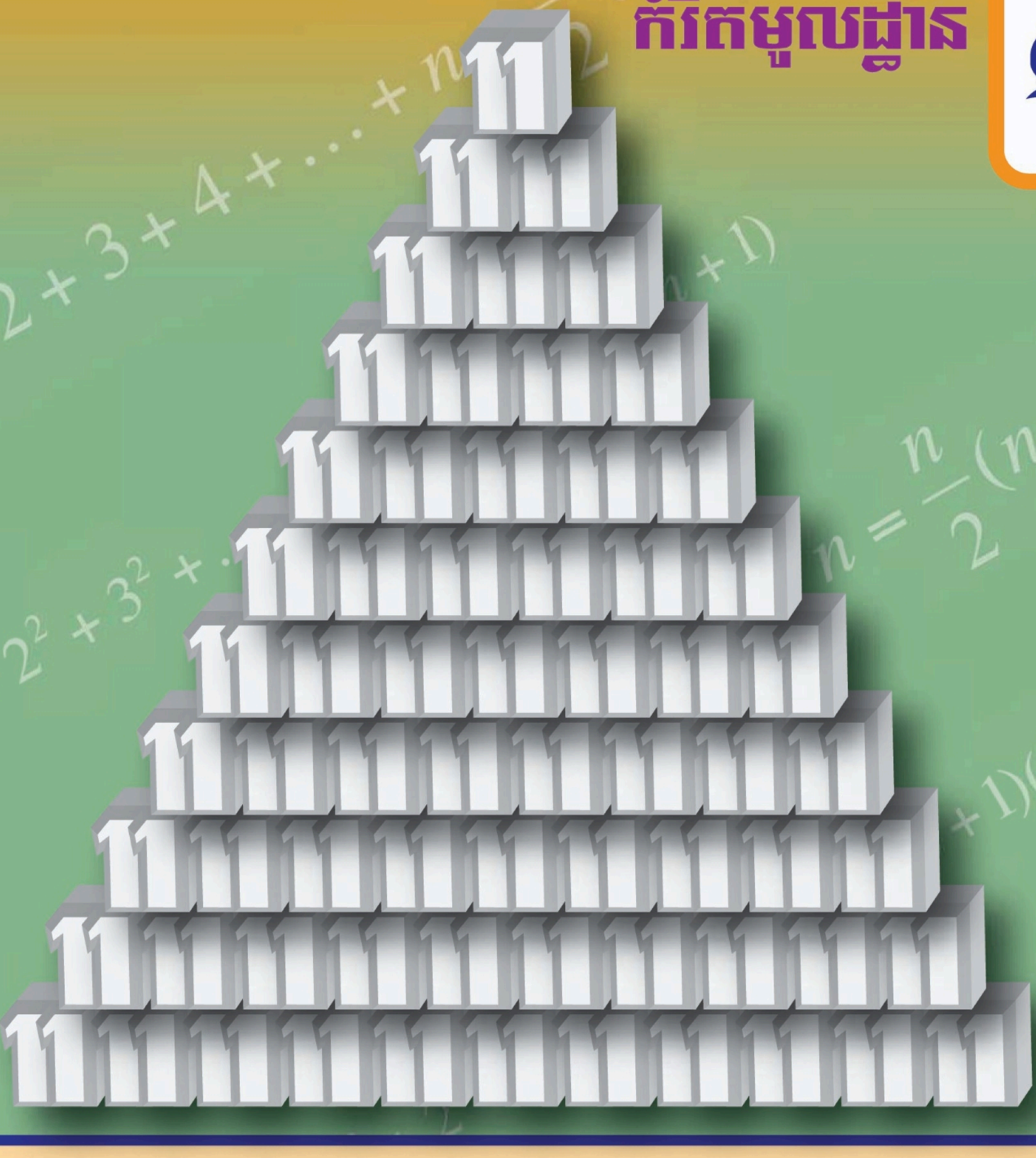
សំរាប់លក់

ក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា

គណិតវិទ្យា

កំរិតមូលដ្ឋាន

១១



គ្រឹះស្ថានបោះពុម្ពនិងចែកផ្សាយ

ក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា

គណិតវិទ្យា

កម្រិតមូលដ្ឋាន

ថ្នាក់ទី ១១

បោះពុម្ពផ្សាយដោយ

គ្រឹះស្ថានបោះពុម្ពនិងចែកផ្សាយ

អគារ ១៤៨ មហាវិថី ព្រះនរោត្តម ភ្នំពេញ

គណៈកម្មការនិពន្ធ	លោក អ៊ី ស៊ាងលី	លោកស្រី ទី ប៉ូលីរ៉េត
	លោក ឱក លីនដា	លោកស្រី អ៊ុក សុមនី
	លោក ចាន់ រ៉ាដា	លោក ប៊ុន រួ
	លោក នូ រ៉េត	
អ្នកវាយអត្ថបទ	លោកស្រី ឈាង ណាវីន	
វិចិត្រករ	លោក តន់ ជាតិ	
អ្នករៀបរៀង	លោក ឡុង សុផេង	លោក ព្រំ ងួន
អ្នករចនាទំព័រ	លោក ខែម ម៉ារី	
អ្នកឯកទេស	លោក អ៊ិន គីមស្រ៊ុន	
គណៈកម្មការពិនិត្យ	លោក ថៃ ហេង	លោក សុខ ធី
	លោក ប៊ូ សន	លោក ហេង ចន្ថា

បានទទួលការអនុញ្ញាតឱ្យបោះពុម្ពផ្សាយពី ក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា តាមប្រកាសលេខ២២៩៣ **អ**យក.ប្រក. ចុះថ្ងៃទី០៨ ខែធ្នូ ឆ្នាំ២០០៨ ដើម្បីប្រើប្រាស់នៅតាមសាលារៀន ។

គ្រឹះស្ថានបោះពុម្ពនិងចែកផ្សាយ

បោះពុម្ពលើកទី១២ ឆ្នាំ២០២០ ចំនួន២៥ ០០០ច្បាប់

ISBN 9-789-995-000-684

អារម្ភកថា

សៀវភៅគណិតវិទ្យាកម្រិតមូលដ្ឋានថ្នាក់ទី 11 រួមមាន 7 ជំពូក សិក្សាអំពី **ស្ទីត និងអនុមានរួមគណិតវិទ្យា អនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែល និងអនុគមន៍លោការីត អនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រ ម៉ាទ្រីស ដេរីវេ ប្រូបាប និងស្ថិតិ** ។

ការរៀបចំមេរៀននៅក្នុងសៀវភៅនេះ មានទម្រង់ដូចខាងក្រោម :

- មេរៀននីមួយៗបានបញ្ជាក់អំពីវត្ថុបំណងច្បាស់លាស់
- ខ្លឹមសារមេរៀននីមួយៗ ផ្តើមចេញពីឧទាហរណ៍ក្នុងជីវភាពរស់នៅ
- មានលំហាត់ប្រតិបត្តិសម្រាប់ពង្រឹងចំណេះដឹងសិស្ស
- នៅចុងមេរៀននៃជំពូកនីមួយៗមានសង្ខេបគន្លឹះមេរៀនសម្រាប់ឱ្យសិស្សចងចាំនូវអ្វីដែលបានរៀនរួច
- មេរៀននីមួយៗមានលំហាត់និងលំហាត់ជំពូកសម្រាប់ឱ្យសិស្សអនុវត្តដើម្បីពង្រឹងចំណេះដឹង
- នៅចុងទំព័រនៃសៀវភៅនេះមានចម្លើយលំហាត់សម្រាប់ឱ្យសិស្សផ្ទៀងផ្ទាត់ ។

សៀវភៅសិក្សានេះមានការចូលរួមពី :

- លោកគ្រូ អ្នកគ្រូដែលបានសាកល្បងជួយផ្តល់យោបល់
- លោកគ្រូ អ្នកគ្រូដែលបានសាកល្បងបង្រៀននូវសៀវភៅសិក្សានេះ
- គណៈកម្មការវាយតម្លៃដែលបានជួយត្រួតពិនិត្យ និងផ្តល់យោបល់ ។

ដើម្បីឱ្យសៀវភៅនេះ កាន់តែល្អប្រសើរ យើងខ្ញុំនឹងរង់ចាំទទួលរាល់ការរិះគន់ និងកែលម្អបន្ថែមអំពីសំណាក់លោកគ្រូ អ្នកគ្រូនិងមិត្តអ្នកប្រើប្រាស់សៀវភៅគណិតវិទ្យាកម្រិតមូលដ្ឋាននេះដោយក្តីរីករាយ ។

គណៈកម្មការនិពន្ធ

បញ្ជីអត្ថបទ

គណិតវិទ្យាកម្រិតមូលដ្ឋាន

ជំពូក 1

ស៊ីត

ការសិក្សាស៊ីតនាំឱ្យចំណេះដឹងគណិតវិទ្យាកាន់តែមានការរីកចម្រើនឡើងពីមួយថ្ងៃទៅមួយថ្ងៃ ។ តាមរយៈផលបូកតួនៃស៊ីតអាចឱ្យគេសង់បាននូវតារាងនៃអនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រ និងអនុគមន៍លោការីតមិនត្រឹមតែប៉ុណ្ណោះក៏អាចឱ្យគេគណនាបាននូវតម្លៃលេខ e និង π ទៀតផង ។

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} + \frac{1}{7!} + \dots$$ ។

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \frac{1}{15} + \dots$$ ។

មេរៀនទី

1

ស៊ីតចំនួនពិត

1. សញ្ញាណស៊ីត

វត្ថុបំណង

- បង្ហាញសញ្ញាណស៊ីតចំនួនពិត ស៊ីតរាប់អស់ និងស៊ីតអនន្តតួ
- សរសេរតួនៃស៊ីត និងកំណត់តួទី n នៃស៊ីត
- បង្ហាញថាស៊ីតមួយជាស៊ីតកើន ឬស៊ីតចុះ
- បង្ហាញស៊ីតម៉ូណូតូន ។

ឧទាហរណ៍ 1 គេមានចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីបរិជ្ជមាន $1, 2, 3, 4, 5, \ldots$ ។

គេមានចំនួនគត់គូ $2, 4, 6, 8, 10, \ldots$ ។

គេមានចំនួនគត់សេសតូចជាង 16 គឺ $1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15$ ។

គេមានចំនួនសនិទាន $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}$ ។

ចំនួនដែលរៀបតាមលំដាប់នេះហៅថា ស៊ីត **នៃចំនួនពិត** ។ ស៊ីតនៃចំនួនពិត $1, 2, 3, 4, 5, \ldots$ ហៅថាស៊ីតអនន្តតួ ។ ក្នុងស៊ីតអនន្តតួ គេមិនអាចរាប់ចំនួនតួនៃស៊ីតបានទេ ។

ម្យ៉ាងទៀត ស៊ីតនៃចំនួនពិត $1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15$ និងស៊ីតនៃចំនួនសនិទាន $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}$ ហៅថា ស៊ីតរាប់អស់ ។ ស៊ីតរាប់អស់គឺជាស៊ីតដែលគេរាប់ចំនួនតួបាន ។ ក្នុងស៊ីតរាប់អស់គេអាចស្គាល់ចំនួនតួនិងតួចុងក្រោយនៃស៊ីត ។

ឧទាហរណ៍ 2 គេមានអនុគមន៍ $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R} \quad n \mapsto f(n) = 2n+1$ ។

គេសង្កេតឃើញថា

បើ $n = 1$ នោះ $f(1) = 2\times 1+1 = 3$ បើ $n = 2$ នោះ $f(2) = 2\times 2+1 = 5$

បើ $n = 3$ នោះ $f(3) = 2\times 3+1 = 7$ បើ $n = 4$ នោះ $f(4) = 2\times 4+1 = 9$

....

គេបានចំនួនរៀបតាមលំដាប់ $3, 5, 7, 9, \ldots$ បង្កើតបានជាស៊ីតនៃចំនួនពិត ។

ចំនួននីមួយៗនៃស៊ីតហៅថា តួ ។ ចំនួន 3 ហៅថាតួទីមួយ 5 តួទីពីរ 7 តួទីបី ... រៀងគ្នា ។

ជាទូទៅ ស៊ីតចំនួនពិតគឺជាអនុគមន៍លេខដែលកំណត់ពី $\mathbb{N}$ ទៅ $\mathbb{R}$ ។

ជាទូទៅគេប្រើអក្សរ $a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots, a_n$ សម្រាប់តាងឱ្យតួនៃស៊ីតដែល a_1 ជាតួទីមួយ a_2 ជាតួទីពីរ $\ldots, a_n$ ជាតួទី n ។ ហើយគេតាងស៊ីតនោះដោយនិមិត្តសញ្ញា (a_n) ដែល $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ ។ ក្នុងករណីដែលគេឱ្យចំនួនគត់ $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ នោះស៊ីត (a_n) ផ្ដើមពីតួ $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ ។

លំហាត់គំរូ 1 ចូរបំពេញតួនៃស៊ីតខាងក្រោមនេះឱ្យបានបីតួទៀត ។

ក. $1, 5, 9, \ldots$ ខ. $1, 8, 27, \ldots$

ចម្លើយ ក. $1, 5, 9, 13, 17, 21$ ខ. $1, 8, 27, 64, 125, 216$ ។

លំហាត់គំរូ 2 សរសេរគ្រប់តួនៃស៊ីតរាប់អស់ $a_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{n+1}$, $1 \le n \le 5$ ។

ចម្លើយ ជំនួសចំនួនគត់ធម្មជាតិពី 1 ដល់ 5 ក្នុង a_n គេបាន

$$a_1 = \frac{(-1)^2}{2} = \frac{1}{2} \ , \ a_2 = \frac{(-1)^3}{3} = -\frac{1}{3} \ , \ a_3 = \frac{(-1)^4}{4} = \frac{1}{4} \ , \ a_4 = \frac{(-1)^5}{5} = -\frac{1}{5} \ ,$$

$a_5 = \dfrac{(-1)^6}{6} = \dfrac{1}{6}$ ។ ដូចនេះ ប្រាំតួនៃស៊ីតគឺ $\dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{4}, -\dfrac{1}{5}, \dfrac{1}{6}$ ។

ប្រតិបត្តិ 1. គេឱ្យស៊ីត $3, 8, 15, \ldots$ ។ បន្តសរសេរស៊ីតនេះឱ្យបានបីតួទៀត ។

2. សរសេរតួនៃស៊ីត (a_n) កំណត់ដោយ $a_n = \dfrac{1}{n+2}$ ដែល $1 \le n \le 4$ ។

3. សរសេរតួនៃស៊ីតតាមលំដាប់តគ្នា $a_n = 2 + \dfrac{1}{2^n}$ ដែល $n \in \mathbb{N}$ ។

2. តួទី n នៃស៊ីត

បើគេពិនិត្យលើស៊ីតចំនួនគត់ $1, 2, 3, 4, 5, \ldots$ តួចុងក្រោយរបស់វាតាងដោយ n ។ ក្នុងករណីនេះគេថា $a_1 = 1$ ជាតួទីមួយ $a_2 = 2$ ជាតួទីពីរ $a_3 = 3$ ជាតួទីបី $, \ldots, a_4 = n$ ជាតួទី n ។ ដូចគ្នានេះដែរចំពោះស៊ីតនៃចំនួន $2, 4, 6, 8, 10, \ldots$ គេឃើញថា $a_1 = 2 = 2 \times 1$, $a_2 = 4 = 2 \times 2$, $a_3 = 6 = 2 \times 3$, $a_4 = 8 = 2 \times 4, \ldots, a_n = 2 \times n$ ។ ដូចនេះ គេបានតួទី n នៃស៊ីតគឺ $a_n = 2 \times n$ ។

តាមធម្មតាគេច្រើនស្គាល់តួដំបូង និងតួបន្តបន្ទាប់នៃស៊ីត ។ ដើម្បីសរសេររូបមន្តតួទី n នៃស៊ីត គេពិនិត្យមើលតួនីមួយៗនៃស៊ីត រួចរកមើលលំនាំគំរូរបស់វា ។ តួនីមួយៗជាអនុគមន៍នៃចំនួនតួ ។

តួទីមួយត្រូវនឹង $n = 1$ តួទីពីរត្រូវនឹង $n = 2, \ldots,$ តួទី n ត្រូវនឹង $n = n$ ។

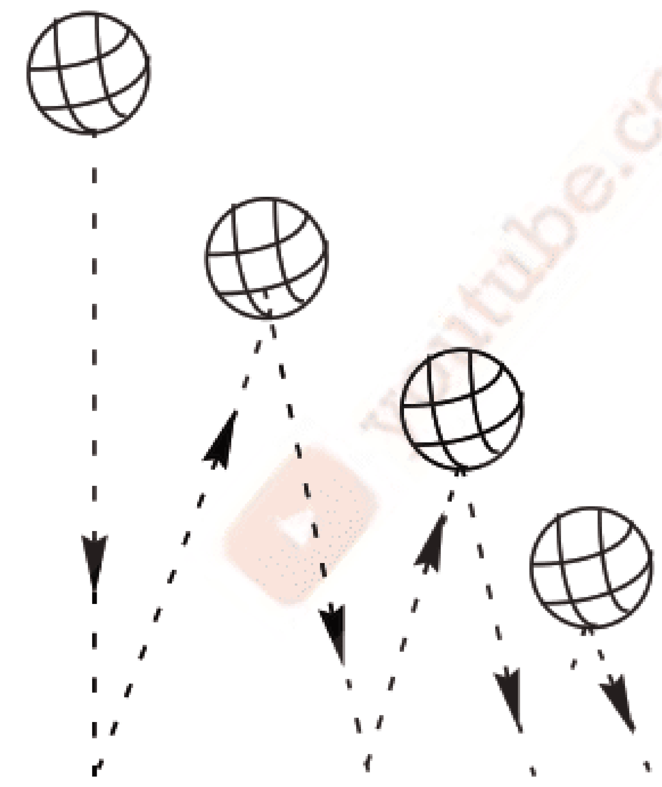
លំហាត់គំរូ 1 កំណត់តួទី n នៃស៊ីត 3, 5, 7, 9, 11, … ចំពោះ គ្រប់ $n \in \mathbb{N}$ ។

ចម្លើយ គេសង្កេតឃើញថា : $a_1 = 3 = 2\times1+1$, $a_2 = 5 = 2\times2+1$,

$a_3 = 7 = 2\times3+1$, $a_4 = 9 = 2\times4+1$

$a_5 = 11 = 2\times5+1, \ldots$, $a_n = 2n+1$ ។ ដូចនេះ គេបានតួទី n នៃស៊ីតគឺ $a_n = 2n+1$ ។

