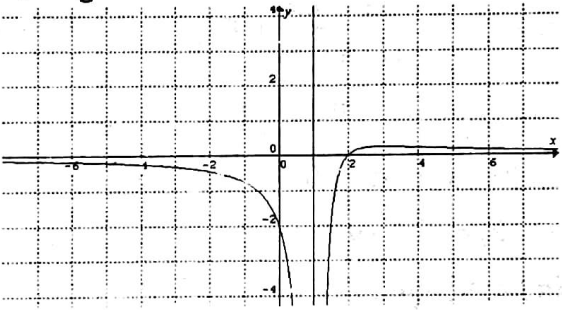
x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
y'		$-$	‖	$+$	0	$-$	
y	0 ↘		$-\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$\frac{1}{4}$	↘	0

ចំណុចប្រសព្វរវាងខ្សែកោងនឹងអ័ក្ស

- $(x'ox): y=0 \Rightarrow x=2$

-$(y'oy): x=0 \Rightarrow y=-2$

+ **សង់ខ្សែកោង :**



4- គេឱ្យអនុគមន៍ $f: y=\dfrac{2x^2+x+1}{x+1}$:

ក. សិក្សាអថេរភាពនិងសង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ f ។

ខ. តាមក្រាបរកតម្លៃអតិបរមានិងអប្បបរមានៃ

$$A=\frac{2\cos^2 x+|\cos x|+1}{|\cos x|+1}$$ ។

សំរាយបញ្ជាក់ :

ក. សិក្សាអថេរភាពនិងសង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ f :

ក. យើងមាន $y = f(x) = \dfrac{2x^2 + x + 1}{x+1} = 2x - 1 + \dfrac{2}{x+1}$

+ ដែនកំណត់ : $D = IR - \{-1\}$

+ ទិសដៅអថេរភាព :

-ដេរីវេទី១ : $f'(x) = \dfrac{2x^2 + 4x}{(x+1)^2}$ ដោយ $(x+1)^2 > 0 \forall x \in D$

នោះ $f'(x)$ ត្រូវយកសញ្ញាតាម $2x^2 + 4x$

$f'(x) = 0 \Rightarrow x = -2; x = 0$

ដែល $f(-2) = -7; f(0) = 1$

+ លីមីត និងអាស៊ីមតូត :

យើងមាន $\lim\limits_{x\to -1} f(x) = \lim\limits_{x\to -1} \dfrac{2x^2 + x + 1}{x+1} = \infty$ យើងបាន បន្ទាត់

$x = -1$ ជាអាស៊ីមតូតឈរ ។

ម្យ៉ាងទៀត $\lim\limits_{x\to \pm\infty} \left[f(x) - (2x-1) \right] = 0$ យើងបាន បន្ទាត់

$y = 2x - 1$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេត ។

+ តារាងអថេរភាព :

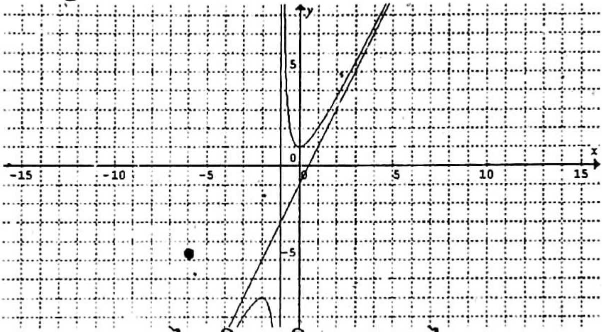
x	$-\infty$		-2		-1		0		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	-7	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$

+ចំនុចបរមា :

- អនុគមន៍ f មានអតិបរមានៅត្រង់ចំនុច $x=-2$ ដែល $f(-2)=-7$

- អនុគមន៍ f មានអប្បបរមានៅត្រង់ចំនុច $x=0$ ដែល $f(0)=1$

+សង់ក្រាប :



ខ. តាមក្រាបរកតម្លៃអតិបរមានិងអប្បបរមានៃ :

$$A=\frac{2\cos^2 x+|\cos x|+1}{|\cos x|+1}$$

តាង $t=|\cos x|$ ដែល $0\leq t\leq 1$ យើងបាន :

$$A(t)=\frac{2t^2+t+1}{t+1}$$

តាមក្រាបយើងបានពេល $t=0\Rightarrow A(0)=1$ ជាតម្លៃអប្បបរមា

ពេល $t=1\Rightarrow A(1)=2$ ជាតម្លៃអតិបរមា ។

5- គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម:

ក. $y=\dfrac{e^x}{x-1}$ ខ. $y=e^{2x}-2e^x$ គ. $y=\dfrac{e^x+1}{e^x-1}$

សំរាយបញ្ជាក់ :

គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម:

ក. $y=\dfrac{e^x}{x-1}\Rightarrow y'=\dfrac{e^x(x-1)-e^x}{(x-1)^2}=\dfrac{e^x(x-2)}{(x-1)^2}$.

ខ. $y=e^{2x}-2e^x\Rightarrow y'=2e^{2x}-2e^x$

គ. $y=\dfrac{e^x+1}{e^x-1}\Rightarrow y'=\dfrac{e^x\left(e^x-1\right)-e^x\left(e^x+1\right)}{\left(e^x-1\right)^2}=\dfrac{-2e^x}{\left(e^x-1\right)^2}$

6- គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម:

ក. $y=x-1-\ln x$ ខ. $y=\ln\left(\dfrac{x-3}{x+2}\right)$

គ. $y=x^2\ln x-\dfrac{x^2}{2}$

សំរាយបញ្ជាក់ :

គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម:

ក. $y=x-1-\ln x\Rightarrow y'=1-\dfrac{1}{x}=\dfrac{x-1}{x}$

ខ. $y=\ln\left(\frac{x-3}{x+2}\right)\Rightarrow y'=\frac{\left(\frac{x-3}{x+2}\right)'}{\frac{x-3}{x+2}}$

$=\frac{x+2-x+3}{(x+2)^2}\times\frac{x+2}{x-3}=\frac{5}{(x-3)(x+2)}$

គ. $y=x^2\ln x-\frac{x^2}{2}\Rightarrow y'=2x\ln x+x-x=2x\ln x$

7- សិក្សាអថេរភាពនិងសង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ខាងក្រោមៈ

ក. $y=\frac{e^x}{x-1}$ ខ. $y=e^{2x}-2e^x$ គ. $y=\frac{e^x+1}{e^x-1}$

សំរាយបញ្ជាក់ :

សិក្សាអថេរភាពនិងសង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ខាងក្រោមៈ

ក. $y=\frac{e^x}{x-1}$

+ **ដែនកំណត់** $:D=IR-\{1\}$

- ដេរីវេ $y'=\frac{e^x(x-2)}{(x-1)^2}; y'=0\Rightarrow x=2; y=e^2$

+ **លីមីត និងអាស៊ីមតូតៈ** $\lim_{x\to+\infty}y=+\infty$

$\lim_{x\to-\infty}y=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x}{(x-1)}=\lim_{t\to+\infty}\frac{e^{-t}}{(-t-1)}=\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{e^t(-t-1)}=0$

បន្ទាត់ $y = 0$ ជាអាស៊ីមតូតដេក ។

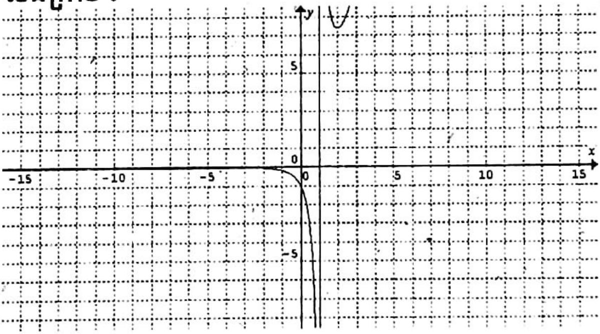
$\lim\limits_{x\to 1} y = \pm\infty$ នោះបន្ទាត់ $x = 1$ ជាអាស៊ីមតូតឈរ ។

+ តារាងអថេរភាព :

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
y'		$-$	‖	$-$	0	$+$	
y	0	↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	e^2	↗	$+\infty$

ខ្សែកោងកាត់អ័ក្ស $(y'oy)$ ត្រង់ $x = 0 \Rightarrow y = -1$

+ សង់ក្រាប :



៨. $y = e^{2x} - 2e^{x}$

+ ដែនកំណត់ : $D = IR$

- ដេរីវេ $y' = 2e^{2x} - 2e^{x} = 2e^{x}\left(e^{x} - 1\right)$.

$y' = 0 \Rightarrow e^{x} - 1 = 0 \Rightarrow x = 0; y = -1$

+ **លីមីតនិងអាស៊ីមតូត :** $\lim\limits_{x\to+\infty} y = +\infty; \lim\limits_{x\to-\infty} y = 0$ នោះបន្ទាត់ $y = 0$ ជាអាស៊ីមតូតដេក ។

+ **តារាងអថេរភាព :**

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

+ ចំណុចប្រសព្វរវាងខ្សែកោងនឹងអ័ក្ស :

$(x'ox): y=0 \Rightarrow e^{2x} - 2e^{x} = 0$

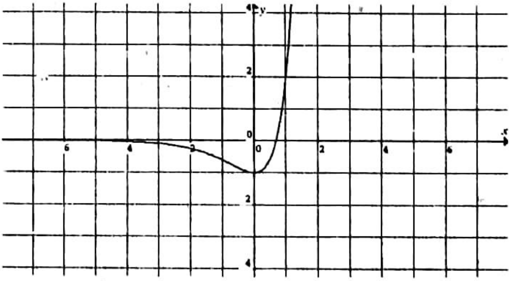
$\Rightarrow e^{x}\left(e^{x}-2\right) = 0 \Rightarrow e^{x} - 2 = 0 \Rightarrow x = \ln 2 = 0.7$

+ **ចំណុចរបត់** $y'' = 4e^{2x} - 2e^{x} = 2e^{x}\left(2e^{x}-1\right)$

$y'' = 0 \Rightarrow 2e^{x} - 1 = 0 \Rightarrow e^{x} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow x = -\ln 2 = -0.7$

$\Rightarrow y = e^{2\ln\frac{1}{2}} - 2e^{\ln\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{4} - 1 = -\dfrac{3}{4}$

+ **សង់ក្រាប :**



គ. $y = \dfrac{e^x + 1}{e^x - 1}$

+ដែនកំណត់ : $D = IR - \{0\}$

- ដេរីវេ $y' = \dfrac{-2e^x}{\left(e^x - 1\right)^2} < 0$ នោះយើងបាន f ជាអនុគមន៍ចុះជានិច្ច ហើយគ្មានចំនុចបរមាទេ ។

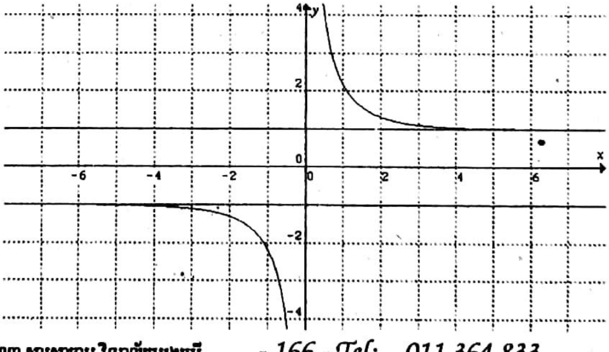
+លីមីតនិងអាស៊ីមតូត: $\lim\limits_{x\to+\infty} y = 1; \lim\limits_{x\to-\infty} y = -1$ យើងបាន បន្ទាត់ $y = -1$ និង $y = 1$ ជាអាស៊ីមតូតដេក ។

$\lim\limits_{x\to 0} y = \pm\infty$ យើងបាន បន្ទាត់ $x = 0$ ជាអាស៊ីមតូតឈរ ។

+តារាងអថេរភាព :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		$-$	||	$-$	
y	-1 ↘		$-\infty$ || $+\infty$		↘ 1

+សង់ក្រាប :



8- សិក្សាអថេរភាពនិងសង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ខាងក្រោមៈ

ក. $y = x - 1 - \ln x$ ខ. $y = \ln\left(\dfrac{x-3}{x+2}\right)$

គ. $y = x^2 \ln x - \dfrac{x^2}{2}$

សំរាយបញ្ជាក់ :

សិក្សាអថេរភាពនិងសង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ខាងក្រោមៈ

ក. $y = x - 1 - \ln x = x\left(1 - \dfrac{1}{x} - \dfrac{\ln x}{x}\right)$

+ដែនកំណត់ : $D = (0, +\infty)$

- ដេរីវេ: $y' = 1 - \dfrac{1}{x} = \dfrac{x-1}{x}; y' = 0 \Rightarrow x = 1; y = 0$

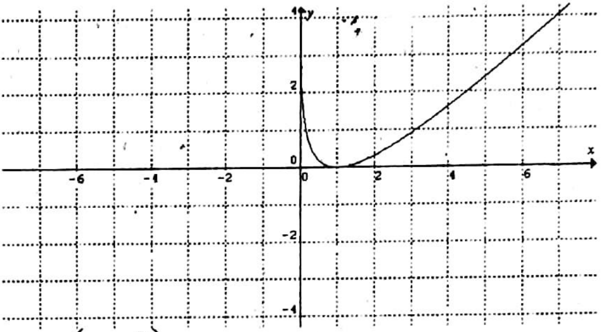
+លីមីត: $\lim\limits_{x\to 0} y = +\infty; \lim\limits_{x\to+\infty} y = +\infty$

+តារាងអថេរភាព :

x	0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

ចំពោះ $x = 4 \Rightarrow y = 3 - \ln 4 = 3 - 1.4 = 1.6$

+សង់ក្រាប :



ខ. $y=\ln\left(\frac{x-3}{x+2}\right)$

+**ដែនកំណត់** :អនុគមន៍មានន័យលុះត្រាតែ :

$\frac{x-3}{x+2}>0 \Rightarrow x\in(-\infty,-2)\cup(3,+\infty)$

- ដេរីវេ : $y'=\frac{5}{(x-3)(x+2)}>0$ នោះយើងបាន f ជាអនុគមន៍

កើនជានិច្ច ហើយគ្មានបរមាទេ ។

+**លីមីតនិងអាស៊ីមតូត:** $\lim_{x\to\pm\infty} y = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x-3}{x-2}\right) = \ln 1 = 0$

យើងបាន បន្ទាត់ $y=0$ ជាអាស៊ីមតូតដេក ។

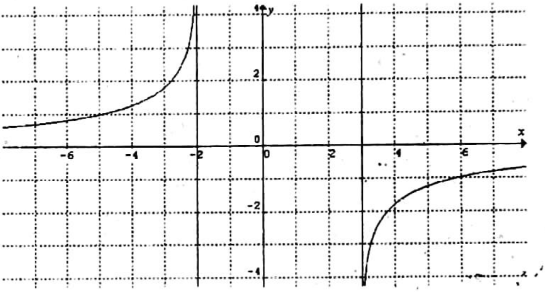
$\lim_{x\to -2^-} y = \pm\infty; \lim_{x\to 3^+} y = \pm\infty$ យើងបាន បន្ទាត់ $x=-2$ និង

$y=3$ ជាអាស៊ីមតូតឈរ ។

+ តារាងអថេរភាព :

x	$-\infty$		-2		3		$+\infty$
y'		$+$		[redacted]		$+$	
y	0	$\nearrow$	$+\infty$		$-\infty$	$\nearrow$	0

+ សង់ក្រាប



គ. $y = x^2 \ln x - \frac{x^2}{2}$

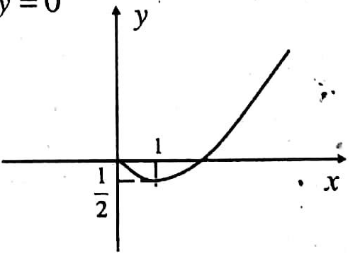
+ ដែនកំណត់ $D = (0, +\infty)$

-ដេរីវេ : $y' = 2x \ln x; y' = 0 \Rightarrow \ln x = 0 \Rightarrow x = 1; y = -\frac{1}{2}$

+ លីមីត: $\lim\limits_{x \to +\infty} y = +\infty; \lim\limits_{x \to 0} y = 0$

+ តារាងអថេរភាព :

x	0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	0	$\searrow$	$\frac{1}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$



9- មន្ត្រីរាជការម្នាក់មានអាយុ 30ឆ្នាំ បានយកប្រាក់ចំនួន 1000ដុល្លារ ទៅផ្ញើនៅធនាគារមួយដោយទទួលបានអត្រាការប្រាក់សមាស11% ក្នុងមួយឆ្នាំ។ ពេលចូលនិវត្តន៍អាយុ60ឆ្នាំតើគាត់មានប្រាក់សរុបទាំងអស់ចំនួនប៉ុន្មាន បើធនាគារទូទាត់ការប្រាក់ជាបន្តបន្ទាប់?

សំរាយបញ្ជាក់ :

តាមរូបមន្ត : $A = P(1+r)^t$ ដែល :

$P = 1000\$; r = 11\% = 0.11; t = 30$ ឆ្នាំ យើងបាន :

$A = 1000(1+0.11)^{30} = 22892\$$

ដូចនេះ នៅពេលចូលនិវត្តន៍អាយុ 60ឆ្នាំ មន្ត្រីនោះមានប្រាក់សរុប 22892ដុល្លា។

10-នៅទីក្រុងមួយកាលពី 20ឆ្នាំមុន មានប្រជាជនចំនួន 60000នាក់ ហើយចំនួនប្រជាជនមានការកើន ឡើងដោយអត្រាមួយថេរជារៀងរាល់ឆ្នាំ។ បើបច្ចុប្បន្នមានប្រជាជនចំនួន 150000នាក់ រកអត្រាកំណើននៃចំនួនប្រជាជនក្នុងទីក្រុងនេះ។

សំរាយបញ្ជាក់ :

រកអត្រាកំណើននៃចំនួនប្រជាជនក្នុងទីក្រុង :

តាមរូបមន្ត $p(t)=p_o e^{kt}$ ដែល p_o ចំនួនប្រជាជនកាលពី 20ឆ្នាំ មុន t រយៈពេល ។

តាមសម្មតិកម្ម $150000=60000e^{k20}$

$$\Rightarrow e^{20k}=\frac{150000}{60000}=2.5\Rightarrow 20k=\ln 2.5$$

$$\Rightarrow k=\frac{\ln 2.5}{20}=0.0458$$

ដូចនេះ ប្រជាជនក្នុងទីក្រុងនេះ មានអត្រាកើនឡើងប្រមាណជា 4.58% ក្នុងមួយឆ្នាំ ។

ជំពូក ៤ : អាំងតេក្រាល

មេរៀនទី១ ព្រីមីទីវ និងអាំងតេក្រាលមិនកំណត់

លំហាត់ :

1-បង្ហាញថា $F(x)$ ជាព្រីមីទីវនៃ $f(x)$;$\forall x\in IR$ ដែល:

ក. $F(x)=-7x+4$ និង $f(x)=-7$

ខ. $F(x)=3x^3-7x$ និង $f(x)=9x^2-7$

គ. $F(x)=3e^{x^2-1}-7$ និង $f(x)=6xe^{x^2-1}$

ឃ. $F(x)=\ln\left(e^{3x}-x\right)+\sqrt{11}$ និង $f(x)=\dfrac{3e^{3x}-1}{e^{3x}-x}$

សំរាយបញ្ជាក់ :

បង្ហាញថា $F(x)$ ជាព្រីមីទីវនៃ $f(x)$;$\forall x\in IR$ ដែល:

ក. $F(x)=-7x+4$ យើងបាន $F'(x)=-7=f(x)$

ដូចនេះ $F(x)$ ជាព្រីមីទីវនៃ $f(x)$.

ខ. $F(x)=3x^3-7x$ យើងបាន $F'(x)=9x^2-7=f(x)$

ដូចនេះ $F(x)$ ជាព្រីមីទីវនៃ $f(x)$ ។

គ. $F(x)=3e^{x^2-1}-7$ យើងបាន $F'(x)=6xe^{x^2-1}=f(x)$

ដូចនេះ $F(x)$ ជាព្រីមីទីវនៃ $f(x)$ ។

ឃ. $F(x)=\ln\left(e^{3x}-x\right)+\sqrt{11}$ នោះយើងបាន :

$$F'(x)=\frac{3e^{3x}-1}{e^{3x}-x}=f(x)$$

ដូចនេះ $F(x)$ ជាព្រីមីទីវនៃ $f(x)$ ។

2-រកព្រីមីទីវ $F(x)$ នៃអនុគមន៍ $f(x)$ កំណត់និងជាប់លើចន្លោះ I ដោយៈ

ក. $f(x)=5\ ;I=IR$

ខ. $f(x)=-4x+3\ ;I=IR$

គ. $f(x)=-x^2+3x+5\ ;I=IR$

ឃ. $f(x)=\frac{2}{x}\ ;I=\left(0;+\infty\right)$

ង. $f(x)=\frac{1}{3x+2}\ ;I=\left(-\frac{2}{3};+\infty\right)$

ច. $f(x)=\frac{x}{x^2+5}\ ;I=IR$

ឆ. $f(x)=e^{3x-2}\ ;I=IR$

ជ. $f(x)=xe^{x^2}\ ;I=IR$

សំរាយបញ្ជាក់ :

រកព្រីមីទីវ $F(x)$ នៃអនុគមន៍ $f(x)$ កំណត់និងជាប់លើចន្លោះ I

ដោយ:

ក. $f(x)=5$; $I=IR$ យើងបាន :

$$F(x)=\int f(x)dx=\int 5dx=5x+c \quad ;c\in IR$$

ខ. $f(x)=-4x+3$; $I=IR$ យើងបាន :

$$F(x)=\int f(x)dx=\int(-4x+3)dx=-2x^2+3x+c\,;c\in IR$$

គ. $f(x)=-x^2+3x+5$; $I=IR$ យើងបាន

$$F(x)=\int f(x)dx=\int\left(-x^2+3x+5\right)dx$$

$$=-\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2+5x+c\,;c\in IR$$

ឃ. $f(x)=\frac{2}{x}$; $I=(0;+\infty)$ នោះយើងបាន :

$$F(x)=\int f(x)dx=\int\frac{2}{x}dx=2\ln|x|+c\,;c\in IR$$

ង. $f(x)=\frac{1}{3x+2}$; $I=\left(-\frac{2}{3};+\infty\right)$ នោះយើងបាន :

$$F(x)=\int f(x)dx=\int\frac{1}{3x+2}dx=\frac{1}{3}\int\frac{(3x+2)'}{3x+2}dx$$

$$=\frac{1}{3}\ln|3x+2|+c\,;c\in IR$$

ច. $f(x)=\frac{x}{x^2+5}$; $I=IR$ យើងបាន :

$$F(x)=\int f(x)dx=\int\left(\frac{x}{x^2+5}\right)dx=\frac{1}{2}\int\frac{\left(x^2+5\right)'}{x^2+5}dx$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left(x^2+5\right)+c \quad ;c\in IR$$

ឃ. $f(x)=e^{3x-2} \quad ;I=IR$ យើងបាន

$$F(x)=\int f(x)dx=\int e^{3x-2}dx$$

$$=\frac{1}{(3x-2)'}e^{3x-2}=\frac{1}{3}e^{3x-2}+c;c\in IR$$

ង. $f(x)=xe^{x^2} \quad ;I=IR$ យើងបាន

$$F(x)=\int(x)dx=\int xe^{x^2}dx$$

$$=\frac{1}{2}\int\left(x^2\right)'e^{x^2}dx=\frac{1}{2}e^{x^2}+c;c\in IR$$

3- រកព្រីមីទីវ $F(x)$ នៃអនុគមន៍ f ដែលកំណត់ដោយ:

ក. $f(x)=\dfrac{3}{\cos^2 x}$ និង $F\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=-1$

ខ. $f(x)=x^2-x$ និង $F(0)=1$

គ. $f(x)=x^2-e^x$ និង $F(0)=1$

ឃ. $f(x)=x^2-xe^{x^2}$ និង $F(0)=1$

សំរាយបញ្ជាក់ :

រកព្រីមីទីវ $F(x)$ នៃអនុគមន៍ f ដែលកំណត់ដោយ:

ក. $f(x)=\dfrac{3}{\cos^2 x}$ និង $F\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=-1$ យើងបាន :

$$F(x)=\int f(x)dx=\int\frac{3}{\cos^2 x}dx=3\tan x+c$$

ដោយ $F\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=-1\Rightarrow 3\tan\dfrac{\pi}{4}+c=-1\Rightarrow c=-4$

ដូចនេះ $\boxed{F(x)=3\tan x-4}$

ខ. $f(x)=x^2-x$ និង $F(0)=1$ យើងបាន

$$F(x)=\int\left(x^2-x\right)dx=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+c$$

ដោយ $F(0)=1\Rightarrow c=1$

ដូចនេះ $\boxed{F(x)=\dfrac{1}{3}x^3-\dfrac{1}{2}x^2+1}$

គ. $f(x)=x^2-e^x$ និង $F(0)=1$ យើងបាន :

$$F(x)=\int f(x)dx=\int\left(x^2-e^x\right)dx=\frac{1}{3}x^3-e^x+c$$

ដោយ $F(0)=1\Rightarrow -1+c=1\Rightarrow c=2$

ដូចនេះ $\boxed{F(x)=\dfrac{1}{3}x^3-e^x+2}$

ឃ. $f(x)=x^2-xe^{x^2}$ និង $F(0)=1$ យើងបាន :

$$F(x)=\int\left(x^2-xe^{x^2}\right)dx=\int\left(x^2-\frac{1}{2}\left(x^2\right)'e^{x^2}\right)dx$$

$$=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}e^{x^2}+c$$

ដោយ $F(0)=1\Rightarrow -\frac{1}{2}+c=1\Rightarrow c=\frac{3}{2}$

ដូចនេះ $\boxed{F(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}e^{x^2}+\frac{3}{2}}$

4-រកព្រីមីទីវ $F(x)$ នៃអនុគមន៍ f ដែលកំណត់ដោយៈ

ក. $f(x)=\sin x$ និង $F(0)=3$

ខ. $f(x)=x-e^x$ និង $F(1)=1-e$

គ. $f(x)=\frac{x}{\left(x^2-4\right)^3}$ និង $F(5)=3$

ឃ. $f(x)=\sin x\cos^3 x$ និង $F\left(\frac{\pi}{4}\right)=16$

សំរាយបញ្ជាក់ :

ក. $f(x)=\sin x$ និង $F(0)=3$ យើងបាន :

$F(x)=\int\sin x dx=-\cos x+c$

ដោយ $F(0)=3\Rightarrow -1+c=3\Rightarrow c=4$

ដូចនេះ $\boxed{F(x)=-\cos x+4}$

ខ. $f(x)=x-e^x$ និង $F(1)=1-e$ យើងបាន :

$$F(x)=\int\left(x-e^x\right)dx=\frac{1}{2}x^2-e^x+c$$

ដោយ $F(1)=1-e\Rightarrow\frac{1}{2}-e+c=1-e\Rightarrow c=\frac{1}{2}$

ដូចនេះ $\boxed{F(x)=\frac{1}{2}x^2-e^x+\frac{1}{2}}$

គ. $f(x)=\frac{x}{\left(x^2-4\right)^3}$ និង $F(5)=3$ យើងបាន :

$$F(x)=\int\frac{x}{\left(x^2-4\right)^3}dx=\frac{1}{2}\int\left(x^2-4\right)'\left(x^2-4\right)^{-3}dx$$

$$=-\frac{1}{4}\left(x^2-4\right)^{-2}+c=-\frac{1}{4\left(x^2-4\right)^2}+c$$

ដោយ $F(5)=3\Rightarrow-\frac{1}{4\left(25-4\right)^2}+c=3\Rightarrow c=\frac{5293}{1764}$

ដូចនេះ $\boxed{F(x)=-\frac{1}{4\left(x^2-4\right)^2}+\frac{5293}{1764}}$

ឃ. $f(x)=\sin x\cos^3x$ និង $F\left(\frac{\pi}{4}\right)=16$ យើងបាន :

$$F(x)=\int\sin x\cos^3xdx=-\int\left(\cos x\right)'\cos^3xdx$$

$$=-\frac{1}{4}\cos^4x+c$$

ដោយ $F\left(\frac{\pi}{4}\right)=16 \Rightarrow -\frac{1}{4}\times\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^4+c=16 \Rightarrow c=\frac{257}{16}$

ដូចនេះ $\boxed{F(x)=-\frac{1}{4}\cos^4 x+\frac{257}{16}}$

5- គណនាអាំងតេក្រាលមិនកំណត់ខាងក្រោម:

ក. $\int(2x^3-5x^2+3x+1)dx$ ខ. $\int\left(5-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx$

គ. $\int 2\sqrt[4]{x}dx$ ឃ. $\int\left(\frac{3}{x^4}+\frac{1}{x^5}\right)dx$

ង. $\int(x^2-1)\sqrt{x}dx$ ច. $\int\left(2e^x+\frac{6}{x}-\ln 5\right)dx$

ឆ. $\int\frac{4x^4-3x^5+1}{x^4}dx$ ជ. $\int\frac{3x^2-2x+1}{\sqrt{x}}dx$

ឈ. $\int(3\sin x+5\cos x)dx$ ញ. $\int\left(\frac{1}{\sin^2 x}+\frac{4}{\cos^2 x}-5\right)dx$

ដ. $\int\frac{e^{3x}+1}{e^x+1}dx$ ឋ. $\int(1-e^x)^2dx$

ឌ. $\int\frac{\cos 2x dx}{\sin^2 x\cos^2 x}$ ឍ. $\int\frac{dx}{\sin^2 x\cos^2 x}$

សំរាយបញ្ជាក់ :

គណនាអាំងតេក្រាលមិនកំណត់ខាងក្រោម:

ក. $\int\left(2x^3-5x^2+3x+1\right)dx=\frac{1}{2}x^4-\frac{5}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2+x+c$

ខ. $\int\left(5-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx=5x-2\sqrt{x}+c \quad ;c\in IR$

គ. $\int 2\sqrt[4]{x}dx=2\int x^{\frac{1}{4}}dx=2\times\frac{4}{5}x^{\frac{5}{4}}+c=\frac{8}{5}x^{\frac{5}{4}}+c \ ;c\in IR$

ឃ. $\int\left(\frac{3}{x^4}+\frac{1}{x^5}\right)dx=\int\left(3x^{-4}+x^{-5}\right)dx=\frac{3}{-3}x^{-3}+\frac{1}{-4}x^{-4}+c$

$=-\frac{1}{x^3}-\frac{1}{4x^4}+c \ ;c\in IR$

ង. $\int\left(x^2-1\right)\sqrt{x}dx=\int\left(x^2-1\right)x^{\frac{1}{2}}dx=\int\left(x^{\frac{5}{2}}-x^{\frac{1}{2}}\right)dx$

$=\frac{2}{7}x^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+c \ ;c\in IR$

ច. $\int\left(2e^x+\frac{6}{x}-\ln 5\right)dx=2e^x+6\ln|x|-x\ln 5+c$

ឆ. $\int\frac{4x^4-3x^5+1}{x^4}dx=\int\left(4-3x+x^{-4}\right)dx$

$=4x-\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{3x^3}+c \quad ;c\in IR$

ជ. $\int\frac{3x^2-2x+1}{\sqrt{x}}dx=\int\left(3x^{\frac{3}{2}}-2x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}\right)dx$

$=\frac{6}{5}x^{\frac{5}{2}}-\frac{3}{4}x^{\frac{3}{2}}+2x^{\frac{1}{2}}+c \quad ;c\in IR$

ឈ. $\int(3\sin x+5\cos x)dx=-3\cos x+5\sin x+c \quad ;c\in IR$

ញ. $\int\left(\frac{1}{\sin^2 x}+\frac{4}{\cos^2 x}-5\right)dx=-\cot x+4\tan x-5x+c, c\in IR$

ដ. $\int\frac{e^{3x}+1}{e^x+1}dx=\int\frac{(e^x+1)(e^{2x}-e^x+1)}{e^x+1}dx$

$=\int(e^{2x}-e^x+1)dx=\frac{1}{2}e^{2x}-e^x+x+c \quad ;c\in IR$

ឋ. $\int(1-e^x)^2dx=\int(1-2e^x+e^{2x})dx$

$=x-2e^x+\frac{1}{2}e^{2x}+c \quad ;c\in IR$

ឌ. $\int\frac{\cos 2x dx}{\sin^2 x\cos^2 x}=\int\frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\sin^2 x\cos^2 x}dx$

$=\int\left(\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{\cos^2 x}\right)dx=-\cot x-\tan x+c \quad ;c\in IR$

ឍ. $\int\frac{dx}{\sin^2 x\cos^2 x}=\int\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin^2 x\cos^2 x}dx$

$=\int\left(\frac{1}{\cos^2 x}+\frac{1}{\sin^2 x}\right)dx=\tan x-\cot x+c \quad ;c\in IR$

6- គណនាអាំងតេក្រាលមិនកំណត់ខាងក្រោម:

ក. $\int 3e^{3x}dx$

ខ. $\int 2xe^{x^2}dx$

គ. $\int 5e^{4-5x}dx$

ឃ. $\int(6x-7)e^{3x^2-7x}dx$

ង. $\int(3x^2-2x+1)e^{x^3-x^2+x}dx$

ច. $\int\cos x e^{\sin x}dx$

ឆ. $\int xe^{x^2}dx$

ជ. $\int 6x^2e^{x^3}dx$

ឈ. $\int(x+1)e^{x^2+2x}dx$

ញ. $\int\frac{2}{\sqrt{x}e^{\sqrt{x}}}dx$ ។

សំរាយបញ្ជាក់ :

គណនាអាំងតេក្រាលមិនកំណត់ខាងក្រោម:

ក. $\int 3e^{3x}dx=3\times\frac{1}{3}e^{3x}+c=e^{3x}+c\quad;c\in IR$

ខ. $\int 2xe^{x^2}dx=\int(x^2)'e^{x^2}dx=e^{x^2}+c\quad;c\in IR$

គ. $\int 5e^{4-5x}dx=-\int(4-5x)'e^{4-5x}dx=-e^{4-5x}+c$

ឃ. $\int(6x-7)e^{3x^2-7x}dx=\int(3x^2-7x)'e^{3x^2-7x}dx$

$=e^{3x^2-7x}+c\quad;c\in IR$

ង. $\int(3x^2-2x+1)e^{x^3-x^2+x}dx=\int(x^3-x^2+x)'e^{x^3-x^2+x}dx$

$=e^{x^3-x^2+x}+c\quad;c\in IR$

ច. $\int\cos x e^{\sin x}dx=\int(\sin x)'e^{\sin x}dx=e^{\sin x}+c\ ;c\in IR$

ឆ. $\int xe^{x^2}dx=\frac{1}{2}\int(x^2)'e^{x^2}dx=\frac{1}{2}e^{x^2}+c\quad;c\in IR$

ជ. $\int 6x^2e^{x^3}dx=2\int(x^3)'e^{x^3}dx=2e^{x^3}+c\ ;c\in IR$

ឈ. $\int (x+1)e^{x^2+2x}dx = \frac{1}{2}\int (x^2+2x)' e^{x^2+2x}dx$

$= \frac{1}{2}e^{x^2+2x} + c \quad ; c \in IR$

ញ. $\int \frac{2}{\sqrt{x}e^{\sqrt{x}}}dx = -4\int (-\sqrt{x})' e^{-\sqrt{x}}dx = -4e^{-\sqrt{x}} + c \quad ; c \in IR$

7- គណនាអាំងតេក្រាលមិនកំណត់ខាងក្រោម៖

ក. $\int xe^{-x}dx$

ខ. $\int xe^{\frac{x}{2}}dx$

គ. $\int (1-x)e^{x}dx$

ឃ. $\int (3-2x)e^{-x}dx$

ង. $\int x\ln 2x dx$

ច. $\int x\ln x^2 dx$

ឆ. $\int xe^{-\frac{x}{5}}dx$

ជ. $\int xe^{0.1x}dx$

ឈ. $\int x\sqrt{x-6}dx$

ញ. $\int x\sqrt{1-x}dx$

ដ. $\int x(x+1)^8 dx$

ឋ. $\int (x+1)(x+2)^6 dx$

ឌ. $\int \frac{x}{\sqrt{x+2}}dx$

ឍ. $\int \frac{x}{\sqrt{2x+1}}dx$

ណ. $\int x^2e^{-x}dx$

ត. $\int x^2e^{3x}dx$

ថ. $\int x^3e^{x}dx$

ទ. $\int x^3e^{2x}dx$

ធ. $\int x^2\ln x dx$

ន. $\int x(\ln x)^2 dx$

ប. $\int \frac{\ln x}{x^2} dx$ ផ. $\int \frac{\ln x}{x^3} dx$ ។

សំរាយបញ្ជាក់ :

គណនាអាំងតេក្រាលមិនកំណត់ខាងក្រោម:

ក. $\int xe^{-x}dx$ តាង $f(x)=x \Rightarrow f'(x)=1$ និង

$g'(x)=e^{-x} \Rightarrow g(x)=-e^{-x}$ យើងបាន :

$$\int xe^{-x}dx=-xe^{-x}+\int e^{-x}dx=-xe^{-x}-e^{-x}+c \ ;c\in IR$$

ខ. $\int xe^{\frac{x}{2}}dx$ តាង $f(x)=x \Rightarrow f'(x)=1$ និង

$g'(x)=e^{\frac{x}{2}} \Rightarrow g(x)=2e^{\frac{x}{2}}$ យើងបាន :

$$\int xe^{\frac{x}{2}}dx=2xe^{\frac{x}{2}}-2\int e^{\frac{x}{2}}dx=2xe^{\frac{x}{2}}-4e^{\frac{x}{2}}+c \ ;c\in IR$$

គ. $\int (1-x)e^{x}dx$ តាង $f(x)=1-x \Rightarrow f'(x)=-1$ និង

$g'(x)=e^{x} \Rightarrow g(x)=e^{x}$ យើងបាន :

$$\int (1-x)e^{x}dx=(1-x)e^{x}+\int e^{x}dx$$

$$=(1-x)e^{x}+e^{x}+c \ ;c\in IR$$

ឃ. $\int (3-2x)e^{-x}dx$ តាង $f(x)=3-2x \Rightarrow f'(x)=-2$

$g'(x)=e^{-x} \Rightarrow g(x)=-e^{-x}$ យើងបាន :

$$\int(3-2x)e^{-x}dx=-(3-2x)e^{-x}-2\int e^{-x}$$

$$=-(3-2x)e^{-x}+2e^{-x}+c=2xe^{-x}-e^{-x}+c\ \ ;c\in IR$$

ង. $\int x\ln 2x dx$ តាង $f(x)=\ln 2x\Rightarrow f'(x)=\dfrac{1}{x}$ និង

$g'(x)=x\Rightarrow g(x)=\dfrac{x^2}{2}$ យើងបាន :

$$\int x\ln 2x dx=\frac{x^2}{2}\ln 2x-\frac{1}{2}\int xdx$$

$$=\frac{x^2}{2}\ln 2x-\frac{1}{4}x^2+c\ \ ;c\in IR$$

ច. $\int x\ln x^2 dx$ តាង $f(x)=\ln x^2\Rightarrow f'(x)=\dfrac{2}{x}$ និង

$g'(x)=x\Rightarrow g(x)=\dfrac{x^2}{2}$ យើងបាន :

$$\int x\ln x^2dx=\frac{x^2}{2}\text{in}\, x^2-\int xdx=\frac{x^2}{2}\ln x^2-\frac{x^2}{2}+c\ \ ;c\in IR$$

ឆ. $\int xe^{-\frac{x}{5}}dx$ តាង $f(x)=x\Rightarrow f'(x)=1$ និង

$g'(x)=e^{-\frac{x}{5}}\Rightarrow g(x)=-5e^{-\frac{x}{5}}$ យើងបាន :

$$\int xe^{-\frac{x}{5}}dx=-5xe^{-\frac{x}{5}}+5\int e^{-\frac{x}{5}}=-5xe^{-\frac{x}{5}}-25e^{-\frac{x}{5}}+c\ ;c\in IR$$

ជ. $\int xe^{0.1x}dx$ តាង $f(x)=x\Rightarrow f'(x)=1$ និង

$g'(x)=e^{0.1x} \Rightarrow g(x)=10e^{0.1x}$ យើងបាន :

$\int xe^{0.1x}dx=10xe^{0.1x}-10\int e^{0.1x}dx$

$=10xe^{0.1x}-100e^{0.1x}+c \quad ;c\in IR$

ឈ. $\int x\sqrt{x-6}dx$ តាង $f(x)=x \Rightarrow f'(x)=1$ និង

$g'(x)=\sqrt{x-6} \Rightarrow g(x)=\frac{2}{3}(x-6)^{\frac{3}{2}}$ យើងបាន :

$$\int x\sqrt{x-6}dx=\frac{2x}{3}(x-6)^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{3}\int(x-6)^{\frac{3}{2}}dx$$

$$=\frac{2x}{3}(x-6)^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{3}\times\frac{2}{5}(x-6)^{\frac{5}{2}}+c$$

$$=\frac{2x}{3}(x-6)^{\frac{3}{2}}-\frac{4}{15}(x-6)^{\frac{5}{2}}+c \quad ;c\in IR$$

ញ. $\int x\sqrt{1-x}dx$ តាង $f(x)=x \Rightarrow f'(x)=1$ និង

$g'(x)=\sqrt{1-x} \Rightarrow g(x)=-\frac{2}{3}(1-x)^{\frac{3}{2}}$ យើងបាន :

$$\int x\sqrt{1-x}dx=-\frac{2x}{3}(1-x)^{\frac{3}{2}}+\frac{2}{3}\int(1-x)^{\frac{3}{2}}dx$$

$$=-\frac{2x}{3}(1-x)^{\frac{3}{2}}-\frac{4}{15}(1-x)^{\frac{5}{2}}+c \quad ;c\in IR$$

ដ. $\int x(x+1)^8dx$ តាង $f(x)=x \Rightarrow f'(x)=1$ និង

$g'(x)=(x+1)^8 \Rightarrow g(x)=\frac{1}{9}(x+1)^9$ យើងបាន :

$$\int x(x+1)^8 dx = \frac{x}{9}(x+1)^9 - \frac{1}{9}\int (x+1)^9 dx$$

$$= \frac{x}{9}(x+1)^9 - \frac{1}{90}(x+1)^{10} + c \quad ; c \in IR$$

ឋ. $\int (x+1)(x+2)^6 dx$ តាង $f(x) = x+1 \Rightarrow f'(x) = 1$

និង $g'(x) = (x+2)^6 \Rightarrow g(x) = \frac{1}{7}(x+2)^7$ យើងបាន :

$$\int (x+1)(x+2)^6 dx = \frac{(x+1)(x+2)^7}{7} - \frac{1}{7}\int (x+2)^7 dx$$

$$= \frac{(x+1)(x+2)^7}{7} - \frac{1}{56}(x+2)^8 + c \quad ; c \in IR$$

ឌ. $\int \frac{x}{\sqrt{x+2}} dx$ តាង $f(x) = x \Rightarrow f'(x) = 1$ និង

$g'(x) = \frac{1}{\sqrt{x+2}} \Rightarrow g(x) = 2(x+2)^{\frac{1}{2}}$ យើងបាន :

$$\int \frac{x}{\sqrt{x+2}} dx = 2x(x+2)^{\frac{1}{2}} - 2\int (x+2)^{\frac{1}{2}} dx$$

$$= 2x(x+2)^{\frac{1}{2}} - \frac{4}{3}(x+2)^{\frac{3}{2}} + c \quad ; c \in IR$$

ឍ. $\int \frac{x}{\sqrt{2x+1}} dx$ តាង $f(x) = x \Rightarrow f'(x) = 1$ និង

$g'(x) = \frac{1}{\sqrt{2x+1}} \Rightarrow g(x) = (2x+1)^{\frac{1}{2}}$ យើងបាន :

$$\int \frac{x}{\sqrt{2x+1}}dx = x(2x+1)^{\frac{1}{2}} - \int (2x+1)^{\frac{1}{2}}dx$$

$$= x(2x+1)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{3}(2x+1)^{\frac{3}{2}} + c \quad ; c \in IR$$

ណ. $\int x^2 e^{-x}dx$ តាង $f(x) = x^2 \Rightarrow f'(x) = 2x$ និង

$g'(x) = e^{-x} \Rightarrow g(x) = -e^{-x}$ យើងបាន :

$$\int x^2 e^{-x}dx = -x^2 e^{-x} + 2\int xe^{-x}dx$$

ដោយ $\int xe^{-x}dx = -xe^{-x} - e^{-x} + c \; ; c \in IR$

$$\Rightarrow \int x^2 e^{-x}dx = -x^2 e^{-x} - 2xe^{-x} - 2e^{-x} + c \; ; c \in IR \, .$$

ត. $\int x^2 e^{3x}dx$ តាង $f(x) = x^2 \Rightarrow f'(x) = 2x$ និង

$g'(x) = e^{3x} \Rightarrow g(x) = \frac{1}{3}e^{3x}$ យើងបាន :

$$\int x^2 e^{3x}dx = \frac{1}{3}x^2 e^{3x} - \frac{2}{3}\int xe^{3x}dx$$

គណនា $\int xe^{3x}dx$ តាង $f(x) = x \Rightarrow f'(x) = 1$ និង

$g'(x) = e^{3x} \Rightarrow g(x) = \frac{1}{3}e^{3x}$ យើងបាន :

$$\int xe^{3x}dx = \frac{x}{3}e^{3x} - \frac{1}{3}\int e^{3x} = \frac{x}{3}e^{3x} - \frac{1}{9}e^{3x} + c$$

$$\Rightarrow \int x^2 e^{3x}dx = \frac{1}{3}x^2 e^{3x} - \frac{2}{3}\left(\frac{x}{3}e^{3x} - \frac{1}{9}e^{3x} + c\right)$$

$$= \frac{1}{3}x^2e^{3x} - \frac{2x}{9}e^{3x} + \frac{2}{27}e^{3x} + c \quad ;c \in IR$$

ថ. $\int x^3e^x dx$ តាង $f(x) = x^3 \Rightarrow f'(x) = 3x^2$

និង $g'(x) = e^x \Rightarrow g(x) = e^x$ យើងបាន :

$$\int x^3e^x dx = x^3e^x - 3\int x^2e^x dx$$

តែ $\int x^2e^x dx$ តាង $f(x) = x^2 \Rightarrow f'(x) = 2x$ និង

$g'(x) = e^x \Rightarrow g(x) = e^x$ យើងបាន :

$\int x^2e^x dx = x^2e^x - 2\int xe^x dx$ និង $\int xe^x dx$ តាង

$f(x) = x \Rightarrow f'(x) = 1$ និង $g'(x) = e^x \Rightarrow g(x) = e^x$

$$\Rightarrow \int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + c$$

$$\Rightarrow \int x^2e^x dx = x^2e^x - 2\left(xe^x - e^x + c\right)$$

$$= x^2e^x - 2xe^x + 2e^x + c$$

$$\Rightarrow \int x^3e^x dx = x^3e^x - 3\left(x^2e^x - 2xe^x + 2e^x + c\right)$$

$$= x^3e^x - 3x^2e^x + 6xe^x - 6e^x + c \quad ;c \in IR$$

ទ. $\int x^3e^{2x} dx = \frac{1}{2}x^3e^{2x} - \frac{3}{4}x^2e^{2x} + \frac{3}{4}xe^{2x} - \frac{3}{8}e^{2x} + c; c \in IR$

ស្រាយដូចខាងលើ :

ធ. $\int x^2 \ln x dx$ តាង $f(x) = \ln x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}$ និង

$$g'(x)=x^2 \Rightarrow g(x)=\frac{1}{3}x^3$$ យើងបាន :

$$\int x^2 \ln x dx=\frac{1}{3}x^3 \ln x-\frac{1}{3}\int x^2 dx$$

$$=\frac{1}{3}x^3 \ln x-\frac{1}{9}x^3+c \quad ;c\in IR$$

ឱ. $\int x(\ln x)^2 dx$ តាង $f(x)=(\ln x)^2 \Rightarrow f'(x)=\frac{2}{x}\ln x$

និង $g'(x)=x \Rightarrow g(x)=\frac{x^2}{2}$ យើងបាន :

$$\int x(\ln x)^2 dx=\frac{x^2}{2}(\ln x)^2-\int x\ln x dx$$

តែ $\int x\ln x dx$ តាង $f(x)=\ln x \Rightarrow f'(x)=\frac{1}{x}$ និង

$g'(x)=x \Rightarrow g(x)=\frac{x^2}{2}$ យើងបាន :

$$\int x\ln x dx=\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{1}{2}\int x dx=\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{1}{4}x^2+c$$

$$\Rightarrow \int x(\ln x)^2 dx=\frac{x^2}{2}(\ln x)^2-\frac{x^2}{2}\ln x+\frac{1}{4}x^2+c \ ;c\in IR$$

ឋ. $\int \frac{\ln x}{x^2}dx$ តាង $f(x)=\ln x \Rightarrow f'(x)=\frac{1}{x}$ និង

$g'(x)=\frac{1}{x^2} \Rightarrow g(x)=-\frac{1}{x}$ យើងបាន :

$$\int\frac{\ln x}{x^2}dx=-\frac{\ln x}{x}+\int\frac{1}{x^2}dx=-\frac{\ln x}{x}-\frac{1}{x}+c\quad ;c\in IR$$

ផ. $\int\frac{\ln x}{x^3}dx$ តាង $f(x)=\ln x\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{x}$ និង

$g'(x)=\frac{1}{x^3}\Rightarrow g(x)=-\frac{1}{2x^2}$ យើងបាន:

$$\int\frac{\ln x}{x^3}dx=-\frac{\ln x}{2x^2}-\frac{1}{2}\int\frac{1}{x^3}dx=-\frac{\ln x}{2x^2}-\frac{1}{2}\int x^{-3}dx$$

$$=-\frac{\ln x}{2x^2}-\frac{1}{4x^2}+c\quad ;c\in IR$$

8- តម្លៃរបស់រថយន្តមាន ការថយចុះជារៀងរាល់ឆ្នាំស្របទៅនឹងអាយុកាលរបស់វា។ បើអត្រាចុះកំណត់ដោយអនុគមន៍ : $f(t)=-100t(t+3)^{-2}$ (គិតជាម៉ឺនរៀល) ដែល t ជាអាយុកាលរបស់រថយន្តគិតជាឆ្នាំ។ រកអនុគមន៍នៃតម្លៃរថយន្ត ក្នុងរយះពេល t ឆ្នាំដោយដឹងថាតម្លៃរថយន្ត ពេលទើបផលិតថ្មី $F(0)=1200$ (គិតជាម៉ឺនរៀល) ។

សំរាយបញ្ជាក់ :

រកអនុគមន៍នៃតម្លៃរថយន្ត ក្នុងរយះពេល t ឆ្នាំ

ដោយ $f(t)=-100t(t+3)^{-2}$ យើងបាន :

$$F(t)=\int f(t)dt=-100\int t(t+3)^{-2}dt$$

តាង $f(t)=t \Rightarrow f'(t)=1$ និង

$g'(t)=(t+3)^{-2} \Rightarrow g(t)=-\frac{1}{t+3}$ យើងបាន :

$$F(t)=-100\left(-\frac{t}{t+3}+\int\frac{dt}{t+3}\right)=\frac{100t}{t+3}-100\ln|t+3|+c$$

ដោយ $F(0)=1200$ យើងបាន :

$$F(0)=-100\ln 3+c=1200 \Rightarrow c=1200+100\ln 3$$

ដូចនេះ $\boxed{F(t)=\frac{100t}{t+3}-100\ln|t+3|+1200+100\ln 3}$

9- តម្លៃដីនៅតាមកសិដ្ឋានមានការកើនឡើងជារៀងរាល់ឆ្នាំ ដែលអត្រាកំណើននៃតម្លៃដីក្នុងមួយហិចតាកំណត់ដោយអនុគមន៍

$V'(x)=\frac{0.4x^3}{\sqrt{0.2x^4+8000}}$ (គិតជាម៉ឺនរៀល) ហើយ x ជាចំនួនឆ្នាំ

បើគេដឹងថាតម្លៃដីពេលបច្ចុប្បន្ន900 (គិតជាម៉ឺនរៀល) ក្នុងមួយហិចតា ។រកអនុគមន៍តម្លៃដីមួយហិចតានៅរយៈពេល 10ឆ្នាំទៅមុខទៀត

សំរាយបញ្ជាក់ :

រកអនុគមន៍តម្លៃដីមួយហិចតានៅរយៈពេល 10ឆ្នាំទៅមុខទៀត

ដោយ $V'(x)=\frac{0.4x^3}{\sqrt{0.2x^4+8000}}$ យើងបាន :

$$V(x)=\int\frac{0.4x^3}{\sqrt{0.2x^4+8000}}dx$$

$$=\frac{1}{2}\int(0.2x^4+8000)'(0.2x^4+8000)^{-\frac{1}{2}}$$

$$=(0.2x^4+8000)^{\frac{1}{2}}+c$$

ដោយ $V(0)=900\Rightarrow 8000^{\frac{1}{2}}+c=900\Rightarrow c=900-89=811$

យើងបាន $V(x)=(0.2x^4+8000)^{\frac{1}{2}}+811$

$\Rightarrow V(10)=(0.2\times10^4+8000)^{\frac{1}{2}}+811=911$ ម៉ឺនរៀល ។

ដូចនេះ $\boxed{V(10)=911}$ ម៉ឺនរៀល .

10- អត្រាកំណើនប្រជាពលរដ្ឋក្នុងទីក្រុងមួយជាអនុគមន៍

$P'(t)=5+4t^{\frac{1}{3}}$ នាក់ក្នុងមួយខែ ដែល t ជាចំនួនខែ ។

បើគេដឹងថាចំនួនប្រជាពលរដ្ឋបច្ចុប្បន្ន មាន 2 000 000នាក់ ។

រកអនុគមន៍នៃចំនួនប្រជាពលរដ្ឋនៅរយះពេល8ខែទៅមុខទៀត ។

សំរាយបញ្ជាក់ :

ដោយ $P'(t)=5+4t^{\frac{1}{3}}$ យើងបាន :

$$P(x)=\int\left(5+4t^{\frac{1}{3}}\right)dt=5t+4\times\frac{3}{4}t^{\frac{4}{3}}+c=5t+3t^{\frac{4}{3}}+c$$

ដោយ $P(0) = c = 2000000$

$\Rightarrow P(8) = 5\times 8 + 3\times 8^{\frac{4}{3}} + 2000000 = 2000088$ នាក់

ដូចនេះ $\boxed{P(8) = 2000088}$ នាក់

មេរៀនទី២ : អាំងតេក្រាលកំណត់

លំហាត់

1- គណនាតម្លៃនៃ :

ក. $\int_1^2 f(x)dx + \int_2^1 f(x)dx$ ខ. $\int_1^1 \frac{f(x)}{3}dx$ ។

សំរាយបញ្ជាក់ :

គណនាតម្លៃនៃ :

ក. $\int_1^2 f(x)dx + \int_2^1 f(x)dx = \int_1^2 f(x)dx - \int_1^2 f(x)dx = 0$

ខ. $\int_1^1 \frac{f(x)}{3}dx = \frac{1}{3}[F(1) - F(1)] = 0$

2- គេមាន f និង g ជាអនុគមន៍ជាប់ហើយ $\int_1^2 f(x)dx = -4$

$\int_2^5 f(x)dx = 6$; $\int_1^5 g(x)dx = 8$ ។ គណនា :

ក . $\int_1^5 f(x)dx$ ខ. $\int_5^1 [-4f(x)]dx$

គ. $\int_1^5 [4f(x) - 2g(x)]dx$

សំរាយបញ្ជាក់ :

ក . $\int_1^5 f(x)dx = \int_1^2 f(x)dx + \int_2^5 f(x)dx = -4 + 6 = 2$

ខ. $\int_5^1 [-4f(x)]dx = 4\int_1^5 f(x)dx = 8$

គ. $\int_1^5[4f(x)-2g(x)]dx=4\int_1^5 f(x)dx-2\int_1^5 g(x)dx$

$=4\times2-2\times8=-8$

3- ចូរគណនាតម្លៃនៃ k បើ $\int_1^k \frac{1}{\sqrt{2x-1}}dx=2$ ។

សំរាយបញ្ជាក់ :

គណនាតម្លៃនៃ k បើ $\int_1^k \frac{1}{\sqrt{2x-1}}dx=2$

យើងមាន : $\int_1^k \frac{1}{\sqrt{2x-1}}dx=\int_1^k(2x-1)^{-\frac{1}{2}}=\left[\sqrt{2x-1}\right]_1^k$

$=\left(\sqrt{2k-1}-1\right)$

តែ $\int_1^k \frac{1}{\sqrt{2x-1}}dx=2\Rightarrow\left(\sqrt{2k-1}-1\right)=2\Rightarrow\sqrt{2k-1}=3$

$\Rightarrow 2k-1=9\Rightarrow k=5$

ដូចនេះ $\boxed{k=5}$

4- គណនា :

ក. $\int_1^1\left(3x^2+1\right)dx$

ខ. $\int_1^2\left(\frac{1}{x^2}-3\right)dx$

គ. $\int_4^9\frac{2}{\sqrt{x}}dx$

ឃ. $\int_2^4\sqrt{x-2}dx$

ង. $\int_2^4\sqrt[3]{x-2}dx$

ច. $\int_{-4}^0\frac{1}{\sqrt{4-x}}dx$

ង. $\int_5^1 \frac{1}{\sqrt{3x+1}}dx$ ច. $\int_1^3 5x\left(x^2-7\right)^3 dx$

ឈ. $\int_0^2 3x^2\sqrt{x^3+1}dx$ ញ. $\int_1^2 \frac{x+2}{\sqrt{x^2+4x+1}}dx$

ដ. $\int_1^4\left(\frac{3-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)dx$ ឋ. $\int_0^1\left(3x^2-2x\right)^2 dx$

ឌ. $\int_0^4\left[\frac{x+1}{\left(x^2+2x+2\right)^3}\right]dx$ ។

សំរាយបញ្ជាក់ :

គណនា :

ក. $\int_1^1\left(3x^2+1\right)dx=0$

ខ. $\int_1^2\left(\frac{1}{x^2}-3\right)dx=\left[-\frac{1}{x}-3x\right]_1^2=\left(-\frac{1}{2}-6\right)-(-1-3)=-\frac{5}{2}$

គ. $\int_4^9 \frac{2}{\sqrt{x}}dx=4\left[\sqrt{x}\right]_4^9=4(3-2)=4$

ឃ. $\int_2^4\sqrt{x-2}dx=\int_2^4(x-2)^{\frac{1}{2}}dx=\frac{2}{3}\left[(x-2)^{\frac{3}{2}}\right]_2^4$

$=\frac{2}{3}\left(2\sqrt{2}-0\right)=\frac{4\sqrt{2}}{3}$

ង. $\int_2^4\sqrt[3]{x-2}dx=\int_2^4(x-2)^{\frac{1}{3}}dx=\frac{3}{4}\left[(x-2)^{\frac{4}{3}}\right]_2^4$

$$= \frac{3}{4}\left(2\sqrt[3]{2}-0\right) = \frac{3\sqrt[3]{2}}{2}$$

ច. $\int_{-4}^{0} \frac{1}{\sqrt{4-x}}dx = \int_{-4}^{0}(4-x)^{-\frac{1}{2}}dx = -2\left[\sqrt{4-x}\right]_{-4}^{0}$

$$= -2\left(2-2\sqrt{2}\right) = -4+4\sqrt{2}$$

ឆ. $\int_{5}^{1} \frac{1}{\sqrt{3x+1}}dx = \int_{5}^{1}(3x+1)^{-\frac{1}{2}}dx = \frac{2}{3}\left[\sqrt{3x+1}\right]_{5}^{1}$

$$= \frac{2}{3}(2-4) = -\frac{4}{3}$$

ជ. $\int_{1}^{3} 5x\left(x^2-7\right)^3 dx = \frac{5}{2}\int_{1}^{3}\left(x^2-7\right)'\left(x^2-7\right)^3 dx$

$$= \frac{5}{8}\left[\left(x^2-7\right)^4\right]_{1}^{3} = \frac{5}{8}(16-1296) = -800$$

ឈ. $\int_{0}^{2} 3x^2\sqrt{x^3+1}dx = \int_{0}^{2}\left(x^3+1\right)'\left(x^3+1\right)^{\frac{1}{2}}dx$

$$= \frac{2}{3}\left[\left(x^3+1\right)^{\frac{3}{2}}\right]_{0}^{2} = \frac{2}{3}(27-1) = \frac{52}{3}$$

ញ. $\int_{1}^{2} \frac{x+2}{\sqrt{x^2+4x+1}}dx = \frac{1}{2}\int_{1}^{2}\left(x^2+4x+1\right)'\left(x^2+4x+1\right)^{-\frac{1}{2}}dx$

$$= \left[\left(x^2+4x+1\right)^{\frac{1}{2}}\right]_{1}^{2} = \sqrt{13}-\sqrt{6}$$

ដ. $\int_{1}^{4}\left(\frac{3-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)dx = \int_{1}^{4}\left(3x^{-\frac{1}{2}}-1\right)dx$

$$=\left[6\sqrt{x}-x\right]_1^4=(12-4)-(6-1)=3$$

ឋ. $\int_0^1\left(3x^2-2x\right)^2dx=\int_0^1\left(9x^4-12x^3+4x^2\right)dx$

$$=\left[\frac{9}{5}x^5-3x^4+\frac{4}{3}x^3\right]_0^1=\frac{9}{5}-3+\frac{4}{3}=\frac{27-45+20}{15}=\frac{2}{15}$$

ឌ. $\int_0^4\left[\frac{x+1}{\left(x^2+2x+2\right)^3}\right]dx$

$$=\frac{1}{2}\int_0^4\left(x^2+2x+2\right)'\left(x^2+2x+2\right)^{-3}dx=-\frac{1}{4}\left[\frac{1}{\left(x^2+2x+2\right)^2}\right]_0^4$$

$$=-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{676}-\frac{1}{4}\right)=-\frac{1}{4}\times\frac{-168}{676}=\frac{168}{2704}=\frac{21}{338}$$

5. គណនា :

ក. $\int_1^2 3e^{4x}dx$ ខ. $\int_0^1 4x^3e^{2x^4}dx$ គ. $\int_1^4\frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$

ឃ. $\int_1^3 3e^{2x}\left(e^{-2x}-1\right)dx$ ង. $\int_0^1\frac{dx}{2+3x}$ ។

ដំណោះស្រាយ :

គណនា :

ក. $\int_1^2 3e^{4x}dx=\frac{3}{4}\left[e^{4x}\right]_1^2=\frac{3}{4}\left(e^8-e^4\right)$

ខ. $\int_0^1 4x^3e^{2x^4}dx = \frac{1}{2}\int_0^1 (2x^4)' e^{2x^4}dx = \frac{1}{2}\left[e^{2x^4}\right]_0^1$

$= \frac{1}{2}\left(e^2 - 1\right)$

គ. $\int_1^4 \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx = 2\int_1^4 (\sqrt{x})' e^{\sqrt{x}}dx = 2\left[e^{\sqrt{x}}\right]_1^4 = 2\left(e^2 - e\right)$

ឃ. $\int_1^3 3e^{2x}\left(e^{-2x} - 1\right)dx = \int_1^3 \left(3 - 3e^{2x}\right)dx = \left[3x - \frac{3}{2}e^{2x}\right]_1^3$

$= \left(9 - \frac{3}{2}e^6\right) - \left(3 - \frac{3}{2}e^2\right) = 6 - \frac{3}{2}e^6 + \frac{3}{2}e^2$

ង. $\int_0^1 \frac{dx}{2+3x} = \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{(2+3x)'}{2+3x}dx = \frac{1}{3}\left[\ln|2+3x|\right]_0^1$

$= \frac{1}{3}(\ln 5 - \ln 2) = \frac{1}{3}\ln\frac{5}{2}$

6. គណនា :

ក. $\int_0^1 \frac{2x^2}{1+2x^3}dx$

ខ. $\int_1^{\ln 2} \frac{e^x}{4e^x - 2}dx$

គ. $\int_0^2 \frac{x}{(1+x^2)}dx$

ឃ. $\int_1^e \frac{(\ln x)^2}{x}dx$

ង. $\int_0^1 xe^{2x^2}dx$

ច. $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan x dx$

ឆ. $\int_1^e \frac{(1+\ln x)^2}{2x}dx$

ជ. $\int_e^{e^2} \frac{1}{x\ln x}dx$

សំរាយបញ្ជាក់ :

ក. $\int_0^1 \frac{2x^2}{1+2x^3}dx = \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{\left(1+2x^3\right)'}{1+2x^3}dx$

$= \frac{1}{3}\left[\ln\left|1+2x^3\right|\right]_0^1 = \frac{1}{3}(\ln 3 - \ln 1) = \frac{1}{3}\ln 3$

ខ. $\int_1^{\ln 2} \frac{e^x}{4e^x-2}dx = \frac{1}{4}\int_1^{\ln 2} \frac{\left(4e^x-2\right)'}{4e^x-2}dx = \frac{1}{4}\left[\ln\left|4e^x-2\right|\right]_1^{\ln 2}$

$= \frac{1}{4}(\ln 6 - \ln(4e-2)) = \frac{1}{4}\ln 6 - \frac{1}{4}\ln(4e-2)$

គ. $\int_0^2 \frac{x}{\left(1+x^2\right)}dx = \frac{1}{2}\int_0^2 \frac{\left(1+x^2\right)'}{\left(1+x^2\right)}dx$

$= \frac{1}{2}\left[\ln\left|1+x^2\right|\right]_0^2 = \frac{1}{2}(\ln 5 - \ln 1) = \frac{1}{2}\ln 5$