លំហាត់គំរូ 2 បាល់មួយត្រូវបានទម្លាក់ពីកម្ពស់ 6m ។ ដោយដឹងថា បាល់នោះធ្លាក់ដល់ដីតែងតែលោតឡើងលើវិញបាន $\frac{2}{3}$ នៃកម្ពស់ដែលបាល់នោះធ្លាក់ចុះ ចូរកំណត់កម្ពស់នៃបាល់ជាបន្តបន្ទាប់ដោយសរសេរជាស៊ីតមួយ រួចកំណត់តួទី n នៃស៊ីតនេះ ។



ចម្លើយ លើកដំបូងបាល់ធ្លាក់ពីកម្ពស់ 6m ដូចបង្ហាញក្នុងរូបរួចលោតឡើងលើវិញបាន $\frac{2}{3}$ នៃ 6m ឬ $6\left(\frac{2}{3}\right)m$ មានកម្ពស់ 4m ។

លើកទីពីរបាល់ធ្លាក់ពីកម្ពស់ $6\left(\frac{2}{3}\right)m$ ហើយលោតឡើងវិញបាន $6\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)$ ឬ $6\left(\frac{2}{3}\right)^2$ ។

ដូចនេះ កម្ពស់បាល់ជាបន្តបន្ទាប់គឺ :

6 , $6\times\left(\frac{2}{3}\right)^1$, $6\times\left(\frac{2}{3}\right)^2$, $6\times\left(\frac{2}{3}\right)^3$, $6\times\left(\frac{2}{3}\right)^4, \ldots$ ហើយតួទី n គឺ $a_n = 6\times\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$ ។

ប្រតិបត្តិ កំណត់តួទី n ចំពោះ គ្រប់ $n \in \mathbb{N}$ នៃស៊ីតខាងក្រោម :

ក. $-1, 2, 7, 14, 23, \ldots$ ខ. $\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \ldots$ ។

3. អថេរភាពនៃស៊ីត

3.1 ស៊ីតកើន ស៊ីតចុះ

ឧទាហរណ៍ 1 គេឱ្យស៊ីត $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ដែល $a_n = n$ ។ គេបានតួនៃស៊ីតគឺ 1, 2, 3, 4, 5, 6,… ។

តាមលំដាប់តួនៃស៊ីតគេសង្កេតឃើញថា

$1<2<3<4<5<6<\ldots$ ឬ $a_1<a_2<a_3<a_4<\ldots<a_n<a_{n+1}<\ldots$ ។

ដូចនេះបើតួរបស់វាកើន $a_1\le a_2\le a_3\le a_4\le\ldots\le a_n\le a_{n+1}\le\ldots$ គេថាស៊ីតនេះជាស៊ីតកើន ។

ឧទាហរណ៍ 2 គេឱ្យស៊ីត $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ដែល $a_n = \frac{1}{n}$ ។ គេបានតួនៃស៊ីតគឺ $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots$ ។ តាមលំដាប់តួនៃស៊ីត គេសង្កេតឃើញថា $1>\frac{1}{2}>\frac{1}{3}>\frac{1}{4}>\frac{1}{5}>\ldots$ ឬ

$a_1>a_2>a_3>a_4>\ldots>a_n>a_{n+1}>\ldots$ ។

ដូចនេះ បើតួរបស់វា $a_1\ge a_2\ge a_3\ge a_4\ge\ldots\ge a_n\ge a_{n+1}\ge\ldots$ គេថាស៊ីតនេះជាស៊ីតចុះ ។

និយមន័យ	- ស៊ីត (a_n) ជាស៊ីតកើន លុះត្រាតែចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ $n\in\mathbb{N}$; $a_{n+1}\geq a_n$ ។ - ស៊ីត (a_n) ជាស៊ីតចុះ លុះត្រាតែចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ $n\in\mathbb{N}$; $a_{n+1}\leq a_n$ ។

លំហាត់គំរូ ក. បង្ហាញថាស៊ីត (a_n) ដែល $a_n = 3n+1$ ជាស៊ីតកើន ។

ខ. បង្ហាញថាស៊ីត (b_n) ដែល $b_n = 12-2n$ ជាស៊ីតចុះ ។

ចម្លើយ ក. គេមាន $a_n = 3n+1$, $a_{n+1} = 3(n+1)+1 = 3n+4$

នោះគេបាន $a_{n+1}-a_n = 3n+4-(3n+1) = 3>0$ នាំឱ្យ $a_{n+1}>a_n$ ។

ដូចនេះ ស៊ីត (a_n) ដែល $a_n = 3n+1$ ជាស៊ីតកើន ។

ខ. គេមាន $b_n = 12-2n$, $b_{n+1} = 12-2(n+1) = 10-2n$

នោះគេបាន $b_{n+1}-b_n = 10-2n-(12-2n) = -2<0$ នាំឱ្យ $a_{n+1}<a_n$ ។

ដូចនេះ ស៊ីត (b_n) ដែល $b_n = 12-2n$ ជាស៊ីតចុះ ។

ប្រតិបត្តិ 1. តើស៊ីតខាងក្រោមមួយណាជាស៊ីតកើន មួយណាជាស៊ីតចុះ ។

ក. ស៊ីត $(a_n)_{n\geq 5}$ ដែល $a_n = \dfrac{3n}{2}$

ខ. ស៊ីត $(a_n)_{n\geq 3}$ ដែល $a_n = \dfrac{2}{n}$ ។

3.2 ស៊ីតម៉ូណូតូន

ឧទាហរណ៍ 1 គេឱ្យស៊ីត $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ដែល $a_n = \dfrac{n}{n+1}$ ។

គេបានតួនៃស៊ីតគឺ $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5},\ldots$ ។

តាមលំដាប់តួនៃស៊ីត គេសង្កេតឃើញថា $\frac{1}{2}<\frac{2}{3}<\frac{3}{4}<\frac{4}{5}<\ldots$ ឬ $a_1<a_2<a_3<a_4<\ldots<a_n<a_{n+1}<\ldots$ ។

ដូចនេះបើតួរបស់វាកើន $a_1\leq a_2\leq a_3\leq a_4\leq\ldots\leq a_n\leq a_{n+1}\leq\ldots$ គេថាស៊ីត $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ នេះជាស៊ីតម៉ូណូតូន ។

ឧទាហរណ៍ 2 គេឱ្យស៊ីត $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ដែល $a_n = 1+\dfrac{1}{n}$ ។

គេបានតួនៃស៊ីតគឺ $2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \ldots$ ។ តាមលំដាប់តួនៃស៊ីត

គេសង្កេតឃើញថា $2>\frac{3}{2}>\frac{4}{3}>\frac{5}{4}>\ldots$ ឬ $a_1>a_2>a_3>a_4>\ldots>a_n>a_{n+1}>\ldots$ ។

ដូចនេះបើតួរបស់វាចុះ $a_1\geq a_2\geq a_3\geq a_4\geq\ldots\geq a_n\geq a_{n+1}\geq\ldots$ គេថាស៊ីតនេះជា ស៊ីតម៉ូណូតូន ។

និយមន័យ - ស្វ៊ីត (a_n) ជាស្វ៊ីតម៉ូណូតូន បើតួរបស់វាកើន $a_1 \le a_2 \le a_3 \le a_4 \le \dots \le a_n \le a_{n+1} \le \dots$ ឬតួរបស់វាចុះ $a_1 \ge a_2 \ge a_3 \ge a_4 \ge \dots \ge a_n \ge a_{n+1} \ge \dots$ ។

សម្គាល់ ស្វ៊ីតកើន ឬស្វ៊ីតចុះជាស្វ៊ីតម៉ូណូតូន ។

លំហាត់គំរូ បង្ហាញថាស្វ៊ីត $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ដែល $a_n = \dfrac{n}{n+1}$ ជាស្វ៊ីតម៉ូណូតូន ។

ចម្លើយ ***របៀបទី 1*** គេមាន $a_n = \dfrac{n}{n+1}$

គេបាន $a_{n+1} = \dfrac{n+1}{(n+1)+1} = \dfrac{n+1}{n+2}$ ។

ចំពោះ $\forall n \ge 1$ គេបាន $a_{n+1} - a_n = \dfrac{n+1}{n+2} - \dfrac{n}{n+1} = \dfrac{1}{(n+1)(n+2)} > 0$

នោះ $a_{n+1} > a_n$ ។

ដូចនេះស្វ៊ីត $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ជាស្វ៊ីតម៉ូណូតូន ។

របៀបទី 2 គេមាន $a_{n+1} = \dfrac{n+1}{(n+1)+1} = \dfrac{n+1}{n+2}$ ។

គេបាន $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{\dfrac{n+1}{n+2}}{\dfrac{n}{n+1}} = \dfrac{n+1}{n+2} \times \dfrac{n+1}{n} = \dfrac{n^2+2n+1}{n^2+2n} > 1$ ព្រោះ $\forall n \ge 1$

ឬ $n^2 + 2n + 1 > n^2 + 2n$

នោះ $a_{n+1} > a_n$ ។ ដូចនេះ ស្វ៊ីត $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ជាស្វ៊ីតម៉ូណូតូន ។

ប្រតិបត្តិ តើស្វ៊ីតខាងក្រោម ស្វ៊ីតណាជាស្វ៊ីតម៉ូណូតូន ។

ក. $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$ ខ. $a_n = \dfrac{2^n}{n}$, $n \ge 1$

គ. $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \dots (-1)^{n+1}\frac{1}{n}, \dots$

4. ស្វ៊ីតទាល់

4.1 ស្វ៊ីតទាល់លើ

ឧទាហរណ៍ 1 គេឱ្យស្វ៊ីត $2, 1, 0, -1, -2, -3, \dots$ ។

គេសង្កេតឃើញថា $a_1 = 2 > a_2 = 1 > a_3 = 0 > \dots$ ។

គេថាស្វ៊ីតនេះជាស្វ៊ីតទាល់លើ ។ ចំនួន 2 ហៅថាគោលលើនៃស្វ៊ីត ។

ឧទាហរណ៍ 2 រកចំនួនទាល់លើនៃស្វ៊ីត $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ដែល $a_n = 3 - 2^n$ ។

ចម្លើយ គេបាន $a_1 = 1 > a_2 = -1 > a_3 = -5 > a_4 = -13 > \ldots$ គេថាស្វ៊ីតនេះជាស្វ៊ីតទាល់លើ ។ ចំនួន 1 ជាគោលលើនៃស្វ៊ីត ។

និយមន័យ ស្វ៊ីត (a_n) ជាស្វ៊ីតទាល់លើ បើមានចំនួនពិត M មួយដែលចំពោះគ្រប់ $n \in \mathbb{N}$, $a_n \leq M$ ។ ចំនួន M នេះហៅថា គោលលើនៃស្វ៊ីត ។

លំហាត់គំរូ រកគោលលើនៃស្វ៊ីត $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ដែល $a_n = \frac{n}{4n-1}$ ។

ចម្លើយ គេបាន $a_1 = \frac{1}{3} > a_2 = \frac{2}{7} > a_3 = \frac{3}{11} > a_4 = \frac{4}{15} > \ldots$ គេថាស្វ៊ីតនេះជាស្វ៊ីតទាល់លើដែលមានចំនួន $\frac{1}{3}$ ជាគោលលើនៃស្វ៊ីត ។

ប្រតិបត្តិ ក. រកគោលលើនៃស្វ៊ីត $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ដែល $a_n = \frac{2}{n}$ ។

ខ. រកគោលលើនៃស្វ៊ីត (a_n) ដែល $a_1 = 1$, $a_n = \frac{a_{n-1}}{2}$ បើ $n \geq 2$ ។

4.2 ស្វ៊ីតទាល់ក្រោម

ឧទាហរណ៍ 1 គេឱ្យស្វ៊ីត $2, 4, 6, 8, 10, \ldots$ ។

គេសង្កេតឃើញថា $a_1 = 2 < a_2 = 4 < a_3 = 6 < a_4 = 8 < a_5 = 10 < \ldots$ ។

គេថាស្វ៊ីតនេះជាស្វ៊ីតទាល់ក្រោម ។ ចំនួន 2 ជាគោលក្រោមនៃស្វ៊ីត ។

ឧទាហរណ៍ 2 រកគោលក្រោមនៃស្វ៊ីត $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ដែល $a_n = 2n-1$ ។

ចម្លើយ គេបាន $a_1 = 1 < a_2 = 3 < a_3 = 5 < a_4 = 9 < \ldots$ គេថាស្វ៊ីតនេះជាស្វ៊ីតទាល់ក្រោម ។ ចំនួន 1 ជាគោលក្រោមនៃស្វ៊ីត ។

និយមន័យ ស្វ៊ីត (a_n) ជាស្វ៊ីតទាល់ក្រោម បើមានចំនួនពិត N មួយដែលចំពោះគ្រប់ $n \in \mathbb{N}$ ផ្ទៀងផ្ទាត់ $a_n \geq N$ ។ ចំនួន N ហៅថា**គោល**ក្រោមនៃស្វ៊ីត

លំហាត់គំរូ រកគោលក្រោមនៃស្វ៊ីត $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ដែល $a_n = 1 + \frac{n}{3}$ ។

ចម្លើយ គេបាន $a_1 = \frac{4}{3} < a_2 = \frac{5}{3} < a_3 = \frac{6}{3} < a_4 = \frac{7}{3} < \ldots$ គេថាស្វ៊ីតនេះជាស្វ៊ីតទាល់ក្រោមដែលមានចំនួន $\frac{4}{3}$ ជាគោលក្រោមនៃស្វ៊ីត ។

ប្រតិបត្តិ ក. រកគោលក្រោមនៃស្វ៊ីត (a_n) ដែល $a_n = n+2$ ។

ខ. រកគោលក្រោមនៃស្វ៊ីត $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ដែល $a_n = 2n+1$ ។

4.3 ស្វ៊ីតទាល់

ឧទាហរណ៍ 1 គេឱ្យស្វ៊ីត $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5},\ldots$ ។ តាមលំដាប់តួនៃស្វ៊ីត គេសង្កេតឃើញថា $\frac{1}{2}$ ជាគោលក្រោមនៃស្វ៊ីត និង 1 ជាគោលលើនៃស្វ៊ីត ព្រោះកាលណា n ខិតជិតអនន្ត $\frac{n+1}{n+2}$ ខិតជិត 1 ដែល 1 ជាគោលលើនៃស្វ៊ីត ។ គេបានស្វ៊ីតនេះទាល់លើផង និងទាល់ក្រោមផង ។

ដូចនេះ គេថាស្វ៊ីតនេះជា**ស្វ៊ីតទាល់** ។

ឧទាហរណ៍ 2 រកគោលលើ និងគោលក្រោមនៃស្វ៊ីត $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ដែល $a_n = 3+\frac{1}{n}$ ។

ចម្លើយ គេបាន $a_1 = 4$, $a_2 = \frac{7}{2}$, $a_3 = \frac{10}{3}$, $a_4 = \frac{13}{4},\ldots,\left(3+\frac{1}{n}\right),\ldots$ តាមលំដាប់តួនៃស្វ៊ីត គេសង្កេតឃើញថា 4 ជាគោលលើនៃស្វ៊ីត និង 3 ជាគោលក្រោមនៃស្វ៊ីត ព្រោះកាលណា n ខិតជិតអនន្ត $3+\frac{1}{n}$ ខិតជិត 3 ។

ដូចនេះ 4 ជាគោលលើនៃស្វ៊ីតនិង 3 ជាគោលក្រោមនៃស្វ៊ីត ។

និយមន័យ	ស្វ៊ីត (a_n) ជាស្វ៊ីតទាល់លុះត្រាតែស្វ៊ីត (a_n) ជាស្វ៊ីតទាល់លើផងទាល់ក្រោមផង ។

លំហាត់គំរូ រកគោលលើ និងគោលក្រោមនៃស្វ៊ីត $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ដែល $a_n = \frac{n}{2n+1}$ ។

ចម្លើយ គេបាន $a_1 = \frac{1}{3}, a_2 = \frac{2}{5}, a_3 = \frac{3}{7}, a_4 = \frac{4}{9}, \ldots, \left(\frac{n}{2n+1}\right),\ldots$ ។

តាមលំដាប់តួនៃស្វ៊ីត គេសង្កេតឃើញថា $\frac{1}{3}$ ជាគោលក្រោមនៃស្វ៊ីត និង $\frac{1}{2}$ ជាគោលលើនៃស្វ៊ីត ព្រោះកាលណា n ខិតជិតអនន្តនោះ $\frac{n}{2n+1}$ ខិតជិត $\frac{1}{2}$ ។

ដូចនេះ $\frac{1}{2}$ ជាគោលលើនៃស្វ៊ីត និង $\frac{1}{3}$ ជាគោលក្រោមនៃស្វ៊ីត ។

ប្រតិបត្តិ បណ្តាស្វ៊ីតខាងក្រោមនេះ តើស្វ៊ីតណាខ្លះជាស្វ៊ីតទាល់លើ ទាល់ក្រោម និងជាស្វ៊ីតទាល់ ? រួចរកគោលនៃស្វ៊ីតនីមួយៗ ។

ក. ស្វ៊ីត (a_n) ដែល $a_n = 1-3n$ ខ. ស្វ៊ីត $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ដែល $b_n = 4n-1$

គ. ស្វ៊ីត $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ដែល $c_n = \frac{1}{n^2}$ ។

លំហាត់

1. សរសេរបីតួបន្ទាប់នៃស្វីតខាងក្រោម :

ក. 5, 10, 15, 20, … ខ. 1, 5, 14, 30, 55, … ។

2. សរសេរតួនៃស្វីតរាប់អស់ខាងក្រោម :

ក. $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$ ចំពោះ $1 \le n \le 8$ ខ. $b_n = (2)^{-n+2}$ ចំពោះ $1 \le n \le 5$ ។

3. សរសេរបួនតួនៃស្វីតរាប់អស់ខាងក្រោម :

ក. $a_n = \frac{(-1)^{2n}}{n^2}$ ខ. $b_n = \frac{1}{n^2+n}$ គ. $c_n = (-1)^n(n-2)^2$ ឃ. $d_n = (-1)^n\ 2^{n-1}$ ។

4. កំណត់តួទី n ចំពោះគ្រប់ $n \in \mathbb{N}$ នៃស្វីតខាងក្រោម :

ក. 5, 7, 9, 11, 13, … ខ. –3, –1, 1, 3, 5, …

គ. 16, 13, 10, 7, 4, … ឃ. $\frac{2}{3}, \frac{3}{5}, \frac{4}{7}, \frac{5}{9}, \ldots$ ។

5. បង្ហាញថាស្វីត (a_n) ដែល $a_n = \frac{1}{n+3}$ ជាស្វីតចុះ ។

6. បង្ហាញថាស្វីត (b_n) ដែល $b_n = \frac{2n+1}{n+3}$ ជាស្វីតកើន ។

7. សិក្សាភាពម៉ូណូតូននៃស្វីតដែលកំណត់ដូចខាងក្រោម :

ក. ស្វីត $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ដែល $a_n = \frac{1}{n}$ ខ. ស្វីត (a_n) ដែល $a_n = n^2 - 4n - 5$

គ. ស្វីត $(a_n) \ge 4$ ដែល $a_n = n - 4ln(n)$ ឃ. ស្វីត (a_n) ដែល $a_{n+1} = a_n^2$ និង $a_0 = 2$ ។

8. បង្ហាញថាស្វីត (a_n) ដែល $a_n = \sqrt{n^2+1} - n$ ជាស្វីតទាល់ ។

9. តើស្វីតខាងក្រោមជាស្វីតទាល់ឬទេ ?