ឃ. $\int_1^e \frac{(\ln x)^2}{x}dx = \int_1^e (\ln x)'(\ln x)^2 dx$

$= \frac{1}{3}\left[(\ln x)^3\right]_1^e = \frac{1}{3}\left(\ln^3 e - \ln^3 1\right) = \frac{1}{3}$

ង. $\int_0^1 xe^{2x^2}dx = \frac{1}{4}\int_0^1 \left(2x^2\right)'e^{2x^2}dx = \frac{1}{4}\left[e^{2x^2}\right]_0^1 = \frac{1}{4}\left(e^2-1\right)$

ច. $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan x dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{\cos x}dx = -\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{(\cos x)'}{\cos x}dx = -\left[\ln|\cos x|\right]_0^{\frac{\pi}{3}}$

$= -\left(\ln\cos\frac{\pi}{3} - \ln\cos 0\right) = -\left(\ln\frac{1}{2} - \ln 1\right) = -\ln 2^{-1} = \ln 2$

ឆ. $\int_1^e \frac{(1+\ln x)^2}{2x}dx = \frac{1}{2}\int_1^e (1+\ln x)'(1+\ln x)^2 dx$

$= \frac{1}{6}\left[(1+\ln x)^3\right]_1^e = \frac{1}{6}\left[(1+\ln e)^3 - (1+\ln 1)^3\right]$

$= \frac{1}{6}(8-1) = \frac{7}{6}$

ជ. $\int_e^{e^2} \frac{1}{x\ln x}dx = \int_e^{e^2} \frac{(\ln x)'}{\ln x}dx$

$= \left[\ln\ln x\right]_e^{e^2} = \ln\ln e^2 - \ln\ln e = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2$

7- សហគ្រាសមួយ ទទួលបានប្រាក់ចំណូលបន្ថែមពីការលក់ផលិតផល ប្រើប្រាស់ចំនួន t គ្រឿង ។ បើអត្រានៃចំណូលបន្ថែមកំណត់ដោយ អនុគមន៍ $R'(t) = 180 + 0.2t$ (គិតជាពាន់រៀល) ក្នុងមួយគ្រឿង រកបម្រែបម្រួលនៃប្រាក់ចំណូលក្នុងការលក់កើនឡើងពីចំនួន 30ទៅ 40គ្រឿង ។

សំរាយបញ្ជាក់ :

បម្រែបម្រួលនៃប្រាក់ចំណូលក្នុងការលក់កើនឡើងពីចំនួន 30ទៅ40 គ្រឿងកំណត់ដោយ :

$\int_{30}^{40}(180+0.2t)dt = \left[180t + 0.1t^2\right]_{30}^{40}$

$= (7200+160) - (5400+90) = 1870$ គិតជាពាន់រៀល

លំហាត់ជំពូក៤

1. គណនាអាំងតេក្រាលមិនកំណត់ខាងក្រោម:

ក. $\int 2xdx$ ខ. $\int 4dx$

គ. $\int (2x+3)dx$ ឃ. $\int (-2)dx$

ង. $\int (-5x+4)dx$ ច. $\int x^2dx$

ឆ. $\int 3x^2dx$ ជ. $\int \left(-4x^2+5x+7\right)dx$

ឈ. $\int \left(-4x^7-5x^4+7x^3-6x+8\right)dx$

ញ. $\int \frac{1}{x^2}dx$ ដ. $\int \frac{-5}{x^2}dx$

ឋ. $\int \left(4-\frac{7}{x^2}\right)dx$ ឌ. $\int \frac{3}{4}\sqrt{x}dx$

ឍ. $\int \left(4\sqrt{x}+\frac{4}{x^2}\right)dx$ ណ. $\int \frac{3}{4}\sqrt{2x+1}dx$

ត. $\int (3x-1)^2 dx$ ថ. $\int 5(3x-1)^4 dx$

ទ. $\int 5x\left(3x^2-1\right)^4 dx$ ធ. $\int 2\left(2x^3+1\right)^4 6x^2dx$

ន. $\int 2x^2\left(2x^3+1\right)^4 dx$ ។

សំរាយបញ្ជាក់ :

គណនាអាំងតេក្រាលមិនកំណត់ខាងក្រោម:

ក. $\int 2xdx = x^2 + c \quad ;c\in IR$

ខ. $\int 4dx = 4x + c \quad ;c\in IR$

គ. $\int (2x+3)dx = x^2 + 3x + c \quad ;c\in IR$

ឃ. $\int (-2)dx = -2x + c \quad ;c\in IR$

ង. $\int (-5x+4)dx = -\frac{5}{2}x^2 + 4x + c \quad ;c\in IR$

ច. $\int x^2dx = \frac{1}{3}x^3 + c \quad ;c\in IR$

ឆ. $\int 3x^2dx = x^3 + c \quad ;c\in IR$

ជ. $\int (-4x^2+5x+7)dx = -\frac{4}{3}x^3 + \frac{5}{2}x^2 + 7x + c \quad ;c\in IR$

ឈ. $\int (-4x^7 - 5x^4 + 7x^3 - 6x + 8)dx$

$= -\frac{1}{2}x^8 - x^5 + \frac{7}{4}x^4 - 3x^2 + 8x + c \quad ;c\in IR$

ញ. $\int \frac{1}{x^2}dx = \int x^{-2}dx = -\frac{1}{x} + c \quad ,c\in IR$

ដ. $\int \frac{-5}{x^2}dx = \frac{5}{x} + c \quad ,c\in IR$

ឋ. $\int \left(4 - \frac{7}{x^2}\right)dx = 4x + \frac{7}{x} + c \quad ;c\in IR$

ឌ. $\int \frac{3}{4}\sqrt{x}dx = \frac{1}{2}x^{\frac{3}{2}} + c \quad ;c\in IR$

ឍ. $\int\left(4\sqrt{x}+\frac{4}{x^2}\right)dx=\frac{8}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{4}{x}+c \quad ;c\in IR$

ណ. $\int\frac{3}{4}\sqrt{2x+1}dx=\frac{1}{4}(2x+1)^{\frac{3}{2}}+c \quad ;c\in IR$

ត. $\int(3x-1)^2dx=\frac{1}{9}(3x-1)^3+c \quad ;c\in IR$

ថ. $\int5(3x-1)^4dx=\frac{1}{3}(3x-1)^5+c \quad ;c\in IR$

ទ. $\int5x\left(3x^2-1\right)^4dx=\frac{5}{6}\int\left(3x^2-1\right)'\left(3x^2-1\right)^4dx$

$=\frac{1}{6}\left(3x^2-1\right)^5+c \quad ;c\in IR$

ធ. $\int2\left(2x^3+1\right)^4 6x^2dx=2\int\left(2x^3+1\right)'\left(2x^3+1\right)^4dx$

$=\frac{2}{5}\left(2x^3+1\right)^5+c \quad ;c\in IR$

ន. $\int2x^2\left(2x^3+1\right)^4dx=\frac{1}{3}\int\left(2x^3+1\right)'\left(2x^3+1\right)^4dx$

$=\frac{1}{15}\left(2x^3+1\right)^5+c \quad ;c\in IR$

2- គណនាអាំងតេក្រាលដោយប្រើអថេរជំនួសៈ

ក. $\int_2^3 2(2x+1)\left(x^2+x-3\right)dx$ ខ. $\int_{\frac{1}{2}}^0(4x+1)e^{2x^2+x}dx$

គ. $\int_2^3\frac{2x+1}{x^2+x-1}dx$ ឃ. $\int_0^1 xe^{x^2+1}dx$

ង. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \sin x \cos x dx$ ច. $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos^5 x dx$

ឆ. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \cos x\left(\sin x + \sin^3 x\right)dx$ ជ. $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos^3 x}dx$

ឈ. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin^2 x}dx$ ញ. $\int_{e}^{\sqrt{e}} \frac{\ln x}{x}dx$

ដ. $\int_{1}^{2} \frac{10x+1}{\sqrt{5x^2+x+3}}dx$ ឋ. $\int_{1}^{2} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}dx$

ឌ. $\int_{1}^{e} \frac{\ln x+1}{x}dx$ ឍ. $\int_{0}^{\pi} (\cos x)\left(1-3\sin^2 x\right)dx$

សំរាយបញ្ជាក់ :

គណនាអាំងតេក្រាលដោយប្រើអថេរជំនួស:

ក. $\int_{2}^{3} 2(2x+1)\left(x^2+x-3\right)dx$ តាង $t = x^2 + x - 3$

$\Rightarrow dt = (2x+1)dx$ បើ $x = 2 \Rightarrow t = 3; x = 3; t = 9$

$\int_{2}^{3} 2(2x+1)\left(x^2+x-3\right)dx = 2\int_{3}^{9} tdt = \left[t^2\right]_{3}^{9} = 81-9 = 72$

ខ. $\int_{-\frac{1}{2}}^{0} (4x+1)e^{2x^2+x}dx$ តាង $t = 2x^2 + x \Rightarrow dt = (4x+1)dx$

បើ $x = -\frac{1}{2} \Rightarrow t = 0; x = 0 \Rightarrow t = 0$ យើងបាន :

$\int_{-\frac{1}{2}}^{0} (4x+1)e^{2x^2+x}dx = \int_{0}^{0} e^t dt = 0$

គ. $\int_2^3 \frac{2x+1}{x^2+x-1}dx$ តាង $t = x^2+x-1 \Rightarrow dt = (2x+1)dx$

បើ $x=2 \Rightarrow t=5; x=3 \Rightarrow t=11$ យើងបាន

$$\int_2^3 \frac{2x+1}{x^2+x-1}dx = \int_5^{11}\frac{dt}{t} = \left[\ln|t|\right]_5^{11} = \ln 11 - \ln 5 = \ln\frac{11}{5}$$

ឃ. $\int_0^1 xe^{x^2+1}dx$ តាង $t = x^2+1 \Rightarrow dt = 2xdx$

បើ $x=0 \Rightarrow t=1; x=1 \Rightarrow t=2$ យើងបាន

$$\int_0^1 xe^{x^2+1}dx = \frac{1}{2}\int_1^2 e^t dt = \frac{1}{2}\left[e^t\right]_1^2 = \frac{1}{2}\left(e^2-e\right)$$

ង. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \sin x\cos xdx$ តាង $t = \sin x \Rightarrow dt = \cos xdx$

បើ $x = \frac{\pi}{4} \Rightarrow t = \frac{\sqrt{2}}{2}; x = \frac{\pi}{3} \Rightarrow t = \frac{\sqrt{3}}{2}$ យើងបាន :

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \sin x\cos xdx = \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} tdt = \left[\frac{t^2}{2}\right]_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{3}{8}-\frac{2}{8} = \frac{1}{8}$$

ច. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\cos^5 xdx$ តាង $t = \cos x \Rightarrow dt = -\sin xdx$

បើ $x=0 \Rightarrow t=1; x=\frac{\pi}{2} \Rightarrow t=0$ យើងបាន

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\cos^5 xdx = -\int_1^0 t^5 dt = \left[-\frac{t^6}{6}\right]_1^0 = 0+\frac{1}{6} = \frac{1}{6}$$

ឆ. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\cos x\left(\sin x+\sin^3 x\right)dx$

តាង $t=\sin x \Rightarrow dt=\cos xdx$

បើ $x=-\frac{\pi}{2}\Rightarrow t=-1; x=0\Rightarrow t=0$ យើងបាន

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\cos x\left(\sin x+\sin^3 x\right)dx=\int_{-1}^{0}\left(t+t^3\right)dt$$

$$=\left[\frac{t^2}{2}+\frac{t^4}{4}\right]_{-1}^{0}=-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)=-\frac{3}{4}$$

ជ. $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x}{\cos^3 x}dx$ តាង $t=\cos x\Rightarrow dt=-\sin xdx$

បើ $x=0\Rightarrow t=1; x=\frac{\pi}{4}\Rightarrow t=\frac{\sqrt{2}}{2}$ យើងបាន

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x}{\cos^3 x}dx=-\int_{1}^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\frac{dt}{t^3}=\left[\frac{1}{2t^2}\right]_{1}^{\frac{\sqrt{2}}{2}}=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

ឈ. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\sin^2 x}dx$ តាង $t=\sin x\Rightarrow dt=\cos xdx$

បើ $x=\frac{\pi}{4}\Rightarrow t=\frac{\sqrt{2}}{2}; x=\frac{\pi}{2}\Rightarrow t=1$ យើងបាន :

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\sin^2 x}dx=\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1}\frac{dt}{t}=\left[-\frac{1}{t}\right]_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1}=-1+\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}-1$$

ញ. $\int_e^{\sqrt{e}}\frac{\ln x}{x}dx$ តាង $t=\ln x\Rightarrow dt=\frac{dx}{x}$

បើ $x=e\Rightarrow t=1; x=\sqrt{e}\Rightarrow t=\frac{1}{2}$ យើងបាន :

$$\int_e^{\sqrt{e}}\frac{\ln x}{x}dx=\int_1^{\frac{1}{2}}tdt=\left[\frac{t^2}{2}\right]_1^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{8}-\frac{1}{2}=-\frac{3}{8}$$

ដ. $\int_1^2\frac{10x+1}{\sqrt{5x^2+x+3}}dx$

តាង $t=5x^2+x+3\Rightarrow dt=(10x+1)dx$

បើ $x=1\Rightarrow t=9; x=2\Rightarrow t=25$ យើងបាន :

$$\int_1^2\frac{10x+1}{\sqrt{5x^2+x+3}}dx=\int_9^{25}\frac{dt}{\sqrt{t}}=\left[2\sqrt{t}\right]_9^{25}=2(5-3)=4$$

ឋ. $\int_1^2\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}dx$ តាង $t=\frac{1}{x}\Rightarrow dt=-\frac{dx}{x^2}$

បើ $x=1\Rightarrow t=1; x=2\Rightarrow t=\frac{1}{2}$ យើងបាន :

$$\int_1^2\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}dx=-\int_1^{\frac{1}{2}}e^t dt=-\left[e^t\right]_1^{\frac{1}{2}}=-\left(\sqrt{e}-e\right)=e-\sqrt{e}$$

ឌ. $\int_1^e\frac{\ln x+1}{x}dx$ តាង $t=\ln x+1\Rightarrow dt=\frac{dx}{x}$

បើ $x=1\Rightarrow t=1; x=e\Rightarrow t=2$ យើងបាន :

• $\int_1^e \frac{\ln x+1}{x}dx = \int_1^2 tdt = \left[\frac{t^2}{2}\right]_1^2 = 2-\frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

ឍ. $\int_0^\pi (\cos x)\left(1-3\sin^2 x\right)dx$

តាង $t=\sin x \Rightarrow dt = \cos xdx$

បើ $x=0 \Rightarrow t=0; x=\pi \Rightarrow t=0$ យើងបាន :

$$\int_0^\pi (\cos x)\left(1-3\sin^2 x\right)dx = \int_0^0 \left(1-3t^2\right)dt = 0$$

3- គណនាអាំងតេក្រាលដោយប្រើអាំងតេក្រាលដោយផ្នែក:

ក. $\int_1^2 \frac{\ln t}{t^2}dt$ ខ. $\int_1^x (t+1)\ln tdt \ ,(x>0)$

គ. $\int_m^e xe^x dx \ ,(-1<m<0)$ ឃ. $\int_0^\pi e^{-x}\sin xdx$

ង. $\int_0^\pi (x-1)\sin 3xdx$ ច. $\int_1^e x^2\ln xdx$

ឆ. $\int_1^2 x\sqrt{-x+3}dx$ ជ. $\int_{\ln 2}^{\ln 3} xe^x dx$

ឈ. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} x\cos 2xdx$ ញ. $\int_5^{10} \frac{x}{\sqrt{x-1}}dx$

ដ. $\int_e^{2e} x\ln x^3 dx$ ឋ. $\int_{-1}^0 (-2x+1)e^{-x}dx$

ឌ. $\int_{-1}^0 (x+1)^2 e^{-x}dx$ ឍ. $\int_0^1 x^2e^x dx$

ណ. $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} e^x\cos xdx$ ត. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x\cos xdx$

ថ. $\int_1^5 x\sqrt{x-1}dx$ ទ. $\int_2^4 3x(2x-1)^{\frac{3}{2}} dx$

សំរាយបញ្ជាក់ :

គណនាអាំងតេក្រាលដោយប្រើអាំងតេក្រាលដោយផ្នែក:

ក. $\int_1^2 \frac{\ln t}{t^2}dt$ តាង $f(t)=\ln t \Rightarrow f'(t)=\frac{1}{t}$

និង $g'(t)=\frac{1}{t^2} \Rightarrow g(t)=-\frac{1}{t}$ យើងបាន :

$$\int_1^2 \frac{\ln t}{t^2}dt = \left[-\frac{\ln t}{t}\right]_1^2 + \int_1^2 \frac{1}{t^2}dt = -\frac{\ln 2}{2} - \left[\frac{1}{t}\right]_1^2$$

$$= -\frac{\ln 2}{2} - \left(\frac{1}{2}-1\right) = \frac{1}{2} - \frac{\ln 2}{2}$$

ខ. $\int_1^x (t+1)\ln t dt \ ,(x>0)$ តាង $f(t)=\ln t \Rightarrow f'(t)=\frac{1}{t}$

និង $g'(t)=t+1 \Rightarrow g(t)=\frac{t^2}{2}+t$ យើងបាន :

$$\int_1^x (t+1)\ln t dt = \left[\left(\frac{t^2}{2}+t\right)\ln t\right]_1^x - \int_1^x \left(\frac{t}{2}+1\right)dt$$

$$= \left(\frac{x^2}{2}+x\right)\ln x - \left[\frac{t^2}{4}+t\right]_1^x = \left(\frac{x^2}{2}+x\right)\ln x - \frac{x^2}{4} - x + \frac{5}{4}$$

គ. $\int_m^e xe^x dx \ ,(-1<m<0)$ តាង $f(x)=x \Rightarrow f'(x)=1$

និង $g'(x)=e^{x}\Rightarrow g(x)=e^{x}$ យើងបាន :

$$\int_{m}^{e}xe^{x}dx=\left[xe^{x}\right]_{m}^{e}-\int_{m}^{e}e^{x}dx=e^{e+1}-me^{m}-\left[e^{x}\right]_{m}^{e}$$

$$=e^{e+1}-me^{m}-e^{e}+e^{m}=e^{e}(e-1)-e^{m}(m-1)$$

ឃ. $\int_{0}^{\pi}e^{-x}\sin xdx$ តាង $f(x)=\sin x\Rightarrow f'(x)=\cos x$

$g'(x)=e^{-x}\Rightarrow g(x)=-e^{-x}$ យើងបាន :

$$\int_{0}^{\pi}e^{-x}\sin xdx=\left[-\sin xe^{-x}\right]_{0}^{\pi}+\int_{0}^{\pi}e^{-x}\cos xdx$$

ដោយ $\int_{0}^{\pi}e^{-x}\cos xdx$ តាង $f(x)=\cos x\Rightarrow f'(x)=-\sin x$

$g'(x)=e^{-x}\Rightarrow g(x)=-e^{-x}$ យើងបាន :

$$\int_{0}^{\pi}e^{-x}\cos xdx=\left[-\cos xe^{-x}\right]_{0}^{\pi}-\int_{0}^{\pi}\sin xe^{-x}dx$$

$$\int_{0}^{\pi}e^{-x}\sin xdx=\left[-\sin xe^{-x}\right]_{0}^{\pi}+\left[-\cos xe^{-x}\right]_{0}^{\pi}-\int_{0}^{\pi}e^{-x}\sin xdx$$

$$\Rightarrow 2\int_{0}^{\pi}e^{-x}\sin xdx=0+\left(e^{-\pi}+1\right)=e^{-\pi}+1$$

$$\Rightarrow\int_{0}^{\pi}e^{-x}\sin xdx=\frac{e^{-\pi}}{2}+\frac{1}{2}$$

ង. $\int_{0}^{\pi}(x-1)\sin 3xdx$ តាង $f(x)=x-1\Rightarrow f'(x)=1$

និង $g'(x)=\sin 3x\Rightarrow g(x)=-\frac{1}{3}\cos 3x$ យើងបាន :

$$\int_{0}^{\pi}(x-1)\sin 3xdx=\left[-\frac{1}{3}(x-1)\cos 3x\right]_{0}^{\pi}+\frac{1}{3}\int_{0}^{\pi}\cos 3xdx$$

$$=\left(\frac{1}{3}(\pi-1)-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{9}[\sin 3x]_0^{\pi}=\frac{1}{3}\pi-\frac{2}{3}$$

ច. $\int_1^e x^2 \ln x dx$ តាង $f(x)=\ln x \Rightarrow f'(x)=\frac{1}{x}$ និង

$g'(x)=x^2 \Rightarrow g(x)=\frac{1}{3}x^3$ យើងបាន :

$$\int_1^e x^2 \ln x dx=\left[\frac{x^3}{3}\ln x\right]_1^e-\frac{1}{3}\int_1^e x^2 dx=\frac{e^3}{3}-\frac{1}{9}\left[x^3\right]_1^e$$

$$=\frac{e^3}{3}-\frac{1}{9}\left(e^3-1\right)=\frac{2e^3}{9}+\frac{1}{9}$$

ឆ. $\int_1^2 x\sqrt{-x+3}dx$ តាង $f(x)=x \Rightarrow f'(x)=1$ និង

$g'(x)=\sqrt{-x+3} \Rightarrow g(x)=-\frac{2}{3}(-x+3)^{\frac{3}{2}}$ យើងបាន :

$$\int_1^2 x\sqrt{-x+3}dx=\left[-\frac{2x}{3}(-x+3)^{\frac{3}{2}}\right]_1^2+\frac{2}{3}\int_1^2(-x+3)^{\frac{3}{2}}dx$$

$$=\left(-\frac{4}{3}(-2+3)^{\frac{3}{2}}\right)-\left(-\frac{2}{3}(-1+3)^{\frac{3}{2}}\right)+\frac{2}{3}\left[-\frac{2}{5}(-x+3)^{\frac{5}{2}}\right]_1^2$$

$$=-\frac{4}{3}+\frac{4\sqrt{2}}{3}+\frac{2}{3}\left(-\frac{2}{5}+\frac{8\sqrt{2}}{5}\right)$$

$$=-\frac{4}{3}+\frac{4\sqrt{2}}{3}-\frac{4}{15}+\frac{16\sqrt{2}}{15}=\frac{-20+20\sqrt{2}-4+16\sqrt{2}}{15}$$

$= \frac{-24+36\sqrt{2}}{15} = \frac{12\sqrt{2}}{5} - \frac{8}{5}$

ជ. $\int_{\ln 2}^{\ln 3} xe^x dx$ តាង $f(x) = x \Rightarrow f'(x) = 1$ និង

$g'(x) = e^x \Rightarrow g(x) = e^x$ យើងបាន :

$\int_{\ln 2}^{\ln 3} xe^x dx = \left[xe^x\right]_{\ln 2}^{\ln 3} - \int_{\ln 2}^{\ln 3} e^x dx$

$= 3\ln 3 - 2\ln 2 - \left[e^x\right]_{\ln 2}^{\ln 3} = 3\ln 3 - 2\ln 2 - 1$

ឈ. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} x\cos 2x dx$ តាង $f(x) = x \Rightarrow f'(x) = 1$

និង$g'(x) = \cos 2x \Rightarrow g(x) = \frac{1}{2}\sin 2x$ យើងបាន :

$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} x\cos 2x dx = \left[\frac{x}{2}\sin 2x\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} - \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \sin 2x dx$

$= \left(-\frac{3\pi}{8} - \frac{\pi}{8}\right) + \frac{1}{4}\left[\cos 2x\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}$

$= -\frac{\pi}{2} + \frac{1}{4}(0+0) = -\frac{\pi}{2}$

ញ. $\int_{5}^{10} \frac{x}{\sqrt{x-1}} dx$ តាង $f(x) = x \Rightarrow f'(x) = 1$ និង

$g'(x) = \frac{1}{\sqrt{x-1}} = (x-1)^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow g(x) = 2(x-1)^{\frac{1}{2}}$

$$\int_5^{10}\frac{x}{\sqrt{x-1}}dx=\left[2x(x-1)^{\frac{1}{2}}\right]_5^{10}-2\int_5^{10}(x-1)^{\frac{1}{2}}dx=\frac{44}{3}$$

ង. $\int_e^{2e}x\ln x^3dx=3\int_e^{2e}x\ln xdx$ តាង .

$f(x)=\ln x\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{x}$ និង $g'(x)=x\Rightarrow g(x)=\frac{x^2}{2}$.

យើងបាន :

$$3\int_e^{2e}x\ln xdx=3\left[\frac{x^2}{2}\ln x\right]_e^{2e}-\frac{3}{2}\int_e^{e^2}xdx=6e^2\ln 2+\frac{9}{4}e^2$$

ច. $\int_{-1}^{0}(-2x+1)e^{-x}dx$ តាង

$f(x)=-2x+1\Rightarrow f'(x)=-2$ និង

$g'(x)=e^{-x}\Rightarrow g(x)=-e^{-x}$ យើងបាន :

$$\int_{-1}^{0}(-2x+1)e^{-x}dx=\left[-(-2x+1)e^{-x}\right]_{-1}^{0}-2\int_{-1}^{0}e^{-x}dx$$

$$=(-1+3e)+2\left[e^{-x}\right]_{-1}^{0}=-1+3e+2(1-e)=1+e$$

ឆ. $\int_{-1}^{0}(x+1)^2e^{-x}dx$ តាង

$f(x)=(x+1)^2\Rightarrow f'(x)=2(x+1)$

$g'(x)=e^{-x}\Rightarrow g(x)=-e^{-x}$ យើងបាន :

$$\int_{-1}^{0}(x+1)^2e^{-x}dx=\left[-e^{-x}(x+1)^2\right]_{-1}^{0}+2\int_{-1}^{0}(x+1)e^{-x}dx$$

$= -1 + 2\int_{-1}^{0}(x+1)e^{-x}dx$

ដោយ $\int_{-1}^{0}(x+1)e^{-x}dx$ តាង $f(x) = x+1 \Rightarrow f'(x) = 1$

និង $g'(x) = e^{-x} \Rightarrow g(x) = -e^{-x}$ យើងបាន :

$\int_{-1}^{0}(x+1)e^{-x}dx = \left[-(x+1)e^{-x}\right]_{-1}^{0} + \int_{-1}^{0}e^{-x}dx$

$= -1 - \left[e^{-x}\right]_{-1}^{0} = -1-(1-e) = e-2$

$\int_{-1}^{0}(x+1)^2 e^{-x}dx = -1+2(e-2) = 2e-5$

ឈ. $\int_{0}^{1}x^2e^xdx$ តាង $f(x) = x^2 \Rightarrow f'(x) = 2x$ និង

$g'(x) = e^x \Rightarrow g(x) = e^x$ យើងបាន :

$\int_{0}^{1}x^2e^xdx = \left[x^2e^x\right]_{0}^{1} - 2\int_{0}^{1}xe^xdx = e - 2\int_{0}^{1}xe^xdx$

ដោយ $\int_{0}^{1}xe^xdx$ តាង $f(x) = x \Rightarrow f'(x) = 1$ និង

$g'(x) = e^x \Rightarrow g(x) = e^x$ យើងបាន :

$\int_{0}^{1}xe^xdx = \left[xe^x\right]_{0}^{1} - \int_{0}^{1}e^xdx = e - \left[e^x\right]_{0}^{1} = e-e+1 = 1$

$\Rightarrow \int_{0}^{1}x^2e^xdx = e - 2\times1 = e-2$

$$\int_{-1}^{0}(x+1)e^{-x}dx=\left[-(x+1)e^{-x}\right]_{-1}^{0}+\int_{-1}^{0}e^{-x}dx$$

$$=-1-\left[e^{-x}\right]_{-1}^{0}=-1-(1-e)=e-2$$

$$\int_{-1}^{0}(x+1)^2e^{-x}dx=-1+2(e-2)=2e-5$$

ឈ. $\int_0^1 x^2e^x dx$ តាង $f(x)=x^2 \Rightarrow f'(x)=2x$ និង

$g'(x)=e^x \Rightarrow g(x)=e^x$ យើងបាន :

$$\int_0^1 x^2e^xdx=\left[x^2e^x\right]_0^1-2\int_0^1 xe^xdx=e-2\int_0^1 xe^xdx$$

ដោយ $\int_0^1 xe^xdx$ តាង $f(x)=x \Rightarrow f'(x)=1$ និង

$g'(x)=e^x \Rightarrow g(x)=e^x$ យើងបាន :

$$\int_0^1 xe^xdx=\left[xe^x\right]_0^1-\int_0^1 e^xdx=e-\left[e^x\right]_0^1=e-e+1=1$$

$$\Rightarrow \int_0^1 x^2e^xdx=e-2\times 1=e-2$$

ញ. $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} e^x\cos x dx$ តាង $f(x)=\cos x \Rightarrow f'(x)=-\sin x$

$g'(x)=e^x \Rightarrow g(x)=e^x$ យើងបាន :

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} e^x\cos xdx=\left[e^x\cos x\right]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}+\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\sin xe^xdx$$

ដោយ $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\sin xe^xdx$ តាង $f(x)=\sin x \Rightarrow f'(x)=\cos x$

និង $g'(x)=e^x \Rightarrow g(x)=e^x$ យើងបាន :

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \sin x e^x dx = \left[\sin x e^x\right]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} - \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \cos x e^x dx$$

$$2\int_{\frac{\pi}{-4}}^{\frac{3\pi}{4}} e^x \cos x dx = \left[e^x \cos x\right]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} - \left[\sin x e^x\right]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}$$

$$\Rightarrow 2\int_{\frac{\pi}{-4}}^{\frac{3\pi}{4}} e^x \cos x dx = 0 \Rightarrow \int_{\frac{\pi}{-4}}^{\frac{3\pi}{4}} e^x \cos x dx = 0$$

គ. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x dx$ យើងបាន :

$$2\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x dx = \left[e^x \cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \left[\sin x e^x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = e^{\frac{\pi}{2}} - 1$$

$$\Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x dx = \frac{e^{\frac{\pi}{2}}}{2} - \frac{1}{2}$$

ឃ. $\int_1^5 x\sqrt{x-1}dx$ តាង $f(x) = x \Rightarrow f'(x) = 1$ និង

$g'(x) = \sqrt{x-1} \Rightarrow g(x) = \frac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}}$ យើងបាន :

$$\int_1^5 x\sqrt{x-1}dx = \left[\frac{2x}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}}\right]_1^5 - \frac{2}{3}\int_1^5 (x-1)^{\frac{3}{2}}dx$$

$$= \frac{80}{3} - \frac{4}{15}\left[(x-1)^{\frac{5}{2}}\right]_1^5 = \frac{80}{3} - \frac{4}{15}(32) = \frac{400-128}{15} = \frac{272}{15}$$

ង. $\int_2^4 3x(2x-1)^{\frac{3}{2}} dx$ តាង $f(x) = 3x \Rightarrow f'(x) = 3$ និង

$g'(x)=(2x-1)^{\frac{3}{2}} \Rightarrow g(x)=\frac{1}{5}(2x-1)^{\frac{5}{2}}$ យើងបាន :

$$\int_2^4 3x(2x-1)^{\frac{3}{2}}dx=\left[\frac{3x}{5}(2x-1)^{\frac{5}{2}}\right]_2^4-\frac{3}{5}\int_2^4(2x-1)^{\frac{5}{2}}dx$$

$$=\frac{441\sqrt{7}}{5}-\frac{297\sqrt{3}}{35}$$

4- គេមាន f និង h ជាអនុគមន៍ជាប់ហើយ $\int_1^7 f(x)dx=-1$

$\int_7^0 f(x)dx=5; \int_7^0 h(x)dx=4$ ។ គណនា :

ក. $\int_1^0[-2f(x)]dx$ ខ. $\int_7^0[f(x)-h(x)]dx$

គ. $\int_0^7 f(x)dx$ ឃ. $\int_7^7[f(x)+h(x)]dx$

សំរាយបញ្ជាក់ :

គណនា :

ក. $\int_1^0[-2f(x)]dx=-2\int_1^0[f(x)]dx$

ដោយ $\int_7^0[f(x)]dx=\int_7^1[f(x)]dx+\int_1^0[f(x)]dx$

$\Rightarrow \int_1^0[f(x)]dx=\int_7^0[f(x)]dx+\int_1^7[f(x)]dx=5-1=4$

$\Rightarrow \int_1^0[-2f(x)]dx=-2\times 4=-8$

ខ. $\int_7^0[f(x)-h(x)]dx=5-4=1$

គ. $\int_0^7 f(x)dx=-\int_7^0 f(x)dx=-5$

ឃ. $\int_7^7[f(x)+h(x)]dx=0$

5. ក. គណនាចំនួនពិត $A;B$ ដែលចំពោះគ្រប់ $x\in IR-\{-1;-2\}$

$$\frac{x}{(x+1)(x+2)}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x+2}$$ ។

ខ. គណនាអាំងតេក្រាល: $\int_3^4\frac{x}{(x+1)(x+2)}dx$ ។

សំរាយបញ្ជាក់ :

ក. គណនាចំនួនពិត $A;B$

$$\frac{x}{(x+1)(x+2)}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x+2}=\frac{A(x+2)+B(x+1)}{(x+1)(x+2)}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}A+B=1\\2A+B=0\end{cases}\Rightarrow A=-1;B=2$$

ចំពោះ $A=-1;B=2$ នោះ : $\frac{x}{(x+1)(x+2)}=-\frac{1}{x+1}+\frac{2}{x+2}$

ខ. គណនាអាំងតេក្រាល :

$$\int_3^4\frac{x}{(x+1)(x+2)}dx=\int_3^4\left(-\frac{1}{x+1}+\frac{2}{x+2}\right)dx$$

$$=\left[-\ln|x+1|+2\ln|x+2|\right]_3^4=(-\ln5+2\ln6)-(-\ln4+2\ln5)$$

$$=2\ln6-3\ln5+\ln4$$

6- ក. គណនាចំនួនពិត $A;B;C$ ដែលចំពោះគ្រប់ $x\in IR-\{-2\}$,

$$\frac{x^2+3x}{x+2}=Ax+B+\frac{C}{x+2}$$ ។

ខ. គណនាអាំងតេក្រាល $\int_1^2 \frac{x^2+3x}{x+2}dx$ ។

សំរាយបញ្ជាក់ :

ក. យើងមាន $\frac{x^2+3x}{x+2} = Ax+B+\frac{C}{x+2}$ អាចសរសេរ :

$$\frac{x^2+3x}{x+2} = Ax+B+\frac{C}{x+2} = \frac{Ax^2+(2A+B)x+2B+C}{x+2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A=1 \\ 2A+B=3 \\ 2B+C=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=1 \\ B=1 \\ C=-2 \end{cases}$$

ខ. គណនាអាំងតេក្រាល

ចំពោះ $A=1; B=1; C=-2$ នោះយើងបាន :

$\frac{x^2+3x}{x+2} = Ax+B+\frac{C}{x+2} = x+1-\frac{2}{x+2}$ នាំអោយ :

$$\int_1^2 \frac{x^2+3x}{x+2}dx = \int_1^2\left(x+1+\frac{-2}{x+2}\right)dx$$

$$=\left[\frac{x^2}{2}+x-2\ln|x+2|\right]_1^2 = (2+2-2\ln 4)-\left(\frac{1}{2}+1-2\ln 3\right)$$

$$=4-2\ln 4-\frac{3}{2}+2\ln 3 = \frac{5}{2}+2\ln\frac{4}{3}$$

7- f ជាអនុគមន៍កំណត់លើ IR ដោយ : $f(x)=|(x-1)(x-2)|$ ។

គណនា $J=\int_0^2 f(x)dx$ ។

សំរាយបញ្ជាក់ :

សិក្សាសញ្ញានៃ $(x-1)(x-2)$ លើចន្លោះ $[0\ ,2]$

$(x-1)(x-2)=0\Rightarrow x=1;x=2$

x		1		2	
$(x-1)(x-2)$	+	0	−	0	+

$$J=\int_0^2 f(x)dx=\int_0^1(x-1)(x-2)dx-\int_1^2(x-1)(x-2)dx$$

$$=\int_0^1\left(x^2-3x+2\right)dx-\int_1^2\left(x^2-3x+2\right)dx$$

$$=\left[\frac{x^3}{3}-\frac{3}{2}x^2+2x\right]_0^1-\left[\frac{x^3}{3}-\frac{3}{2}x^2+2x\right]_1^2$$

$$=\left(\frac{1}{3}-\frac{3}{2}+2-0\right)-\left[\left(\frac{8}{3}-6+4\right)-\left(\frac{1}{3}-\frac{3}{2}+2\right)\right]$$

$$=\frac{1}{3}-\frac{3}{2}+2-\frac{8}{3}+2+\frac{1}{3}-\frac{3}{2}+2$$

$$=\frac{2-9+12-16+12+2-9+12}{6}=1$$

8- f ជាអនុគមន៍កំណត់លើ $(2\ ,+\infty)$ ដោយ :

$$f(x)=\frac{x^2-4x+4}{(2x-3)(x-1)^2}$$ ។

ក. គណនា $a\,;b$ ដែល $f(x)=\frac{a}{(x-1)^2}+\frac{b}{2x-3}$ ។

ខ. រកព្រីមីទីវនៃអនុគមន៍ $g(x)=\frac{-1}{(x-1)^2}\,;h(x)=\frac{1}{2x-3}$ ។

គ. ទាញរក $J=\int_2^3 f(x)dx$ ។

សំរាយបញ្ជាក់ :

ក. គណនា $a\,;b$

$$f(x)=\frac{a}{(x-1)^2}+\frac{b}{2x-3}=\frac{a(2x-3)+b(x-1)^2}{(x-1)^2(2x-3)}$$

$$=\frac{2ax-3a+bx^2-2bx+b}{(x-1)^2(2x-3)}=\frac{bx^2+(2a-2b)x+b-3a}{(x-1)^2(2x-3)}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}b=1\\2a-2b=-4\\b-3a=4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=-1\\b=1\end{cases}$$

ខ. រកព្រីមីទីវនៃអនុគមន៍ $g(x)=\frac{-1}{(x-1)^2}\,;h(x)=\frac{1}{2x-3}$

យើងបាន $G(x)=\int-\frac{1}{(x-1)^2}dx=\frac{1}{x-1}+c\quad;c\in IR$

$H(x)=\int\frac{1}{2x-3}dx=\frac{1}{2}\ln|2x-3|+c\;\;;c\in IR$

គ. ទាញរក $J=\int_2^3 f(x)dx$

$$J=\int_2^3 f(x)dx=\int_2^3\left(\frac{-1}{(x-1)^2}+\frac{1}{(2x-3)}\right)dx$$

$$=\left[\frac{1}{x-1}+\frac{1}{2}\ln|2x-3|\right]_2^3=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\ln 3\right)-\left(1+\frac{1}{2}\ln 1\right)$$

$$=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\ln 3=\frac{1}{2}\ln 3-\frac{1}{2}$$

9- h ជាអនុគមន៍កំណត់លើ $]0\ ,+\infty[$ ដោយ : $h(x)=(x+1)e^{-\frac{1}{x}}$ ។

បង្ហាញថា h ជាព្រីមីទីវមួយនៃ $x\to\frac{x^2+x+1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}$ ។

សំរាយបញ្ជាក់ :

ដោយ $h(x)=(x+1)e^{-\frac{1}{x}}$ យើងបាន :

$$h'(x)=e^{-\frac{1}{x}}+\frac{1}{x^2}(x+1)e^{-\frac{1}{x}}=e^{-\frac{1}{x}}\left(\frac{x^2+x+1}{x^2}\right)$$

ដូចនេះ h ជាព្រីមីទីវមួយនៃ $\frac{x^2+x+1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}$

10- ក. ដោយធ្វើអាំងតេក្រាលដោយផ្នែកពីរដង :

គណនា $\int_0^{\frac{\pi}{2}}x^2\cos 2x dx$ ។

ខ. គេយក $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}x^2\cos^2 x dx$ និង $J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}x^2\sin^2 x dx$ ។

(i).គណនា $I+J$ (ii).គណនា $I-J$ ទាញរក I និង J ។

សំរាយបញ្ជាក់ :

ក. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\cos 2x dx$ តាង $f(x)=x^2 \Rightarrow f'(x)=2x$ និង

$g'(x)=\cos 2x \Rightarrow g(x)=\frac{1}{2}\sin 2x$ យើងបាន :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\cos 2x dx=\left[\frac{x^2}{2}\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin 2x dx$$

ដោយ $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin 2x dx$ តាង $f(x)=x \Rightarrow f'(x)=1$ និង :

$g'(x)=\sin 2x \Rightarrow g(x)=-\frac{1}{2}\cos 2x$ យើងបាន :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin 2x dx=\left[-\frac{x}{2}\cos 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}+\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos 2x dx$$

$$=\left(\frac{\pi}{4}-0\right)+\frac{1}{4}\left[\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{4}(0-0)=\frac{\pi}{4}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\cos 2x dx=\left[\frac{x^2}{2}\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{\pi}{4}=0-\frac{\pi}{4}=-\frac{\pi}{4}$$

(i).គណនា $I+J$ យើងបាន :

$$I+J=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\cos^2 x dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\sin^2 x dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 dx=\frac{1}{3}\left[x^3\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{3}\times\frac{\pi^3}{8}=\frac{\pi^3}{24}$$

(ii).គណនា $I-J$ យើងបាន :

$$I-J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}x^2\cos^2 xdx-\int_0^{\frac{\pi}{2}}x^2\sin^2 xdx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}x^2\left(\cos^2 x-\sin^2 x\right)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}x^2\cos 2xdx=-\frac{\pi}{4}$$

- ទាញរក I និង J :

$$\begin{cases} I+J=\frac{\pi^3}{24} \\ I-J=-\frac{\pi}{4} \end{cases} \Rightarrow I=\frac{\pi^3}{48}-\frac{\pi}{8};J=\frac{\pi^3}{48}+\frac{\pi}{8}$$

11-ឧបមាថា $\int_0^1 f(x)dx=3$ ។គណនា $\int_{-1}^0 f(x)dx$ បើ :

ក. f ជាអនុគមន៍សេស

ខ. f ជាអនុគមន៍គូ ។

ដំណោះស្រាយ :

ដោយ $\int_0^1 f(x)dx=\left[F(x)\right]_0^1=F(1)-F(0)=3$

ក. f ជាអនុគមន៍សេស :

ក្នុងករណីដែល $f(x)$ ជាអនុគមន៍សេស ហើយ $x<0$ គេត្រូវយក $F(-x)$ ជាព្រីមីទីវនៃ $f(x)$ យើងបាន :

$$\int_{-1}^0 f(x)dx=\left[F(-x)\right]_{-1}^0=F(0)-F(1)$$

$$=-\left[F(1)-F(0)\right]=-3$$

ខ. f ជាអនុគមន៍គូ

ក្នុងករណីដែល $f(x)$ ជាអនុគមន៍សេស ហើយ $x<0$ គេត្រូវយក

$-F(x)$ ជាព្រីមីទីវនៃ $f(x)$ យើងបាន

$\int_{-1}^{0} f(x)dx = [-F(x)]_{-1}^{0} = -[F(0)-F(-1)]$

$= -[F(0)-F(1)] = F(1)-F(0) = 3$

12- ឧបមាថាអនុគមន៍ $h(x)$ ជាអនុគមន៍គូ និងជាប់ចំពោះគ្រប់ $x \in IR$

ក. បង្ហាញថា ផលគុណ $h(x)\sin x$ ជាអនុគមន៍សេស

ខ. បង្ហាញថា ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត a; $\int_{-a}^{0} h(x)\sin x dx$

$= -\int_{0}^{a} h(x)\sin x dx$ (តាង $u=-x$)

គ. ប្រើលទ្ធផលក្នុងសំណួរ ខ. បង្ហាញថា $\int_{-a}^{a} h(x)\sin x dx = 0$ ។

សំរាយបញ្ជាក់ :

$f(x)$ ជាអនុគមន៍គូ យើងបាន $f(x)=f(-x)$

$f(x)$ ជាអនុគមន៍សេស យើងបាន $f(x)=-f(-x)$

ក. បង្ហាញថា ផលគុណ $h(x)\sin x$ ជាអនុគមន៍សេស

តាង $f(x)=h(x)\sin x$ យើងបាន :

$f(-x)=h(-x)\sin(-x)=-h(x)\sin x=-f(x)$

ដូចនេះ $f(x)$ ជាអនុគមន៍សេស

ខ. $\int_{-a}^{0} h(x)\sin x dx = -\int_{0}^{a} h(x)\sin x dx$

ដោយ $\int_{-a}^{0} h(x)\sin x dx$ តាង $u=-x \Rightarrow du=-dx$

ពេល $x=-a \Rightarrow u=a; x=0 \Rightarrow u=0$ យើងបាន :

$\int_{-a}^{0} h(x)\sin x dx = \int_{a}^{0} h(-x)\sin(-x)(-dx)$

$= \int_{a}^{0} h(x)\sin x dx = -\int_{0}^{a} h(x)\sin x dx$

គ.បង្ហាញថា $\int_{-a}^{a} h(x)\sin x dx = 0$

ដោយ $\int_{-a}^{0} h(x)\sin x dx = -\int_{0}^{a} h(x)\sin x dx$ សំណួរ ខ.

យើងបាន $\int_{-a}^{0} h(x)\sin x dx + \int_{0}^{a}(x)\sin x dx = 0$

$\Rightarrow \int_{-a}^{a} h(x)\sin x dx = 0$

13- គេមាន $\int_{-1}^{1} f(x)dx = 4$ និង $\int_{-1}^{1} \frac{f(x)}{2}dx + \int_{-1}^{1} kdx = 5$ ។

គណនាតម្លៃនៃ k ។

សំរាយបញ្ជាក់ :

ដោយ $\int_{-1}^{1} \frac{f(x)}{2}dx + \int_{-1}^{1} kdx = 5$ យើងបាន :

$\int_{-1}^{1} \frac{f(x)}{2}dx + \int_{-1}^{1} kdx = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)dx + [kx]_{-1}^{1} = 5$

$\Rightarrow \frac{1}{2}\times 4 + k(1+1) = 5 \Rightarrow 2+2k = 5 \Rightarrow k = \frac{3}{2}$

14- បើ $\int_{0}^{k}(x-1)dx = 0$ ។ គណនាតម្លៃនៃ k ។

សំរាយបញ្ជាក់ :

ដោយ $\int_0^k (x-1)dx = 0$ យើងបាន

$$\int_0^k (x-1)dx = 0 \Rightarrow \left[\frac{x^2}{2} - x\right]_0^k = 0$$

$$\left(\frac{k^2}{2} - k\right) = 0 \Rightarrow k = 0; k = 2$$

ដូចនេះ យើងបាន : $k = 0; k = 2$

15- កំណត់សមីការនៃខ្សែកោង បើ $\frac{dy}{dx} = \frac{e^{\sqrt{x+1}}}{\sqrt{x+1}}$ ហើយខ្សែកោងកាត់តាមចំណុច (0 ;1) ។

សំរាយបញ្ជាក់ :

ដោយ $\frac{dy}{dx} = \frac{e^{\sqrt{x+1}}}{\sqrt{x+1}}$ យើងបាន :

$$y' = \frac{e^{\sqrt{x+1}}}{\sqrt{x+1}} \Rightarrow \int y'dx = \int \frac{e^{\sqrt{x+1}}}{\sqrt{x+1}} dx$$

$$\Rightarrow y = 2\int \left(\sqrt{x+1}\right)' e^{\sqrt{x+1}} dx = 2e^{\sqrt{x+1}} + c$$

តែ $y(0) = 1$ យើងបាន

$$2e + c = 1 \Rightarrow c = 1 - 2e$$

ដូចនេះ $\boxed{y = 2e^{\sqrt{x+1}} + 1 - 2e}$

16- បង្ហាញថា : $\dfrac{d\left(x^2e^{x^2}\right)}{dx}=2xe^{x^2}+2x^3e^{x^2}$ ។

សំរាយបញ្ជាក់ :

$$\frac{d\left(x^2e^{x^2}\right)}{dx}=2xe^{x^2}+x^2\times 2xe^{x^2}=2xe^{x^2}+2x^3e^{x^2}$$

17- គណនា $I=\int_0^{2\pi}(|\sin x|+|\cos x|)dx$

សំរាយបញ្ជាក់ :

$$I=\int_0^{2\pi}(|\sin x|+|\cos x|)dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(|\sin x|+|\cos x|)dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(|\sin x|+|\cos x|)dx$$

$$+\int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}}(|\sin x|+|\cos x|)dx+\int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi}(|\sin x|+|\cos x|)dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin x+\cos x)dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(\sin x-\cos x)dx$$

$$+\int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}}(-\sin x-\cos x)dx+\int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi}(-\sin x+\cos x)dx$$

$$=[-\cos x+\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}}+[-\cos x-\sin x]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$$

$$[\cos x-\sin x]_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}}+[\cos x+\sin x]_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi}$$

$$=(1+1)+(1+1)+(1+1)+(1+1)=8$$

18. គេឱ្យ $f(x)=e^x$ ។ បង្ហាញថា $\int_0^b \frac{f(x)}{f(x)+f(b-x)}dx=\frac{b}{2}$

សំរាយបញ្ជាក់ :

បង្ហាញថា $\int_0^b \frac{f(x)}{f(x)+f(b-x)}dx=\frac{b}{2}$

ដោយ $f(x)=e^x$ យើងបាន :

$$\int_0^b \frac{(x)}{f(x)+f(b-x)}dx=\int_0^b \frac{e^x}{e^x+e^{b-x}}dx=\int_0^b \frac{e^x}{e^x+\frac{e^b}{e^x}}dx$$

តាង $t=e^x \Rightarrow dt=e^x dx$

ពេល $x=0 \Rightarrow t=1; x=b \Rightarrow t=e^b$ យើងបាន :

$$\int_0^b \frac{f(x)}{f(x)+f(b-x)}dx=\int_1^{e^b} \frac{dt}{t+\frac{e^b}{t}}=\int_1^{e^b} \frac{tdt}{t^2+e^b}$$

$$=\frac{1}{2}\int_1^{e^b} \frac{\left(t^2+e^b\right)'dt}{t^2+e^b}=\frac{1}{2}\left[\ln\left|t^2+e^b\right|\right]_1^{e^b}$$

$$=\frac{1}{2}\left[\left(\ln e^{2b}+e^b\right)-\ln\left(1+e^b\right)\right]$$

$$=\frac{1}{2}\ln\frac{e^b\left(e^b+1\right)}{e^b+1}=\frac{1}{2}\ln e^b=\frac{b}{2}$$

19- គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម:

ក. $\int \sin^2 x dx$ ខ. $\int \sin^4 x \sin 2x dx$

គ. $\int \frac{\ln x}{x} dx$ ឃ. $\int \frac{e^x}{1+e^x} dx$

ង. $\int x e^{2x} dx$ ច. $\int e^{-x} \sin x dx$ ។

សំរាយបញ្ជាក់ :

គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម:

ក. $\int \sin^2 x dx = \int \frac{1-\cos 2x}{2} dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x + c \; ; c \in IR$

ខ. $\int \sin^4 x \sin 2x dx = 2\int \sin^5 x \cos x dx$

$= 2\int (\sin x)' \sin^5 x dx = \frac{1}{3}\sin^6 x + c \; ; c \in IR$

គ. $\int \frac{\ln x}{x} dx = \int (\ln x)' \ln x dx = \frac{1}{2}\ln^2 x + c \quad ; c \in IR$

ឃ. $\int \frac{e^x}{1+e^x} dx = \int \frac{(1+e^x)'}{1+e^x} dx = \ln\left|1+e^x\right| + c \quad , c \in IR$

ង. $\int x e^{2x} dx$ តាង $f(x) = x \Rightarrow f'(x) = 1$ និង

$g'(x) = e^{2x} \Rightarrow g(x) = \frac{1}{2}e^{2x}$ យើងបាន :

$\int x e^{2x} dx = \frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{2}\int e^{2x} = \frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x} + c \quad ; c \in IR$

ច. $\int e^{-x} \sin x dx$ តាង $f(x) = \sin x \Rightarrow f'(x) = \cos x$

និង $g'(x) = e^{-x} \Rightarrow g(x) = -e^{-x}$ យើងបាន :

$$\int e^{-x}\sin x dx = -\sin x e^{-x} + \int \cos x e^{-x} dx$$

ដោយ $\int \cos x e^{-x} dx$ តាង $f(x) = \cos x \Rightarrow f'(x) = -\sin x$

និង $g'(x) = e^{-x} \Rightarrow g(x) = -e^{-x}$ យើងបាន :

$$\int \cos x e^{-x} dx = -\cos x e^{-x} - \int \sin x e^{-x} dx$$

$$\Rightarrow \int e^{-x}\sin x dx = -\sin x e^{-x} - \cos x e^{-x} - \int \sin x e^{-x} dx$$

$$\Rightarrow 2\int e^{-x}\sin x dx = -\sin x e^{-x} - \cos x e^{-x}$$

$$\Rightarrow \int e^{-x}\sin x dx = \frac{1}{2}\left(-\sin x e^{-x} - \cos x e^{-x}\right) + c \ ; c \in IR$$

20-គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោមដោយប្រើអាំងតេក្រាលដោយផ្នែក:

ក. $\int_1^2 x\ln x dx$ ខ. $\int_0^1 \ln(x+1) dx$

គ. $\int_0^{\pi} x\sin 2x dx$ ឃ. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin 2x dx$

ង. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x dx$ ច. $\int_0^1 x^2 e^x dx$

សំរាយបញ្ជាក់ :

ក. $\int_1^2 x\ln x dx$ តាង $f(x) = \ln x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}$ និង

$g'(x) = x \Rightarrow g(x) = \frac{x^2}{2}$ យើងបាន :

$$\int_1^2 x\ln x dx = \left[\frac{x^2 \ln x}{2}\right]_1^2 - \frac{1}{2}\int_1^2 x dx$$

$$=\left[\frac{x^2\ln x}{2}\right]_1^2-\frac{1}{4}\left[x^2\right]_1^2=\left(\frac{4\ln 2}{2}-0\right)-\frac{1}{4}(4-1)$$

$$=2\ln 2-\frac{3}{4}$$

ខ. $\int_0^1 \ln(x+1)dx$ តាង $f(x)=\ln(x+1)\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{x+1}$

និង $g'(x)=1\Rightarrow g(x)=x$ យើងបាន :

$$\int_0^1 \ln(x+1)dx=\left[x\ln(x+1)\right]_0^1-\int_0^1\frac{x}{x+1}dx$$

$$=(\ln 2-0)-\int_0^1\left(1-\frac{1}{x+1}\right)dx=\ln 2-\left[x-\ln|x+1|\right]_0^1$$

$$=\ln 2-\left[(1-\ln 2)-(0-\ln 1)\right]=\ln 2-1+\ln 2$$

$$=2\ln 2-1$$

គ. $\int_0^{\pi} x\sin 2x dx$ តាង $f(x)=x\Rightarrow f'(x)=1$ និង

$g'(x)=\sin 2x\Rightarrow g(x)=-\frac{1}{2}\cos 2x$ យើងបាន :

$$\int_0^{\pi} x\sin 2x dx=\left[-\frac{1}{2}x\cos 2x\right]_0^{\pi}+\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\cos 2x dx$$

$$=\left(-\frac{\pi}{2}+0\right)+\frac{1}{4}\left[\sin 2x\right]_0^{\pi}=-\frac{\pi}{2}+\frac{1}{4}(0-0)=-\frac{\pi}{2}$$

ឃ. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\sin 2x dx$ តាង $f(x)=x^2\Rightarrow f'(x)=2x$ និង

$g'(x) = \sin 2x \Rightarrow g(x) = -\frac{1}{2}\cos 2x$ យើងបាន :

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin 2x dx = \left[-\frac{1}{2}x^2 \cos 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos 2x dx$

$= \frac{1}{8}\pi^2 + \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos 2x dx$

ដោយ $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos 2x dx$ តាង $f(x) = x \Rightarrow f'(x) = 1$ និង

$g'(x) = \cos 2x \Rightarrow g(x) = \frac{1}{2}\sin 2x$ យើងបាន :

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos 2x dx = \left[\frac{1}{2}x\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x dx$

$= 0 + \frac{1}{4}[\cos 2x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{4}(-1-1) = -\frac{1}{2}$

$\Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin 2x dx = \frac{1}{8}\pi^2 - \frac{1}{2}$

ង. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x dx$ តាង $f(x) = x \Rightarrow f'(x) = 1$ និង

$g'(x) = \cos x \Rightarrow g(x) = \sin x$ យើងបាន :

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x dx = [x\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$

$= \frac{\pi}{2} + [\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} + (0-1) = \frac{\pi}{2} - 1$

ច. $\int_0^1 x^2e^x dx$ តាង $f(x)=x^2 \Rightarrow f'(x)=2x$ និង

$g'(x)=e^x \Rightarrow g(x)=e^x$ យើងបាន

$$\int_0^1 x^2e^x dx=\left[x^2e^x\right]_0^1-2\int_0^1 xe^x dx=e-2\int_0^1 xe^x dx$$

តែ $\int_0^1 xe^x dx$ តាង $f(x)=x \Rightarrow f'(x)=1$ និង

$g'(x)=e^x \Rightarrow g(x)=e^x$ យើងបាន :

$$\int_0^1 xe^x dx=\left[xe^x\right]_0^1-\int_0^1 e^x dx=e-\left[e^x\right]_0^1=e-e+1=1$$

$$\Rightarrow \int_0^1 x^2e^x dx=e-2$$

21-គណនាអាំងតេក្រាលដោយប្រើអថេរជំនួស:

ក. $\int_0^1 \frac{2x}{1+x^2}dx$ ខ. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin x}\cos x dx$

គ. $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin x}dx$ ឃ. $\int_0^1 \frac{x}{1+x}dx$

ង. $\int_0^1 \frac{x^2}{1+x}dx$ ច. $\int_0^{\ln 2} \frac{e^x}{1+e^x}dx$

ឆ. $\int_1^2 \frac{(\ln x)^2}{x}dx$ ជ. $\int_e^2 \frac{1}{x\ln x}dx$

ឈ. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+2\cos x}dx$ ញ. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx$ ។

សំរាយបញ្ជាក់ :

-គណនាអាំងតេក្រាលដោយប្រើអថេរជំនួស:

ក. $\int_0^1 \frac{2x}{1+x^2}dx$ តាង $t = 1+x^2 \Rightarrow dt = 2xdx$

ពេល $x = 0 \Rightarrow t = 1; x = 1 \Rightarrow t = 2$ យើងបាន :

$$\int_0^1 \frac{2x}{1+x^2}dx = \int_1^2 \frac{dt}{t} = [\ln|t|]_1^2 = \ln 2$$

ខ. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin x}\cos x dx$ តាង $t = \sin x \Rightarrow dt = \cos x dx$

ពេល $x = 0 \Rightarrow t = 0; x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 1$ យើងបាន :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin x}\cos x dx = \int_0^1 e^t dt = \left[e^t\right]_0^1 = e - 1$$

គ. $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin x}dx$ តាង $t = \sin x \Rightarrow dt = \cos x dx$

ពេល $x = \frac{\pi}{6} \Rightarrow t = \frac{1}{2}; x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 1$ យើងបាន :

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin x}dx = \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dt}{t} = [\ln|t|]_{\frac{1}{2}}^1 = \left(\ln 1 - \ln\frac{1}{2}\right) = \ln 2$$

ឃ. $\int_0^1 \frac{x}{1+x}dx = \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{x+1}\right)dx = [x - \ln|x+1|]_0^1 = 1 - \ln 2$

ង. $\int_0^1 \frac{x^2}{1+x}dx = \int_0^1 \left(x - 1 + \frac{1}{x+1}\right)dx = \left[\frac{x^2}{2} - x + \ln|x+1|\right]_0^1$

$$= \left(\frac{1}{2} - 1 + \ln 2\right) - (0) = -\frac{1}{2} + \ln 2$$

ច. $\int_0^{\ln 2}\frac{e^x}{1+e^x}dx$ តាង $t=1+e^x \Rightarrow dt=e^t dx$

ពេល $x=0\Rightarrow t=2; x=\ln 2\Rightarrow t=3$ យើងបាន :

$$\int_0^{\ln 2}\frac{e^x}{1+e^x}dx=\int_2^3\frac{dt}{t}=\left[\ln|t|\right]_2^3=\ln 3-\ln 2=\ln\frac{3}{2}$$

ឆ. $\int_1^2\frac{(\ln x)^2}{x}dx$ តាង $t=\ln x\Rightarrow dt=\frac{dx}{x}$

ពេល $x=1\Rightarrow t=0; x=2\Rightarrow t=\ln 2$ យើងបាន :

$$\int_1^2\frac{(\ln x)^2}{x}dx=\int_0^{\ln 2}t^2dt=\left[\frac{1}{3}t^3\right]_0^{\ln 2}=\frac{1}{3}\ln^3 2$$

ជ. $\int_e^2\frac{1}{x\ln x}dx$ តាង $t=\ln x\Rightarrow dt=\frac{dx}{x}$

ពេល $x=e\Rightarrow t=1; x=2\Rightarrow t=\ln 2$ យើងបាន :

$$\int_e^2\frac{1}{x\ln x}dx=\int_1^{\ln 2}\frac{dt}{t}=\left[\ln|t|\right]_1^{\ln 2}=\ln\ln 2$$

ឈ. $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{1+2\cos x}dx=-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{(1+2\cos x)'}{1+2\cos x}dx$

$$=-\frac{1}{2}\left[\ln|1+2\cos x|\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=-\frac{1}{2}(\ln 1-\ln 3)=\frac{\ln 3}{2}$$

ញ. $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos 2x}{2}dx$

$$=\left[\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\left(\frac{\pi}{4}-0\right)-(0-0)=\frac{\pi}{4}$$

22- គណនាអាំងតេក្រាលនៃអនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រខាងក្រោម៖

ក. $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}} \cos^2 x dx$ ខ. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x dx$

គ. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x dx$ ឃ. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \sin^2(2x) dx$

ង. $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{4}} \sin^4 x \cos^3 x dx$ ច. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \sin^2 x \cos^2 x dx$

ឆ. $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin 2x \cos 4x dx$

សំរាយបញ្ជាក់ ៖

គណនាអាំងតេក្រាលនៃអនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រខាងក្រោម៖

ក. $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}} \cos^2 x dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{1+\cos 2x}{2} dx$

$= \left[\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}} = \left(\frac{3\pi}{8} - \frac{1}{4}\right) - \left(\frac{\pi}{4} + 0\right) = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}$

ខ. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \cos x dx$

$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \sin^2 x\right) \cos x dx$ តាង $t = \sin x \Rightarrow dt = \cos x dx$

ពេល $x = 0 \Rightarrow t = 0; x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 1$ យើងបាន ៖

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x dx = \int_0^1 (1-t^2) dt = \left[t - \frac{t^3}{3}\right]_0^1 = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

គ. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x dx = 0$

ឃ. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \sin^2(2x) dx = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \sin^2 x \cos^2 x dx$

$= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos^2 x)\cos^2 x \sin x dx$

តាង $t = \cos x \Rightarrow dt = -\sin x dx$

ពេល $x = 0 \Rightarrow t = 1; x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 0$ យើងបាន :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \sin^2(2x) dx = -4\int_1^0 (1-t^2) t^2 dt = -4\left(\frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5}\right)_1^0$$

$$= -4\left[(0-0) - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right)\right] = \frac{4(5-3)}{15} = \frac{8}{15}$$

ង. $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} \sin^4 x \cos^3 x dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} \sin^4 x \cos^2 x \cos x dx$

$= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} \sin^4 x (1-\sin^2 x)\cos x dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} (\sin^4 x - \sin^6 x)\cos x dx$

តាង $t = \sin x \Rightarrow dt = \cos x dx$

ពេល $x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 1; x = \frac{\pi}{4} \Rightarrow t = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} \sin^4 x \cos^3 x dx = \int_{1}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \left(t^4 - t^6\right) dt = \left[\frac{t^5}{5} - \frac{t^7}{7}\right]_1^{\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$= \frac{9\sqrt{2}}{560} - \frac{2}{35}$$

ច. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \sin^2 x \cos^2 x dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right) dx$

$$= \frac{1}{4}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \left(1-\cos^2 2x\right) dx = \frac{1}{4}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \left(1 - \frac{1+\cos 4x}{2}\right) dx$$

$$= \frac{1}{4}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{1}{2} - \frac{\cos 4x}{2}\right) dx = \frac{1}{8}\left(x - \frac{1}{4}\sin 4x\right)_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}$$

$$= \frac{\pi}{96} + \frac{\sqrt{3}}{64}$$

ឆ. $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin 2x \cos 4x dx = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin 2x \left(\cos^2 2x - \sin^2 2x\right) dx$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \left(2\cos^2 2x - 1\right) \sin 2x dx$$

តាង $t = \cos 2x \Rightarrow dt = -2\sin 2x dx$

ពេល $x = 0 \Rightarrow t = 1; x = \frac{\pi}{6} \Rightarrow t = \frac{1}{2}$

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}}\sin 2x\cos 4x dx=-\frac{1}{2}\int_1^{\frac{1}{2}}\left(2t^2-1\right)dt=-\frac{1}{2}\left(\frac{2t^3}{3}-t\right)_1^{\frac{1}{2}}$$

$$=-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{12}-\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{2}{3}-1\right)\right]=-\frac{1}{2}\left(-\frac{5}{12}+\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{24}$$

23- ការចែកចាយប្រចាំខែ របស់ទស្សនាវដ្ដីមួយគឺ 640 000ច្បាប់ ។ ដោយមានការប្រកួតប្រជែងពីទស្សនាវដ្ដីមួយទៀត ដែលមានជំនាញដូចគ្នា ការចែកចាយប្រចាំខែរបស់ទស្សនាវដ្ដីចាប់ផ្ដើមធ្លាក់ចុះតាមអត្រា :

$C'(t)=-6000t^{\frac{1}{3}}$ ជារៀងរាល់ខែដែល t ជាចំនួនខែ ចាប់ពីទស្សនាវដ្ដីចាប់ផ្ដើមបោះពុម្ពផ្សាយ ។ តើក្នុងរយៈពេលប៉ុន្មានខែ ទៀតដែលការចែកចាយរបស់ទស្សនាវដ្ដីនេះនឹងធ្លាក់ចុះដល់ 460000ច្បាប់?