ក. ស្វីត $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ដែល $a_n = \frac{n^3+2n^2-1}{n^2+n}$ ខ. ស្វីត $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ដែល $b_n = \frac{\pi}{n}$

គ. ស្វីត (c_n) ដែល $c_n = \frac{n+1}{n+3}$ ។

10. តើបណ្តាស្វីតខាងក្រោមមួយណាជាស្វីតទាល់លើ ទាល់ក្រោម និងជាស្វីតទាល់ ? រួចរកគោលនៃស្វីតនីមួយៗ ។ ក. $a_n = \frac{n^3+2n^2-1}{n^2+n}$, $n \ge 1$ ខ. $a_n = \frac{e^n}{n^2+3n-4}$, $n \ge 2$ ។

11. គេមានស្វីត (a_n) ដែល n ជាចំនួនគត់ ហើយ $a_0 = 1$ និង $a_{n+1} = a_n^2 + a_n + 1$ ។

ក. បង្ហាញថាស្វីត (a_n) ដែល n ជាចំនួនគត់ ជាស្វីតកើន ។

ខ. បង្ហាញថាចំពោះគ្រប់ n, $a_n \ge n$ ។

មេរៀនទី

2 ស៊ីតនព្វន្ត

1. និយមន័យនៃស៊ីតនព្វន្ត

ឧទាហរណ៍ គេមានស៊ីត $1, 2, 3, 4, 5, \ldots$ ។

គេបាន $U_1 = 1$, $U_2 = 2 = 1+1 = U_1 + 1$,

$U_3 = 3 = 2+1 = U_2 + 1$, $U_4 = 4 = 3+1 = U_3+1$,

$U_5 = 5 = 4+1 = U_4+1, \ldots, U_n = U_{n-1}+1$ ។

គេសង្កេតឃើញថាតួនីមួយៗនៃស៊ីត (ក្រៅពីតួទី 1) ស្មើនឹងតួមុនបន្ទាប់បូកនឹងចំនួនថេរ (ស្មើនឹង 1) ។ ចំនួន 1 ហៅថាផលសងរួមនៃស៊ីត ។ ស៊ីត $1,2,3,4,5,\ldots$ ហៅថា ស៊ីតនព្វន្តដែលមានផលសងរួមស្មើនឹង 1 ។

វត្ថុបំណង

- កំណត់និយមន័យ និង ផលសងរួមនៃស៊ីតនព្វន្ត
- កំណត់តួទី n នៃស៊ីតនព្វន្ត
- ផលបូកតួស្មើចម្ងាយពីតួចុង
- គណនាផលបូកតួនៃស៊ីតនព្វន្ត

ជាទូទៅ ផលសងរួមនៃស៊ីតនព្វន្តតាងដោយ d កំណត់ដោយ :

$$d = U_2 - U_1 = U_3 - U_2 = \ldots = U_n - U_{n-1}$$ ។

និយមន័យ ស៊ីតនព្វន្ត គឺជាស៊ីតនៃចំនួនពិតដែលមានតួនីមួយៗ (ក្រៅពីតួទី 1) ស្មើនឹងតួមុនបន្ទាប់បូកចំនួនថេរ d មួយ ហៅថាផលសងរួម ។

2. តួទី n នៃស៊ីតនព្វន្ត

ឧទាហរណ៍ គេមានស៊ីត $1, 2, 3, 4, 5,\ldots$ គឺជាស៊ីតនព្វន្តដែលមានតួទី 1 $U_1 = 1$ និង ផលសងរួម $d = 1$ ។

គេបាន $U_1 = 1$, $U_2 = 2 = 1+1 = U_1 + d$, $U_3 = 3 = 2+1 = U_1 + 2d$,

$U_4 = 4 = 3+1 = U_1 + 3d$, $U_5 = 5 = 4+1 = U_1 + 4d, \ldots,$ ។

គេសង្កេតឃើញថាតួនីមួយៗនៃស៊ីត (ក្រៅពីតួទី 1)ស្មើនឹងតួទីមួយបូក $d, 2d, 3d, \ldots,$ រៀងគ្នា ។

ជាទូទៅ (U_n) ជាស៊ីតនព្វន្តដែលមានតួទីមួយ U_1 និងផលសងរួម d ។

តួទី n នៃស៊ីតនព្វន្តកំណត់ដោយ $U_n = U_1 + (n-1) \times d$ ។

សម្គាល់ (U_n) ជាស៊ីតនព្វន្តដែលមានតួទីមួយ U_0 និងផលសងរួម d ។

តួទី $n+1$ នៃស៊ីតនព្វន្តកំណត់ដោយ $U_n = U_0 + nd$ ហើយតួទី n គឺ$U_{n-1} = U_0 + (n-1)d$

លំហាត់គំរូ 1 គេមានស៊ីតនព្វន្ត 2, 8, 14, 20, ... ។

ក. គណនាតួទី 20 ខ. តើចំនួន 236 ជាតួទីប៉ុន្មាននៃស៊ីត ?

ចម្លើយ តាងតួទីមួយ $U_1 = 2$ តួទីពីរ $U_2 = 8$ គេបានផលសងរួម $d = U_2 - U_1 = 8 - 2 = 6$ ។

ក. តួទី 20 នៃស៊ីតនព្វន្តគឺ :

$U_{20} = 2 + (20-1) \times 6 = 116$ ។ ដូចនេះ តួទី 20 នៃស៊ីតគឺ 116 ។

ខ. តាង $U_n = 236$ ។ គេបាន $U_n = 2 + (n-1) \times 6$ នោះ

$236 = 2 + (n-1) \times 6$, $236 = 6n - 4$, $6n = 240 \Rightarrow n = 40$ ។

ដូចនេះ ចំនួន 236 ជាតួទី 40 នៃស៊ីត ។

លំហាត់គំរូ 2 តំណាងក្រុមហ៊ុនផានារ៉ាប់រងមួយទទួលប្រាក់បៀវត្សក្នុងឆ្នាំទី 1 គឺ 30 លានរៀល និងប្រាក់បៀវត្សក្នុងឆ្នាំទី 7 គឺ 60 លានរៀល ។ ឧបមាថា តួលេខនៃប្រាក់បៀវត្សប្រចាំឆ្នាំរបស់គាត់បង្កើតបានជាស៊ីតនព្វន្ត ។ កំណត់ប្រាក់បៀវត្សរបស់គាត់ក្នុងឆ្នាំទី 10 ។

ចម្លើយ គេមានប្រាក់បៀវត្សក្នុងឆ្នាំទី 1 គឺ $a_1 = 30$ លានរៀល ប្រាក់បៀវត្សក្នុងឆ្នាំទី 7 គឺ $a_7 = 60$ លានរៀល នោះ $a_7 = a_1 + (n-1)d$, $60 = 30 + (7-1)d$ គេបាន $d = 5$ លានរៀល ។

ដូចនេះ ប្រាក់បៀវត្សក្នុងឆ្នាំទី 10 គឺ $a_{10} = a_7 + (10-7)d$, $a_{10} = 60 + 3 \times 5$, $a_{10} = 75$ លានរៀល ។

ប្រតិបត្តិ ក. គេឱ្យស៊ីតនព្វន្តមួយដែល $U_0 = 2$ និង $U_1 = 9$ ។ កំណត់តួទី 5 និងគណនា U_5 ។

ខ. សៀវភៅមួយក្បាលមាន 100 ទំព័រចុះលេខទំព័រពី 1 ដល់ 100 ។ រកចំនួនទំព័រដែលមានលេខខាងចុង 5 ។

3. ផលបូកតួនៃស៊ីតនព្វន្ត

គេមានស៊ីតនព្វន្ត $U_1, U_2, U_3, U_4, U_5, U_6$ ។ U_1 និង U_6 ហៅថា តួចុង ។ U_2 និង U_3 ហើយ U_3 និង U_4 ហៅថាតួនៅស្មើចម្ងាយពីតួចុង ។

តាមរូបមន្តតួទី n នៃស៊ីតនព្វន្ត : $U_n = U_1 + (n-1)d$

គេបាន $U_1 + U_6 = U_1 + U_1 + 5d = 2U_1 + 5d \qquad (1)$

$U_2 + U_5 = U_1 + d + U_1 + 4d = 2U_1 + 5d \qquad (2)$

$U_3 + U_4 = U_1 + 2d + U_1 + 3d = 2U_1 + 5d \qquad (3)$

គេបាន $U_1 + U_6 = U_2 + U_5 = U_3 + U_4$ ។

ជាទូទៅ បើគេមានស៊ីតនព្វន្ត

$U_1\ ,\ U_2\ ,\ U_3\ ,\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\ U_{n-2}\ ,\ U_{n-1},\ \ U_n$ ។

តួស្មើចម្ងាយពីតួចុង

តួស្មើចម្ងាយពីតួចុង

តួចុង

គេបានផលបូកតួចុងស្មើនឹងផលបូកតួស្មើចម្ងាយពីតួចុង

$U_1 + U_n = U_2 + U_{n-1} = U_3 + U_{n-2} = \ldots\ldots$

គេប្រើលក្ខណៈនេះដើម្បីគណនាផលបូកតួនៃស៊ីតនព្វន្ត

$$\begin{aligned} S_n &= U_1 + U_2 + U_3 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + U_{n-1} + U_n \\ + \quad S_n &= U_n + U_{n-1} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ \ + U_2 + U_1 \\ \hline 2S_n &= (U_1 + U_n) + (U_2 + U_{n-1}) + \ldots\ldots\ldots\ldots + (U_{n-1} + U_2) + (U_1 + U_n) \\ &= \underbrace{(U_1 + U_n) + (U_1 + U_n) + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + (U_1 + U_n)}_{n\ \text{តួ}} \end{aligned}$$

$2S_n = (U_1 + U_n)n$ នោះ $S_n = \frac{n}{2}(U_1 + U_n)$ ។

ជាទូទៅ ផលបូក n តួនៃស៊ីតនព្វន្ត ដែលមាន U_1 ជាតួទី 1 និង U_n ជាតួទី n កំណត់ដោយ $S_n = \frac{n}{2}(U_1 + U_n)$ ។

លំហាត់គំរូ 1 គេមានស្វ៊ីតនព្វន្ត $51, 47, 43, \ldots$ ។

កំណត់តម្លៃ n ដែលធ្វើឱ្យផលបូក n តួដំបូង S_n មានតម្លៃអតិបរមា និងកំណត់តម្លៃនៃ S_n ។

ចម្លើយ តាង U_n ជាតួទូទៅនៃស្វ៊ីតនព្វន្ត។ ដោយផលសងរួម $d = -4$ និង $U_1 = 51$ ។

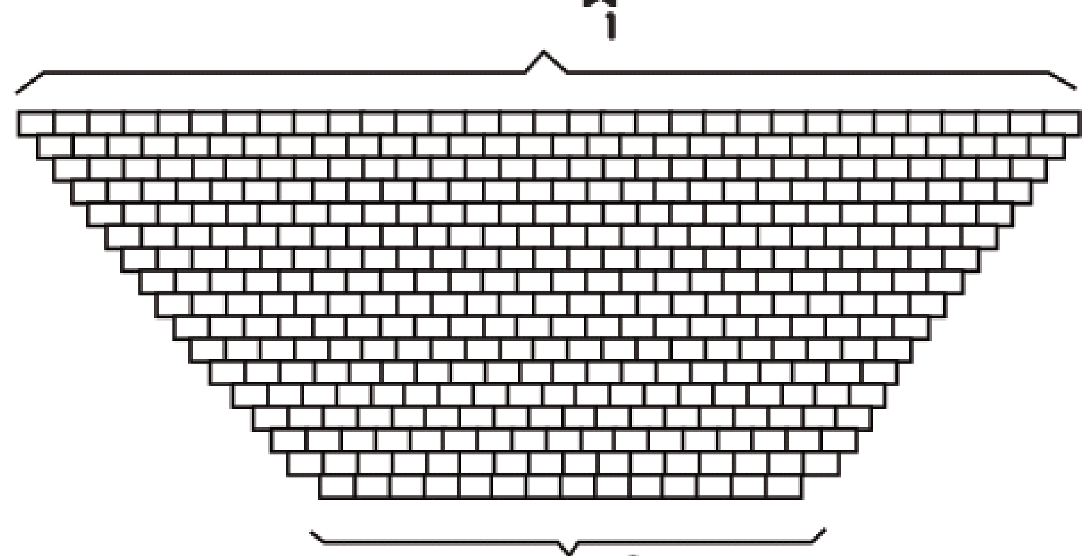
គេបាន $U_n = U_1 + (n-1)d = 51 + (n-1)(-4) = 55 - 4n$

នាំឱ្យ $U_n > 0$ ចំពោះ $n = 1, 2, \ldots, 13$ និង $U_n < 0$ ចំពោះ $n = 14\ , 15, \ldots$ ។

ដូចនេះ S_n អតិបរមានៅពេលដែល $n = 13$ និង $S_{13} = \dfrac{51 + (55 - 4 \cdot 13)}{2} \times 13 = 351$ ។

លំហាត់គំរូ 2 គេរៀបឥដ្ឋទីធ្លាមុខផ្ទះមួយដែលមានរាងជាចតុកោណព្នាយ (មើលរូប)។ ទីធ្លានោះមានឥដ្ឋ 18 ជួរ ។ ជួរទី 1 មានឥដ្ឋ 14 ដុំ ហើយជួរបន្តបន្ទាប់មានចំនួនឥដ្ឋលើសជួរមុន 1 ដុំ រហូតដល់ជួរទី 18 មាន 31 ដុំ ។ តើគេត្រូវចំណាយឥដ្ឋប៉ុន្មានដុំដើម្បីរៀបឱ្យពេញទីធ្លានោះ ?

ចម្លើយ ចំនួនឥដ្ឋតាមជួរដែលរៀបទីធ្លាមុខផ្ទះនេះបង្កើតបានជាស្វ៊ីតនព្វន្តដែលមានតួទី 1 គឺ $U_1 = 14\ , U_{18} = 31$ និងមាន 18 ជួរ ។



តាមរូបមន្តផលបូកតួនៃស្វ៊ីតនព្វន្ត គេបាន

$S_{18} = \dfrac{(U_1 + U_{18}) \times 18}{2} = \dfrac{(14 + 31) \times 18}{2} = 405$ ។

ដូចនេះ ការរៀបឥដ្ឋទីធ្លាមុខផ្ទះត្រូវចំណាយឥដ្ឋអស់ 405 ដុំ ។

លំហាត់គំរូ 3 គេមានការងាររដូវក្តៅ 2 សម្រាប់រយៈពេល 3 ខែឬ 12 សប្តាហ៍ ។

ការងារ A ទទួលបានប្រាក់បៀវត្ស 400 000 រៀលក្នុងមួយខែ ហើយដំឡើង 100 000 រៀលរៀងរាល់ខែ ។ ការងារ B ទទួលបានប្រាក់បៀវត្ស 100 000 រៀលក្នុងមួយសប្តាហ៍ ហើយដំឡើង 5 000 រៀលរៀងរាល់សប្តាហ៍ ។ តើគេគួរជ្រើសរើសយកការងារណាមួយប្រសើរជាង ?

ចម្លើយ ចំពោះការងារ A ប្រាក់បៀវត្សសរុបសម្រាប់រយៈពេល 3 ខែគឺ

$S_A = 400,000 + 500,000 + 600,000 = 1,500,000$ រៀល

ការងារ B ប្រាក់បៀវត្សគឺ $100\,000\ ,\ 150\,000\ ,\ 200\,000, \ldots, U_{12}$ ។

នេះជាស្វ៊ីតនព្វន្តដែលមានតួទី 1 គឺ $U_1 = 100\,000$ និងផលសងរួម $d = 5\,000$ តាមរូបមន្តប្រាក់បៀវត្សនៅសប្តាហ៍ទី 12 គឺ $U_{12} = U_1 + (12-1)d = 100\,000 + 11 \times 5\,000 = 155\,000$ ។

ចំពោះការងារ B ប្រាក់បៀវត្សសរុបសម្រាប់រយៈពេល 3 ខែ ឬ 12 សប្តាហ៍គឺ

$$S_B = 100\,000 + 105\,000 + 101\,000 + \ldots + 155\,000$$

$$= \frac{(100\,000 + 155\,000) \times 12}{2} = 255\,000 \times 6 = 153\,000 \text{ រៀល ។}$$

ប្រាក់បានពីការងារ B ច្រើនជាងបានពីការងារ A ។ ដូចនេះ គេរើសយកការងារ B ។

ប្រតិបត្តិ 1. ក. គណនាផលបូក $(-6)+(-1)+4+9+\ldots+64$ ។

ខ. គណនាផលបូក 25 តួដំបូងនៃស្វ៊ីតនព្វន្ត 2, 9, 16, 25, ...

2. គេមានការងាររដូវក្តៅ 2 សម្រាប់រយៈពេល 3 ខែឬ 12 សប្តាហ៍ ។ ការងារ A ទទួលបានប្រាក់បៀវត្ស 325 000 រៀលក្នុងមួយខែ ហើយដំឡើង 100 000 រៀលរៀងរាល់ខែ ។ ការងារ B ទទួលបានប្រាក់បៀវត្ស 80000 រៀលក្នុងមួយសប្តាហ៍ ហើយដំឡើង 3000 រៀលរៀងរាល់សប្តាហ៍ ។

តើគេគួរជ្រើសរើសយកការងារណាមួយប្រសើរជាង ?