សំរាយបញ្ជាក់ :

រកចំនួនខែ ទៀតដែលការចែកចាយ របស់ទស្សនាវដ្ដីនេះនឹងធ្លាក់ចុះដល់ 460000ច្បាប់?

ដោយ $C'(t)=-6000t^{\frac{1}{3}}$ យើងបាន :

$$C(t)=\int -6000t^{\frac{1}{3}}dx=-6000\times\frac{3}{4}t^{\frac{4}{3}}+c=-4500t^{\frac{4}{3}}+c$$

ដោយ $C(0)=640000\Rightarrow c=640000$ យើងបាន :

$$C(t)=-4500t^{\frac{4}{3}}+640000$$

ពេល $C(t) = 460000$ ៈយើងបាន :

$$460000 = -4500t^{\frac{4}{3}} + 640000$$

$$\Rightarrow t^{\frac{4}{3}} = \frac{640000 - 460000}{-4500} = 40$$

$$\Rightarrow \frac{4}{3}\ln t = \ln 40 \Rightarrow \ln t = \ln 40 \times \frac{3}{4} = 2.775$$

$$\Rightarrow t \doteq 15.9$$

ដូចនេះ ប្រហែល16ខែ ដែលការចែកចាយធ្លាក់ចុះដល់ 460000ច្បាប់

ជំពូក ៥ : ស្ថិតិពីរអថេរ

មេរៀនទី១ : ស្ថិតិមានពីរអថេរ

លំហាត់ :

1-គេឱ្យតារាងស្ថិតិមានពីរអថេរខាងក្រោម:

x_i	2	5	3	4	5	6	8	7	9	7
y_i	9	10	25	20	18	19	15	30	35	40

បកស្រាយស្ថិតិនៃពីរអថេរដោយចំណុច ។

សំរាយបញ្ជាក់ :

តាមតារាងទិន្នន័យខាងលើ នៅក្នុងប្លង់ (xoy) គេបាន :

$(2;9)$;$(5;10)$;$(3;25)$;$(4;20)$;$(5;18)$;$(6;19)$

$(8;15)$;$(7;30)$;$(9;35)$;$(7;40)$

2- គេឱ្យតារាងស្ថិតិមានពីរអថេរខាងក្រោម:

x_i	2	3.5	2.5	4	4.5	5	6	6.5	7	8
y_i	10	15	20	18	30	35	40	38	32	45

ក. បកស្រាយស្ថិតិនៃពីរអថេរជាចំណុច។

ខ. ផ្គុំចំណុចខាងលើជាពីរក្រុម ។

គ. រកចំណុចមធ្យម M_1 និង M_2 រួចរកសមីការបន្ទាត់ដែលកាត់តាម M_1 និង M_2 ។

សំរាយបញ្ជាក់ :

ក. (2;10) ;(3.5;15) ;(2.5; 20) ;(4; 18) ;(4.5 ;30) ;(5 ;35) ;(6 ;40) ;(6.5 ;38) ;(7 ;32);(៨ ;45)

ខ. **ក្រុមទី១:** (2;10) ;(3.5;15) ;(2.5; 20) ;(4;18) ;(4.5 ;30) ។

ក្រុមទី២: (5 ;35) ;(6 ;40) ;(6.5 ;38) ;(7 ;32);(8 ;45)

គ. សមីការបន្ទាត់ :-

ដោយ M_1 ជាចំណុចមធ្យមនៃក្រុមទី១ យើងបាន :

$$x_1 = \frac{2+3.5+2.5+4+4.5}{5} = 3.3$$ និង

$$y_1 = \frac{10+15+20+18+30}{5} = 18.6$$

M_2 ជាចំណុចមធ្យមនៃក្រុមទី២ យើងបាន :

$$x_2 = \frac{5+6+6.5+7+8}{5} = 6.5$$ និង

$$y_2 = \frac{35+40+38+32+45}{5} = 38$$

យើងបាន សមីការបន្ទាត់កំណត់ដោយ :

$$\frac{y-18.6}{x-3.3} = \frac{38-18.6}{6.5-3.3} \Rightarrow \frac{y-18.6}{x-3.3} = 6.06$$

$$\Rightarrow y = 6.06x - 1.4$$

3- ពិនិត្យលើវត្ថុធាតុដើម ដែលគេយកបានពីក្នុងដីតាមឆ្នាំនីមួយៗ ដូចក្នុង តារាងខាងក្រោម (វត្ថុធាតុដើមគិតជាពាន់តោន) ។

x_i ឆ្នាំ	1970	1971	1972	1973	1974	1975	1976	1977	1978
y_i វត្ថុធាតុដើម	12.4	13.6	12.7	13.3	12.3	13	12	12.4	12.5

ក. ដៅចំណុចទិន្នន័យតាងបម្រែបម្រួលនៃវត្ថុធាតុដើម តាមឆ្នាំនីមួយៗ ។

ខ. រកចំណុចមធ្យម M_1 និង M_2 ។

គ. រកសមីការតម្រែតម្រង់ ដែលកាត់តាមចំណុចមធ្យមទាំងពីរ ។

សំរាយបញ្ជាក់ :

ក. ដោយយក $x = 0$ តាងឆ្នាំ 1970 គេបាន ចំណុច

$(0;\ 12.4);(1;\ 13.6)\ ;(2;12.7)\ ;(3;\ 13.3)\ ,(4,12.3)$

$(5;13)\ ;\ (6;12)\ ;(7;12.4)\ ;(8;\ 12.5)$

ខ. បែញទិន្នន័យជាពីរក្រុម :

ក្រុមទី១: $(0;\ 12.4);(1;\ 13.6)\ ;(2;\ 12.7)\ ;(3;\ 13.3)$

ក្រុមទី២: $(4;12.3);(5;13)\ ;\ (6;12)\ ;(7;12.4)\ ;(8;\ 12.5)$

M_1 ជាចំណុចមធ្យមនៃក្រុមទី១ យើងបាន :

$$x_1 = \frac{1+2+3}{4} = 1.5$$

$$y_1 = \frac{12.4+13.6+12.7+13.3}{4} = 13$$

M_2 ជាចំណុចមធ្យមនៃក្រុមទី២ យើងបាន :

$$x_2 = \frac{4+5+6+7+8}{5} = 6$$

$$y_1 = \frac{12.3+13+12+12.4+12.5}{5} = 12.44$$

ដូចនេះ $M_1(1.5;13)$, និង $M_2(6;12.44)$

គ. សមីការបន្ទាត់តម្រែតម្រង់កំណត់ដោយ

$$\frac{y-13}{x-1.5} = \frac{12.44-13}{6-1.5} \Rightarrow y = -0.12x + 13.18$$

4- នៅលើបន្ទាត់ឈរ សំពាធបរិយាកាសថយចុះ កាលណាកម្ពស់កើនឡើង ដូចក្នុងតារាងខាងក្រោម: គាង x_i ជាកម្ពស់គិតជា km ហើយ y_i ជាសំពាធគិតជា cm នៃបារត ។

x_i	0	1	2	4	6	10
y_i	76	67	59	46	35	20

ក. បកស្រាយទិន្នន័យខាងលើជាចំណុច ។

ខ. រកសមីការបន្ទាត់តម្រែតម្រង់ដែលកាត់តាមចំណុចមធ្យមទាំងពីរ ។

គ. រកកម្ពស់នៃកន្លែងមួយដែលសំពាធបរិយាកាសស្មើនឹង $40cm$ នៃបារត

សំរាយបញ្ជាក់ :

ក. បកស្រាយទិន្នន័យខាងលើជាចំណុច

តាមទិន្នន័យខាងលើ យើងបាន :

$(0;76);(1;67);(2;59);(4;46);(6;35);(10;20)$

ខ. ចំណុច M_1 មាន :

$$x_1=\frac{1+2}{3}=1 \text{ និង } y_1=\frac{76+67+59}{3}=\frac{202}{3}$$

ចំពោះ ចំណុច M_2 មាន :

$$x_2=\frac{4+6+10}{3}=\frac{20}{3} \text{ និង } y_2=\frac{46+35+20}{3}=\frac{101}{3}$$

សមីការបន្ទាត់កំណត់ដោយ:

$$\frac{y-\frac{202}{3}}{x-1}=\frac{\frac{101}{3}-\frac{202}{3}}{\frac{20}{3}-1}\Rightarrow y=-5.94x+73.27$$

គ. ត្រង់ $y=40cm$ បារត យើងបាន

$-5.94x+73.27=40\Rightarrow x=5.6$

5- តារាងទិន្នន័យខាងក្រោមបង្ហាញថា ពីចំនួនប្រាក់ដែលចំណាយលើការសាងសង់របស់ប្រទេសមួយនៅអំឡុងពេល 6ខែ ។

x_i ខែ	មេសា	ឧសភា	មិថុនា	កក្កដា	សីហា	កញ្ញា
y_i ចំនួនប្រាក់(គិតជាពាន់ដុល្លារ)	24	19	30	49	68	67

បើ $x_1=0$ តាងខែមេសា ។

ក. រកសមីការបន្ទាត់តម្រែតម្រង់ :

ខ. ចូរធ្វើការប៉ាន់ស្មានចំនួនប្រាក់ដែលចំណាយក្នុងខែតុលា ។

សំរាយបញ្ជាក់ :

ក. បើ $x_1 = 0$ តាងខែមេសា គេបានចំណុច

$(0;24);(1;19);(2;30);(3;49);(4;68);(5;67)$

ចំណុច M_1 មាន $x_1 = \frac{1+2}{3} = 1; y_1 = \frac{24+19+30}{3} = \frac{73}{3}$

ចំណុច M_2 មាន $x_2 = \frac{3+4+5}{3} = 4; y_2 = \frac{49+68+67}{3} = \frac{184}{3}$

សមីការបន្ទាត់កាត់តាមចំណុច M_1 និង M_2 កំណត់ដោយ :

$$\frac{y - \frac{73}{3}}{x-1} = \frac{\frac{184}{3} - \frac{73}{3}}{4-3} \Rightarrow y = 12.33x + 12$$

ខ. ខែតុលាត្រូវនឹង $x = 6$ យើងបាន

$$y = 12.33 \times 6 + 12 = 85.98$$

មេរៀនទី២ : សមីការបន្ទាត់តំរែតំរង់លីនេអ៊ែរ

លំហាត់ :

1- គេមានបន្ទាត់ $y=-0.5x+3$ និង $y=-x+4$ ហើយមានតារាងទិន្នន័យ

x_i	0	2	2	5	6
y_i	4	2	0	-2	1

ក. សង់តារាងផលបូកនៃ $x_i; y_i; y; d$ និង d^2 ។

ខ. តើបន្ទាត់មួយណាដែលនៅជិតចំណុចទាំងនោះជាងគេ?

គ. ដោយប្រើបន្ទាត់ដែលរកឃើញ គណនាតម្លៃ y ចំពោះ $x=2$ និង $x=3$ ។

សំរាយបញ្ជាក់ :

ក. ចំពោះ $y=-0.5x+3$ យើងបាន :

x_i	y_i	y	d	d^2
0	4	3	1	1
2	2	2	0	0
2	0	2	-2	4
5	-2	0.5	-2.5	6.25
6	1	0	1	1
				$\sum d^2 = 12.25$

ចំពោះ $y=-x+4$ យើងបាន :

x_i	y_i	y	d	d^2
0	4	4	0	0
2	2	2	0	0
2	0	2	-2	4
5	-2	-1	-1	1
6	1	-2	3	9
				$\sum d^2=14$

ខ. ដោយ $\sum d^2$ នៃសមីការ $y=-0.5x+3$ តូចជាង $\sum d^2$ នៃសមីការ $y=-x+4$ ដូចនេះ ចំណុច $M_i(x_i, y_i)$ ស្ថិតនៅជិតបន្ទាត់ $y=-0.5x+3$ ។

គ. ដោយ $y=-0.5x+3$ យើងបាន :

$x=2 \Rightarrow y=y$ និង $x=3 \Rightarrow y=1.5$ ។

2-គេមានតារាងទិន្នន័យស្ថិតិពីរអថេរ :

x_i	2	4	6	8	9
y_i	2	2	6	10	10

ក. រកសមីការបន្ទាត់តម្រែតម្រង់លីនេអ៊ែនៃទិន្នន័យខាងលើ ។

ខ. ចូរគណនាតម្លៃ y ចំពោះ $x=3$ និង $x=5$ ។

សំរាយបញ្ជាក់ :

ក. រកសមីការបន្ទាត់តម្រែតម្រង់លីនេអែរ :

x_i	y_i	x_iy_i	x_i^2
2	2	4	4
4	2	8	16
6	6	36	36
8	10	80	64
9	10	90	18
$\sum x_i = 29$	$\sum y_i = 30$	$\sum x_iy_i = 218$	$\sum x_i^2 = 201$

យើងបាន $a = \dfrac{5\sum xy - \sum x \sum y}{5\sum x^2 - \left(\sum x\right)^2} = \dfrac{5\times 218 - 29\times 30}{5\times 201 - 29^2} = 1.34$

$b = \dfrac{1}{5}\left(\sum y - 1.34\sum x\right) = \dfrac{1}{5}\left(30 - 1.34\times 29\right) = --1.77$

$\Rightarrow y = 1.34x - 1.77$

ខ. ចូរគណនាតម្លៃ y ចំពោះ $x = 3$ និង $x = 5$

ដោយ $y = 1.34x - 1.77$

បើ $x = 3 \Rightarrow y = 2.25$

បើ $x = 5 \Rightarrow y = 4.93$

3- គេមានតារាងទិន្នន័យស្ថិតិពីរអថេរ :

x_i	1	1	5	5
y_i	1	3	2	4

ក. រកសមីការបន្ទាត់តម្រែតម្រង់លីនេអ៊ែនៃទិន្នន័យខាងលើ ។

ខ. គណនាតម្លៃ y ចំពោះ $x=1$; $x=3$ និង $x=5$ ។

គ. រកមេគុណតម្រែតម្រង់លីនេអ៊ែ រួចបកស្រាយទំនាក់ទំនងរវាង x_i និង y_i ។

សំរាយបញ្ជាក់ :

ក. ដោយ $y=dx+b$ ដែល $a=\dfrac{n\sum xy-\sum x\sum y}{n\sum x^2-\left(\sum x\right)^2}$ និង

$b=\dfrac{1}{n}\left(\sum y-a\sum x\right);n=4$

x_i	y_i	$x_i y_i$	x_i^2	y_i^2
1	1	1	1	1
1	3	3	1	9
5	2	10	25	4
5	4	20	25	16
$\sum x_i=12$	$\sum y_i=10$	$\sum x_i y_i=34$	$\sum x_i^2=52$	$\sum y_i^2=30$

យើងបាន $a=\dfrac{4\times34-12\times10}{4\times52-12^2}=0.25$

និង $b=\dfrac{1}{4}\left(10-0.25\times12\right)=1.75$

$\Rightarrow y=0.25x+1.75$

ខ. ដោយ $y=0.25x+1.75$

$x = 1 \Rightarrow y = 2; x = 3 \Rightarrow y = 2.5; x = 5 \Rightarrow y = 3$

គ. រកមេគុណតម្រែតម្រង់លីនេអែរ :

ដោយ $r = \dfrac{n\sum xy - \sum x \sum y}{\sqrt{n\sum x^2 - (\sum x)^2} \times \sqrt{n\sum x^2 - (\sum x)^2}}$

$= \dfrac{4\times 34 - 12\times 10}{\sqrt{4\times 52 - 12^2} \times \sqrt{4\times 30 - 10^2}} = 0.44$

ដោយ $r = 0.44$ ចំណុចទិន្នន័យ ពុំស្ថិតនៅក្បែរបន្ទាត់ ដែល x_i និង y_i ពុំមានទំនាក់ទំនងផ្គាល្អ ហេតុនេះគេពុំអាចយកសមីការ $y = 0.25x + 1.75$ ធ្វើការប៉ាន់ស្មានលទ្ធផលទេ ។ បើយើងយកតម្លៃ x យកទៅជំនួសរក y នោះ វានឹងមិនចេញតម្លៃដូចទិន្នន័យដែលឱ្យ ។

ឧទាហរណ៍. បើ $x = 1 \Rightarrow y = 3$ តែតាមការគណនា $x = 1 \Rightarrow y = 2.5$

4- ក្នុងរោងចក្រកាត់ដេរមួយគេជ្រើសរើសយកកម្មការិនីចំនួន 11 នាក់ ដែលមានអាយុពី 18 ទៅ 24ឆ្នាំ ដើម្បីធ្វើការសិក្សា ទំនាក់ទំនងរវាងកម្ពស់និងម៉ាស ។ តាង x_i ជាកម្ពស់គិតជា cm ហើយ y_i ជាម៉ាសគិតជា kg គេបានលទ្ធផលដូចតារាងខាងក្រោម:

x_i	150	152	152	155	155	157	158	158	160	160	165
y_i	50	58	48	50	52	60	53	63	54	62	56

ក. រកសមីការបន្ទាត់តម្រែតម្រង់លីនេអ៊ែរ ។

ខ. រកម៉ាសកម្មការិនីដែលត្រូវនឹងកម្ពស់ $152cm$;$155cm$ និង$160cm$ ។

គ. រកមេគុណតម្រែតម្រង់លីនេអ៊ែ រួចបកស្រាយទំនាក់ទំនងរវាង x_i និង y_i ។

សំរាយបញ្ជាក់ :

ក. រកសមីការបន្ទាត់តម្រែតម្រង់លីនេអែរ :

	x_i	y_i	$x_i y_i$	x_i^2	y_i^2
	150	50	7500	22500	2500
	152	58	8816	23104	3364
	152	48	7296	23104	2304
	155	50	7750	24025	2500
	155	52	8060	24025	2704
	157	60	9420	24649	3600
	158	53	8374	24964	2809
	158	63	9954	24964	3969
	160	54	8640	25600	2916
	160	62	9920	25600	3844
	165	56	9240	27225	3136
$\sum$	1722	605	94970	269760	33646

$$a = \frac{n\sum xy - \sum x \sum y}{n\sum x^2 - \left(\sum x\right)^2} = \frac{11\times 94970 - 1722\times 605}{11\times 269760 - (1722)^2} = 1.38$$

$$b = \frac{1}{n}\left(\sum y - a\sum x\right) = \frac{1}{11}(605 - 1.38\times 1722) = -161.03$$

$\Rightarrow y = 1.38x - 161.03$

ខ. រកម៉ាសកម្មការិនីដែលត្រូវនឹងកម្ពស់ $152cm$;$155cm$ និង$160cm$

ដោយ $y = 1.38x - 161.03$ យើងបាន :

បើ $x = 152 \Rightarrow y = 1.38 \times 152 - 161.03 = 48.73kg$

បើ $x = 155 \Rightarrow y = 1.38 \times 155 - 161.03 = 52.87kg$

បើ $x = 160 \Rightarrow y = 1.38 \times 160 - 161.03 = 59.77kg$

គ. រកមេគុណតម្រែតម្រង់លីនេអ៊ែរ :

$$r = \frac{n\sum xy - \sum x \sum y}{\sqrt{n\sum x^2 - (\sum x)^2} \times \sqrt{n\sum y^2 - (\sum y)^2}}$$

$$= \frac{11 \times 94970 - 1722 \times 605}{\sqrt{11 \times 269760 - (1722)^2} \times \sqrt{11 \times 33646 - (605)^2}}$$

$$= 0.98$$

ដោយ $r = 0.98$ មានន័យថាអថេរ x និង y មានទំនាក់ទំនងគ្នា យ៉ាងខ្លាំង

5- តារាងទិន្នន័យ ខាងក្រោមបានមកពីការិយាល័យសាងសង់ ដែលបង្ហាញថា ពីចំនួនប្រាក់ចំណាយលើការសាងសង់នៅក្នុងទីក្រុងមួយ រយះពេល 6ខែ ចុងក្រោយ ។

ខែ	មករា	កុម្ភៈ	មីនា	មេសា	ឧសភា	មិថុនា
ចំនួនប្រាក់គិតជាពាន់លានរៀល	42	19	30	49	68	69

បើ $x = 0$ តាងខែ មករា ។

ក. រកសមីការបន្ទាត់តម្រែតម្រង់លីនេអ៊ែរ ។

ខ. ចូរធ្វើការប៉ាន់ស្មានចំនួនប្រាក់ដែលចំណាយក្នុងខែកក្កដា ។

សំរាយបញ្ជាក់ :

ក. រកសមីការបន្ទាត់តម្រែតម្រង់លីនេអ៊ែរ

x_i	y_i	$x_i y_i$	x_i^2	y_i^2
0	42	0	0	1764
1	19	19	1	361
2	30	60	4	900
3	49	147	9	2401
4	68	272	16	4624
5	69	345	25	4761
$\sum x = 15$	$\sum y = 277$	$\sum xy = 834$	$\sum x^2 = 55$	$\sum y^2 = 14811$

ដោយ $a = \dfrac{n\sum xy - \sum x \sum y}{n\sum x^2 - \left(\sum x\right)^2} = \dfrac{6\times 834 - 15\times 277}{6\times 55 - (15)^2} = 8.6$

$b = \dfrac{1}{n}\left(\sum y - a\sum x\right) = \dfrac{1}{6}(277 - 8.6\times 15) = 24.66$

$\Rightarrow y = 8.6x + 24.66$

ខ. ខែកក្កដាត្រូវនឹង $x = 6$ យើងបាន :

$y = 8.6\times 6 + 24.66 = 76.26$ ពាន់លានរៀល ។

6- ប្រាក់ចំណាយប្រចាំឆ្នាំ (គិតជាកោដិរៀល) របស់សាជីវកម្មមួយឱ្យដោយ

តារាងទិន្នន័យខាងក្រោម:

ឆ្នាំ	2005	2006	2007	2008	2009	2010
ប្រាក់ចំណូល	66	82	127	201	310	392

តាង $x = 0$ តាងឆ្នាំ 2005

ក. រកសមីការបន្ទាត់តម្រែតម្រង់លីនេអ៊ែរ ។

ខ. ចូរធ្វើការប៉ាន់ស្មានប្រាក់ចំណូលនៅឆ្នាំ 2011 ។

សំរាយបញ្ជាក់ :

ក. រកសមីការបន្ទាត់តម្រែតម្រង់លីនេអែរ :

x_i	y_i	$x_i y_i$	x_i^2	y_i^2
0	66	0	0	4356
1	82	82	1	6724
2	127	254	4	16129
3	201	603	9	40401
4	310	1240	16	96100
5	392	1960	25	153664
$\sum x = 15$	$\sum y = 1178$	$\sum xy = 4139$	$\sum x^2 = 55$	$\sum y^2 = 317344$

ដោយ $a = \dfrac{n\sum xy - \sum x \sum y}{n\sum x^2 - (\sum x)^2} = \dfrac{6\times 4139 - 15\times 1178}{6\times 55 - (15)^2} = 68.22$

$b=\frac{1}{n}\left(\sum y-a\sum x\right)=\frac{1}{6}\left(1178-68.22\times 15\right)=25.78$

$\Rightarrow y=68.22x+25.78$

ខ. ឆ្នាំ2011 ត្រូវនឹង $x=6$ យើងបាន :

$y=68.22\times 6+25.78=435.1$ កោដិរៀល ។

7- ក្រុមហ៊ុនមួយលក់រថយន្តដែលបានប្រើប្រាស់រួច ។ តម្លៃលក់បញ្ចុះទៅតាមចំនួនឆ្នាំដែលបានប្រើប្រាស់ គេបានតារាងទិន្នន័យដែលក់កន្លងមក ។

ចំនួនឆ្នាំដែលបានប្រើប្រាស់	5	4	5	5	6	6	3	7	7
តម្លៃលក់ (គិតជាលានរៀល)	82	102	90	99	67	73	125	168	75

ក. រកសមីការបន្ទាត់តម្រែតម្រង់លីនេអ៊ែរ ។

ខ. រកតម្លៃរថយន្តដែលមានចំណាស់ 5 ឆ្នាំ និង 2 ឆ្នាំ ។

គ. រកមេគុណតម្រែតម្រង់លីនេអ៊ែរ រួចបកស្រាយទំនាក់ទំនងរវាងទិន្នន័យទាំងពីរ ។

សំរាយបញ្ជាក់ :

ក. រកសមីការបន្ទាត់តម្រែតម្រង់លីនេអែរ :

x_i	y_i	$x_i y_i$	x_i^2	y_i^2
5	82	410	25	6724
4	102	408	16	10404
5	90	450	25	8100
5	99	495	25	9801
6	67	402	36	4489
6	73	438	36	5329
3	125	375	9	15625
7	168	1176	49	28224
7	75	525	49	5625
$\sum x = 48$	$\sum y = 881$	$\sum xy = 4679$	$\sum x^2 = 270$	$\sum y^2 = 91321$

$$a = \frac{n\sum xy - \sum x \sum y}{n\sum x^2 - \left(\sum x\right)^2} = \frac{10\times 4679 - 48\times 881}{10\times 270 - (48)^2} = 11.37$$

$$b = \frac{1}{n}\left(\sum y - a\sum x\right) = \frac{1}{10}(881 - 11.37\times 48) = 33.52$$

$$\Rightarrow y = 11.37x + 33.52$$

ខ. រកតម្លៃរថយន្តដែលមានចំណាស់ 5ឆ្នាំ និង2ឆ្នាំ

ដោយ $y = 11.37x + 33.52$ យើងបាន :

បើ $x = 5 \Rightarrow y = 11.37\times 5 + 33.52 = 90.37$

បើ $x=2 \Rightarrow y=11.37\times 2+33.52=56.26$

គ. រកមេគុណតម្រែតម្រង់លីនេអ៊ែ

$$r=\frac{n\sum xy-\sum x\sum y}{\sqrt{n\sum x^2-\left(\sum x\right)^2}\times\sqrt{n\sum y^2-\left(\sum y\right)^2}}$$

$$=\frac{10\times 4679-48\times 881}{\sqrt{10\times 270-48^2}\times\sqrt{10\times 91321-881^2}}=0.61$$

ដោយ $r=0.61$ បញ្ជាក់ថា x និង y មិនសូវមានទំនាក់ទំនងគ្នាល្អទេ ។

8- នៅរយៈពេល 5 ឆ្នាំចុងក្រោយនេះ អ្នកគ្រប់គ្រងផ្នែកឃោសនាពាណិជ្ជកម្មម្នាក់បានប្រមូលទិន្នន័យដែលបង្ហាញពីទំនាក់ទំនងរវាងចំនួនថវិកាឃោសនាទំនិញ (គិតជាកោដិរៀល) និងបរិមាណផលិតផលដែលលក់បាន (គិតជាពាន់ឯកតាផលិតផល) ។គេបានតារាងទិន្នន័យដូចខាងក្រោម:

x_i ចំនួនថវិកាឃោសនា	4.5	6.5	3.5	3.2	2.6
y_i បរិមាណផលិតផលលក់បាន	37	46	42	32	29

ក. រកសមីការបន្ទាត់តម្រែតម្រង់លីនេអ៊ែរ ។

ខ. ធ្វើការប៉ាន់ស្មានបរិមាណឯកតាផលិតផលដែលបានលក់ បើគេចំណាយថវិកាអស់ 4 កោដិរៀល ។

គ. រកមេគុណតម្រែតម្រង់លីនេអ៊ែរ ។

សំរាយបញ្ជាក់ :

ក. រកសមីការបន្ទាត់តម្រែតម្រង់លីនេអ៊ែរ :

x_i	y_i	$x_i y_i$	x_i^2	y_i^2
4.5	37	166.5	20.25	1369
6.5	46	299	42.25	2116
3.5	42	147	12.25	1764
3.2	32	102.4	10.24	1024
2.6	29	75.4	6.76	841
$\sum x = 20.3$	$\sum y = 186$	$\sum xy = 790.3$	$\sum x^2 = 91.75$	$\sum y^2 = 7204$

$$a = \frac{n\sum xy - \sum x \sum y}{n\sum x^2 - (\sum x)^2} = \frac{5\times 790.3 - 20.3\times 186}{5\times 91.75 - (20.3)^2} = 3.76$$

$$b = \frac{1}{n}(\sum y - a\sum x) = \frac{1}{5}(186 - 3.76\times 20.3) = 22$$

$$\Rightarrow y = 3.76x + 22$$

ខ. ចំពោះ $x = 4 \Rightarrow y = 3.76\times 4 + 22 = 37.04$

គ. រកមេគុណតម្រែតម្រង់លីនេអ៊ែរ :

$$r = \frac{n\sum xy - \sum x\sum y}{\sqrt{n\sum x^2 - (\sum x)^2}\times\sqrt{n\sum y^2 - (\sum y)^2}}$$

$$= \frac{5\times 790.3 - 20.3\times 186}{\sqrt{5\times 91.75 - (20.3)^2}\times\sqrt{5\times 7204 - (186)^2}} = 0.68$$

ដោយ $r = 0.68$ បញ្ជាក់ថា x និង y មិនសូវមានទំនាក់ទំនងគ្នាខ្លាំងទេ ។

លំហាត់ជំពូក៥

1- គេឱ្យតារាងស្ថិតិនៃពីរអថេរខាងក្រោម:

x_i	3	2	3.5	4	5	6	6.5	7	8	9
y_i	11	13	20	25	19	30	35	38	32	40

ក. បកស្រាយស្ថិតិនៃពីរអថេរជាចំណុច ។

ខ. ផ្គុំចំណុចខាងលើជាពីរក្រុម ។

គ. រកចំណុចមធ្យម M_1 និង M_2 រួចរកសមីការបន្ទាត់ដែល កាត់តាម M និង M_2 ។

សំរាយបញ្ជាក់ :

ក. បកស្រាយស្ថិតិនៃពីរអថេរជាចំណុច

$(3;11);(2;13);(3.5;20);(4;25);(5;19);(6;30)$

$(6.5;35);(7;38);(8;32);(9;40)$ ។

ខ. ផ្គុំចំណុចខាងលើជាពីរក្រុម

ក្រុមទី១: $(3;11);(2;13);(3.5;20);(4;25);(5;19)$

ក្រុមទី២: $(6;30);(6.5;35);(7;38);(8;32);(9;40)$ ។

គ. រកចំណុចមធ្យម M_1 និង M_2

M_1 មាន $x_1 = \dfrac{3+2+3.5+4+5}{5} = 3.5$

$$y_1 = \frac{11+13+20+25+19}{5} = 17.6$$

M_2 មាន $x_2 = \frac{6+6.5+7+8+9}{5} = 7.3$

$$y_2 = \frac{30+35+38+32+40}{5} = 35$$

យើងបាន សមីការបន្ទាត់កាត់តាមចំណុច M_1 និង M_2 កំណត់ដោយ:

$$\frac{y-17.6}{x-3.5} = \frac{35-17.5}{7.3-3.5} \Rightarrow y = 4.58x + 1.57$$

2- គេមានសមីការបន្ទាត់ $y = -0.6x + 3$ និង $y = -x + 3$ និងតារាងទិន្នន័យ:

x_i	0	2	2	5	6
y_i	4	2	0	-2	1

ក. ចូរសង់តារាងផលបូកនៃ x_i និង $y_i; y; d$ និង d^2 ។

ខ. តើបន្ទាត់មួយណាដែលនៅជិតចំណុចទាំងនោះជាងគេ?

គ. ដោយប្រើបន្ទាត់ដែលរកឃើញ គណនាតម្លៃ y ចំពោះ $x = 3$ និង $x = 4$ ។

សំរាយបញ្ជាក់ :

ក. ចំពោះ $y = -0.6x + 3$ យើងបាន តារាងផលបូក :

x_i	y_i	y	d	d^2
0	4	3	1	1
2	2	1.8	0.2	0.04
2	0	1.8	−1.8	3.24
5	−2	0	−2	4
6	1	−0.6	1.6	2.56
				$\sum d^2 = 10.84$

ចំពោះ $y = -x + 3$ យើងបាន តារាងផលបូក :

x_i	y_i	y	d	d^2
0	4	3	1	1
2	2	1	1	1
2	0	1	−1	1
5	−2	−2	0	0
6	1	−3	4	16
				$\sum d^2 = 19$

ខ. តើបន្ទាត់មួយណាដែលនៅជិតចំណុចទាំងនោះជាងគេ?