លំហាត់

1. សរសេររូបមន្តតួទី n នៃស្វ៊ីតនព្វន្តខាងក្រោម ៖

ក. 4, 15, 26, 37, ... ខ. 5, 1, –3, –7, –11, ...

គ. –2, –9, –16, –23, ... ឃ. 7, 12, 17, 22, 27, ... ។

2. សរសេរប្រាំតួដំបូងនៃស្វ៊ីតនព្វន្តដែលកំណត់ដោយតួ ៖

ក. $U_1 = 3$, $U_2 = 10$ ខ. $U_n = -7 + 3n$

3. គេមានស្វ៊ីតនព្វន្ត –8, –3, 2, 7, ... ។

ក. គណនា U_{17} និង U_{43} ខ. តើតួទីប៉ុន្មាននៃស្វ៊ីតស្មើនឹង 322 ។

4. កំណត់ចំនួនតួនៃស្វ៊ីតនព្វន្តខាងក្រោម ៖

ក. 18, 13, 8, ..., –102 ខ. –9, –4, 1, ..., 171 ។

5. ក្នុងចំណោមស្វ៊ីតខាងក្រោម តើស្វ៊ីតណាជាស្វ៊ីតនព្វន្ត ?

ក. $U_n = 13 + 6(n-1)$ ខ. $U_0 = 3$, $U_{n+1} = U_n - \frac{1}{4}U_n$ ។

6. គេឱ្យ (U_n) ជាស្វ៊ីតនព្វន្ត បើគេដឹងថា

ក. $U_{35} = 9$, $U_{45} = 17$ ។ គណនា U_{40} ។

ខ. $U_7 = \frac{7}{2}$, $U_{13} = \frac{13}{2}$ ។ គណនា U_0 ។

គ. $U_2 = -12$, $S_{12} = 18$ ។ គណនា U_1 , d និង U_6 ។

7. គេឱ្យស្វ៊ីតនព្វន្ត 2, 7, 12, ... និងស្វ៊ីតនព្វន្ត 2, 5, 8, ... ។
តើក្នុងចំណោម 121 តួនៃស្វ៊ីតទាំងពីរនេះមានប៉ុន្មានតួដែលមានតម្លៃស្មើៗគ្នា ?

8. បង្ហាញថាស្វ៊ីត (U_n) ដែលមានតួទី n កំណត់ដោយ $U_n = \frac{2n+3}{4}$ ជាស្វ៊ីតនព្វន្តកើន ។

9. គេឱ្យប្រាំចំនួនជាស្វ៊ីតនព្វន្ត ។ គណនាចំនួនទាំងនោះបើគេដឹងថាផលបូកវាស្មើនឹង 125 ហើយផលបូកពីរតួដំបូងស្មើនឹង 38 ។

10. បើផលបូក 9 តួដំបូងនៃស្វ៊ីតនព្វន្តស្មើនឹង 162 ហើយផលបូក 12 តួដំបូងនៃស្វ៊ីតនព្វន្តស្មើនឹង 288 ។ គណនាផលបូក 30 តួដំបូងនៃស្វ៊ីតនព្វន្ត ។

11. រកបីចំនួនតគ្នាជាស្វ៊ីតនព្វន្តដោយដឹងថាផលបូកនៃបីចំនួននេះស្មើនឹង 36 និងផលគុណវាស្មើនឹង 1428 ។

12. គណនាផលបូកស្វ៊ីតនព្វន្តខាងក្រោម :

ក. $2+4+6+\ldots+146$

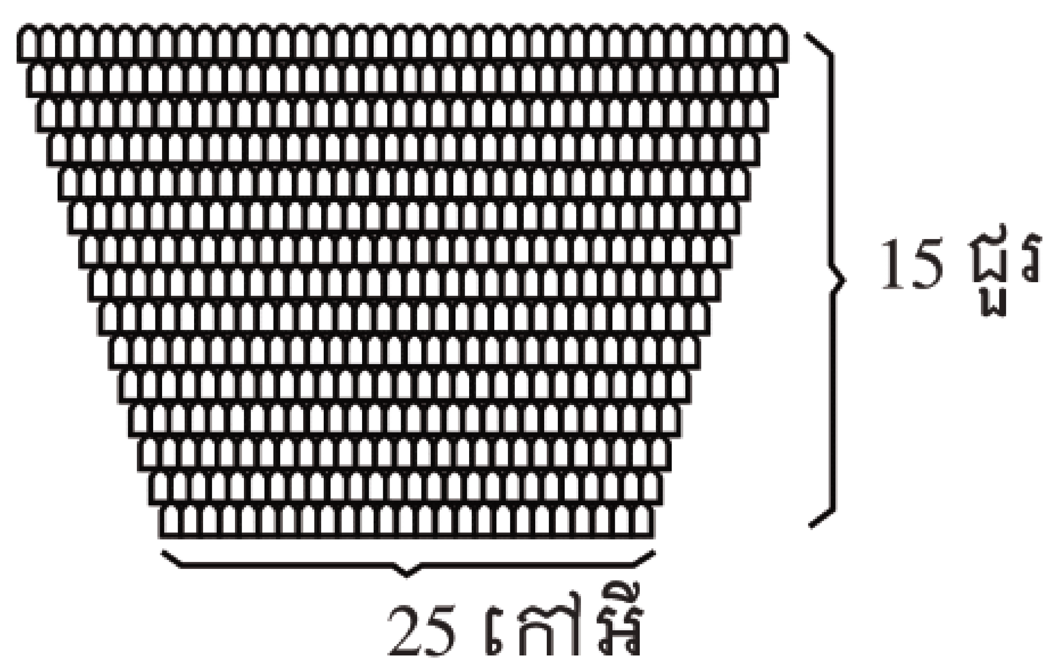
ខ. $100+95+90+85+\ldots-20$ ។

គ. $-193-189-185-\ldots-21-17$

ឃ. $5\frac{1}{4}+4\frac{1}{2}+3\frac{3}{4}+\ldots-3$ ។

13. អ្នកជិះកង់ម្នាក់ធ្វើដំណើរតាមផ្លូវ A បានចម្ងាយ 15 គីឡូម៉ែតក្នុង 1 ថ្ងៃ ។ ប្រាំបីថ្ងៃក្រោយមក ទើបអ្នកជិះកង់ទីពីរចាប់ផ្ដើមធ្វើដំណើរតាមផ្លូវ A ដូចគ្នាដោយថ្ងៃទីមួយ គាត់ជិះកង់បានចម្ងាយ 14 គីឡូម៉ែតក្នុង 1 ថ្ងៃ ហើយថ្ងៃបន្តបន្ទាប់មកទៀតគាត់ត្រូវជិះកើនបានចម្ងាយ 2 គីឡូម៉ែតក្នុង 1 ថ្ងៃជារៀងរាល់ថ្ងៃដើម្បីឱ្យទាន់អ្នកជិះកង់ទីមួយ A ។ តើអ្នកជិះកង់ទីពីរត្រូវចំណាយរយៈពេលអស់ប៉ុន្មានថ្ងៃ ដើម្បីជិះទៅទាន់អ្នកជិះកង់ទីមួយ ?

14. សាលប្រជុំមួយរាងចតុកោណព្នាយ ហើយតាមជ្រុងទ្រេតនៃសាលប្រជុំនោះ គេរៀបកៅអីជា 15 ជួរដែលជួរមុខគេបង្អស់រៀបបាន 25 កៅអី ហើយជួរទីពីររៀបបាន 27 កៅអី ជួរទីបីរៀបបាន 29 កៅអី ។ គេរៀបកៅអីតាមលំនាំខាងលើរហូតដល់ជួរខាងក្រោយ ។ គណនាកៅអីសម្រាប់អង្គុយទាំងអស់ដែលមានក្នុងសាលប្រជុំ ។



មេរៀនទី

3 ស៊ីតធរណីមាត្រ

1. និយមន័យនៃស៊ីតធរណីមាត្រ

ឧទាហរណ៍ គេមានស៊ីត 2, 6, 18, 54, 162,... ។ គេបាន $U_1 = 2$,

$U_2 = 6 = 2\times 3 = U_1\times 3$,

$U_3 = 18 = 6\times 3 = U_2\times 3$,

$U_4 = 54 = 18\times 3 = U_3\times 3$,

$U_5 = 162 = 54\times 3 = U_4\times 3$ ។

គេសង្កេតឃើញថា តួនីមួយៗនៃស៊ីត (ក្រៅពីតួទី 1) ស្មើនឹងតួមុនបន្ទាប់គុណនឹងចំនួនថេរមួយ (ស្មើនឹង 3)។

ស៊ីត 2, 6, 18, 54, 162, ... ហៅថា ស៊ីតធរណីមាត្រ ។

ចំនួនថេរ 3 ហៅថា ផលធៀបរួមនៃស៊ីតធរណីមាត្រ ។

វត្ថុបំណង

- កំណត់និយមន័យនិងផលធៀបរួមនៃស៊ីតធរណីមាត្រ
- កំណត់តួទី n នៃស៊ីតធរណីមាត្រ
- បង្ហាញផលគុណតួស្មើចម្ងាយពីតួចុង
- គណនាផលបូកតួនៃស៊ីតធរណីមាត្រ
- គណនាផលបូកតួនៃស៊ីតធរណីមាត្រអនន្តតួ ។

ជាទូទៅ ផលធៀបរួមនៃស៊ីតធរណីមាត្រ តាងដោយ q ដែល $q\neq 0$ ។

គឺ $q = \dfrac{U_2}{U_1} = \dfrac{U_3}{U_2} = \dfrac{U_4}{U_3} = \ldots = \dfrac{U_{n+1}}{U_n}$ ។

និយមន័យ ស៊ីតធរណីមាត្រ គឺជាស៊ីតនៃចំនួនពិតដែលតួនីមួយៗ (ក្រៅពីតួទី 1)ស្មើនឹងតួមុនបន្ទាប់គុណនឹងចំនួនថេរ q ដែល $q\neq 0$ ។ ចំនួនថេរ q នេះហៅថាផលធៀបរួមនៃស៊ីតធរណីមាត្រ ។

2. តួទី n នៃស៊ីតធរណីមាត្រ

ឧទាហរណ៍ គេមានស៊ីត 2, 6, 18, 54, 162, ... ។

គេបាន $U_1 = 2$, $U_2 = 6 = 2\times 3 = U_1 \times 3$, $U_3 = 18 = 6\times 3 = U_2\times 3$, $U_4 = 54 = 18\times 3 = U_3\times 3$, $U_5 = 162 = 54\times 3 = U_4\times 3$, ..., $U_n = U_{n-1}\times 3$ ។

គេសង្កេតឃើញថា តួនីមួយៗនៃស៊ីត (ក្រៅពីតួទី 1) ស្មើនឹងតួមុនបន្ទាប់គុណនឹងចំនួនថេរមួយ (ស្មើនឹង 3)។ ចំនួន 3 ហៅថាផលធៀបរួមនៃស៊ីត។

ដូចនេះ ស៊ីត 2, 6, 18, 54, 162, ... ហៅថា ស៊ីតធរណីមាត្រដែលមានផលធៀបរួមស្មើនឹង 3 ។

រូបមន្តតួទី n នៃស៊ីតធរណីមាត្រកំណត់ដោយ : $U_n = U_1\times q^{n-1}$ ។

លំហាត់គំរូ 1 គេមានស៊ីតធរណីមាត្រ 6, 12, 24, 48, ... ។

ក. គណនាតួទី 14

ខ. តើចំនួន 384 ជាតួទីប៉ុន្មាននៃស៊ីត ?

ចម្លើយ តាងតួទីមួយ $U_1 = 6$ តួទីពីរ $U_2 = 12$ គេបានផលធៀបរួម $q = \frac{U_2}{U_1} = \frac{12}{6} = 2$ ។

ក. តួទី 14 នៃស៊ីតត្រូវនឹង U_{14}

តាមរូបមន្ត គេបាន $U_n = 6\times 2^{n-1}$ នោះ $U_{14} = 6\times 2^{13} = 6\times 8192 = 49152$ ។

ដូចនេះ តួទី 14 គឺ $U_{14} = 49152$ ។

ខ. តាមរូបមន្ត $U_n = 6\times 2^{n-1}$ ដោយ $U_n = 384$

គេបាន $384 = 6\times 2^{n-1}$, $64 = 2^{n-1}$, $2^6 = 2^{n-1}$, $6 = n-1 \Rightarrow n = 7$ ។

ដូចនេះ ចំនួន 384 ជាតួទី 7 នៃស៊ីត។

លំហាត់គំរូ 2 ប្រជាជននៅទីក្រុងមួយមានចំនួន 2 លាននាក់ក្នុងឆ្នាំ 2000 ហើយមានកំណើន 4% ក្នុងមួយឆ្នាំ។ បង្ហាញថាចំនួនប្រជាជនប្រចាំឆ្នាំបង្កើតបានជាស៊ីតធរណីមាត្រ និងព្យាករទុកនូវចំនួនប្រជាជនក្នុងឆ្នាំ 2009 ។

ចម្លើយ ប្រជាជនក្នុងឆ្នាំ 2000 គឺ $U_1 = 2$ លាននាក់ ។ ប្រជាជនក្នុងឆ្នាំ 2001 នឹងមាន $2 + 2(0.04) = 2(1.04)$ លាននាក់ ប្រជាជនក្នុងឆ្នាំ 2002 គឺ $U_3 = 2(1.04)^2$ លាននាក់ ប្រជាជនក្នុងឆ្នាំ 2003 នឹងមាន $U_4 = 2 \times (1.04)^3$ លាននាក់

....

ប្រជាជនក្នុងឆ្នាំ 2009 នឹងមាន

$U_{10} = 2 \times (1.04)^9 = 2.846\,624$ លាននាក់ ។

ប្រតិបត្តិ

1. គេមានស្វ៊ីតធរណីមាត្រ 3, 12, 48, 192, ... ។

   ក. គណនាតួទី 9 ខ. តើចំនួន 12 288 ជាតួទីប៉ុន្មាននៃស្វ៊ីត ?

2. គ្រួសារមួយសម្រេចចិត្តបើកគណនីសន្សំប្រាក់ជាមុនសម្រាប់ការសិក្សារបស់កូនគាត់ ។ នៅពេលថ្ងៃចាប់កំណើតកូនរបស់គាត់ គាត់បានយកប្រាក់ចំនួន 100 000 រៀលទៅផ្ញើនៅធនាគារដោយបានទទួលអត្រាការប្រាក់សមាស 6 % ក្នុងមួយឆ្នាំ ។ ធនាគារទូទាត់អត្រាការប្រាក់មួយឆ្នាំម្តង ។

   ក. កំណត់ចំនួនប្រាក់សរុបនៅរាល់ចុងឆ្នាំនីមួយៗនៃបួនឆ្នាំដំបូង និងកំណត់ចំនួនប្រាក់សរុបនៅចុងឆ្នាំទី n ។

   ខ. កំណត់ចំនួនប្រាក់សរុបនៅចុងឆ្នាំទី 21 ។

3. ផលគុណតួស្មើចម្ងាយពីតួចុង

ឧទាហរណ៍ 1 គេមានស្វ៊ីតធរណីមាត្រ $U_1, U_2, U_3, U_4, U_5, U_6$ ។ U_1 និង U_6 ហៅថាតួចុង U_2 និង U_5 ហើយ U_3 និង U_4 ហៅថាតួនៅស្មើចម្ងាយពីតួចុង ។

បង្ហាញថា $U_1 \times U_6 = U_2 \times U_5 = U_3 \times U_4$ ។

ចម្លើយ តាមរូបមន្តតួទី n នៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រ : $U_n = U_1 \times q^{n-1}$

គេបាន $U_1 \times U_6 = U_1 \times U_1 \times q^{6-1} = U_1^2 \times q^5 \quad (1)$

$U_2 \times U_5 = U_1 \times q \times U_1 \times q^{5-1} = U_1^2 \times q^5 \quad (2)$

$U_3 \times U_4 = U_1 \times q^{3-1} \times U_1 \times q^{4-1} = U_1^2 \times q^5 \quad (3)$

តាម (1) , (2) និង (3) គេបាន $U_1 \times U_6 = U_2 \times U_5 = U_3 \times U_4$ ។

បើ $U_1, U_2, U_3, \ldots, U_p, \ldots, U_{n-p+1}, \ldots, U_{n-2}, U_{n-1}, U_n$ ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ ។

គេបាន $U_1, U_2, U_3, \ldots, U_p, \ldots, U_{n-p+1}, \ldots, U_{n-2}, U_{n-1}, U_n$

តួស្មើចម្ងាយពីតួចុង

តួស្មើចម្ងាយពីតួចុង

តួស្មើចម្ងាយពីតួចុង

តួចុង

នោះ $U_1 \times U_n = U_2 \times U_{n-1} = U_3 \times U_{n-2} = \ldots = U_p \times U_{n-p+1}$ ។

ជាទូទៅ ផលគុណតួស្មើចម្ងាយពីតួចុងស្មើនឹងផលគុណតួចុងទាំងពីរ ។
គេកំណត់សរសេរ $U_p \times U_{n-p+1} = U_1 \times U_n$ ។

ករណីពិសេស បីចំនួនតគ្នា a, b និង c ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ សមមូល $\frac{b}{a} = \frac{c}{b} = q$ ឬ $a \times c = b^2$ ឬ ($b = \sqrt{a \times c}$ ហៅថា មធ្យមធរណីមាត្រនៃ a និង c) ។

លំហាត់គំរូ គេឱ្យបីចំនួនតគ្នា a, b និង c ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ ។ បង្ហាញថាបីចំនួនតគ្នា a^2, b^2 និង c^2 ក៏ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រដែរ ។

ចម្លើយ បីចំនួនតគ្នា a, b និង c ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រនោះ $b^2 = a \times c$ ។

លើកអង្គទាំងពីរជាការេ គេបាន $(b^2)^2 = (a \times c)^2 = a^2 \times c^2$ ។ ដូចនេះបីចំនួនតគ្នា a^2, b^2 និង c^2 ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ ។

ប្រតិបត្តិ ក. តើគេត្រូវបន្ថែមចំនួនប៉ុន្មានទៅលើចំនួន 3 , 24 , 94 ដើម្បីឱ្យបីចំនួនតគ្នាជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ ?