ដោយ $\sum d^2$ នៃបន្ទាត់ $y = -0.6x + 3$ តូចជាង $\sum d^2$ នៃបន្ទាត់ $y = -x + 3$ នោះ ចំណុចទាំងនោះនៅជិតបន្ទាត់ $y = -0.6x + 3$ ។

គ. ដោយ $y = -0.6x + 3$

ចំពោះ $x = 3 \Rightarrow y = 1.2; x = 4 \Rightarrow y = 0.6$

3- តារាងទិន្នន័យខាងក្រោមបង្ហាញ ពីចំនួនប្រាក់ដែលចំណាយលើការសាង

សង់ក្នុងតំបន់មួយនៅអំឡុងពេល 5ខែ ។

x_i ខែ	មករា	កុម្ភៈ	មិនា	មេសា	ឧសភា
y_i ចំនួនប្រាក់(គិតជាពាន់ដុល្លារ)	15	17	24	20	25

បើ $x_i = 0$ តាងខែមករា

ក. រកសមីការបន្ទាត់តម្រែតម្រង់លីនេអ៊ែរ ។

ខ. ចូរធ្វើការប៉ាន់ស្មានចំនួនប្រាក់ដែលនឹងចំណាយក្នុងខែមិថុនា ។

សំរាយបញ្ជាក់ :

ក. រកសមីការបន្ទាត់តម្រែតម្រង់លីនេអែ

x_i	y_i	$x_i y_i$	x_i^2	y_i^2
0	15	0	0	225
1	17	17	1	289
2	24	48	4	576
3	20	60	9	400
4	25	100	16	625
$\sum x = 10$	$\sum y = 101$	$\sum xy = 225$	$\sum x^2 = 30$	$\sum y^2 = 2115$

$$a = \frac{n\sum xy - \sum x \sum y}{n\sum x^2 - (\sum x)^2} = \frac{5\times 225 - 10\times 101}{5\times 30 - 10^2} = 2.3$$

$$b = \frac{1}{n}\left(\sum y - a\sum x\right) = \frac{1}{5}(101 - 2.3\times 10) = 15.6$$

$$\Rightarrow y = 2.3x + 15.6$$

ខ. ខែមិថុនាត្រូវនឹង $x = 5 \Rightarrow y = 2.3\times5+15.6 = 27.1$

4- ចូរពិនិត្យតារាងទិន្នន័យនៃពីរអថេរ :

x_i	-3	-2	-1	0	1	2	3
y_i	9	4	1	0	1	4	9

ក. រកសមីការបន្ទាត់តម្រែតម្រង់លីនេអ៊ែរ ។

ខ. រកមេគុណតម្រែតម្រង់លីនេអ៊ែ r ។

គ. តាមតម្លៃ r ខាងលើ តើ x_i និង y_i មានទំនាក់ទំនងគ្នាដែរឬទេ? តើគេអាចប្រើសមីការតម្រែតម្រង់លីនេអ៊ែខាងលើសម្រាប់ធ្វើការប៉ាន់ស្មានលទ្ធផលឬទេ?

សំរាយបញ្ជាក់ :

ក. រកសមីការបន្ទាត់តម្រែតម្រង់លីនេអ៊ែរ :

x_i	y_i	$x_i y_i$	x_i^2	y_i^2
-3	9	-27	9	81
-2	4	-8	4	16
-1	1	-1	1	1
0	0	0	0	0
1	1	1	1	1
2	4	8	4	16
3	9	27	9	81

$\sum x=0$	$\sum y=28$	$\sum xy=0$	$\sum x^2=28$	$\sum y^2=196$

$$a=\frac{n\sum xy-\sum x\sum y}{n\sum x^2-\left(\sum x\right)^2}=\frac{7\times 0-0\times 28}{7\times 28-0}=0$$

$$b=\frac{1}{n}\left(\sum y-a\sum x\right)=\frac{1}{7}(28-0)=4$$

$$\Rightarrow y=4$$

ខ. រកមេគុណតំរែតម្រង់លីនេអ៊ែ r

$$r=\frac{n\sum xy-\sum x\sum y}{\sqrt{n\sum x^2-\left(\sum x\right)^2}\times\sqrt{n\sum y^2-\left(\sum y\right)^2}}=0$$

គ. ដោយ $r=0$ យើងឃើញថាចំណុច x_i និង y_i ពុំមានទំនាក់ទំនងធៀបទៅនឹងបន្ទាត់ $y=4$ ។

ជំពូក៦ កោនិក

មេរៀនទី១ ប៉ារ៉ាបូល

លំហាត់ :

1- រកកូអរដោនេកំពូល កំណុំនិងសមីការបន្ទាត់ ប្រាប់ទិសនៃប៉ារ៉ាបូលខាងក្រោម រួចសង់ក្រាបះ

ក. $y^2 = 4x$ ខ. $y^2 = 12x$ គ. $x^2 = 8y$

ឃ. $x^2 = -2y$ ង. $(y+2)^2 = 4(x-1)$

ច. $(y-1)^2 = -(x+3)$ ឆ. $(x-3)^2 = 2(y+2)$

ជ. $(x-1)^2 + 8(y+2) = 0$ ឈ. $(x+3) + (y-2)^2 = 0$

ញ. $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 = 4(y-3)$ ។

សំរាយបញ្ជាក់ :

រកកូអរដោនេកំពូល កំណុំនិងសមីការបន្ទាត់ ប្រាប់ទិសនៃប៉ារ៉ាបូលខាងក្រោម រួចសង់ក្រាបះ

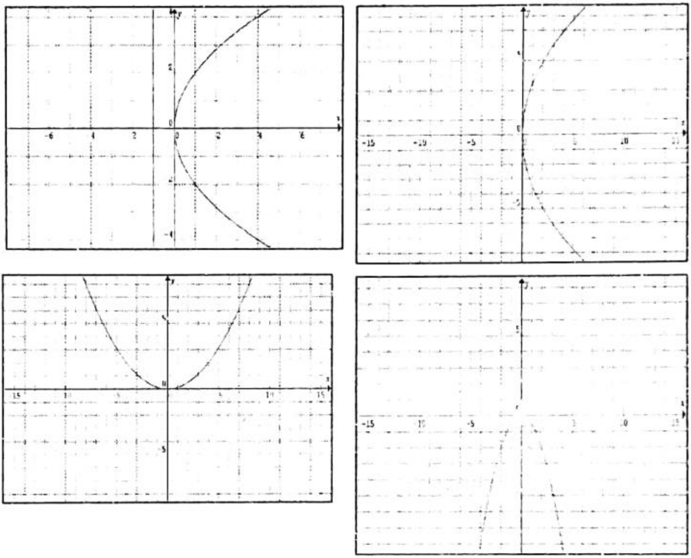
តាង I ជាកំពូល និង F ជាកំណុំ :

ក. $y^2 = 4x \Rightarrow I(0;0); F(1;0)$ និង បន្ទាត់ប្រាប់ទិស $x = -1$

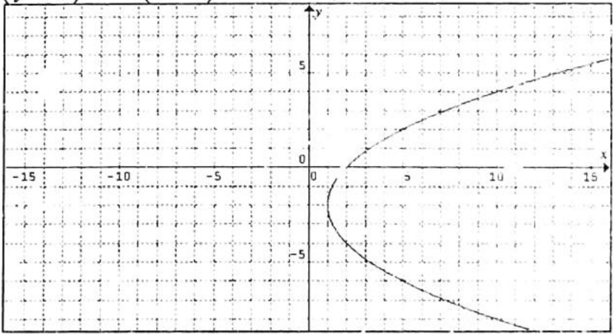
ខ. $y^2 = 12x \Rightarrow I(0;0); F(3;0)$ និង បន្ទាត់ប្រាប់ទិស $x = -3$

គ. $x^2 = 8y \Rightarrow I(0;0); F(0;2)$ និងបន្ទាត់ប្រាប់ទិស $y = -2$

ឃ. $x^2 = -2y \Rightarrow I(0;0); F\left(0;-\frac{1}{2}\right)$ និង $y = \frac{1}{2}$

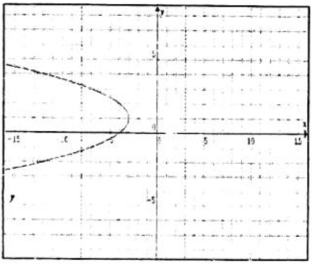


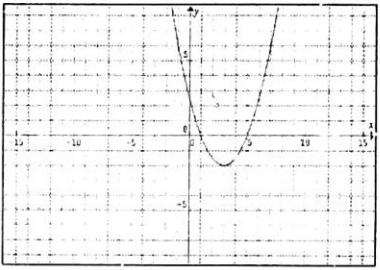
ង. $(y+2)^2 = 4(x-1) \Rightarrow I(1;-2); F(2;-2)$ និង $x = 0$



ច. $(y-1)^2 = -(x+3) \Rightarrow I(-3;1); F\left(-\frac{13}{4};1\right)$ និង $x=-\frac{11}{4}$

ឆ. $(x-3)^2 = 2(y+2) \Rightarrow I(3;-2); F\left(3;-\frac{3}{2}\right)$ និង $y=-\frac{5}{2}$

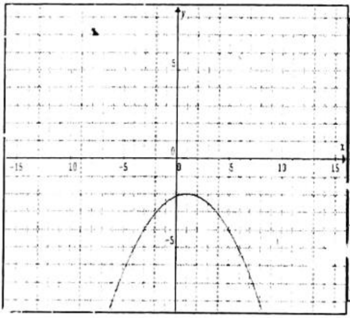


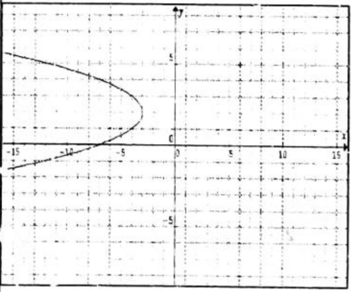


ជ. $(x-1)^2+8(y+2)=0 \Rightarrow I(1;-2); F(1;-4)$ និង $y=0$

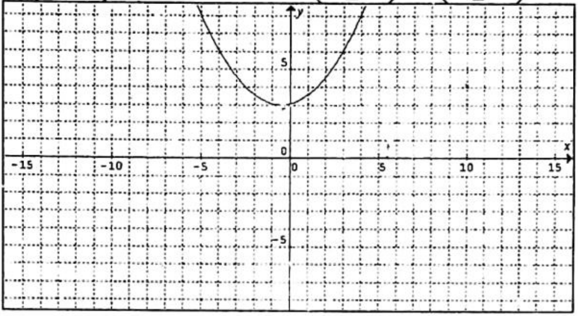
ឈ. $(x+3)+(y-2)^2=0 \Rightarrow I(-3;2)\cdot F\left(-\frac{13}{4};2\right)$ និង

$x=-3+\frac{1}{4}=-\frac{11}{4}$





ញ. $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2=4(y-3)\Rightarrow I\left(-\frac{1}{2};3\right);F\left(-\frac{1}{2};4\right)$ និង $y=2$



2-បម្លែងសមីការទូទៅនីមួយៗខាងក្រោមទៅជាសមីការស្តង់ដា :

ក. $x^2-2x-3y-8=0$ ខ. $4x-y^2-2y-33=0$

គ. $y^2-4y-4x=0$ ឃ. $x^2+4x+4y-4=0$

ង. $9y^2-36y-2x+24=0$ ច. $y^2-4x+4y+24=0$

សំរាយបញ្ជាក់ :

ក. $x^2-2x-3y-8=0\Rightarrow x^2-2x+1=3y+9$

$\Rightarrow(x-1)^2=3(y+3)$

ខ. $4x-y^2-2y-33=0\Rightarrow y^2-2y+1=4x-32$

$\Rightarrow(y-1)^2=4(x-8)$

គ. $y^2-4y-4x=0\Rightarrow y^2-4y+4=4x+4$

$\Rightarrow(y-2)^2=4(x+1)$

ឃ. $x^2+4x+4y-4=0 \Rightarrow x^2+4x+4=-4y+8$

$\Rightarrow (x+2)^2=-4(y-2)$

ង. $9y^2-36y-2x+24=0 \Rightarrow 9y^2-36y+36=2x+12$

$\Rightarrow 9(y-2)^2=2(x+6) \Rightarrow (y-2)^2=\frac{2}{9}(x+6)$

ច. $y^2-4x+4y+24=0 \Rightarrow y^2+4y+4=4x-20$

$\Rightarrow (y+2)^2=4(x-5)$

3. រកកូអរដោនេនៃកំពូល កំណុំ និងសមីការបន្ទាត់ប្រាប់ទិសនៃប៉ារ៉ាបូល តាមសមីការនីមួយៗខាងក្រោម រួចសង់ក្រាប:

ក. $y=\frac{1}{4}(x^2-2x+5)$ ខ. $y^2+6y+8x+25=0$

គ. $x^2+4x+4y-4=0$ ឃ. $y^2+4y+8x-12=0$

ង. $2x^2+4x-9y+20=0$ ច. $4y^2+8y-3x+10=0$

សំរាយបញ្ជាក់ :

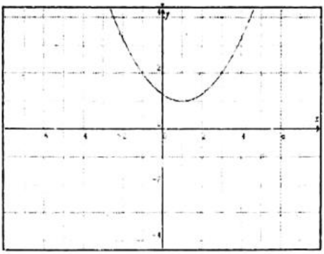
រកកូអរដោនេនៃកំពូល កំណុំ និងសមីការបន្ទាត់ប្រាប់ទិសនៃប៉ារ៉ាបូល តាមសមីការនីមួយៗខាងក្រោម រួចសង់ក្រាប:

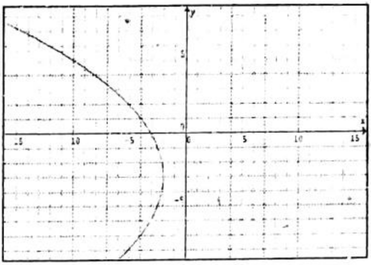
ក. $y=\frac{1}{4}(x^2-2x+5) \Rightarrow (x-1)^2=4(y-1)$

យើងបាន $I(1;1); F(1;2)$ និង $y=0$

ខ. $y^2+6y+8x+25=0 \Rightarrow (y+3)^2=-8(x+2)$

យើងបាន $I(-2;-3);F(-4;-3)$ និង $x=-4$



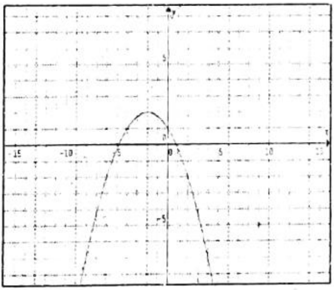


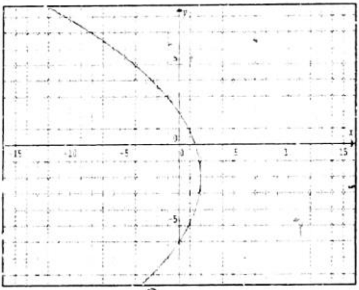
គ. $x^2+4x+4y-4=0 \Rightarrow (x+2)^2=-4(y-2)$

យើងបាន $I(-2;2);F(-2;1)$ និង $y=3$

ឃ. $y^2+4y+8x-12=0 \Rightarrow (y+2)^2=-8(x-2)$

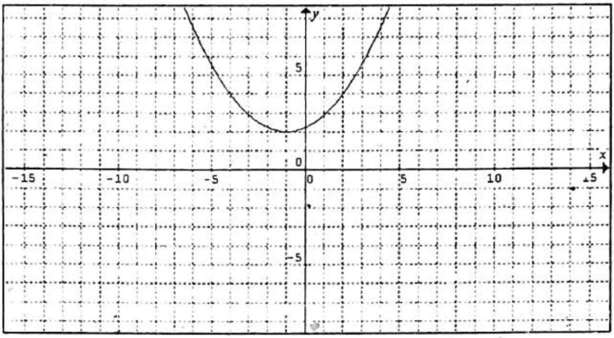
យើងបាន $I(2;-2);F(0;-2)$ និង $x=4$





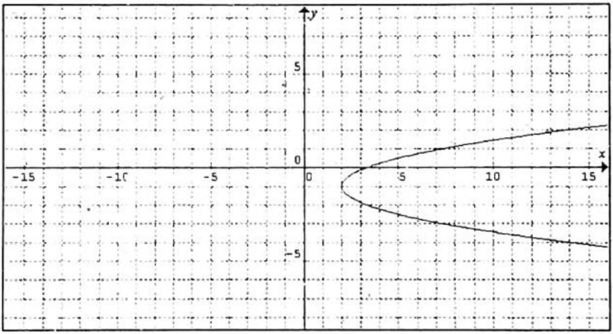
ង. $2x^2+4x-9y+20=0 \Rightarrow (x+1)^2=\dfrac{9}{2}(y-2)$

យើងបាន $I(-1;2);F\left(-1;\dfrac{25}{8}\right)$ និង $x=-\dfrac{17}{8}$



ច. $4y^2+8y-3x+10=0 \Rightarrow (y+1)^2=\frac{3}{4}(x-2)$

យើងបាន $I(2;-1);F\left(\frac{35}{16};-1\right)$ និង $x=\frac{29}{16}$ ។



4- រកសមីការនៃប៉ារ៉ាបូលដែលកំណត់ដោយលក្ខខណ្ឌដូចខាងក្រោម:

ក. កំពូល $V(0;0)$ និងកំណុំ $F(2;0)$

ខ. កំពូល $V(3;2)$ និងសំណុំ $F(1;2)$

គ. កំពូល $V(0;-4)$ និងសមីការបន្ទាត់ប្រាប់ទិស $y-2=0$

ឃ. កំពូល $V(-2;1)$ និងសមីការបន្ទាត់ប្រាប់ទិស $x-1=0$

ង. កំណុំ $F(2;1)$ និងសមីការបន្ទាត់ប្រាប់ទិស $x=-2$

ច. អ័ក្សឆ្លុះនៃប៉ារ៉ាបូលស្របនិងអ័ក្សអាប់ស៊ីសហើយក្រាបកាត់តាមចំណុច $(4;2)$; $(0;0)$ និងចំណុច $(3;-3)$ ។

សំរាយបញ្ជាក់ :

រកសមីការនៃប៉ារ៉ាបូលដែលកំណត់ដោយលក្ខខណ្ឌដូចខាងក្រោម:

ក. កំពូល $V(0;0)$ និងកំណុំ $F(2;0)$

សមីការមានរាង $y^2=4px$

ដោយ $F(2;0)$ យើងបាន $p=2 \Rightarrow y^2=8x$

ខ. កំពូល $V(3;2)$ និងសំណុំ $F(1;2)$

សមីការស្តង់ដាមានរាង $(y-k)^2=4p(x-h)$

ដោយ $\begin{cases} V(3;2) \\ F(1;2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} h=3 \\ k=2 \\ p=-2 \end{cases}$

$\Rightarrow (y-2)^2=-8(x-3)$

គ. កំពូល $V(0;-4)$ និងសមីការបន្ទាត់ប្រាប់ទិស $y-2=0$

សមីការស្តង់ដាមានរាង $(x-h)^2=4p(y-k)$

ដោយ កំពូល$V(0;-4) \Rightarrow h=0;k=-4$ និងសមីការបន្ទាត់ ប្រាប់ទិស

$y-2=0 \Rightarrow -4-p=2 \Rightarrow p=-6$

$\Rightarrow x^2=-24(y+4)$

ឃ. កំពូល $V(-2;1)$ និងសមីការបន្ទាត់ប្រាប់ទិស $x-1=0$

សមីការស្តង់ដាមានរាង $(y-k)^2=4p(x-h)$

ដោយ កំពូល$V(-2;1) \Rightarrow h=-2;k=1$ និងសមីការបន្ទាត់ ប្រាប់ទិស

$x-1=0 \Rightarrow -2-p=1 \Rightarrow p=-3$

$\Rightarrow (y-1)^2=-12(x+2)$

ង. កំណុំ $F(2;1)$ និងសមីការបន្ទាត់ប្រាប់ទិស $x=-2$

សមីការស្តង់ដាមានរាង $(y-k)^2=4p(x-h)$

ដោយ កំណុំ $F(2;1) \Rightarrow \begin{cases} h+p=2 \\ k=1 \end{cases}$ និងសមីការបន្ទាត់ប្រាប់ទិស

$x=-2 \Rightarrow h-p=-2$ តាមសមីការខាងលើយើងបាន :

$\begin{cases} h+p=2 \\ h-p=-2 \end{cases} \Rightarrow h=0; p=2$

$\Rightarrow (y-1)^2=8x$

ច. អ័ក្សឆ្លុះនៃប៉ារ៉ាបូលស្របនិងអ័ក្សអាប់ស៊ីស ហើយក្រាបកាត់តាម

ចំណុច $(4;2)$;$(0;0)$ និងចំណុច $(3;-3)$

ដោយសមីការស្តង់ដាមានរាង $(y-k)^2=4p(x-h)$ កាត់តាមចំណុច

$(4;2)$; $(0;0)$ និងចំណុច $(3;-3)$ យើងបាន :

$$\begin{cases}(2-k)^2=4p(4-h)\\ k^2=4p(-h)\\ (-3-k)^2=4p(3-h)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}4-4k+k^2=16p-4ph\ (1)\\ k^2=-4ph\ (2)\\ 9+6k+k^2=12p-4ph\ (3)\end{cases}$$

យក (2) ជំនួសក្នុង (1) និង (3) យើងបាន :

$$\begin{cases}4-4k-4ph=16p-4ph\\ 9+6k-4ph=12p-4ph\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}1-k=4p\\ 3+2k=4p\end{cases}$$

$$\Rightarrow k=-\frac{2}{3};p=\frac{5}{12};h=-\frac{4}{15}$$

$$\Rightarrow\left(y+\frac{2}{3}\right)^2=\frac{5}{3}\left(x+\frac{4}{15}\right)$$

5- រកសមីការនៃបន្ទាត់ប៉ះទៅនឹងក្រាបនៃប៉ារ៉ាបូល $y^2=2x$ ដែលកាត់តាមចំណុច $(-4;1)$ ។

សំរាយបញ្ជាក់ :

រកសមីការនៃបន្ទាត់ប៉ះទៅនឹងក្រាបនៃប៉ារ៉ាបូល :

សមីការបន្ទាត់ប៉ះមានរាង $y=ax+b$ កាត់តាមចំណុច$(-4;1)$

$$\Rightarrow 1=-4a+b\Rightarrow b=1+4a\Rightarrow y=ax+1+4a$$

$$\Rightarrow x=\frac{y-1-4a}{a}\quad(1)$$

ដោយប៉ារ៉ាបូល $y^2=2x\Rightarrow x=\frac{y^2}{2}$ (2)

ផ្ទឹម (1) និង(2) យើងបាន $\frac{y-1-4a}{a}=\frac{y^2}{2}$

$\Rightarrow ay^2-2y+2+8a=0$ បន្ទាត់នឹងប៉ារ៉ាបូលប៉ះគ្នាកាលណា :

$\Delta'=0 \Rightarrow 1-a(2+8a)=0 \Rightarrow -8a^2-2a+1=0$

$\Rightarrow a=\frac{1}{4}; a=-\frac{1}{2}$

- បើ $a=\frac{1}{4} \Rightarrow b=2$ យើងបាន $y=\frac{1}{4}x+2$

- បើ $a=-\frac{1}{2} \Rightarrow b=-1$ យើងបាន $y=-\frac{1}{2}x-1$

6- រកសមីការនៃប៉ារ៉ាបូលដែលអ័ក្សឆ្លុះស្របនិងអ័ក្សអរដោនេ ហើយមាន កំពូល $V(0;2)$ ដែលកាត់តាមចំណុច $P(4;8)$ ។

សំរាយបញ្ជាក់ :

រកសមីការនៃប៉ារ៉ាបូលដែលអ័ក្សឆ្លុះស្របនិងអ័ក្សអរដោនេ

សមីការស្តង់ដាមានរាង $(x-h)^2=4p(y-k)$

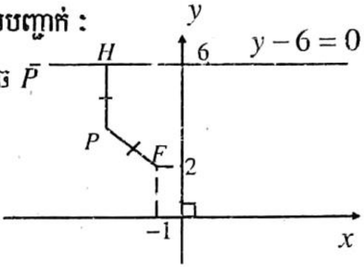
ដោយ កំពូល $V(0;2) \Rightarrow h=0; k=2$ នោះ $x^2=4p(y-2)$

កាត់តាមចំណុច $P(4;8)$ យើងបាន $16=24p \Rightarrow p=\frac{2}{3}$

$\Rightarrow x^2=\frac{8}{3}(y-2)$

7- ចំណុច P មួយចល័តដែលមានចម្ងាយស្មើពីចំណុច $F(-1;2)$ និងបន្ទាត់មួយមានសមីការ $y-6=0$ ។ រកសមីការនៃសំណុំចំណុចនៃចំណុច P ។

សំរាយបញ្ជាក់ :



រកសមីការនៃសំណុំចំណុចនៃចំណុច P

តាង $P(x;y)$ និង $H(x;6)$

ដោយ $PH = PF$

$\Rightarrow \sqrt{(x-x)^2+(6-y)^2}$

$= \sqrt{(-1-x)^2+(2-y)^2}$

$\Rightarrow 36-12y+y^2$

$= 1+2x+x^2+4-4y+y^2$

$\Rightarrow x^2+2x+1=-12y+36+4y-4$

$\Rightarrow (x+1)^2=-8(y-4)$

សំណុំចំណុច P គឺជាប៉ារ៉ាបូលដែលមានកំពូល $V(-1;4)$ កំណុំ $F(-1;2)$ និងបន្ទាត់ប្រាប់ទិស $y=6$ ។

8- រកសមីការនៃប៉ារ៉ាបូល ដែលមានអ័ក្សឆ្លុះជាអ័ក្សឈរ ហើយក្រាបវាកាត់តាមចំណុច $A(2;5)$; $B(-2;-3)$ និង $C(1;6)$ ។

សំរាយបញ្ជាក់ :

រកសមីការនៃប៉ារ៉ាបូល

សមីការស្តង់ដាមានរាង $(x-h)^2=4p(y-k)$ កាត់តាមចំណុច $A(2;5)$; $B(-2;-3)$ និង $C(1;6)$ យើងបាន :

$$\begin{cases}(2-h)^2=4p(5-k)\\(-2-h)^2=4p(-3-k)\\(1-h)^2=4p(6-k)\end{cases}$$

$$\Rightarrow h=1;k=6;p=-\frac{1}{4}\Rightarrow(x-1)^2=-(y-6)$$

9- រកសមីការនៃប៉ារ៉ាបូលដែលមានអ័ក្សឆ្លុះជាអ័ក្សដេក ហើយក្រាបវាកាត់តាមចំណុច $A(-1;1)$; $B(11;-2)$ និង $C(5;-1)$ ។

សំរាយបញ្ជាក់ :

រកសមីការនៃប៉ារ៉ាបូលដែលមានអ័ក្សឆ្លុះជាអ័ក្សដេក :

សមីការស្តង់ដាមានរាង $(y-k)^2=4p(x-h)$ កាត់តាមចំណុច $A(-1;1)$; $B(11;-2)$ និង $C(5;-1)$ យើងបាន :

$$\begin{cases}(1-k)^2=4p(-1-h)\\(-2-k)^2=4p(11-h)\Rightarrow h=-\frac{5}{4};k=\frac{3}{2};p=\frac{1}{4}\\(-1-k)^2=4p(5-h)\end{cases}$$

$$\Rightarrow\left(y-\frac{3}{2}\right)^2=x+\frac{5}{4}$$

10- តាង m និង b ជាចំនួនពិតពីរខុសពីសូន្យ ។បើបន្ទាត់ $y=mx+b$ កាត់ប៉ារ៉ាបូល $y^2=4px$ ត្រង់ចំណុចមួយ ។បង្ហាញថា $p=mb$ ។បង្ហាញថាបន្ទាត់ប៉ះទៅនឹងប៉ារ៉ាបូល $y^2=4px$ ត្រង់ចំណុច $P(x_1;y_1)$ មានមេគុណេ

ប្រាប់ទិសស្មើនឹង $\frac{y_1}{2x_1}$ ។

សំរាយបញ្ជាក់ :

ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ $\begin{cases} y^2 = 4px \\ y = mx + b \end{cases} \Rightarrow (mx+b)^2 = 4px$

$\Rightarrow m^2x^2 + (2mb - 4p)x + b^2 = 0$

បន្ទាត់ប៉ះនឹងប៉ារ៉ាបូលលុះត្រាតែ $\Delta' = 0$

$\Rightarrow \Delta' = (mb - 2p)^2 - m^2b^2 = -4mbp + 4p^2 = 0$

$\Rightarrow 4p(-mb + p) = 0 \Rightarrow p = bm$

ប្រើចំណុច $P(x_1; y_1)$; $y = mx + b \Rightarrow b = mx_1 - y_1$ និង

$p = mb = m(y_1 - mx_1)$ (1) តែ $y_1^2 = 4px_1 \Rightarrow p = \frac{y_1^2}{4x_1}$ (2)

តាម (1) និង (2) យើងបាន :

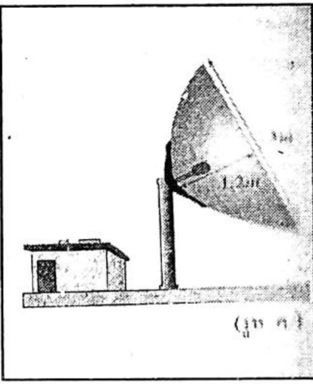
$m(y_1 - mx_1) = \frac{y_1^2}{4x_1} \Rightarrow 4x_1^2m^2 - 4x_1y_1m + y_1^2 = 0$

មេគុណប្រាប់ទិស $m = \frac{4x_1y_1 \pm \sqrt{16x_1^2y_1^2 - 16x_1^2y_1^2}}{8x_1^2} = \frac{y_1}{2x_1}$

11- ថាសផ្កាយរណបមួយមានរាងជា ផ្ទៃដែលបានពីរង្វិលនៃប៉ារ៉ាបូលជុំវិញអ័ក្សរបស់វា ។ ការផ្សាយចេញពីផ្កាយរណបបានមកប៉ះ ផ្ទៃនៃថាស ហើយត្រូវបានចាំងផ្លាតទៅប្រសព្វគ្នាត្រង់ចំណុចមួយដែលបានដាក់គ្រឿង ទទួល (**រូប ក**) ។បើមាត់ថាសមានអង្កត់ផ្ចិត $3m$ និងមានជម្រៅពីផ្ចិតទៅកំពូល

$1.2m$ ។តើគ្រឿងទទួលត្រូវដាក់នៅត្រូវទីតាំងណា?

សំរាយបញ្ជាក់ :



សមីការស្តង់ដានៃប៉ារ៉ាបូលគឺ :

$x^2 = 4py$

បើយមានកំណុំ $(o; p)$ ។ចំណុច

$(1.5;1.2)$ ស្ថិតនៅលើប៉ារ៉ាបូលគេបាន:

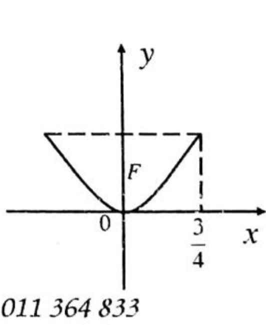
$1.5^2 = 4\times1.2\times p$

$\Rightarrow p = \dfrac{2.25}{4.8} = 0.47$

ដូចនេះ គ្រឿងទទួលខុសត្រូវស្ថិតនៅ $0.47m$ ពីកំពូលនៃថាសផ្កាយរណប ហើយស្ថិតនៅលើអ័ក្សឆ្លុះនៃប៉ារ៉ាបូល ។

12-ចង្កៀងភ្លើងបញ្ចាំងមើលផ្លូវមួយមានបន្ទះឆ្លាតពន្លឺជា ផ្ទៃដែលបានមកពី រង្វិលនៃប៉ារ៉ាបូលជុំវិញអ័ក្សរបស់វា។ បើប្រភពពន្លឺស្ថិតលើអ័ក្សឆ្លុះចម្ងាយ $0.6m$ ពីបាត និងនៅមុខកាត់ មាត់ចង្កៀងមានអង្កត់ផ្ចិត $1.5m$ ។ តើ ចង្កៀងនេះមានជម្រៅប៉ុន្មានម៉ែត?