ខ. រកមធ្យមធរណីមាត្រនៃពីរចំនួន 4 និង 9 ។

គ. គេឱ្យស្វ៊ីតធរណីមាត្រមួយដែល $U_3 = 4$ និង $U_5 = 36$ ។
គណនា U_1 និងផលធៀបរួម q ។

4. ផលបូកតួនៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រ

ឧទាហរណ៍ 1 គណនាផលបូក 7 តួដំបូងនៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រ 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64 ។

ចម្លើយ តាង S ជាផលបូកស្វ៊ីតធរណីមាត្រដែលមានផលធៀបរួមស្មើនឹង 2 គេបាន

$S = 1+2+4+8+16+32+64 \qquad (1)$

គុណអង្គទាំងពីរនៃ (1) នឹងផលធៀបរួមស្មើ 2 គេបាន

$2S = 2+4+8+16+32+64+128 \qquad (2)$

យក $(2)-(1)$ គេបាន

$2S - S = (2+4+8+16+32+64+128)-(1+2+4+8+16+32+64)$

$S = 128 - 1 = 127$ ។

គេអាចប្រើរបៀបក្នុងឧទាហរណ៍ 1 កំណត់រូបមន្តផលបូក n តួដំបូងនៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រ

បើគេយក S_n ជាផលបូក n តួដំបូងនៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រដែលមានតួទីមួយ U_1 និងផលធៀបរួម q នោះគេបាន $S_n = U_1 + U_2 + U_3 + \ldots + U_n$ ។

$S_n = U_1 + U_1q + U_1q^2 + \ldots + U_1q^{n-1} \qquad (1)$

គុណអង្គទាំងពីរនៃ (1) នឹងផលធៀបរួម q គេបាន

$qS_n = U_1q + U_1q^2 + U_1q^3 + \ldots + U_1q^n \qquad (2)$

យក $(2)-(1)$ គេបាន

$qS_n - S_n = (U_1q + U_1q^2 + U_1q^3 + \ldots + U_1q^n) - (U_1 + U_1q + U_1q^2 + \ldots + U_1q^{n-1})$

$\Leftrightarrow (q-1)S_n = U_1q^n - U_1 \Rightarrow (q-1)S_n = U_1(q^n - 1)$

បើ $q \neq 1$ គេបាន $S_n = \dfrac{U_1(q^n-1)}{q-1}$ ។

> **ជាទូទៅ** ផលបូក n តួដំបូងនៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រដែលមានតួទីមួយ U_1 និងផលធៀបរួម q ដែល $q \neq 1$ ស្មើនឹង $S_n = \dfrac{U_1(q^n-1)}{q-1}$ ។

លំហាត់គំរូ 1 ក. គណនាផលបូក 7 តួដំបូងនៃស្វ៊ីតធរីណមាត្រ $5+10+20+40+\ldots$ ។

ខ. គណនាផលបូកតួនៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រ $2+6+18+\ldots+1458$ ។

ចម្លើយ ក. តាង $S = 5+10+20+40+\ldots$ ជាផលបូកតួនៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រដែលមានតួទីមួយគឺ

$U_1 = 5$ ផលធៀបរួម $q = 2$ ។ តាមរូបមន្ត $S_n = \dfrac{U_1(q^n - 1)}{q - 1}$

បើ $n = 7$ គេបាន $S_7 = \dfrac{5(2^7 - 1)}{2 - 1} = 5(128 - 1) = 635$ ។

ដូចនេះ ផលបូក 7 តួដំបូងនៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រគឺ 635 ។

ខ. តាង $S = 2 + 6 + 18 + \ldots + 1458$ ដែល $U_1 = 2$, $U_n = 1458$ និងផលធៀបរួម $q = 3$ ។

តាមរូបមន្តតួទី n គេបាន

$U_n = U_1 q^{n-1}$, $1458 = 2 \times 3^{n-1}$, $729 = 3^{n-1}$, $3^6 = 3^{n-1}$, $6 = n - 1 \Rightarrow 7 = n$

នោះ S ជាផលបូក 7 តួដំបូងនៃស្វ៊ីតមធរណីមាត្រ ។ តាមរូបមន្ត $S_n = \dfrac{U_1(q^n - 1)}{q - 1}$

គេបាន $S_7 = \dfrac{2(3^7 - 1)}{3 - 1} = \dfrac{2(2187 - 1)}{2} = 2186$ ។ ដូចនេះ $2 + 6 + 18 + \ldots + 1458 = 2186$ ។

លំហាត់គំរូ 2 ស្តេចឥណ្ឌាឈ្មោះស៊ីរ៉ាមបានបញ្ជាឱ្យជាងម្នាក់ធ្វើក្តារចត្រង្គ ហើយសន្យាថានឹងជូនរង្វាន់តាមតម្រូវការនៃជាងនោះចង់បាន ។ ពេលធ្វើរួច ជាងនោះស្នើសុំគ្រាប់ស្រូវទាំងអស់ដែលដាក់ក្នុងក្រឡាចត្រង្គទាំង 64 ហើយរបៀបដាក់មានដូចតទៅ ៖

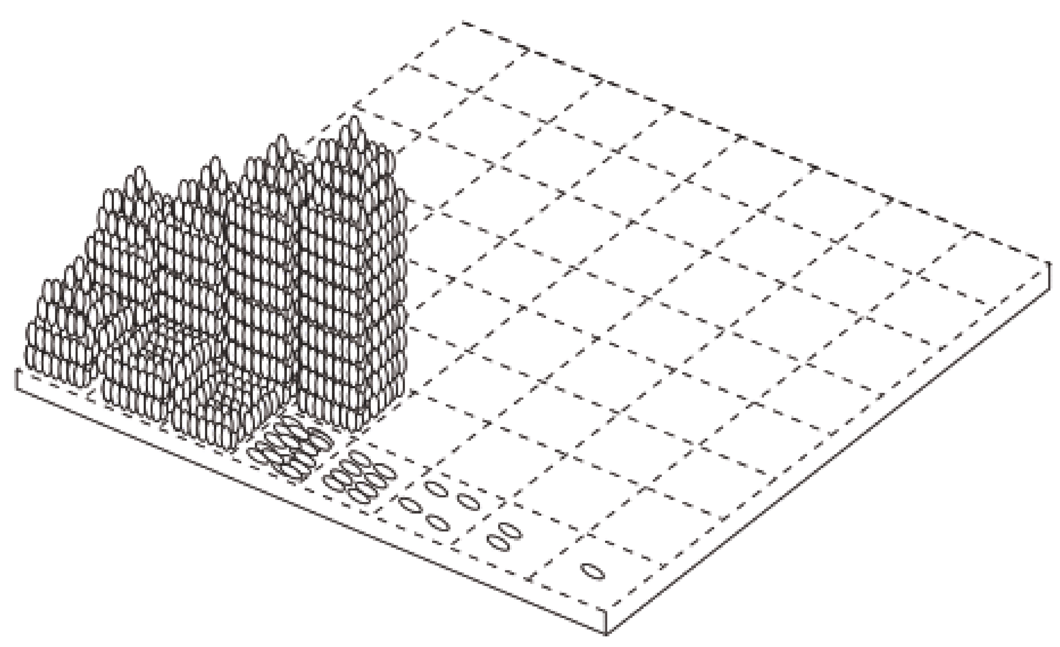
1 គ្រាប់ក្នុងក្រឡាទីមួយ 2 គ្រាប់ក្នុងក្រឡាទីពីរ 4 គ្រាប់ក្នុងក្រឡាទីបី 8 គ្រាប់ក្នុងក្រឡាទីបួន ,..., ចំនួនគ្រាប់ស្រូវក្នុងក្រឡាបន្ទាប់ស្មើនឹងចំនួនគ្រាប់ស្រូវក្រឡាមុនគុណនឹង 2 ។

គណនាផលបូកនៃគ្រាប់ស្រូវទាំងអស់ដែលត្រូវដាក់លើក្រឡាចត្រង្គទាំង 64 ក្រឡា ។

ចម្លើយ តាមបម្រាប់ចំនួនគ្រាប់ស្រូវដែលដាក់លើក្រឡាចត្រង្គទាំង 64 ក្រឡាបង្កើតបានជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ 1, 2, 4, 8,... ឬ $2^0, 2^1, 2^2, 2^3, \ldots$, ដែលមាន $U_1 = 1$ និងផលធៀបរួម $q = 2$ ។

តាមរូបមន្ត $S_n = \dfrac{U_1(q^n - 1)}{q - 1}$

គេបាន $S_{64} = \dfrac{1(2^{64} - 1)}{2 - 1} = 2^{64} - 1 = 18\ 446\ 744\ 073\ 709\ 551\ 615$ ។



ដូចនេះ ចំនួនគ្រាប់ស្រូវដែលដាក់លើក្រឡាចត្រង្គទាំង 64 ក្រឡាគឺ 18 446 744 073 709 551615 គ្រាប់ ។

គ្រាប់ស្រូវចំនួន 37000 គ្រាប់ប្រហែល 1 kg នោះស្រូវទម្ងន់ $1\text{t} \approx 37000000$ គ្រាប់ ។

ដូចនេះស្រូវដែលដាក់លើក្រឡាចត្រង្គទាំង 64 ក្រឡាប្រហែល $4986 \times 10^8\text{t}$ គេដឹងថាទិន្នផលស្រូវប្រចាំឆ្នាំបច្ចុប្បន្នរបស់កម្ពុជាប្រហែល $5 \times 10^6\text{t}$ ។

ប្រតិបត្តិ

1. គេមានស្វ៊ីតធរណីមាត្រ $6\ ;\ 3\ ;\ 1.5\ ;\ 0.75\ ;\ \dots$ ។ គណនា

   ក. តួទី 7　　　　ខ. ផលបូក 7 តួដំបូងនៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រ ។

2. គណនា $S_n = 7 + 77 + 777 + 7777 + \dots + 77\dots + (777\dots)$ (n ដងលេខ 7) ។

3. លោក B បានដាក់ប្រាក់ 100 $ ទៅផ្ញើក្នុងគណនីសន្សំនៃធនាគារមួយដោយទទួលបានអត្រាការប្រាក់សមាស 10 % ក្នុងមួយឆ្នាំ។ ធនាគារទូទាត់អត្រាការប្រាក់មួយខែម្តង ។ ប្រាក់សរុបដែលលោក B ទទួលបាននៅចុងឆ្នាំទី 5 គឺ

   $A = 100\times\left(1+\frac{0.10}{12}\right)+100\times\left(1+\frac{0.10}{12}\right)^2+100\left(1+\frac{0.10}{12}\right)^3+\dots+100\left(1+\frac{0.10}{12}\right)^{60}$ ។

   គណនា A ។

4. ប៉ោលមួយយោលដំបូងបានប្រវែងធ្នូ 18cm និងយោលជាបន្តបន្ទាប់មកទៀតដោយម្តងៗមានប្រវែងធ្នូ $0.95cm$ នៃប្រវែងធ្នូមុន ។

   ក. កំណត់ប្រវែងធ្នូបន្ទាប់ពីយោលបាន 10 ដង ។

   ខ. ក្រោយពីយោលបាន 15 ដង ។ កំណត់ប្រវែងសរុបនៃការយោលនោះ ។

5. ស្វ៊ីតធរណីមាត្រអនន្តតួ

ឧទាហរណ៍ 1 ពិនិត្យស្វ៊ីតធរណីមាត្រអនន្តតួ

$18 + 1.8 + 0.18 + 0.018 + 0.0018 + 0.00018 + \dots$ ដែលមានតួទីមួយ $U_1 = 18$ និងផលធៀបរួម $q = \frac{1}{10}$ ។

គេបាន : $S_2 = 19.8$, $S_3 = 19.98$, $S_4 = 19.998$, $S_5 = 19.9998$, $S_6 = 19.99998,\dots,\ S_n = 19.999\dots998$ ។ ដូចនេះ S_n ខិតជិត 20 កាលណា n ខិតជិតអនន្ត ។

ពិនិត្យស្វ៊ីតធរណីមាត្រអនន្តតួទូទៅ $U_1 + U_1q + U_1q^2 + \dots + U_1q^{n-1} + \dots$ ដែលមានតួទីមួយ U_1 និងផលធៀបរួម q ។

គេបាន : $S_1 = U_1$

$S_2 = U_1 + U_1q$

$S_3 = U_1 + U_1q + U_1q^2$

$S_4 = U_1 + U_1q + U_1q^2 + U_1q^3$

$S_5 = U_1 + U_1q + U_1q^2 + U_1q^3 + U_1q^4$

....

$$S_n = U_1 + U_1 q + U_1 q^2 + U_1 q^3 + \dots + U_1 q^{n-1}$$

តែតាមរូបមន្តគេបាន $S_n = \dfrac{U_1(q^n - 1)}{q-1} = \dfrac{U_1 q^n}{q-1} - \dfrac{U_1}{q-1}$ បើ $q \neq 1$ ។

បើ $|q| < 1$ នោះ q^n កាន់តែតូចទៅៗកាលណាចំនួនតួ n កាន់តែធំទៅៗមានន័យថា

$q^n \to 0$ ពេល $n \to +\infty$ គេបាន $S_n = 0 - \dfrac{U_1}{q-1} = \dfrac{U_1}{1-q}$ ពេល $n \to +\infty$ ។

ដូចនេះ $S_n = \dfrac{U_1}{1-q}$ ។

ជាទូទៅ ផលបូកតួនៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រអនន្តតួ $U_1 + U_1 q + U_1 q^2 + \dots + U_1 q^{n-1} + \dots$ ដែល $|q| < 1$ កំណត់ដោយ $S_n = \dfrac{U_1}{1-q}$ ។

សម្គាល់ បើ $|q| \geq 1$ នោះ S_n មិនអាចកំណត់បាន ។

លំហាត់គំរូ 1 គណនាផលបូកតួនៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រអនន្តតួ $6 + 2 + \frac{2}{3} + \frac{2}{9} + \dots$ ។

ចម្លើយ $6 + 2 + \frac{2}{3} + \frac{2}{9} + \dots$ ជាផលបូកតួនៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រអនន្តតួដែលមាន $U_1 = 6$, $q = \frac{1}{3}$ ។

តាមរូបមន្ត $S_n = \dfrac{U_1}{1-q}$ គេបាន $S_n = \dfrac{6}{1-\frac{1}{3}} = 9$ ។

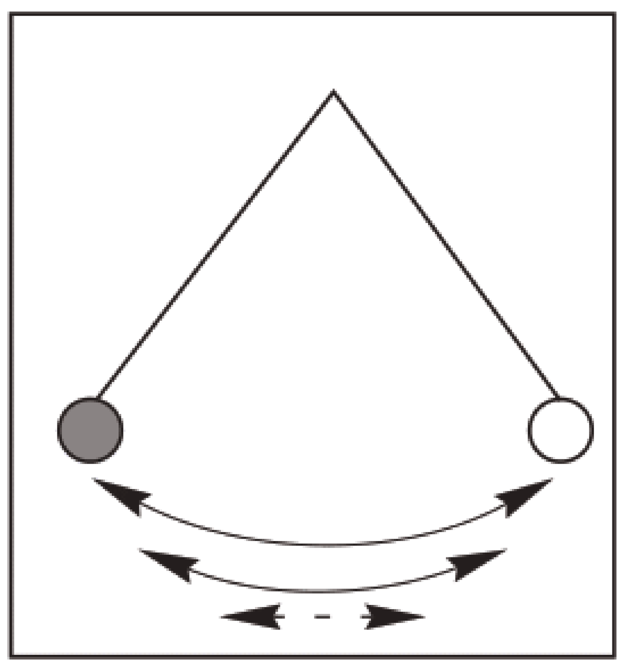
លំហាត់គំរូ 2 សរសេរចំនួនទសភាគខួប $4.\overline{57}$ ជាចំនួនសនិទានដែលមានទម្រង់ $\frac{a}{b}$ ។

ចម្លើយ $4.\overline{57} = 4 + 0.57 + 0.0057 + 0.000057 + \dots$ ចាប់ពីតួទីពីរទៅជាផលបូកនៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រអនន្តតួដែលមាន $U_1 = 0.57$, $q = \dfrac{1}{100} = 0.01$

តាមរូបមន្ត $S_n = \dfrac{U_1}{1-q}$ គេបាន $4.\overline{57} = 4 + \dfrac{0.57}{1-0.01} = 4 + \dfrac{0.57}{0.99} = 4 + \dfrac{57}{99} = \dfrac{453}{99}$ ។

ដូចនេះ $4.\overline{57} = \dfrac{453}{99}$ ។

លំហាត់គំរូ 3 គេយោលប៉ោលមួយ (ដូចរូបខាងស្តាំ) លើកដំបូងបានធ្នូមួយប្រវែង 24dm បន្ទាប់មកប្រវែងធ្នូថយចុះ 20 % ជាបន្តបន្ទាប់ ។ កំណត់ប្រវែងគន្លងសរុបនៃលំយោលប៉ោលចាប់ពីពេលដំបូងដល់ពេលវាឈប់ ។



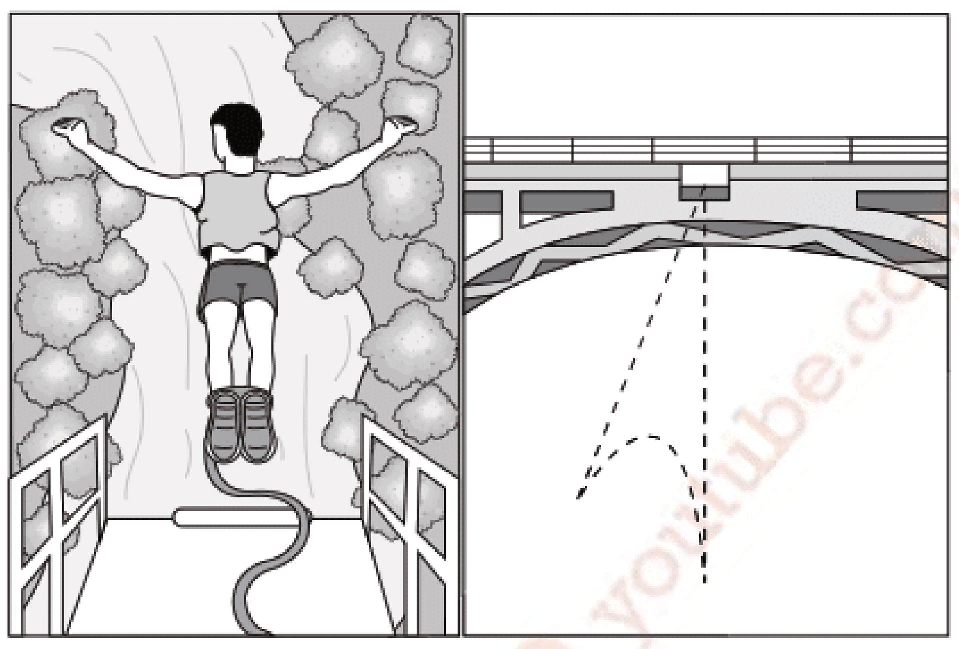
ចម្លើយ គេត្រូវកំណត់ផលបូកតួនៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រអនន្តតួដែលមានតួទី 1 គឺ $U_1 = 24$ ហើយផលធៀបរួម $q = 80\%$, $|q| < 1$ ។

តាមរូបមន្តស៊ីតអនន្តតួ $S_n = \dfrac{U_1}{1-q} = \dfrac{24}{1-0.8} = 120$ ។

ដូចនេះ ប្រវែងគន្លងសរុបនៃលំយោលប៉ោល ពីពេលយោលដំបូងដល់ពេលវាឈប់ស្មើនឹង $120dm$ ។

ប្រតិបត្តិ ក. គណនាផលបូកស៊ីតធរណីមាត្រអនន្តតួ $16 + 12 + 9 + \ldots$ ។

ខ. សរសេរចំនួនទសភាគខួប $0.\overline{235}$ ជាចំនួនសនិទាន ដែលមានទម្រង់ $\dfrac{a}{b}$ ។



គ. បុរសម្នាក់បានលោតពីលើស្ពានដោយចងខ្សែពួរទៅនឹងកជើងរបស់គាត់ប្រវែង 120m ហើយយឺតឡើងមកវិញបាន $\dfrac{1}{3}$ នៃប្រវែងខ្សែដើម ។ រាល់ពេលដែលយឺតឡើងវានឹងធ្លាក់ចុះមកវិញបាន $\dfrac{2}{3}$ នៃប្រវែងខ្សែដែលយឺតឡើង ។ គណនាប្រវែងខ្សែសរុបចាប់តាំងពីគាត់លោតចុះរហូតដល់ខ្សែមានលំនឹង ។

មេរៀនសង្ខេប

- ស៊ីតនៃចំនួនពិតគឺជាអនុគមន៍លេខដែលកំណត់ពី $\mathbb{N}$ ទៅ $\mathbb{R}$ ។
- ស៊ីតនព្វន្ត គឺជាស៊ីតនៃចំនួនពិតដែលមានតួនីមួយៗ (ក្រៅពីតួទី 1) ស្មើនឹងតួមុនបន្ទាប់បូកចំនួនថេរ d មួយ (ហៅថាផលសងរួម $d = U_{n+1} - U_n$) ។
- រូបមន្តតួទូទៅនៃស៊ីតនព្វន្ត $U_n = U_1 + (n-1)\times d$
- ផលបូក n តួនៃស៊ីតនព្វន្ត $S_n = \dfrac{(U_1 + U_n)\times n}{2}$ ។
- ស៊ីតធរណីមាត្រគឺជាស៊ីតចំនួនពិតដែលតួនីមួយៗ (ក្រៅពីតួទី 1) ស្មើនឹងតួមុនបន្ទាប់គុណនឹងចំនួនថេរ q ដែល $q \neq 0$ ។ ចំនួនថេរ q នេះហៅថាផលធៀបរួមស៊ីតធរណីមាត្រ ។
- រូបមន្តតួទូទៅ នៃស៊ីតធរណីមាត្រ $U_{n+1} = U_n \times q$, $U_n = U_1 \times q^{n-1}$
- ផលបូក n តួដំបូងនៃស៊ីតធរណីមាត្រ $S_n = \dfrac{U_1(q^n - 1)}{q-1}$ ដែល $q \neq 1$

ផលបូកស៊ីតធរណីមាត្រអនន្តតួ $S_n = \dfrac{U_1}{1-q}$ បើ $|q| < 1$ ។

លំហាត់

1. កំណត់ផលធៀបរួមនៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រ និងសរសេរបួនតួបន្ទាប់ទៀតនៃស្វ៊ីតនីមួយៗខាងក្រោម ៖

ក. $4, 20, 100, 500, \ldots$ ខ. $\sqrt{2}, 2, 2\sqrt{2}, 4, \ldots$ ។

2. គេមានស្វ៊ីតធរណីមាត្រ $2, 6, 18, 54, \ldots$ ។

ក. គណនាតួទី 7 ។

ខ. តើចំនួន 39366 ជាតួទីប៉ុន្មាននៃស្វ៊ីត ?

គ. គណនាផលបូក 15 តួដំបូងនៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រ ។

3. កំណត់ចំនួនតួនៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រខាងក្រោម ៖

ក. $1, 2, 4, 8, \ldots, 8192$ ខ. $20, 10, 5, \frac{5}{2}, \ldots, \frac{5}{256}$ ។

4. បង្ហាញថាស្វ៊ីតខាងក្រោមជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រដែលមានតួទី n កំណត់ដោយ

ក. $U_n = 7 \times (3)^{n-1}$ ខ. $U_{n+1} = \frac{1}{8} \times (4)^n$ ។

5. គេឱ្យ (U_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ បើគេដឹងថា ៖

ក. $U_3 = 18$, $U_7 = 1458$ ។ គណនា q និង U_{10} ។

ខ. $U_3 = 20$, $U_6 = 1280$ ។ គណនា q និង U_1 ។

គ. $U_1 = 3$, $S_3 = 21$ ។ គណនា q និង S_7 ។

6. គណនាផលបូកស្វ៊ីតធរណីមាត្រខាងក្រោម ៖

ក. $48 + 24 + 12 + \ldots + \frac{3}{8}$ ខ. $\frac{1}{3} + 1 + 3 + \ldots + 6561$ ។

គ. $9 - 6 + 4 - \ldots - \frac{128}{244}$ ឃ. $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^4} - \frac{1}{2^5} + \ldots - \frac{1}{2^{2n-1}} + \frac{1}{3^{2n}}$ ។

7. គណនាផលបូកស្វ៊ីតធរណីមាត្រអនន្តតួដែលមាន $U_2 = -9$ និង $U_5 = \frac{1}{3}$ ។

8. គណនាផលធៀបរួមនៃធរណីមាត្រអនន្តតួដែលមាន $U_1 = 5$ និង $S_\infty = 15$ ។

9. ផលបូកពីរតួដំបូងនៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រស្មើនឹង 9 និងផលបូកនៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រអនន្តតួស្មើនឹង 25 ។ គណនា q និង U_1 បើផលធៀបរួម $q > 0$ ។

10. សរសេរជាចំនួនសនិទានដែលមានទម្រង់ $\frac{a}{b}$ នូវចំនួនទសភាគខួបខាងក្រោម ៖

ក. $0 \cdot \overline{7}$ ខ. $2 \cdot \overline{34}$ គ. $0 \cdot \overline{452}$ ។

លំហាត់ជំពូក

1. តួទី 5 នៃស្វ៊ីតនព្វន្តស្មើ 14 និងតួទី 12 ស្មើ 35 ។ គណនាផលសងរួម តួទី 1 និងតួទី n ។
2. ផលបូកនៃ n តួដំបូងនៃស្វ៊ីតមួយកំណត់ដោយ $S_n = n^2 + n$ ។ គណនាតួទី 5 នៃស្វ៊ីត និងបង្ហាញថាតួនៃស្វ៊ីតនេះជាស្វ៊ីតនព្វន្ត ។
3. តួទី 3 នៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រស្មើ 3 និងតួទី 6 ស្មើ $\frac{3}{8}$ ។ គណនាផលធៀបរួម តួទី 1 និងផលបូក 8 តួដំបូង ។
4. គណនា a ដើម្បីឱ្យបីចំនួន $(a-3)$, $(a+1)$ និង $(4a-2)$ ជាបីតួតគ្នានៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រ ។
5. គេឱ្យបួនចំនួនជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ ។ គណនាតួទីពីរ និងទីបីនៃស្វ៊ីតបើគេដឹងថាតួទីមួយស្មើនឹង 6 ហើយតួទីបួនស្មើនឹង 162 ។
6. គេទិញផ្ទះមួយតម្លៃ 30000 ដុល្លារ ។ អ្នកទិញត្រូវបង់ប្រាក់ជា 6 ដំណាក់កាល ដែលបង្កើតបានជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រមានផលធៀបរួមស្មើ $\frac{9}{10}$ ។ កំណត់ប្រាក់ដែលត្រូវបង់តាមដំណាក់កាលនីមួយៗ ។
7. គេមានស្វ៊ីតនព្វន្ត (U_n) និង (V_n) កំណត់ដោយ $U_0 = 3$ និងផលសងរួមស្មើ 3 និង $V_0 = 3$ និងផលសងរួមស្មើ 2 ។

   ក. កំណត់ U_n និង V_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

   ខ. គេមានស្វ៊ីត (W_n) កំណត់ដោយ $W_n = \frac{U_n}{V_n}$ ។

      a . បង្ហាញថាស្វ៊ីត (W_n) ជាស្វ៊ីតកើន ។

      b . កំណត់ n ដើម្បីឱ្យ $W_n - W_{n-1} = \frac{1}{28}$ ។
8. កំណត់ផលសងរួម និងតួទីមួយ U_1 នៃស្វ៊ីតនព្វន្ត $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ កើន និងដឹងថា $\begin{cases} U_1^2 + U_2^2 + U_3^2 = 98 \\ U_1 - U_2 + U_3 = 4 \end{cases}$ ។

   គណនា U_{10} និងផលបូក 10 តួដំបូងនៃស្វ៊ីត ។
9. តួដំបូងនៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រស្មើ 3 ហើយមានផលធៀបរួម r ដែលតម្លៃដាច់ខាតនៃ r តូចជាង 1 ។ ផលបូក 3 តួដំបូងស្មើ $\frac{8}{9}$ នៃផលបូក 6 តួដំបូង ។ គណនាផលបូកស្វ៊ីតធរណីមាត្រអនន្តតួ ។
10. 1. ដោះស្រាយក្នុង $\mathbb{R}$ សមីការ : $3x^2 - 8x + 4 = 0 \quad (E)$ ។

    2. គេមាន $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រកើនដែលមាន U_3 និង U_4 នៃស្វ៊ីតនេះជាចម្លើយនៃសមីការ (E) ។

    ក. ទាញរកផលធៀបរួមនៃស្វ៊ីតនេះ ។ ខ. គណនាតួទីមួយ U_1 នៃស្វ៊ីត ។

ជំពូក 2

អនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែលនិងអនុគមន៍លោការីត

❶ អនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែល

❷ អនុគមន៍លោការីត

នៅក្នុងជំពូកនេះ គេចាប់ផ្តើមសិក្សាពីបញ្ញត្តិនៃអនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែល សង់ក្រាបតាងអនុគមន៍ ដោះស្រាយសមីការ និងវិសមីការអិចស្ប៉ូណង់ស្យែល ដែលជាមធ្យោបាយសំខាន់សម្រាប់សិក្សាពីបញ្ញត្តិ ក្រាប សមីការ និងវិសមីការលោការីត ។ បន្ទាប់ពីទទួលបានបញ្ញត្តិអនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែល និងលោការីត សិស្សអាចយកចំណេះដឹងនិងបំណិនទៅដោះស្រាយចំណោទបញ្ហាដែលទាក់ទងនឹងការប្រាក់ កំណើនភ្ញៀវទេសចរដែលចូលមកទស្សនាប្រាសាទអង្គរវត្ត កំណើនប្រជាពលរដ្ឋនិងសម្រាប់ដោះស្រាយចំណោទបញ្ហាផ្សេងទៀតដែលជួបប្រទះក្នុងជីវភាពប្រចាំថ្ងៃ ។

មេរៀនទី

1 អនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែល

1. ស្វ័យគុណ

វត្ថុបំណង

- គណនាឫសទី n
- សរសេររ៉ាឌីកាល់ជាអិចស្ប៉ូណង់ស្យែល
- សង់ក្រាបនៃអនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែល
- ដោះស្រាយសមីការនិងវិសមីការអិចស្ប៉ូណង់ស្យែល
- អនុវត្តន៍លើអនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែល

1.1 និយមន័យ

ស្វ័យគុណ n នៃចំនួន a ជាផលគុណនៃ n កត្តា ដែលកត្តានីមួយៗស្មើនឹង a ។

គេសរសេរ $\underbrace{a\cdot a\cdot a\ldots\cdot a}_{n \text{ កត្តា}} = a^n$

ដែល $n\in\mathbb{N}$

a^n អានថា a ស្វ័យគុណ n

n ហៅថានិទស្សន្តដែល n ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន

a ហៅថា គោលនៃស្វ័យគុណ ។

ឧទាហរណ៍ 1 សរសេរជាស្វ័យគុណគោល 2

ក. $16 = 2\times2\times2\times2 = 2^4$

ខ. $128 = 2\times2\times2\times2\times2\times2\times2 = 2^7$ ។

ឧទាហរណ៍ 2 សរសេរជាស្វ័យគុណគោល 3

ក. $27 = 3\times3\times3 = 3^3$

ខ. $243 = 3\times3\times3\times3\times3 = 3^5$ ។

ឧទាហរណ៍ 3 គណនា

ក. $\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \left(\frac{1}{2}\right)\times\left(\frac{1}{2}\right)\times\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{8}$

ខ. $5^3 = 5\times5\times5 = 125$

គ. $\underbrace{m\times m\times m\times\ldots\times m}_{20 \text{ កត្តា}} = m^{20}$

ឃ. $a\times a\times a\times a\times a = a^5$ ។

1.2 លក្ខណៈនៃស្វ័យគុណ

ក. ផលគុណនៃស្វ័យគុណគោលដូចគ្នា

គេមាន $3^2\times3^3 = 3\times3\times3\times3\times3 = 3^5$; $3^2\times3^3 = 3^{2+3} = 3^5$

យើងសង្កេតឃើញថា $3^2\times3^3 = 3^{2+3} = 3^5$ ។ គេទាញបាន $\boxed{a^m\times a^n = a^{m+n}}$ ។

ជាទូទៅ ផលគុណនៃស្វ័យគុណដែលមានគោលដូចគ្នា ជាស្វ័យគុណដែលនិទស្សន្តជាផលបូកនៃនិទស្សន្តរបស់វា ។

ឧទាហរណ៍ $8^3 \times 8^5 = 8^{3+5} = 8^8$; $a^2 \times a^3 = a^{2+3} = a^5$ ។

ខ. ស្វ័យគុណនៃស្វ័យគុណ

គេមាន $(3^4)^2 = 3^4 \times 3^4 = 3^{4+4} = 3^8$; $(3^4)^2 = 3^{4\times 2} = 3^8$

យើងសង្កេតឃើញថា $(3^4)^2 = 3^{4\times 2} = 3^8$ ។

គេទាញបាន $\boxed{(a^m)^n = a^{m\times n}}$ ។

ជាទូទៅ ស្វ័យគុណនៃស្វ័យគុណ ជាស្វ័យគុណដែលនិទស្សន្តជាផលគុណនៃនិទស្សន្តរបស់វា ។

ឧទាហរណ៍ $(8^7)^3 = 8^{7\times 3} = 8^{21}$; $(a^2)^3 = a^{2\times 3} = a^6$ ។

គ. ស្វ័យគុណនៃផលគុណ

គេមាន $(3\times 5)^2 = (3\times 5)\times(3\times 5) = 15\times 15 = 225$

$(3\times 5)^2 = 3^2\times 5^2 = 9\times 25 = 225$

យើងសង្កេតឃើញថា $(3\times 5)^2 = 3^2\times 5^2 = 225$ ។

គេទាញបាន $\boxed{(ab)^n = a^n \times b^n}$ ។

ជាទូទៅ ស្វ័យគុណនៃផលគុណដែលមានគោលខុសគ្នា ជាផលគុណនៃស្វ័យគុណ ។

ឧទាហរណ៍ $(5\times 7)^2 = 5^2\times 7^2 = 25\times 49 = 1225$; $(x\times y)^4 = x^4 y^4$ ។

ឃ. ស្វ័យគុណនៃផលចែក

គេមាន $\left(\frac{3}{2}\right)^4 = \frac{3\times 3\times 3\times 3}{2\times 2\times 2\times 2} = \frac{81}{16}$; $\left(\frac{3}{2}\right)^4 = \frac{3^4}{2^4} = \frac{81}{16}$

យើងសង្កេតឃើញថា $\left(\frac{3}{2}\right)^4 = \frac{3^4}{2^4} = \frac{81}{16}$ ។

គេទាញបាន $\boxed{\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}}$ $(b \neq 0)$ ។

ជាទូទៅ ស្វ័យគុណនៃផលចែកដែលមានគោលខុសគ្នា ជាផលចែកនៃស្វ័យគុណ ។

ឧទាហរណ៍ $\left(\frac{5}{7}\right)^2 = \frac{5^2}{7^2} = \frac{25}{49}$; $\left(\frac{x}{y}\right)^5 = \frac{x^5}{y^5}$ ។

ង. ផលចែកនៃស្វ័យគុណគោលដូចគ្នា

គេមាន $\frac{3^4}{3^2} = \frac{3\times3\times3\times3}{3\times3} = 3^2$; $\frac{3^4}{3^2} = 3^{4-2} = 3^2$

យើងសង្កេតឃើញថា $\frac{3^4}{3^2} = 3^{4-2} = 3^2$ ។

គេទាញបាន $\boxed{\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}}$. $(a\neq0)$ ។

ជាទូទៅ ផលចែកនៃស្វ័យគុណដែលមានគោលដូចគ្នា ជាស្វ័យគុណដែលមាននិទស្សន្តជាផលសងនៃនិទស្សន្តតំណាងចែក និងនិទស្សន្តតួចែករបស់វា ។

ឧទាហរណ៍ $\frac{8^7}{8^3} = 8^{7-3} = 8^4$ ។

ជាទូទៅ បើ a និង b ជាចំនួនពិត ហើយ m និង n ជាចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីប គេបាន

ក. $a^m\times a^n = a^{m+n}$ ខ. $(a^m)^n = a^{mn}$ គ. $(ab)^n = a^nb^n$

ឃ. $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$, $(b\neq0)$ ង. $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ $(a\neq0)$ ។

លំហាត់គំរូ សម្រួល ក. $(-2)^3(-2)^7$ ខ. $(3^5)^7$ គ. $(4x^a\cdot y^b)(x^2\cdot y^3)$

ឃ. $\left(\frac{x^2}{y^3}\right)^5$ ង. $\frac{7^6}{7^5}$ ច. $(5x^3y^5z^2)^4$ ។

ចម្លើយ ក. $(-2)^3(-2)^7 = (-2)^{3+7} = (-2)^{10} = 1024$ ខ. $(3^5)^7 = 3^{5\times7} = 3^{35}$