សំរាយបញ្ជាក់ :



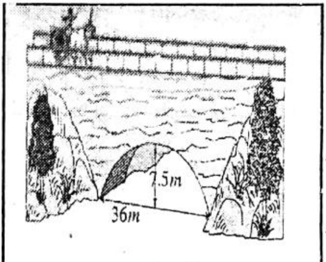
យើងឃើញថាប៉ារ៉ាបូលនេះកំណត់ដោយ

$x^2 = 4py$ ដែល $p = 0.6m$

$$\Rightarrow x^2 = 2.4y \text{ ដែល } x = \frac{1.5}{2} = \frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{3}{4}\right)^2 = 2.4y \Rightarrow y = \frac{9}{16}\times\frac{1}{2.4} = 0.23m$$

13-ផ្នែកខាងក្រៅនៃស្ពានមួយមានរាងជាប៉ារ៉ាបូល ។ ចម្ងាយរវាងចុងនៃមែកប៉ារ៉ាបូលស្មើនឹង $36m$ និងផ្នែកខាងក្រោមនៃស្ពានដែលមានរាងប៉ារ៉ាបូលមានកម្ពស់អតិបរមា $7.5m$ (**រូប ខ**) ។ រកកម្ពស់នៃចំណុច នៅលើប៉ារ៉ាបូលដែលមានចម្ងាយ $3m$;$9m$ និង$15m$ ពីផ្ចិត ។

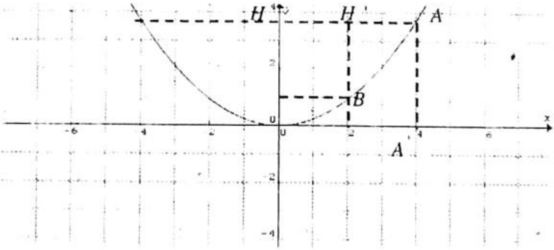


(រូប ខ.)

សំរាយបញ្ជាក់ :

រកកម្ពស់នៃចំណុច នៅលើប៉ារ៉ាបូលដែលមានចម្ងាយ $3m$;$9m$ និង$15m$ ពីផ្ចិត

សមីការប៉ារ៉ាបូលរាង $x^2 = 4py$ ដែល$OH = 7.5m$ និង $OA' = 18$



យើងបាន : $A(18;7.5)$ យកជំនួសក្នុង $x^2 = 4py$ នោះយើងបាន :

សមីការប៉ារ៉ាបូល $18^2 = 4\times7.5p \Rightarrow p = 10.8$

$\Rightarrow x^2 = 43.2y$

តាង ចំណុច $B(3;y_o)$ ផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការប៉ារ៉ាបូល :

$9 = 43.2y_o \Rightarrow y_o = 0.21$

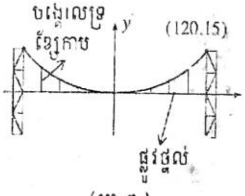
$\Rightarrow H'B = H'B' - BB' = 7.5 - 0.21 = 7.29m$

ដូចនេះ $B(3;7.29)$

តាង $C(9;y_o)$ យកជំនួសដូចខាងលើ យើងបាន $y_o = 5.63$

តាង $D(15;y_o)$ យកជំនួសដូចខាងលើ យើងបាន $y_o = 2.3$

14- ខ្សែកាបនៃស្ពានព្យួរមួយមានរាងជាប៉ារ៉ាបូលត្រូវបានចងព្យួរនៅចន្លោះប៉មពីរមានចម្ងាយ $120m$ ពីគ្នា និងមានកម្ពស់ $15m$ ពីផ្លូវថ្នល់ (**រូប គ**) ។ខ្សែកាបនេះបានប៉ះផ្ទៃផ្លូវត្រង់ចំណុចកណ្ដាលរវាងប៉មទាំងពីរ ។ រកសមីការប៉ារ៉ាបូលនៃខ្សែកាបនីមួយៗ ។



(រូប គ.)

សំរាយបញ្ជាក់ :

សមីការប៉ារ៉ាបូលមានរាង $x^2 = 4py$

កាត់តាមចំនុច $(120;15)$ យើងបាន :

$$120^2 = 4\times 15p \Rightarrow y = \frac{14400}{60} = 240$$

$$\Rightarrow x^2 = 960y$$

មេរៀនទី២ : អេលីប

លំហាត់ :

1- រកកូអរដោនេនៃផ្ចិត កំពូល កំណុំ និងអ៊ិចសង់ទ្រីស៊ីតេនៃអេលីប ហើយសង់អេលីបនីមួយៗ។

ក. $x^2+4y^2=4$ ខ. $5x^2+2y^2=10$

គ. $\dfrac{(x-3)^2}{16}+\dfrac{(y+4)^2}{9}=1$ ឃ. $(x+2)^2+\dfrac{(y+4)^2}{\frac{1}{4}}=1$

ង. $\dfrac{(x-1)^2}{9}+\dfrac{(y-5)^2}{25}=1$ ច. $\dfrac{(x+2)^2}{4}+\dfrac{(y+2)^2}{25}=1$

សំរាយបញ្ជាក់ :

រកកូអរដោនេនៃផ្ចិត កំពូល កំណុំ និងអ៊ិចសង់ទ្រីស៊ីតេនៃអេលីប ហើយសង់អេលីបនីមួយៗ :

ក. $x^2+4y^2=4 \Rightarrow \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{1}=1$ យើងបាន :

$h=0;k=0;a=2;b=1;c=\sqrt{4-1}=\sqrt{3}$

ផ្ចិត $(0;0)$ កំពូល $(-2;0);(2;0)$ កំណុំ $\left(-\sqrt{3};0\right);\left(\sqrt{3};0\right)$

និង $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ។

ខ. $5x^2+2y^2=10 \Rightarrow \dfrac{x^2}{2}+\dfrac{y^2}{5}=1$ មាន :

$h=0;k=0;a=\sqrt{5};b=\sqrt{2};c=\sqrt{3}$

ផ្ចិត $(0;0)$ កំពូល$\left(0;-\sqrt{5}\right);\left(0;\sqrt{5}\right)$ កំណុំ $\left(0;-\sqrt{3}\right);\left(0;\sqrt{3}\right)$

និង $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$ ។

គ. $\frac{(x-3)^2}{16}+\frac{(y+4)^2}{9}=1$ មាន :

$h=3;k=-4;a=4;b=3;c=\sqrt{7}$

ផ្ចិត $(3;-4)$ កំពូល $(-1;-4);(7;-4)$ កំណុំ

$\left(3-\sqrt{7};-4\right);\left(3+\sqrt{7};-4\right)$ និង $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{7}}{4}$ ។

ឃ. $(x+2)^2+\frac{(y+4)^2}{\frac{1}{4}}=1$ មាន :

$h=-2;k=-4;a=1;b=\frac{1}{2};c=\frac{\sqrt{3}}{2}$

ផ្ចិត $(-2;-4)$ កំពូល $(-3;-4);(-1;-4)$

កំណុំ $\left(-2-\frac{\sqrt{3}}{2};-4\right);\left(-2+\frac{\sqrt{3}}{2};-4\right)$ និង $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

ង. $\frac{(x-1)^2}{9}+\frac{(y-5)^2}{25}=1$ មាន :

$h=1;k=5;a=5;b=3;c=4$

ផ្ចិត $(1,5)$ កំពូល $(1;0);(1;10)$ កំណុំ $(1;1);(1;9)$

និង $e=\frac{c}{a}=\frac{4}{5}$ ។

ច. $\frac{(x+2)^2}{4}+\frac{(y+2)^2}{25}=1$ មាន :

$h=-2;k=-2;a=5;b=2;c=\sqrt{21}$

ផ្ចិត $(-2,-2)$ កំពូល $(-2,-7);(-2,3)$

កំណុំ $(-2;-2-\sqrt{21});(-2;-2+\sqrt{21})$ និង $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{21}}{5}$ ។

2- រកកូអរដោនេនៃផ្ចិត កំពូល កំណុំ និងអ៊ិចសង់ទ្រីស៊ីតេនៃអេលីប រួចសង់អេលីបនីមួយៗ :

ក. $9x^2+4y^2+36x-24y+36=0$

ខ. $100x^2+16y^2-100x-64y-311=0$

គ. $9x^2+16y^2+54x-32y-47=0$

ឃ. $25x^2+4y^2-25x-16y+541=0$

ង. $2x^2+3y^2-8x+6y+5=0$

ច. $4x^2+y^2+4y=0$

សំរាយបញ្ជាក់ :

រកកូអរដោនេនៃផ្ចិត កំពូល កំណុំ និងអ៊ិចសង់ទ្រីស៊ីតេនៃអេលីប រួចសង់អេលីបនីមួយៗ :

ក. $9x^2+4y^2+36x-24y+36=0$

$$\Rightarrow 9x^2+36x+36+4y^2-24y+36=36$$

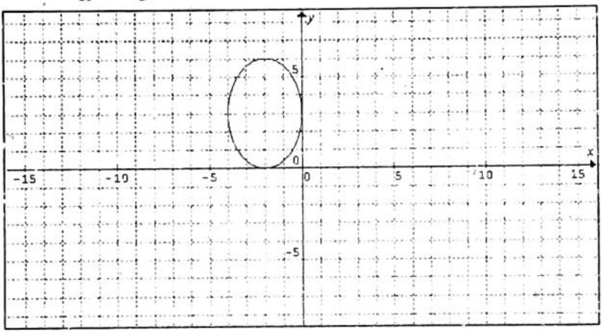
$$\Rightarrow 9(x+2)^2+4(y-3)^2=36$$

$$\Rightarrow \frac{(x+2)^2}{4}+\frac{(y-3)^2}{9}=1$$

យើងបាន $h=-2; k=3; a=3; a=2; c=\sqrt{5}$

ផ្ចិត $(-2;3)$ កំណុំ $\left(-2;3\pm\sqrt{5}\right)$ កំពូល $(-2;6);(-2;0)$

និង $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{5}}{3}$ ។



ខ. $100x^2+16y^2-100x-64y-311=0$

$$\Rightarrow 100x^2-100x+25+16y^2-64y+64=400$$

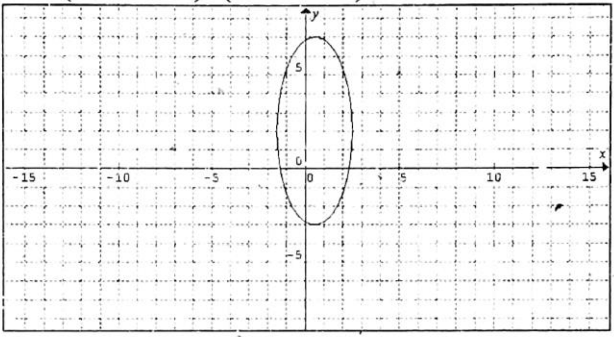
$$\Rightarrow 100\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+16(y-2)^2=400$$

$$\Rightarrow \frac{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}{4}+\frac{(y-2)^2}{25}=1$$

មាន $h=\frac{1}{2};k=2;a=5;b=2;c=\sqrt{21}$

ផ្ចិត $\left(\frac{1}{2};2\right)$ កំពូល $\left(\frac{1}{2};-3\right);\left(\frac{1}{2};7\right)$

កំណុំ $\left(\frac{1}{2};2-\sqrt{21}\right);\left(\frac{1}{2};2+\sqrt{21}\right)$ និង $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{21}}{5}$



គ. $9x^2+16y^2+54x-32y-47=0$

$\Rightarrow 9x^2+54x+81+16y^2-32y+16=144$

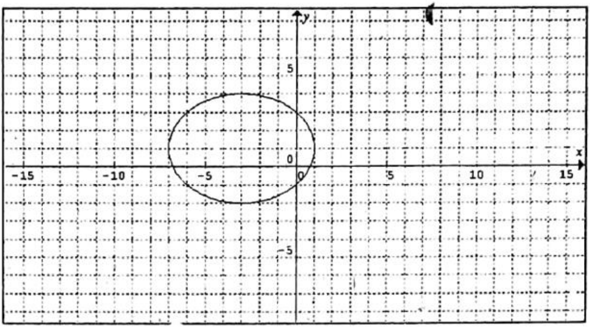
$\Rightarrow 9(x+3)^2+16(y-1)^2=144$

$\Rightarrow \frac{(x+3)^2}{16}+\frac{(y-1)^2}{9}=1$

មាន $h=-3;k=1;a=4;b=3;c=\sqrt{7}$

ផ្ចិត $(-3;1)$ កំពូល $(-7;1);(1;1)$

កំណុំ $\left(-3-\sqrt{7};1\right);\left(-3+\sqrt{7};1\right)$ និង $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{7}}{4}$ ។



ឃ. $25x^2+4y^2-25x-16y+541=0$

$\Rightarrow 25x^2-25x+\frac{25}{4}+4y^2-16y+16$

$=-541+16+\frac{25}{4}<0$ មិនអាច

ង. $2x^2+3y^2-8x+6y+5=0$

$\Rightarrow 2x^2-8x+8+3y^2+6y+3=6$

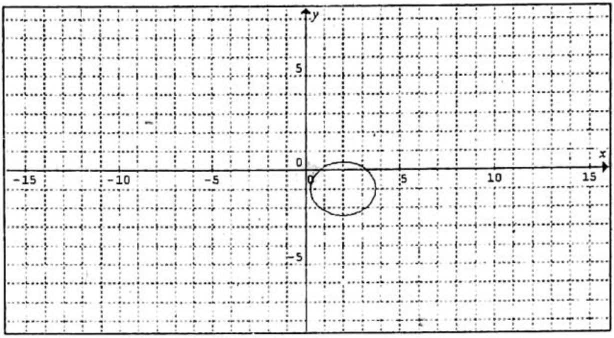
$\Rightarrow 2(x-2)^2+3(y+1)^2=6$

$\Rightarrow \frac{(x-2)^2}{3}+\frac{(y+1)^2}{2}=1$

មាន $h=2;k=-1;a=\sqrt{3};b=\sqrt{2};c=1$

ផ្ចិត $(2;-1)$ កំពូល $\left(2-\sqrt{3};-1\right);\left(2+\sqrt{3};-1\right)$

កំណុំ $(1;-1);(3;-1)$ និង $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{3}$



ច. $4x^2 + y^2 + 4y = 0$

$\Rightarrow 4x^2 + y^2 + 4y + 4 = -4 < 0$ មិនអាច ។

3- រកសមីការអេលីបដែលមានផ្ចិត $(0;0)$ កំណុំ $(2;0)$ និងកំពូល $(3;0)$

សំរាយបញ្ជាក់ :

សមីការអេលីបដែលមានផ្ចិនៅចំគល់ $(0;0)$ អ័ក្សធំជាអ័ក្សអាប់ស៊ីស

យើងបាន $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ និងមាន កំណុំ $(2;0)$ និងកំពូល $(3;0)$

យើងបាន $\begin{cases} c = 2 \\ a = 3 \end{cases} \Rightarrow b = \sqrt{5}$

$\Rightarrow \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$

4- រកសមីការនៃអេលីបដែលមានផ្ចិត $(0;0)$ កំណុំ $(2;0)$ និងអ័ក្សតូចមាន ប្រវែង 3 ឯកតា ។

សំរាយបញ្ជាក់ :

សមីការអេលីបដែលមានផ្ចិតនៅចំគល់ $(0;0)$ អ័ក្សធំជាអ័ក្សអាប់ស៊ីស :

យើងបាន : $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ និងមាន កំណុំ $(2;0)\Rightarrow a=2$

និងអ័ក្សតូចមានប្រវែង 3 ឯកតា យើងបាន $b=\frac{3}{2}$

$\Rightarrow \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{\frac{9}{4}}=1$

5- រកសមីការនៃអេលីបដែលមានកំពូល $(2;0)$ និង $(-2;0)$ ហើយមាន

អ៊ិចសង់ទ្រីស៊ីតេស្មើនឹង $e=\frac{3}{5}$ ។

សំរាយបញ្ជាក់ :

រកសមីការនៃអេលីប :

ដោយកំពូលទាំងពីរស្ថិតនៅលើអ័ក្សអាប់ស៊ីស នោះសមីការស្តង់ដានៃអេលីបគឺ: $\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$

ដោយផ្ចិតជាចំណុចកណ្តាលនៃអង្កត់ភ្ជាប់កំពូលទាំងពីរ គេបាន :

$h=0;k=0$ ។ ម្យ៉ាងទៀត a ជាចម្ងាយពីផ្ចិតទៅកំពូល គេបាន $a=5$

ហើយ $e=\frac{c}{a}=\frac{c}{5}=\frac{3}{5}\Rightarrow c=3\Rightarrow b^2=a^2-c^2=25-9=16$

ដូចនេះ សមីការស្តង់ដាគឺ $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$

7- រកសមីការនៃអេលីបដែលមានផ្ចិត $(0;0)$ និងអ័ក្សធំជាអ័ក្សដេកហើយ

ចំណុច $(3;1)$ និង $(4;0)$ ស្ថិតនៅលើអេលីប ។

សំរាយបញ្ជាក់ :

រកសមីការនៃអេលីប

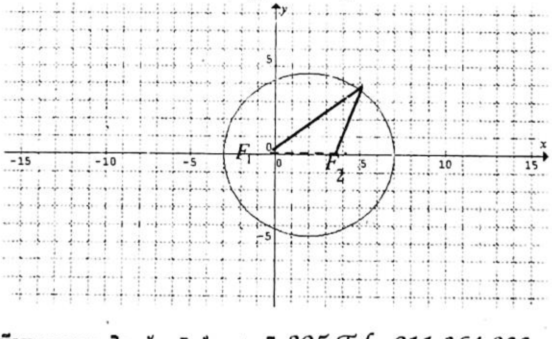
សមីការស្តង់ដាមានរាង $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ កាត់តាម ចំណុច $(3;1)$ និង $(4;0)$ នោះយើងបាន :

$$\begin{cases}\frac{9}{a^2}+\frac{1}{b^2}=1\\ \frac{16}{a^2}+0=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=4\\ b=\frac{4}{\sqrt{7}}\end{cases}\Rightarrow\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{\frac{16}{7}}=1$$

8- រកសមីការនៃអេលីបដែលមានកំណុំ $(0;0)$ និង $(4;0)$ ។ផលបូកចម្ងាយពីកំណុំទាំងពីរទៅចំណុចមួយនៅលើអេលីបស្មើនឹង 10ឯកតា ។

សំរាយបញ្ជាក់ :

សមីការស្តង់ដាមានរាង $\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$



កំណុំឋិតនៅលើអ័ក្សអាប់ស៊ីសនោះ $k=0$

ដោយ $PF_1+PF_2=2a=10\Rightarrow a=5$

កំណុំ $(0;0)$ និង $(4;0)$ យើងបាន :

$$\begin{cases}h-c=0\\h+c=4\end{cases}\Rightarrow h=2;c=2$$

$$\Rightarrow c^2=a^2-b^2\Rightarrow b=\sqrt{21}$$

យើងបាន សមីការស្តង់ដាគឺ $\dfrac{(x-2)^2}{25}+\dfrac{y^2}{21}=1$

9- រកសមីការនៃបន្ទាត់ប៉ះទៅនឹងអេលីប $4x^2+y^2=4$ ដែលកាត់តាមចំណុច $(3;0)$ ។

សំរាយបញ្ជាក់ :

សមីការបន្ទាត់មានរាង $y=ax+b$ កាត់តាមចំណុច$(3;0)$ យើងបាន :

$$0=3a+b\Rightarrow b=-3a$$

សមីការរវាងបន្ទាត់ប៉ះនឹងអេលីបកំណត់ដោយ :

$$\begin{cases}4x^2+y^2=4\\y=ax-3a\end{cases}\Rightarrow 4x^2+(ax-3a)^2=4$$

$$\Rightarrow x^2\left(4+a^2\right)-6a^2x+9a^2-4=0$$

$$\Delta'=9a^4-\left(4+a^2\right)\left(9a^2-4\right)=-36a^2+16+4a^2$$

$$=-32a^2+16$$

បន្ទាត់នឹងអេលីបប៉ះគ្នាលុះត្រាតែ

$$-32a^2+16=0 \Rightarrow a^2=\frac{1}{2} \Rightarrow a=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

ចំពោះ $a=\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow b=\frac{3\sqrt{2}}{2}$ បន្ទាត់ប៉ះ $y=\frac{\sqrt{2}}{2}x-\frac{3\sqrt{2}}{2}$

ចំពោះ $a=-\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow b=-\frac{3\sqrt{2}}{2}$ បន្ទាត់ប៉ះ $y=-\frac{\sqrt{2}}{2}x+\frac{3\sqrt{2}}{2}$

10. រកសមីការនៃអេលីបដែលមានផ្ចិត $(0;0)$ និងកំពូល $(0;\pm 6)$ ហើយកាត់តាមចំណុច $(3;2)$ ។

សំរាយបញ្ជាក់ :

រកសមីការនៃអេលីប :

សមីការស្តង់ដាមានរាង $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$

ដោយ កំពូល $(0;\pm 6)$ នោះ $a=6$ ហើយកាត់តាមចំណុច$(3;2)$

យើងបាន$\frac{9}{b^2}+\frac{4}{36}=1 \Rightarrow b=\frac{9}{2\sqrt{2}}$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{\frac{81}{8}}+\frac{y^2}{36}=1$$

11- រកសមីការនៃអេលីបដែលមានផ្ចិត $(0;0)$ ហើយកាត់តាមចំណុច$(2;3)$ និង $(6;1)$ ។

សំរាយបញ្ជាក់ :

សមីការមានរាង $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ កាត់តាមចំណុច$(2;3)$និង $(6;1)$

យើងបាន : $\begin{cases}\frac{4}{a^2}+\frac{9}{b^2}=1\\ \frac{36}{a^2}+\frac{1}{b^2}=1\end{cases} \Rightarrow a^2=40;b^2=10$

$\Rightarrow \frac{x^2}{40}+\frac{y^2}{10}=1$

12- រកសមីការនៃអេលីបដែលមានផ្ចិត $(0;0)$និងអ័ក្សអាប់ស៊ីសត្រង់ចំណុច $(2;0)$និង $(-2;0)$ហើយកាត់ អ័ក្សអរដោនេត្រង់ចំណុច $\left(0;\frac{1}{3}\right)$និង $\left(0;-\frac{1}{3}\right)$។

សំរាយបញ្ជាក់ :

រកសមីការនៃអេលីប :

សមីការស្តង់ដាមានរាង $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ កាត់អ័ក្សអាប់ស៊ីសត្រង់ចំណុច $(2;0)$និង $(-2;0)$ហើយកាត់អ័ក្សអរដោនេត្រង់ចំណុច $\left(0;\frac{1}{3}\right)$និងចំនុច $\left(0;-\frac{1}{3}\right)$ យើងបាន : $a=2;b=\frac{1}{3}$

$\Rightarrow \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{\frac{1}{9}}=1$

13- រកសមីការនៃអេលីបដែលមានផ្ចិត $(0;0)$ ហើយអ័ក្សធំជាអ័ក្សដេកមាន ប្រវែង 8 ឯកតា និងអ័ក្សតូចមានប្រវែង 5 ឯកតា ។

សំរាយបញ្ជាក់ :

សមីការស្តង់ដាមានរាង $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ហើយអ័ក្សធំជាអ័ក្សដេក មាន ប្រវែង 8 ឯកតា និងអ័ក្សតូចមានប្រវែង 5 ឯកតា យើងបាន :

$$\begin{cases}2a=8\\2b=5\end{cases}\Rightarrow a=4;b=\frac{5}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{\frac{25}{4}}=1$$

មេរៀនទី ៣ អ៊ីពែបូល

លំហាត់ :

1- សង់អ៊ីពែបូលនិងអាស៊ីមតូតរបស់វា :

ក. $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$ ខ. $\frac{y^2}{9}-\frac{x^2}{16}=1$

គ. $y^2-4x^2=16$ ឃ. $x^2-y^2=1$

ង. $x^2-5y^2=25$ ច. $y^2-x^2=25$

សំរាយបញ្ជាក់ :

ក. $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$ មានអ័ក្សទទឹងស្របនឹងអ័ក្ស $(x'ox)$ យើងបាន :

$a=3;b=4;h=0;k=0$

កំពូល $(-a;0)=(-3;0)$

$(a;0)=(3;0)$

អាស៊ីមតូត $y=\frac{b}{a}x=\frac{4}{3}x$ និង $y=-\frac{b}{a}x=-\frac{4}{3}x$

ខ. $\frac{y^2}{9}-\frac{x^2}{16}=1$ មាន $a=3;b=4;h=0;k=0$

កំពូល $(0;3);(0;-3)$

អាស៊ីមតូត $y=\frac{a}{b}x=\frac{3}{4}x;y=-\frac{a}{b}x=-\frac{3}{4}x$

គ. $y^2-4x^2=16\Rightarrow\frac{y^2}{16}-\frac{x^2}{4}=1$

មាន $a=4;b=2;h=0;k=0$ កំពូល $(0;-4);(0;4)$ អាស៊ីមតូត

$y=\frac{a}{b}x=2x;y=-\frac{a}{b}x=-2x$

ឃ. $x^2-y^2=1$ មាន $h=0;k=0;a=1;b=1$

កំពូល $(-1;0);(1;0)$

អាស៊ីមតូត $y=\frac{b}{a}x=x;y=-\frac{b}{a}x=-x$

ង. $x^2-5y^2=25\Rightarrow\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{5}=1$

មាន $h=0;k=0;a=5;b=\sqrt{5}$

កំពូល $(-5;0);(5;0)$

អាស៊ីមតូត $y=\frac{b}{a}x=\frac{\sqrt{5}}{5}x;y=-\frac{b}{a}x=-\frac{\sqrt{5}}{5}x$

ច. $y^2-x^2=25\Rightarrow\frac{y^2}{25}-\frac{x^2}{25}=1$

អាស៊ីមតូត $y=x;y=-x$

2- រកផ្ចិត កំណុំ កំពូល អ៊ិចសង់ទ្រីស៊ីតេនិងអាស៊ីមតូតនៃអ៊ីពែបូល បន្ទាប់មកសង់អ៊ីពែបូលនោះ

ក. $y^2-\frac{x^2}{4}=1$ ខ. $5y^2=4x^2+20$

គ. $\frac{(x-1)^2}{4}-\frac{(y+2)^2}{1}=1$ ឃ. $\frac{(x-2)^2}{4}-\frac{(y+3)^2}{9}=1$

ង. $4(x-2)^2-9(y+3)^2=36$

ច. $9x^2-y^2-36x-6y+18=0$

ឆ. $4x^2-y^2+8x+2y-1=0$ ។

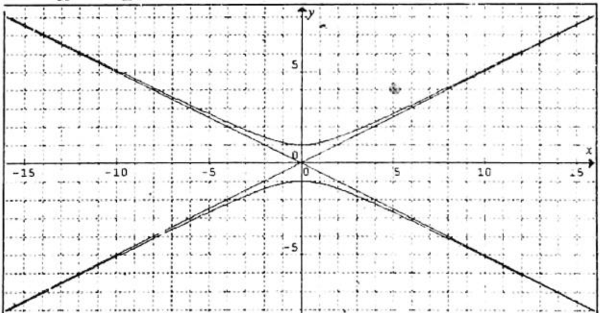
សំរាយបញ្ជាក់ :

ក. $y^2-\frac{x^2}{4}=1$ អ័ក្សទទឹងស្របនឹងអ័ក្សអរដោនេ :

មាន $h=0;k=0;a=1;b=2;c=\sqrt{5}$

ផ្ចិត $(0;0)$ កំពូល $(0;-1);(0;1)$ កំណុំ $(0,-\sqrt{5});(0,\sqrt{5})$

$e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{5}}{1}=\sqrt{5}$ អាស៊ីមតូត $y=\pm\frac{1}{2}x$



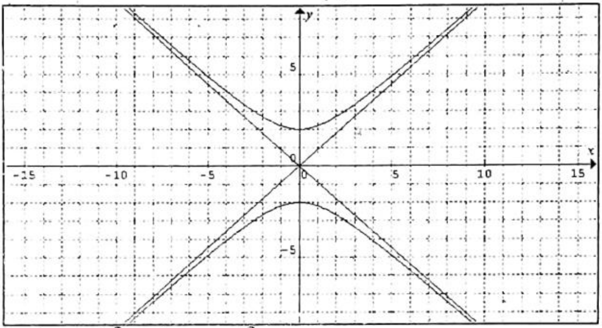
ខ. $5y^2=4x^2+20\Rightarrow\frac{y^2}{4}-\frac{x^2}{5}=1$ អ័ក្សទទឹងស្របនឹងអ័ក្ស

អរដោនេ :

យើងមាន : $h=0; k=0; a=2; b=\sqrt{5}; c=3$

ផ្ចិត $(0;0)$ កំពូល $(0;-2);(0;2)$ កំណុំ $(0;-3);(0;3)$

$e=\frac{c}{a}=\frac{3}{2}$ អាស៊ីមតូត $y=\pm\frac{2}{\sqrt{5}}x$



គ. $\frac{(x-1)^2}{4}-\frac{(y+2)^2}{1}=1$ អ័ក្សទទឹងស្របនឹងអ័ក្សអាប់ស៊ីស

មាន $h=1; k=-2; a=2; b=1; c=\sqrt{5}$

ផ្ចិត $(1;-2)$ កំពូល $(-1;-2);(3;-2)$

កំណុំ $\left(1-\sqrt{5};-2\right);\left(1+\sqrt{5};-2\right)$; $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{5}}{2}$

អាស៊ីមតូត $y=k+\frac{b}{a}(x-h)=-2+\frac{1}{2}(x-1)=\frac{1}{2}x-\frac{5}{2}$

និង $y=k-\frac{b}{a}(x-h)=-2-\frac{1}{2}(x-1)=-\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}$

ឃ. $\frac{(x-2)^2}{4}-\frac{(y+3)^2}{9}=1$ អ័ក្សទទឹងស្រេបនឹងអ័ក្សអាប់ស៊ីស

មាន $h=2;k=-3;a=2;b=3;c=\sqrt{13}$

ផ្ចិត $(2;-3)$ កំពូល $(0;-3);(4;-3)$ កំណុំ $(-1;-3);(5;-3)$

អាស៊ីមតូត $y=k+\frac{b}{a}(x-h)=-3+\frac{3}{2}(x-2)=\frac{3}{2}x-6$

និង $y=k-\frac{b}{a}(x-h)=-3-\frac{3}{2}(x-2)=-\frac{3}{2}x;e=\frac{\sqrt{13}}{2}$

ង. $4(x-2)^2-9(y+3)^2=36$

$\Rightarrow\frac{(x-2)^2}{9}-\frac{(y+3)^2}{4}=1$ អ័ក្សទទឹងស្របនឹងអ័ក្សអាប់ស៊ីស

មាន $h=2;k=-3;a=3;b=2;c=\sqrt{13}$

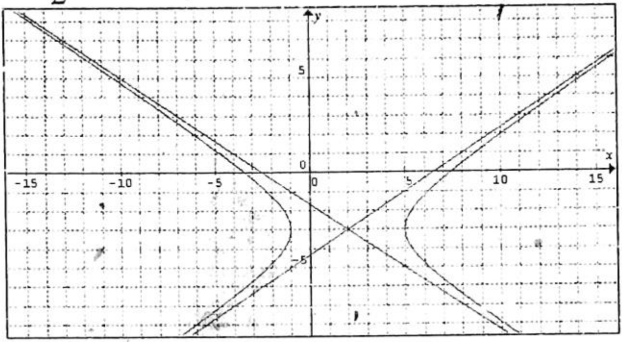
ផ្ចិត $(2;-3)$ កំពូល $(-1;-3);(5;-3)$

កំណុំ $\left(2-\sqrt{13};-3\right);\left(2+\sqrt{13};-3\right)$

អាស៊ីមតូត $y=k+\frac{b}{a}(x-h)=-3+\frac{2}{3}(x-2)=\frac{2}{3}x-\frac{13}{3}$

និង $y=k-\frac{b}{a}(x-h)=-3-\frac{2}{3}(x-2)=-\frac{2}{3}x-\frac{5}{3}$

$e=\frac{\sqrt{13}}{2}$ ។



ច. $9x^2-y^2-36x-6y+18=0$

$\Rightarrow 9x^2-36x+36-y^2-6y-9=9$

$\Rightarrow 9(x-2)^2-(y+3)^2=9$

$\Rightarrow (x-2)^2-\frac{(y+3)^2}{9}=1$ អ័ក្សទទឹងស្របនឹងអ័ក្សអាប់ស៊ីស

មាន $h=2;k=-3;a=1;b=3;c=\sqrt{10}$

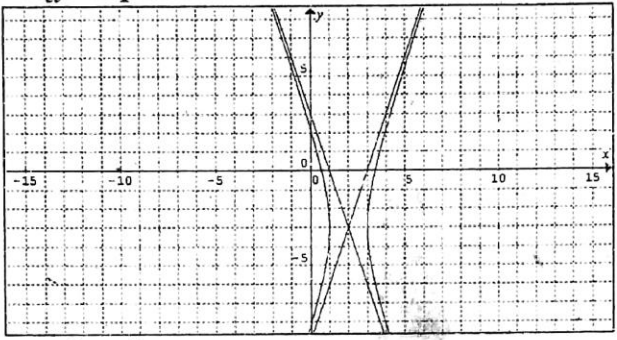
ផ្ចិត $(2;-3)$ កំពូល $(1;-3);(3;-3)$

កំណុំ $\left(2-\sqrt{10};-3\right);\left(2+\sqrt{10};-3\right)$

អាស៊ីមតូត $y=k+\frac{b}{a}(x-h)=-3+\frac{3}{1}(x-2)=3x-9$

$y=k-\frac{b}{a}(x-h)=-3-\frac{3}{1}(x-2)=-3x+3$

$$e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{10}}{1}=\sqrt{10}$$



ឆ. $4x^2-y^2+8x+2y-1=0$

$4x^2+8x+4-y^2+2y-1=4$

$4(x+1)^2-(y-1)^2=4$

$(x+1)^2-\frac{(y-1)^2}{4}=1$ អ័ក្សទទឹងស្របនឹងអ័ក្សអាប់ស៊ីស

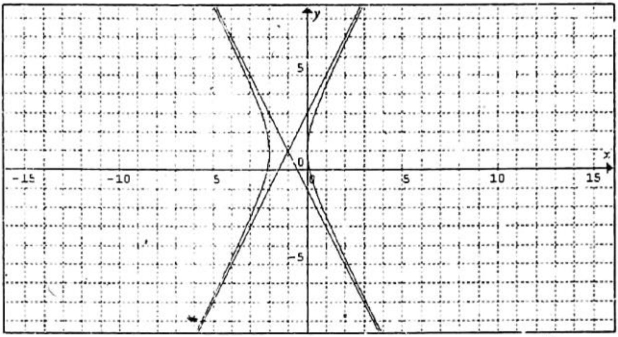
មាន $h=-1; k=1; a=1; b=2; c=\sqrt{5}$ ផ្ចិត $(-1;1)$