គ. $(4x^a\cdot y^b)(x^2\cdot y^3) = 4x^{a+2}y^{b+3}$ ឃ. $\left(\frac{x^2}{y^3}\right)^5 = \frac{(x^2)^5}{(y^3)^5} = \frac{x^{10}}{y^{15}}$

ង. $\frac{7^6}{7^5} = 7^{6-5} = 7$ ច. $(5x^3y^5z^2)^4 = 625x^{12}y^{20}z^8$ ។

ប្រតិបត្តិ គណនា ក. $m^2\times m^8$ ខ. $\frac{x^{11}}{x^9}$ គ. $4^2+\left(\frac{1}{2}\right)^4$

ឃ. $\left(\frac{m^3n^4}{m^2}\right)^2$ ង. $\left(\frac{4}{9}\right)^3\div\left(\frac{16}{25}\right)^2$ ច. $\frac{(a^5b^3)^2}{a^3b^2}$ ។

1.3 ស្វ័យគុណសូន្យនិងចម្រាស់នៃស្វ័យគុណ

ក. ស្វ័យគុណសូន្យ

គេមាន $\frac{5^3}{5^3} = \frac{5 \times 5 \times 5}{5 \times 5 \times 5} = 1$; $\frac{5^3}{5^3} = 5^{3-3} = 5^0$

គេសង្កេតឃើញថា $\frac{5^3}{5^3} = 5^0 = 1$ ។

គេមាន $\frac{a^4}{a^4} = \frac{a \times a \times a \times a}{a \times a \times a \times a} = 1$; $\frac{a^4}{a^4} = a^{4-4} = a^0$ ។

គេទាញបាន $\boxed{a^0 = 1}$, $(a \neq 0)$ ។

ឧទាហរណ៍ $5^0 = 1$; $(-5)^0 = 1$; $\left(\frac{3}{2}\right)^0 = 1$; $3^0 + (-3)^0 = 1 + 1 = 2$ ។

ខ. ចម្រាស់នៃស្វ័យគុណ

គេមាន $\frac{5^3}{5^5} = \frac{5 \times 5 \times 5}{5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5} = \frac{1}{5 \times 5} = \frac{1}{5^2}$; $\frac{5^3}{5^5} = 5^{3-5} = 5^{-2}$

គេសង្កេតឃើញថា $\frac{1}{5^2} = 5^{-2}$ ។

គេទាញបាន $\boxed{\frac{1}{a^n} = a^{-n}}$, $(a \neq 0)$ ។

គេមាន $3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$; $\frac{1}{3^{-2}} = \frac{1}{\frac{1}{3^2}} = 3^2$ ។

គេទាញបាន $\boxed{a^n = \frac{1}{a^{-n}}}$ ។

ជាទូទៅ ក. $a^0 = 1$, $(a \neq 0)$ ខ. $\frac{1}{a^n} = a^{-n}$, $(a \neq 0)$, $n \in \mathbb{N}$ ។

លំហាត់គំរូ គណនា

ក. -4^0 ខ. $(-4)^0$

គ. $x^5 \div x^{-1}$ ឃ. $(x^{-1}y^{-3})^{-1}$

ង. $(2^0 + 2^{-1}) \div 3^{-2}$ ច. $\left(\frac{a^2}{a^{-2}}\right)^{-2}$

ឆ. 4×2^n ជ. $\frac{2^m}{8}$ ។

ចម្លើយ គណនា ក. $-4^0 = -1$

ខ. $(-4)^0 = 1$

គ. $x^5 \div x^{-1} = x^5 \times x^1 = x^6$

ឃ. $(x^{-1}y^{-3})^{-1} = \dfrac{1}{x^{-1}y^{-3}} = xy^3$

ង. $(2^0 + 2^{-1}) \div 3^{-2} = \left(1 + \dfrac{1}{2}\right) \div \dfrac{1}{3^2}$

$$= \frac{3}{2} \div \frac{1}{9}$$

$$= \frac{3}{2} \times 9$$

$$= \frac{27}{2}$$

ច. $\left(\dfrac{a^2}{a^{-2}}\right)^{-2} = (a^2 \cdot a^2)^{-2}$

$$= (a^4)^{-2}$$

$$= \frac{1}{(a^4)^2}$$

$$= \frac{1}{a^8}$$

ឆ. $4 \times 2^n = 2^2 \times 2^n = 2^{n+2}$

ជ. $\dfrac{2^m}{8} = \dfrac{2^m}{2^3} = 2^{m-3}$ ។

ប្រតិបត្តិ គណនា ក. $(0.05)^0$

ខ. $(-7^2)^0$

គ. 5×8^0

ឃ. $\dfrac{(8^{2-2n})(16^{3-n})}{(4^{2n})^{-1}}$

ង. $2\left(\dfrac{4}{m}\right)^{-2}$

ច. $\left(\dfrac{6}{12m^{-3}}\right)^{-1}$

ឆ. $\dfrac{(2^0 + 2^{-1})}{3^{-2}}$

ជ. $\dfrac{x^{-3}y^4}{x^4y^{-3}}$

ឈ. $\dfrac{m^{-1} + n^{-1}}{m^{-1} - n^{-1}}$ ។

2. ឫសទី n

2.1 ឫសទី n ដែល n ជាចំនួនគត់គូនិងសេស

x ជាឫសការេនៃចំនួនវិជ្ជមាន a កាលណា $x^2 = a$ ។

$4^2 = 16$ គេថា 4 ជាឫសការេនៃ 16 ហើយ $(-4)^2 = 16$ គេថា -4 ជាឫសការេនៃ 16 ។

ហេតុនេះ 16 មានឫសការេពីរគឺ 4 និង -4 ហើយ 4 ជាឫសការេវិជ្ជមាននៃ 16 គេកំណត់សរសេរ $\sqrt{16} = 4$ រីឯឫសការេអវិជ្ជមាន គេកំណត់សរសេរ $-\sqrt{16} = -4$ ។

ជាទូទៅ ចំនួនពិតវិជ្ជមាន a មានឫសការេពីរគឺ $\sqrt{a}$ និង $-\sqrt{a}$ ។

ឧទាហរណ៍ ឫសការេប្រាកដនៃ 36 គឺ $\sqrt{36} = 6$ និង $-\sqrt{36} = -6$ ។

សម្គាល់ ចំនួនអវិជ្ជមានពុំមានឫសការេទេ ចំនួន 0 មានឫសការេតែមួយគឺ 0 ។

ឧទាហរណ៍ -9 ពុំមានឫសការេទេ ព្រោះ $3^2 \neq -9$, $(-3)^2 \neq -9$ ។

បើ x ជាឫសគូបនៃ a នោះ $x^3 = a$, $x = \sqrt[3]{a}$ ។

ក្នុងករណី $x = 2$ គេបាន $2^3 = 8$ គេថា 2 ជាឫសគូបនៃ 8 ។

ក្នុងករណី $x = -2$ គេបាន $(-2)^3 = -8$ គេថា -2 ជាឫសគូបនៃ -8 ។

យើងសង្កេតឃើញថា ទោះបីជាចំនួនអវិជ្ជមាន -8 ក៏មានឫសគូបរបស់វាដែរ

- ឫសគូបនៃចំនួនវិជ្ជមានជាចំនួនវិជ្ជមាន
- ឫសគូបនៃចំនួនអវិជ្ជមានជាចំនួនអវិជ្ជមាន ។

ជាទូទៅ ឫសគូបនៃចំនួនពិត a មានតែមួយគត់គឺ $\sqrt[3]{a}$ ។

ឧទាហរណ៍ ឫសគូបនៃ 27 គឺ $\sqrt[3]{27} = 3$ និង ឫសគូបនៃ -1 គឺ $\sqrt[3]{-1} = -1$ ។

ដូចគ្នាដែរ គេអាចគណនាឫសទី 4 ឫសទី 5 នៃ a គឺ

- បើ x ជាឫសទី 4 នៃចំនួនវិជ្ជមាន a នោះ $x^4 = a$; $x = \sqrt[4]{a}$ និង $x = -\sqrt[4]{a}$
- បើ x ជាឫសទី 5 នៃ a នោះ $x^5 = a$; $x = \sqrt[5]{a}$ ។

ឧទាហរណ៍ 1 យើងទាញបាន $\sqrt{a^2} = |a|$ ។

ឧទាហរណ៍ 2 $\sqrt[3]{2^3} = \sqrt[3]{8} = 2$; $\sqrt[3]{(-2)^3} = \sqrt[3]{-8} = -2$

យើងទាញបាន $\sqrt[3]{a^3} = a$ ។

ជាទូទៅ a ជាចំនួនពិត និង $n \ge 2$ ជាចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីបវិជ្ជមាន គេបាន

ក. $\sqrt[n]{a^n} = |a|$ បើ n ជាចំនួនគត់គូ ខ. $\sqrt[n]{a^n} = a$ បើ n ជាចំនួនគត់សេស ។

លំហាត់គំរូ គណនា ក. ឫសការេនៃ $\frac{9}{25}$ ខ. ឫសគូបនៃ $\sqrt[3]{-125}$; $-\sqrt[3]{-1}$

គ. $\sqrt[4]{81}$ ឃ. $\sqrt{(x-1)^2}$; $\sqrt[4]{81a^4}$ ។

ចម្លើយ ក. បើ x ជាឫសការេនៃ $\frac{9}{25}$ នោះ $x^2 = \frac{9}{25}$

គេបាន $x = \sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5}$; $x = -\sqrt{\frac{9}{25}} = -\frac{3}{5}$ ។

ខ. $\sqrt[3]{-125} = \sqrt[3]{(-5)^3} = -5$; $-\sqrt[3]{-1} = -\sqrt[3]{(-1)^3} = -(-1) = 1$ ។

គ. $\sqrt[4]{81} = \sqrt[4]{3^4} = 3$ ឃ. $\sqrt{(x-1)^2} = |x-1|$; $\sqrt[4]{81a^4} = \sqrt[4]{3^4a^4} = 3|a|$ ។

ប្រតិបត្តិ គណនា ក. $\sqrt[5]{-\frac{1}{32}}$ ខ. $\sqrt{x^2-6x+9}$ គ. $\sqrt[6]{(-10)^6}$

ឃ. $\sqrt[3]{-64x^3y^6}$ ង. $\sqrt[4]{16(x-2)^4}$ ច. $\sqrt[6]{(x+3)^6}$ ។

2.2 គុណកន្សោមរ៉ាឌីកាល់

ឧទាហរណ៍ សម្រួល $\sqrt[3]{27}\times\sqrt[3]{125}$ និង $\sqrt[3]{27\times 125}$ រួចប្រៀបធៀបចម្លើយ

គេមាន $\sqrt[3]{27}\times\sqrt[3]{125} = \sqrt[3]{3^3}\times\sqrt[3]{5^3} = 3\cdot 5 = 15$

និង $\sqrt[3]{27\times 125} = \sqrt[3]{3^3\times 5^3} = \sqrt[3]{(3\times 5)^3} = \sqrt[3]{15^3} = 15$ ។

គេសង្កេតឃើញថា $\sqrt[3]{27}\times\sqrt[3]{125} = \sqrt[3]{27\times 125} = 15$ ។

ជាទូទៅ $\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ $n\geq 2$ និងគ្រប់ចំនួនវិជ្ជមាន a និង b ។

សម្រាយបញ្ជាក់ បង្ហាញថា $\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$?

តាង $x = \sqrt[n]{a}$ គេបាន $a = x^n$; $y = \sqrt[n]{b}$ គេបាន $b = y^n$

នាំឱ្យ $x^ny^n = ab$ ឬ $(xy)^n = ab$ ឬ $xy = \sqrt[n]{ab}$ ។

ដូចនេះ $\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$ ។

ឧទាហរណ៍ $\sqrt{2}\cdot\sqrt{8} = \sqrt{2\cdot 8} = \sqrt{16} = \sqrt{4^2} = 4$ ។

2.3 ចែកកន្សោមរ៉ាឌីកាល់

ឧទាហរណ៍ គណនា $\sqrt{\frac{64}{9}}$ និង $\frac{\sqrt{64}}{\sqrt{9}}$ រួចប្រៀបធៀបចម្លើយ ។

គេបាន $\sqrt{\frac{64}{9}} = \sqrt{\left(\frac{8}{3}\right)^2} = \frac{8}{3}$; $\frac{\sqrt{64}}{\sqrt{9}} = \frac{\sqrt{8^2}}{\sqrt{3^2}} = \frac{8}{3}$

យើងសង្កេតឃើញថា $\sqrt{\frac{64}{9}} = \frac{\sqrt{64}}{\sqrt{9}} = \frac{8}{3}$ ។

ជាទូទៅ $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ $n\geq 2$ និង $a>0$, $b>0$ ។

សម្រាយបញ្ជាក់ បង្ហាញថា $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$ ។

តាង $x = \sqrt[n]{a}$ គេបាន $a = x^n$; $y = \sqrt[n]{b}$ គេបាន $b = y^n$

នាំឱ្យ $\dfrac{a}{b} = \dfrac{x^n}{y^n}$ ឬ $\dfrac{a}{b} = \left(\dfrac{x}{y}\right)^n$ ឬ $\dfrac{x}{y} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$ ។

ដូចនេះ $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$, $b \neq 0$ ។

ឧទាហរណ៍ $\dfrac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\dfrac{8}{2}} = \sqrt{4} = \sqrt{2^2} = 2$ ។

2.4 សរសេររ៉ាឌីកាល់ជាស្វ័យគុណសនិទាន

ដើម្បីពង្រីកគំនិតក្នុងការសិក្សាស្វ័យគុណ គេបង្កើតបន្ថែមនូវស្វ័យគុណសនិទាន ដូចជា $\sqrt{a}\cdot\sqrt{a}$ និង $a^{\frac{1}{2}}\cdot a^{\frac{1}{2}}$ តាមលក្ខណៈនៃស្វ័យគុណ $(a^m \times a^n = a^{m+n})$

គេបាន $a^{\frac{1}{2}}\cdot a^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} = a^1 = a$ ម្យ៉ាងទៀត $\sqrt{a}\cdot\sqrt{a} = \sqrt{a\cdot a} = \sqrt{a^2} = a$ ។

គេសង្កេតឃើញថា $a^{\frac{1}{2}}\cdot a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}\cdot\sqrt{a} = a$ មានន័យថា $\sqrt{a}$ កំណត់សរសេរដោយ $a^{\frac{1}{2}}$ ។

$\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[3]{a}$ និង $a^{\frac{1}{3}}\cdot a^{\frac{1}{3}}\cdot a^{\frac{1}{3}}$ តាមលក្ខណៈនៃស្វ័យគុណ

គេបាន $\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[3]{a} = \sqrt[3]{a^3} = a$; $a^{\frac{1}{3}}\cdot a^{\frac{1}{3}}\cdot a^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}} = a^1 = a$ ។

គេសង្កេតឃើញថា $a^{\frac{1}{3}}\cdot a^{\frac{1}{3}}\cdot a^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[3]{a} = a$ មានន័យថា $\sqrt[3]{a}$ កំណត់សរសេរដោយ $a^{\frac{1}{3}}$

ជាទូទៅ $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីប $n \geq 2$ និង $m \geq 1$, $a > 0$ ។

ឧទាហរណ៍ $\sqrt[6]{x} = x^{\frac{1}{6}}$; $27^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{27} = \sqrt[3]{3^3} = 3$ ។

2.5 គុណសន្ទស្សន៍រ៉ាឌីកាល់

ឧទាហរណ៍ សម្រួលកន្សោម $\sqrt[3]{\sqrt[5]{x}}$ ។

គេមាន $\sqrt[3]{\sqrt[5]{x}} = (\sqrt[5]{x})^{\frac{1}{3}} = \left(3^{\frac{1}{5}}\right)^{\frac{1}{3}} = x^{\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3}} = x^{\frac{1}{15}} = \sqrt[15]{x}$; $\sqrt[3]{\sqrt[5]{x}} = \sqrt[3\times 5]{x} = \sqrt[15]{x}$

គេសង្កេតឃើញថា $\sqrt[3]{\sqrt[5]{x}} = \sqrt[3\times 5]{x} = \sqrt[15]{x}$ ។

ជាទូទៅ $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីប $n \geq 2$ និង $k \geq 2$, $a > 0$ ។

សម្គាល់ $\sqrt[n]{a}$ ដែល n ជាសន្ទស្សន៍ ហើយ a ជារ៉ាឌីកង់ ។

សម្រាយបញ្ជាក់ បង្ហាញថា $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}$ ។

តាង $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = x$ គេបាន $\sqrt[k]{a} = x^n \Rightarrow a = (x^n)^k = x^{nk}$ ឬ $x = \sqrt[nk]{a}$ ។

ដូចនេះ $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}$ ។

ឧទាហរណ៍ $\sqrt{\sqrt[3]{64}} = \sqrt[6]{2^6} = 2$; $\sqrt{\sqrt[4]{6561}} = \sqrt[8]{3^8} = 3$ ។

2.6 សម្រួលសន្ទស្សន៍រ៉ាឌីកាល់

ឧទាហរណ៍ $\sqrt[4]{25} = \sqrt[4]{5^2} = 5^{\frac{2}{4}} = 5^{\frac{1}{2}} = \sqrt{5}$; $\sqrt[3]{\sqrt{27}} = \sqrt[6]{27} = (3^3)^{\frac{1}{6}} = \sqrt{3}$ ។

ជាទូទៅ $\sqrt[nk]{a^{mk}} = \sqrt[n]{a^m}$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីប $n \geq 2$ និង $k \geq 2$, $a > 0$ ។

សម្រាយបញ្ជាក់ បង្ហាញថា $\sqrt[nk]{a^{mk}} = \sqrt[n]{a^m}$?