កំពូល $(-2;1);(0;1)$ កំណុំ $\left(-1-\sqrt{5};1\right);\left(-1+\sqrt{5};1\right)$

អាស៊ីមតូត $y=k+\frac{b}{a}(x-h)=1+2(x+1)=2x+3$

$y=k-\frac{b}{a}(x-h)=1-2(x+1)=-2x-1$

$$e=\frac{c}{a}=\sqrt{5}$$



3- រកផ្ចិត កំណុំ កំពូលនិងអាស៊ីមតូតនៃអ៊ីពែបូល បន្ទាត់មកសង់អ៊ីពែបូលនោះ :

ក. $x^2-y^2-2x-2y-1=0$

ខ. $y^2-4x^2-16x-2y-19=0$

គ. $3y^2-x^2+6x-12y=0$

ឃ. $4x^2-5y^2-16x+10y+31=0$

សំរាយបញ្ជាក់ :

ក. $x^2-y^2-2x-2y-1=0$

$$x^2-2x+1-y^2-2y-1=1$$

$(x-1)^2-(y+1)^2=1$ អ័ក្សទទឹងស្របនឹងអ័ក្សអាប់ស៊ីស

មាន $h=1;k=-1;a=1;b=1;c=\sqrt{2}$ ។

ផ្ចិត $(1;-1)$ កំពូល $(0;-1);(2;-1)$

កំណុំ $(1-\sqrt{2};-1);(1+\sqrt{2};-1)$

អាស៊ីមតូត $y=k+\frac{b}{a}(x-h)=-1+(x-1)=x-2$

$y=k-\frac{b}{a}(x-h)=-1-(x-1)=-x$

ខ. $y^2-4x^2-16x-2y-19=0$

$\Rightarrow y^2-2y+1-4x^2-16x-16=4$

$\Rightarrow (y-1)^2-4(x-2)^2=4$

$\Rightarrow \frac{(y-1)^2}{4}-(x-2)^2=1$

គ. $3y^2-x^2+6x-12y=0$

$\Rightarrow 3y^2-12y+12-x^2+6x-9=3$

$\Rightarrow 3(y-2)^2-(x-3)^2=3$

$\Rightarrow (y-2)^2-\frac{(x-3)^2}{3}=1$

ឃ. $4x^2-5y^2-16x+10y+31=0$

$$\Rightarrow 4x^2-16x+16-5y^2+10y-5=-20$$

$$\Rightarrow 4(x-2)^2-5(y-1)^2=-20$$

$$\Rightarrow \frac{(y-1)^2}{4}-\frac{(x-2)^2}{5}=1$$

4- រកសមីការស្តង់ដានៃអ៊ីពែបូលដែលផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌដែលឱ្យ:

ក. ផ្ចិតមានកូអរដោនេ $(0;0)$ កំពូលមានកូអរដោនេ $(0;2)$ និង កំណុំមានកូអរដោនេ $(0;4)$ ។

ខ. ផ្ចិតមានកូអរដោនេ $(0;0)$ កំពូលមានកូអរដោនេ $(3;0)$ និង កំណុំមានអរដោនេ $(5;0)$ ។

គ. កំពូលទាំងពីរមានកូអរដោនេ $(\pm 1;0)$ និងអាស៊ីមតូតទាំងពីរ មានសមីការ $y=\pm 3x$ ។

ឃ. កំពូលទាំងពីរមានកូអរដោនេ $(0;\pm 3)$ និងអាស៊ីមតូតទាំង ពីរមានសមីការ $y=\pm 3x$ ។

ង. កំពូលទាំងពីរមានកូអរដោនេ $(2;\pm 3)$ និងចំណុចមួយនៅលើ ក្រាបមានកូអរដោនេ $(0;5)$ ។

សំរាយបញ្ជាក់ :

ក. សមីការស្តង់ដាមានរាង $\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$ ព្រោះកំពូលនិងកំណុំស្ថិតនៅលើអ័ក្សអរដោនេ ហេតុនេះ អ័ក្សទទឹងស្របនឹងអ័ក្សអាប់ស៊ីស ។

ដោយ កំពូល $(0;2)$និង កំណុំ$(0;4)$ យើងបាន :

$$\begin{cases}a=2\\c=4\end{cases}\Rightarrow b^2=c^2-a^2=12$$

$$\Rightarrow\frac{y^2}{4}-\frac{x^2}{12}=1$$

ខ. សមីការស្តង់ដាមានរាង $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ ព្រោះកំពូលនិងកំណុំស្ថិតនៅលើអ័ក្សអាប់ស៊ីសហេតុនេះ អ័ក្សទទឹងស្របនឹងអ័ក្សអរដោនេ ។

ដោយកំពូល$(3;0)$និងកំណុំ $(5;0)$ យើងបាន :

$$\begin{cases}a=3\\c=5\end{cases}\Rightarrow b^2=25-9=16$$

$$\Rightarrow\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$$

គ. ដោយកំពូលស្ថិតនៅ លើបន្ទាត់ដេកនោះសមីការស្តង់ដាមាន

ទម្រង់ $\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$ ផ្ចិតនៃអ៊ីពែបូលស្ថិតនៅត្រង់

ចំណុចកណ្ដាលនៃអង្កត់ភ្ជាប់កំពូលទាំងពីរ :

យើងបាន : $(h;k)=\left(\frac{1+(-1)}{2};\frac{0+0}{2}\right)=(0;0)$

ដោយអាស៊ីមតូតមានទម្រង់ : $y=k\pm\frac{b}{a}(x-h)=\pm3x$

$\frac{b}{a}=3\Rightarrow b=3a$ តែ $a=1\Rightarrow b=3$

យើងបានសមីការស្ដង់ដាគឺ : $x^2-\frac{y^2}{9}=1$

ឃ. $\frac{y^2}{9}-x^2=1$

ង. $\frac{y^2}{9}-\frac{(x-2)^2}{\frac{9}{4}}=1$

5-រកសមីការស្ដង់ដានៃអ៊ីពែបូលដែលចំពោះ គ្រប់ចំណុចនៅលើអ៊ីពែបូលមានផលដកចម្ងាយរបស់វាពីចំណុច $(2;2)$ និង $(10;2)$ ស្មើនឹង 6 ។

សំរាយបញ្ជាក់ :

រកសមីការស្ដង់ដានៃអ៊ីពែបូល

យើងបាន :

$$d_1 - d_2 = 6$$

$$\Rightarrow \sqrt{(x-2)^2+(y-2)^2} - \sqrt{(x-10)^2+(y-2)^2} = 6$$

$$\Rightarrow \sqrt{(x-2)^2+(y-2)^2} = 6 + \sqrt{(x-10)^2+(y-2)^2}$$

$$\Rightarrow (x-2)^2-(x-10)^2-36 = 12\sqrt{(x-10)^2+(y-2)^2}$$

$$\Rightarrow 16x^2-264x+1089 = 9\left(x^2-20x+100+y^2-4y+4\right)$$

$$\Rightarrow 7(x-6)^2-9(y-2)^2 = 63$$

$$\Rightarrow \frac{(x-6)^2}{9}-\frac{(y-2)^2}{7}=1$$

6- រកសមីការស្តង់ដា នៃអ៊ីពែបូលដែលចំពោះគ្រប់ចំណុចនៅលើអ៊ីពែបូលមានផលដកចម្ងាយរបស់វាពីចំណុច $(-3;0)$ និង $(-3;3)$ ស្មើនឹង 2 ។

សំរាយបញ្ជាក់ :

ស្រាយដូចខាងលើដែរ យើងបាន $\left(y-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{(x+3)^2}{\frac{5}{4}}=1$

7- បង្ហាញថាបន្ទាត់ប៉ះទៅនឹង $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ ត្រង់ចំណុច $(x_o;y_o)$

មាន សមីការ $\frac{x_o x}{a^2}-\frac{y_o y}{b^2}=1$ ។

សំរាយបញ្ជាក់ :

បង្ហាញថាបន្ទាត់ប៉ះទៅនឹង $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ ត្រង់ចំណុច $(x_o;y_o)$

មាន សមីការ $\frac{x_o x}{a^2}-\frac{y_o y}{b^2}=1$

ដោយ $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \Rightarrow \frac{2x}{a^2}-\frac{2yy'}{b^2}=0 \Rightarrow y'=\frac{b^2 x}{a^2 y}$

សមីការបន្ទាត់ប៉ះកំណត់ដោយ :

$$y-y_o=\frac{b^2 x_o}{a^2 y_o}(x-x_o) \Rightarrow a^2 yy_o-b^2 x_o x=a^2 y_o^2-b^2 x_o^2$$

$$\Rightarrow \frac{xx_o}{a^2}-\frac{y_o y}{b^2}=\frac{x_o^2}{a^2}-\frac{y_o^2}{b^2}=1 \Rightarrow \frac{xx_o}{a^2}-\frac{y_o y}{b^2}=1$$

8- កំណុំទាំងពីរនៃអ៊ីពែបូលគឺ $F_1(0;3)$ និង $F_2(0;-3)$ ហើយ P ជាចំណុចមួយនៅលើអ៊ីពែបូលដែល មានផលដកចម្ងាយរបស់វាពីចំណុច F_1 និង F_2 ស្មើនឹង2ឯកតា។ ប្រើនិយមន័យនៃអ៊ីពែបូលទាញរកសមីការស្តង់ដានៃអ៊ីពែបូលនោះ។

សំរាយបញ្ជាក់ :

តាង $P(x,y)$ យើងបាន

$$F_1P - F_2P = 2$$

$$\Rightarrow \sqrt{x^2 + (y-3)^2} - \sqrt{x^2 + (y+3)^2} = 2$$

$$\Rightarrow \sqrt{x^2 + (y-3)^2} = 2 + \sqrt{x^2 + (y+3)^2}$$

$$\Rightarrow x^2 + (y-3)^2 = 4 + 4\sqrt{x^2 + (y+3)^2} + x^2 + (y+3)^2$$

$$\Rightarrow (y-3)^2 - (y+3)^2 - 4 = 4\sqrt{x^2 + (y+3)^2}$$

$$\Rightarrow -3y - 1 = \sqrt{x^2 + (y+3)^2}$$

$$\Rightarrow 9y^2 + 6y + 1 = x^2 + y^2 + 6y + 9$$

$$\Rightarrow 8y^2 - x^2 = 8 \Rightarrow y^2 - \frac{x^2}{8} = 1$$

9- រកសមីការនៃអ៊ីពែបូលដែលមានកំណុំ$(\pm 4;0)$ហើយតម្លៃនៃផលដកចម្ងាយពីចំណុចមួយនៅលើអ៊ីពែបូលទៅកំណុំទាំងពីរស្មើនឹង 4 ។

សំរាយបញ្ជាក់ :

តាង $P(x,y)$ យើងបាន :

$$F_1P - F_2P = 4$$

$$\Rightarrow \sqrt{(x+4)^2 + y^2} - \sqrt{(x-4)^2 + y^2} = 4$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$$

10- រកសមីការបន្ទាត់ប៉ះទៅនឹងអ៊ីពែបូល $9x^2 - 4y^2 = 36$

ដែលកាត់តាមចំណុច (1;0) ។

សំរាយបញ្ជាក់ :

សមីការបន្ទាត់ប៉ះមានរាង $y = ax + b$ កាត់តាមចំណុច$(1;0)$

យើងបាន $0 = a + b \Rightarrow a = -b \Rightarrow y = ax - a = a(x-1)$

ដោយ

$$\begin{cases} 9x^2 - 4y^2 = 36 \\ y = a(x-1) \end{cases} \Rightarrow 9x^2 - 4a^2(x-1)^2 = 36$$

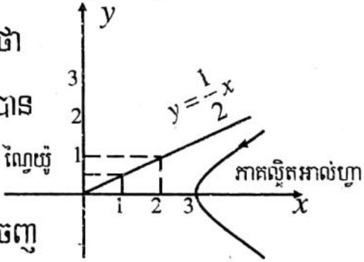
$$\Rightarrow 9x^2 - 4a^2\left(x^2 - 2x + 1\right) = 36.$$

$$\Rightarrow \left(9 - 4a^2\right)x^2 + 8a^2x - 4a^2 - 36 = 0$$

$$\Delta' = 16a^4 + \left(9 - 4a^2\right)\left(4a^2 + 36\right) = -108a^2 + 324$$

បន្ទាត់ប៉ះនឹងប៉ារ៉ាបូលកាលណា $\Delta' = 0 \Rightarrow a = \pm\sqrt{3}$

យើងបាន សមីការបន្ទាត់ប៉ះ $y = \pm\sqrt{3}(x-1)$



11- អ្នករូបវិទ្យាម្នាក់បានរកឃើញថា នៅពេលភាគល្អិតអាល់ហ្វាត្រូវបានបាញ់ចេញឆ្ពោះទៅណៃយ៉ូនៃអាតូមមួយ ដោយវាបានច្រានចេញពីណៃយ៉ូតាមគន្លងអ៊ីពែបូល ។ រូបខាងស្តាំ នេះបង្ហាញពីគន្លងនៃ

ភាគល្អិតដែលចាប់ផ្តើមឆ្ពោះទៅ គល់អ័ក្សអរដោនេតាមបន្ទាត់មួយមានសមីការ $y=\frac{1}{2}x$ ហើយធ្លាក់មក 3 ឯកតាពីណៃយ៉ូ ។ ចូររកសមីការនៃគន្លង ។

សំរាយបញ្ជាក់ :

គន្លងជាអ៊ីពែបូលដែលមាន $V(\pm3;0)$ និង $W\left(0;\pm\frac{3}{2}\right)$

សមីការស្តង់ដាគឺ :

$$\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{\left(\frac{3}{2}\right)^2}=1 \Rightarrow x^2-4y^2=9 \Rightarrow x=\pm\sqrt{4y^2+9}$$

បើមានមែកតែម្ខាងនៅខាងស្តាំ

នោះ $x=\sqrt{4y^2+9}$ ជាសមីការគន្លង ។

លំហាត់ជំពូក៦

1- ចូរបញ្ជាក់ប្រភេទសមីការនីមួយៗនិងគូសក្រាបរបស់វា :

ក. $y^2-12y-8x+20=0$

ខ. $3x^2+2y^2-12x+12y+29=0$

គ. $3x^2-2y^2+24x+12y+24=0$

ឃ. $x^2-6x+2y+9=0$

សំរាយបញ្ជាក់ :

បញ្ជាក់ប្រភេទសមីការនីមួយៗនិងគូសក្រាបរបស់វា :

ក. $y^2-12y-8x+20=0$

$\Rightarrow y^2-12y+36=8x+16$

$\Rightarrow (y-6)^2=8(x+2)$ ជាសមីការប៉ារ៉ាបូលដែលមានអ័ក្សឆ្លុះដេក

ខ. $3x^2+2y^2-12x+12y+29=0$

$\Rightarrow 3x^2-12x+12+2y^2+12y+18=1$

$\Rightarrow 3(x-2)^2+2(y+3)^2=1$

$\Rightarrow \dfrac{(x-2)^2}{\frac{1}{3}}+\dfrac{(y+3)^2}{\frac{1}{2}}=1$ សមីការអេលីបដែលមានអ័ក្សធំ

ស្របនឹងអ័ក្សអរដោនេ។

គ. $3x^2-2y^2+24x+12y+24=0$

$\Rightarrow 3x^2+24x+48-2y^2+12y-18=6$

$\Rightarrow 3(x+4)^2-2(y-3)^2=6$

$\Rightarrow \dfrac{(x+4)^2}{2}-\dfrac{(y-3)^2}{3}=1$ ជាសមីការអ៊ីពែបូល

ឃ. $x^2-6x+2y+9=0$

$\Rightarrow x^2-6x+9=-2y \Rightarrow (x-3)^2=-2y$ ជាសមីការ

ប៉ារ៉ាបូល។

2- រកសមីការប៉ារ៉ាបូលដែលកំណត់ដោយលក្ខខណ្ឌដូចខាងក្រោម៖

ក. កំណុំ $F(4;0)$ និងកំពូល $V(2;0)$

ខ. កំពូល $V(0;2)$ និងបន្ទាត់ប្រាប់ទិសមានសមីការ $x+3=0$

សំរាយបញ្ជាក់ :

ក. សមីការស្តង់ដាមានរាង :

$(y-k)^2=4p(x-h)$ ព្រោះវាមាន កំណុំ និងកំពូលស្ថិតនៅ

លើអ័ក្សអាប់ស៊ីស :

ដោយ កំពូល $V(2;0) \Rightarrow h = 2; k = 0$

កំណុំ $F(4;0) \Rightarrow h + p = 4 \Rightarrow p = 2$

យើងបាន សមីការស្តង់ដា $y^2 = 8(x-2)$

ខ. ដោយបន្ទាត់ប្រាប់ទិសជាបន្ទាត់ឈរ នោះប៉ារ៉ាបូលមានរាង

$(y-k)^2 = 4p(x-h)$

ដោយ កំពូល $V(0;2) \Rightarrow h = 0; k = 2$

បន្ទាត់ប្រាប់ទិស $x = -3 \Rightarrow h - p = -3 \Rightarrow p = 3$

យើងបាន សមីការស្តង់ដា $(y-2)^2 = 12x$

3- រកសមីការនៃអេលីបនីមួយៗខាងក្រោម:

ក. កំពូលទាំងពីរមានកូអរដោនេ $(0;2)$ និង$(4;2)$ និងមានអ៊ិចសង់ទ្រីស៊ីតេស្មើនឹង $\frac{1}{2}$ ។

ខ. កំពូលទាំងពីរមានកូអរដោនេ $(3;1)$ និង$(3;9)$ហើយអ័ក្សតូចមានប្រវែងស្មើនឹង 6ឯកតា ។

ដំរាយបញ្ជាក់ :

ក. សមីការស្តង់ដាមានរាង $\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$

ដោយ កំពូលទាំងពីរមានកូអរដោនេ $(0;2)$ និង$(4;2)$

យើងបាន :

$$\begin{cases} h-a=0 \\ h+a=4 \end{cases} \Rightarrow h=2; a=2 \text{ និង } e=\frac{c}{a}=\frac{1}{2} \Rightarrow c=1$$

$$c^2=a^2-b^2 \Rightarrow b^2=a^2-c^2=3$$

យើងបាន សមីការស្តង់ដា $\frac{(x-2)^2}{4}+\frac{(y-2)^2}{3}=1$

ខ. សមីការស្តង់ដាមានរាង $\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$

កំពូលទាំងពីរមានកូអរដោនេ $(3;1)$ និង $(3;9)$ យើងបាន :

$$\begin{cases} h=3 \\ k-a=1 \\ k+a=9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} h=3 \\ k=5 \\ a=4 \end{cases}$$

និង អ័ក្សតូចមានប្រវែងស្មើនឹង 6ឯកតា យើងបាន :

$$2b=6 \Rightarrow b=3$$

សមីការស្តង់ដាគឺ : $\frac{(x-3)^2}{9}+\frac{(y-5)^2}{16}=1$

4- រកសមីការនៃអ៊ីពែបូលនីមួយៗខាងក្រោម:

ក. កំណុំទាំងពីរមានកូអរដោនេ$(-4;0)$ និង $(4;0)$ ហើយតម្លៃ

ដាច់ខាតនៃផលដកចម្ងាយពីចំណុច មួយស្ថិតនៅលើអ៊ីពែបូលទៅកំណុំទាំងពីរស្មើនឹង 4 ។

ខ. កំណុំទាំងពីរមានកូអរដោនេ $(0;0)$ និង $(8;0)$ ហើយអាស៊ីមតូតទាំងពីរមានសមីការ $y=2(x-4)$ និង $y=-2(x-4)$ ។

សំរាយបញ្ជាក់ :

ក. ដោយ កំណុំទាំងពីរមានកូអរដោនេ$(-4;0)$ និង $(4;0)$ស្ថិតនៅលើអាប់ស៊ីស យើងបានសមីការមានរាង :

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

ផ្ចិតជាចំណុចកណ្ដាលនៃកំណុំទាំងពីរ យើងបាន :

$$h=\frac{4-4}{2}=0;k=0$$

តែ កំណុំ$(-4;0)=(h-c;k)\Rightarrow h-c=-4\Rightarrow c=4$

និង $2a=4\Rightarrow a=2;b^2=c^2-a^2=16-4=12$

សមីការស្តង់ដាគឺ $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1$

ខ. ដោយ កំណុំទាំងពីរមានកូអរដោនេ$(0;0)$និង $(8;0)$ស្ថិតនៅលើអាប់ស៊ីស យើងបានសមីការមានរាង :

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

កំណុំមានកូអរដោនេ(០;0) និង (8;0) យើងបាន :

$$\begin{cases}(h-c;k)=(0;0)\\(h+c;k)=(8;0)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}h=4\\k=0\\c=4\end{cases}$$

និង អាស៊ីមតូតទាំងពីរ $y=2(x-4)$ និង $y=-2(x-4)$

$$\frac{b}{a}=2\Rightarrow b=2a$$

តែ $c^2=a^2+b^2=5a^2\Rightarrow a=\frac{c}{\sqrt{5}}=\frac{4}{\sqrt{5}};b=\frac{8}{\sqrt{5}}$

យើងបាន សមីការស្តង់ដា $\frac{(x-4)^2}{\frac{16}{5}}-\frac{y^2}{\frac{64}{5}}=1$

5- រកសមីការនៃបន្ទាត់ប៉ះទៅនឹងប៉ារ៉ាបូលមានសមីការ :

$y=x^2-2x+2$ ហើយកែងទៅនឹងបន្ទាត់មានសមីការ $y=x-2$

សំរាយបញ្ជាក់ :

សមីការបន្ទាត់ប៉ះមានរាង $y=ax+b$ ហើយកែងនឹង បន្ទាត់

$y=x-2\Rightarrow a\times1=-1\Rightarrow a=-1$

$\Rightarrow y=-x+b$

សមីការរវាងបន្ទាត់និងប៉ារ៉ាបូលកំណត់ដោយ :

$$\begin{cases} y = x^2 - 2x + 2 \\ y = -x + b \end{cases} \Rightarrow x^2 - 2x + 2 = -x + b$$

$$\Rightarrow x^2 - x + 2 - b = 0$$

$$\Delta = 1 - 4(2 - b) = -7 + 4b$$

បន្ទាត់ប៉ះនឹងប៉ារ៉ាបូល នោះយើងបាន :

$$\Delta = 0 \Rightarrow -7 + 4b = 0 \Rightarrow b = \frac{4}{7}$$

បន្ទាត់ប៉ះមានរាង $y = -x + \frac{7}{4}$

6- បង្ហាញថា បន្ទាត់ប៉ះទៅនឹងអេលីប $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ត្រង់ចំណុច $(x_o; y_o)$ មានសមីការ $\frac{x_o}{a^2}x + \frac{y_o}{b^2}y = 1$ ។

សំរាយបញ្ជាក់ :

ដោយ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{2x}{a^2} + \frac{2yy'}{b^2} = 0 \Rightarrow y' = -\frac{b^2 x}{a^2 y}$

សមីការបន្ទាត់ប៉ះកំណត់ដោយ :

$$y - y_o = -\frac{b^2 x_o}{a^2 y_o}(x - x_o) \Rightarrow a^2 y y_o + b^2 x_o x = a^2 y_o^2 + b^2 x_o^2$$

$$\Rightarrow \frac{x x_o}{a^2} + \frac{y_o y}{b^2} = \frac{x_o^2}{a^2} + \frac{y_o^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x x_o}{a^2} + \frac{y_o y}{b^2} = 1$$

7- រកតម្លៃ a តាម b ដើម្បីឱ្យអ៊ីពែបូល $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ គឺប៉ះទៅនឹងបន្ទាត់នៃសមីការ $2x-y-4=0$ ។ រួចគណនាតម្លៃ a បើ $b=2$

សំរាយបញ្ជាក់ :

សមីការអាប់ស៊ីសរវាងអ៊ីពែបូលនិងបន្ទាត់ :

$y=2x-4=2(x-2)$ កំណត់ដោយ

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{4(x-2)^2}{b^2}=1$$

$$\Rightarrow b^2x^2-4a^2(x-2)^2=a^2b^2$$

$$\Rightarrow (b^2-4a^2)x^2+16a^2x-(16a^2+a^2b^2)=0$$

$$\Delta'=64a^4+(b^2-4a^2)(16a^2+a^2b^2)$$

$$=16a^2b^2+a^2b^4-4a^4b^2$$

ដើម្បីឱ្យបន្ទាត់ប៉ះនឹងអ៊ីពែបូលលុះត្រាតែ $\Delta'=0$

$$\Rightarrow 16a^2b^2+a^2b^4-4a^4b^2=0$$

$$\Rightarrow a^2b^2(16+b^2-4a^2)=0$$

$$\Rightarrow 16+b^2-4a^2=0 \Rightarrow a=\pm\sqrt{\frac{b^2+16}{4}}$$

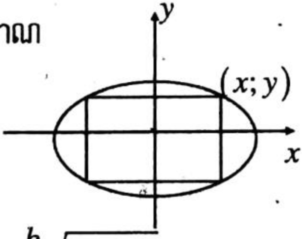
បើ $b=2 \Rightarrow a=\pm\sqrt{5}$

8-រកបរិមាត្រនៃចតុកោណកែង ដែលមានផ្ទៃក្រឡាអតិបរមាអាចចារឹកក្នុងអេលីប $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ។

សំរាយបញ្ជាក់ :

តាង $(x;y)$ ជាកំពូលមួយនៃចតុកោណ

ដែលស្ថិតនៅកាដ្រង់ទី I :



$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\Rightarrow\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{x^2}{a^2}$$

$$\Rightarrow y^2=\frac{b^2}{a^2}\left(a^2-x^2\right)\Rightarrow y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$$

ដោយ បណ្តោយគឺ $2x$ និងទទឹងគឺ $2y=\frac{2b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$

យើងបាន ក្រឡាផ្ទៃចតុកោណកែង :

$$A=2x\times\frac{2b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$$

$$\Rightarrow\frac{dA}{dx}=\frac{4b}{a}\left[\frac{-x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}+\sqrt{a^2-x^2}\right]$$

$$\frac{dA}{dx}=0\Rightarrow x=\frac{a}{\sqrt{2}}$$

x		$\frac{a}{\sqrt{2}}$	
$\frac{dA}{dx}$	+		−
A	↗	អតិបរមា	↘

យើងបាន បណ្តោយគឺ $2x=\frac{2a}{\sqrt{2}}$

ទទឹង $\frac{2b}{a}\sqrt{a^2-x^2}=\frac{2b}{a}\sqrt{a^2-\frac{a^2}{2}}=\sqrt{2}b$

9- អាងមួយមានរាងជាអេលីប ។ អ័ក្សធំមានប្រវែង $10m$ និងអ័ក្សតូចមានប្រវែង $6m$ ។

ក. សរសេរសមីការនៃអេលីប ។

ខ. រកប្រវែងទទឹងអាងនៅ ត្រង់ចំណុចមួយនៅលើអ័ក្សធំដែលមានចម្ងាយ $2m$ ពីផ្ចិត ។

សំរាយបញ្ជាក់ :

ក. ដោយ អ័ក្សធំមានប្រវែង $10m$ និងអ័ក្សតូចមានប្រវែង $6m$

យើងបាន $\begin{cases}2a=10\\2b=6\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=5\\b=3\end{cases}$

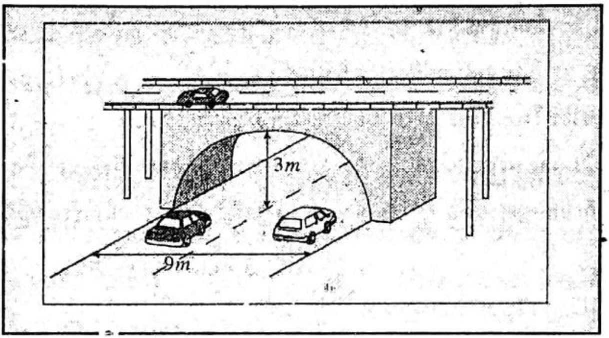
សមីការស្តង់ដា $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\Rightarrow\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$

ខ. ដោយ $x=2\Rightarrow\frac{4}{25}+\frac{y^2}{9}=1$

$\Rightarrow y=\sqrt{\left(1-\frac{4}{25}\right)\times9}=2.75m$

10- ធ្នូនៃស្ពានមួយមានរាងពាក់កណ្តាល អេលីបដែល មានអ័ក្សធំជាងអ័ក្សដេក ។ បាតនៃធ្នូកាត់ទទឹងផ្លូវនៅក្រោមស្ពានមានប្រវែង

$9m$ ហើយផ្នែកខ្ពស់បំផុតនៃធ្នូនៅ ចំកណ្ដាលទ្រូងផ្លូវក្រោមស្ពាន មានកម្ពស់ $3m$ ដូចរូបដែលបានបង្ហាញ។ រកប្រវែងកម្ពស់នៃធ្នូដែលមានចម្ងាយ $1.8m$ ពីផ្ចិតនៃបាត។



សំរាយបញ្ជាក់ :

ចំណោទនេះជាអេលីបមួយដែលមាន $V\left(\pm\frac{9}{2};0\right)$ និង $M(0;\pm3)$

ជំនួស $x=1.8$ ក្នុង $\frac{x^2}{\left(\frac{9}{2}\right)^2}+\frac{y^2}{3^2}=1 \Rightarrow \frac{y^2}{3}=1-\frac{(1.8)^2}{18}\times4$

$$y^2=9\left(1-\frac{(18)^2}{8100}\times4\right)=7.56 \Rightarrow y=\sqrt{7.56}=2.75$$

ដូចនេះ ប្រវែងកម្ពស់នៃធ្នូដែលមានចម្ងាយ $1.8m$ ពីផ្ចិតនៃបាតគឺ $2.75m$ ។

11- ភាគល្អិតមួយកំពុងផ្លាស់ទីស្របនឹង ដំណើរទ្រនិចនាឡិកានៅលើគន្លងរាងអេលីបមួយដែលមានសមីការ $\frac{x^2}{10^2}+\frac{y^2}{5^2}=1$ ។ភាគល្អិតនេះបានចេញពីគន្លងនៅត្រង់ចំណុច $(-8;3)$ ហើយផ្លាស់ទីតាមបន្ទាត់មួយប៉ះទៅនឹងអេលីប ។ តើភាគល្អិតនេះនឹងកាត់អ័ក្សអរដោនេត្រង់ចំណុចណា?

សំរាយបញ្ជាក់ :

តើភាគល្អិតនេះនឹងកាត់អ័ក្សអរដោនេត្រង់ចំណុចណា?

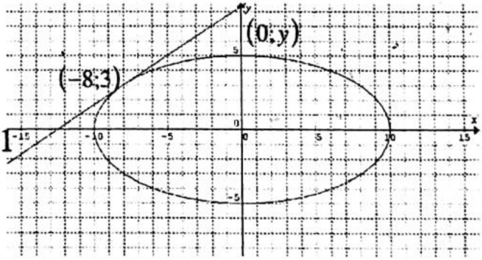
ដើម្បីរកមេគុណប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់ប៉ះ

ត្រង់ $(-8,3)$ យើងបាន :

$$\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{25}=1$$

$$\Rightarrow \frac{x}{50}+\frac{2yy'}{25}=1$$

$$\Rightarrow y'=-\frac{x}{4y}$$



ដូចនេះ មេគុណប្រាប់ទិសត្រង់ $(-8;3)$ គឺ :$m=\dfrac{-(-8)}{4\times3}=\dfrac{2}{3}$

សមីការនៃបន្ទាត់ប៉ះគឺ $y-3=\dfrac{2}{3}(x+8)\Rightarrow 3y=2x+25$

បើ $x=0\Rightarrow y=\dfrac{25}{3}$

ដូចនេះ ភាគល្អិតនេះនឹងកាត់អ័ក្សអរដោនេត្រង់ចំណុច $\left(0;\dfrac{25}{3}\right)$ ។