តាង $x = \sqrt[nk]{a^{mk}}$ គេបាន $a^{mk} = x^{nk} \Rightarrow (a^m)^k = (x^n)^k$; $a^m = x^n$ ឬ $x = \sqrt[n]{a^m}$ ។

ដូចនេះ $\sqrt[nk]{a^{mk}} = \sqrt[n]{a^m}$ ។

ឧទាហរណ៍ $\sqrt[12]{7^6} + \sqrt{7} = 7^{\frac{6}{12}} + 7^{\frac{1}{2}} = 7^{\frac{1}{2}} + 7^{\frac{1}{2}} = 2(7)^{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{7}$ ។

លក្ខណៈឫសទី n : បើ $n \geq 2$, $m \geq 1$, $k \geq 2$ ជាចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីបវិជ្ជមាននិង a និង b ជាចំនួនវិជ្ជមាន គេបាន :

ក. $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$

ខ. $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$, $b \neq 0$

គ. $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$

ឃ. $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}$

ង. $\sqrt[nk]{a^{mk}} = \sqrt[n]{a^m}$ ។

លំហាត់គំរូ គណនា

ក. $\sqrt[3]{32}$ ខ. $\sqrt{2x^2 - 4x + 2}$ គ. $\sqrt[3]{18a^3} \cdot \sqrt[3]{4b^2}$ ឃ. $3\sqrt[3]{25} \cdot 2\sqrt[3]{5}$

ង. $\sqrt[3]{\frac{27}{125}}$ ច. $\sqrt{\frac{25}{x^2}}$ ឆ. $\frac{\sqrt{16a^3}}{\sqrt{b^4}}$ ជ. $\frac{\sqrt[3]{27x^5}}{\sqrt[3]{343y^3}}$ ។

ចម្លើយ ក. $\sqrt[3]{32} = \sqrt[3]{8 \times 4} = \sqrt[3]{2^3} \cdot \sqrt[3]{4} = 2\sqrt[3]{4}$ ។

ខ. $\sqrt{2x^2 - 4x + 2} = \sqrt{2(x-1)^2} = \sqrt{(x-1)^2} \cdot \sqrt{2} = |x-1|\sqrt{2}$ ។

គ. $\sqrt[3]{18a^3}\cdot\sqrt[3]{4b^2} = \sqrt[3]{18a^3\cdot 4b^2}$

$= \sqrt[3]{3^2\cdot 2\cdot a^3\cdot 2^2\cdot b^2}$

$= \sqrt[3]{3^2\cdot a^3\cdot 2^3\cdot b^2}$

$= 2a\sqrt[3]{9b^2}$ ។

ឃ. $3\sqrt[3]{25}\cdot 2\sqrt[3]{5} = 6\sqrt[3]{25\cdot 5} = 6\sqrt[3]{5^3} = 6\cdot 5 = 30$ ។

ង. $\sqrt[3]{\frac{27}{125}} = \frac{\sqrt[3]{27}}{\sqrt[3]{125}} = \frac{\sqrt[3]{3^3}}{\sqrt[3]{5^3}} = \frac{3}{5}$ ។

ច. $\sqrt{\frac{25}{x^2}} = \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{x^2}} = \frac{5}{|x|}$ ។

ឆ. $\frac{\sqrt{16a^3}}{\sqrt{b^4}} = \frac{\sqrt{16a^3}}{\sqrt{b^4}} = \frac{\sqrt{16a^2\cdot a}}{\sqrt{b^4}} = \frac{4|a|\sqrt{a}}{b^2}$ ។

ជ. $\frac{\sqrt[3]{27x^5}}{\sqrt[3]{343y^3}} = \frac{\sqrt[3]{27x^3x^2}}{\sqrt[3]{7^3y^3}} = \frac{3x\sqrt[3]{x^2}}{7y}$ ។

ប្រតិបត្តិ គណនា

ក. $\sqrt[3]{0.001}\cdot\sqrt[3]{125}$ ខ. $\sqrt[5]{x+2}\cdot\sqrt[5]{x-2}$ គ. $\sqrt[4]{\frac{y}{5}}\cdot\sqrt[4]{\frac{7}{x}}$ ឃ. $\sqrt[6]{512x^3y^{12}}$

ង. $\frac{\sqrt[3]{128}}{\sqrt[3]{2}}$ ច. $\frac{14\sqrt{128ab}}{2\sqrt{2}}$ ឆ. $\frac{\sqrt[3]{8x^3y}}{\sqrt[3]{27y^{-2}}}$ ជ. $\sqrt[3]{\frac{1715}{5}}$ ។

3. អនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែល

រដ្ឋមួយមានប្រជាជន 1 លាននាក់ ។ មួយទសវត្សរ៍ក្រោយមកប្រជាជនបានកើន 30 % ។ គំនិតខាងលើនេះ អាចឱ្យគេប៉ាន់ស្មានចំនួនប្រជាជននៃរដ្ឋនេះនៅទសវត្សរ៍ខាងមុខ តាមទំនាក់ទំនងស៊ីតធរណីមាត្រ ៖

តួទី 1 : $a_0 = 1$ ផលធៀបរួម $r = 30\,\% = 0.30$

បើ a_1 ជាចំនួនប្រជាជននៃ 1 ទសវត្សរ៍ក្រោយ

$a_1 = a_0 + a_0 r = a_0(1+r) = 1(1+0.3) = 1.3$ ។

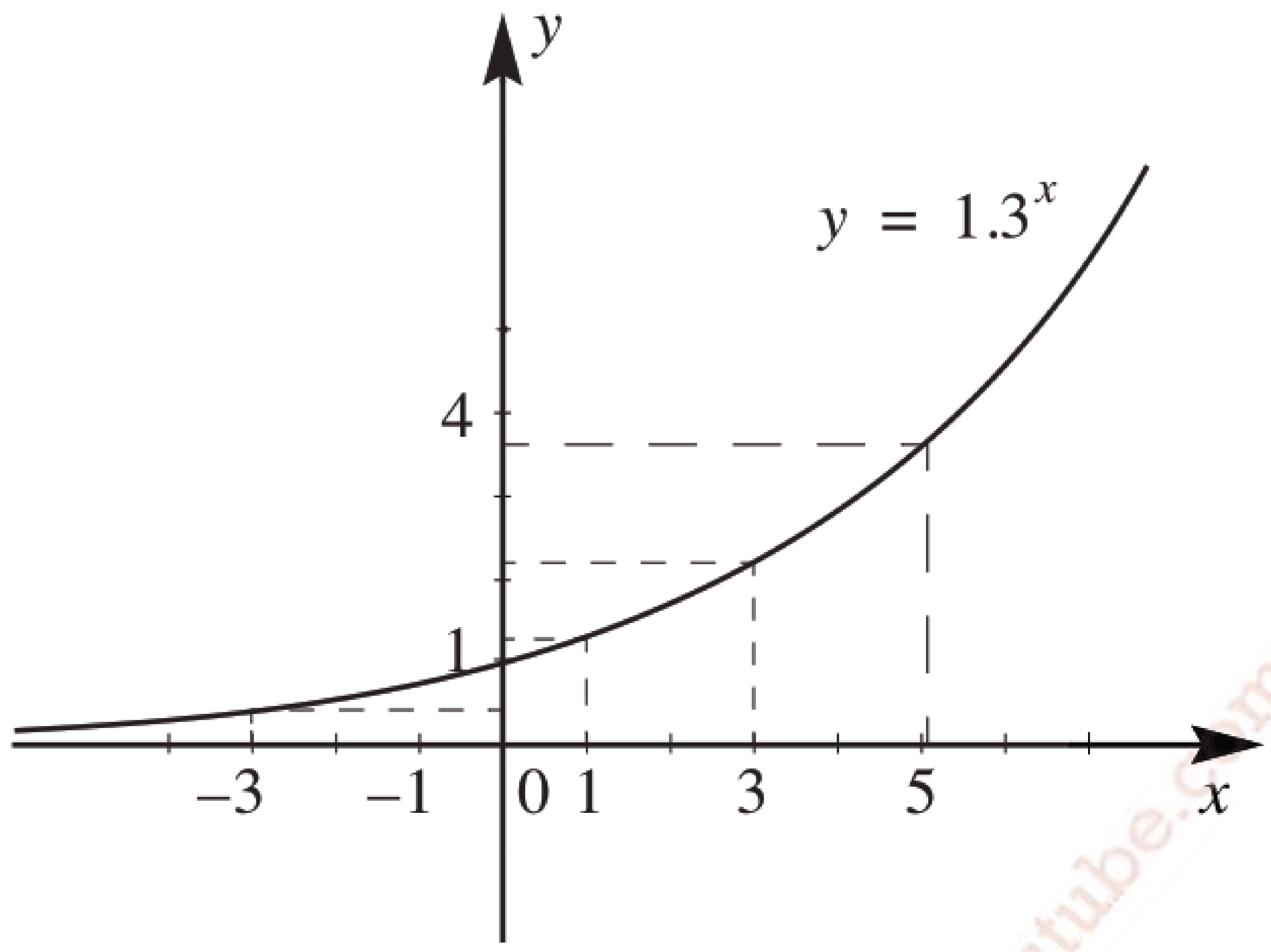
បើ a_2 ជាចំនួនប្រជាជននៃ 2 ទសវត្សរ៍ក្រោយ

$a_2 = a_1 + a_1 r = a_1(1+r) = 1.3(1+0.3) = (1.3)^2$ ។

យើងទាញបាន $a_x = (1.3)^x$ ជាចំនួនប្រជាជនប្រែប្រួលទៅតាមអថេរ x ក្នុងករណីនេះ យើង បកស្រាយវាជាអនុគមន៍ $f(x) = (1.3)^x$ ។

- បើ $x = 3$

នោះ $f(3) = (1.3)^3 = 2.19$ មានន័យថា នៅ 3 ទសវត្សរ៍ក្រោយមក រដ្ឋនេះ នឹងមានប្រជាជន 2.19 លាននាក់ ។



- បើ $x = -3$

នោះ $f(-3) = (1.3)^{-3} = 0.45$ មានន័យថា កាលពី 3 ទសវត្សរ៍មុនរដ្ឋនេះមាន ប្រជាជនប្រមាណតែ 0.45 លាននាក់ប៉ុណ្ណោះ ។

គេតាងក្រាបនៃអនុគមន៍ ដើម្បីឆ្លុះបញ្ចាំង កំណើននៃប្រជាជនកើនតាមឆ្នាំ ។

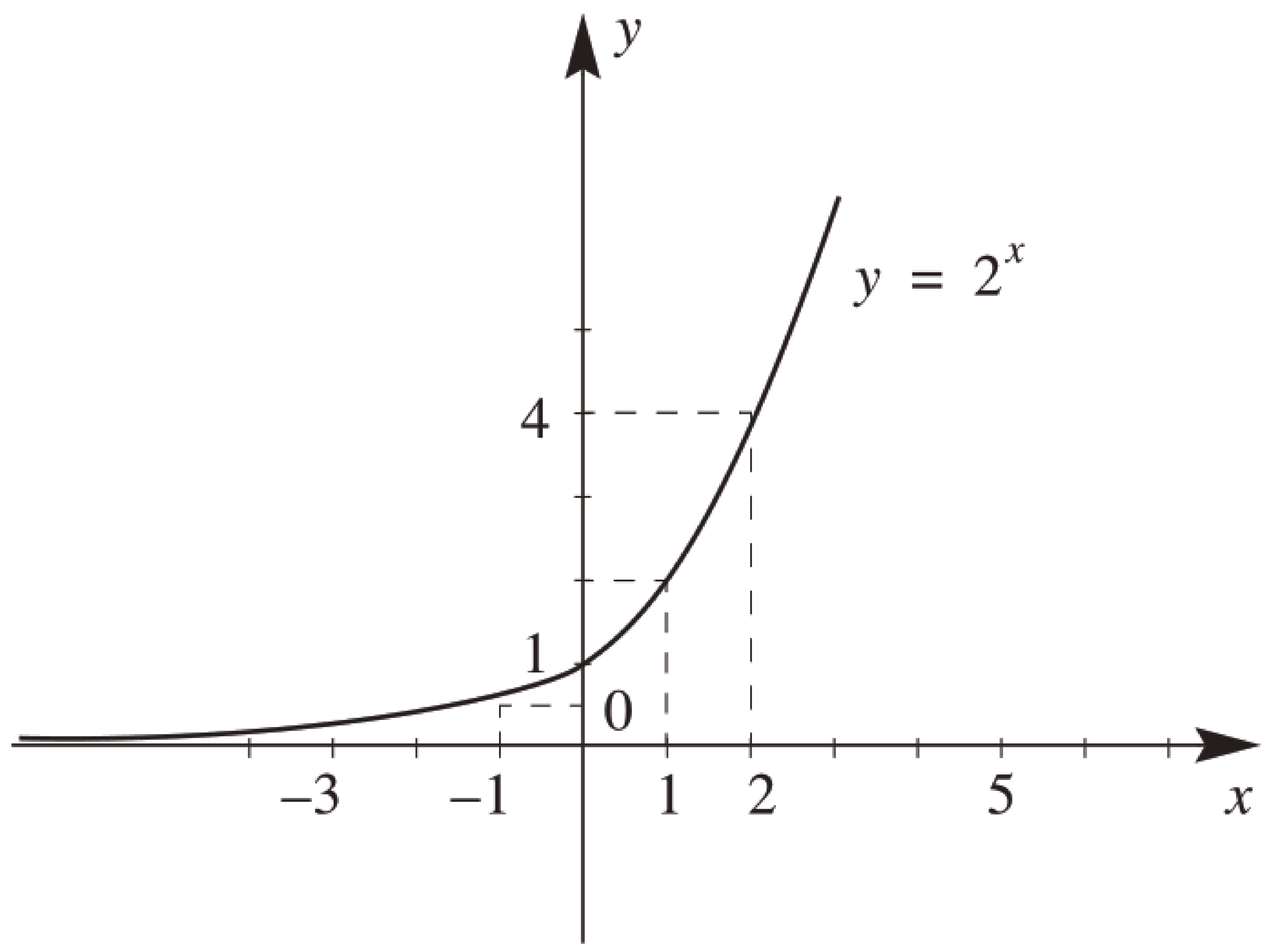
$f(x) = (1.3)^x$ ជាស្វ័យគុណដែលមានគោលជាចំនួន **ថេរ** និងនិទស្សន្តជា **អថេរ** ហៅថា **អនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែល** ។

និយមន័យ	អនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែល ជាអនុគមន៍កំណត់ដោយ $f(x) = a^x$ ដែល $x \in \mathbb{R}$ ហើយ a ជាចំនួនពិត វិជ្ជមាន ខុសពី 1 ។

លំហាត់គំរូ 1 គណនាតម្លៃលេខ និងសង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ $y = 2^x$ ។

តារាងតម្លៃត្រូវគ្នានៃ x និង y

x	$y = 2^x$
–2	0.25
–1	0.50
0	1
1	2
2	4

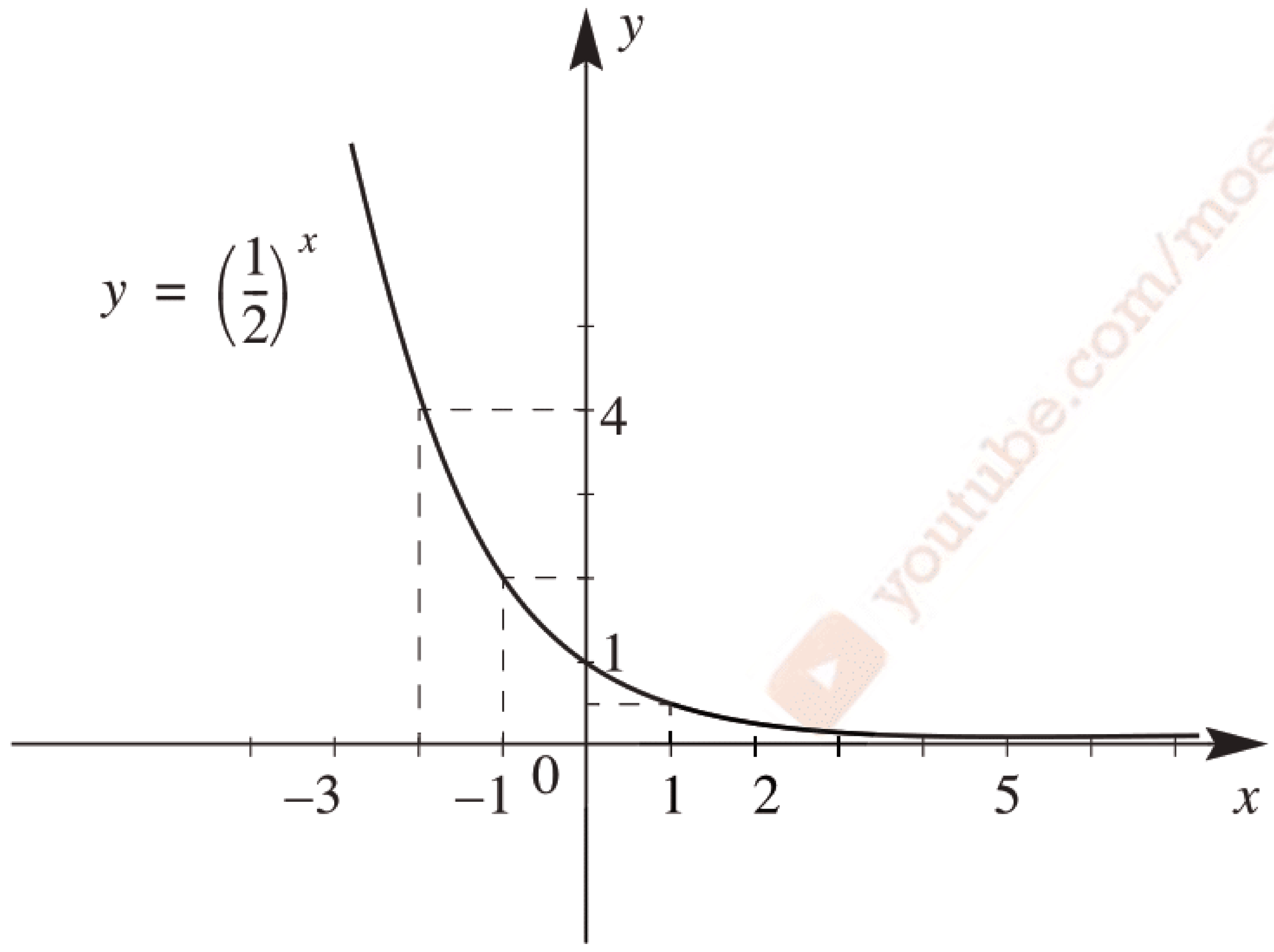


យើងសង្កេតឃើញថា តម្លៃ x កើន គេបានតម្លៃត្រូវគ្នានៃ $y = 2^x$ កើន ហើយក្រាបនៃ $y = 2^x$ កាត់អ័ក្ស (Oy) ត្រង់ចំណុច $(0, 1)$ ។

លំហាត់គំរូ 2 គណនាតម្លៃលេខនិងសង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ ។

តារាងតម្លៃត្រូវគ្នានៃ x និង y

x	$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$
-2	4
-1	2
0	1
1	0.5
2	0.25



យើងសង្កេតឃើញថា តម្លៃ x កើន គេបានតម្លៃត្រូវគ្នានៃ $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ ចុះ ហើយក្រាបនៃ $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ កាត់អ័ក្ស (oy) ត្រង់ចំណុច $(0, 1)$ ។

ប្រតិបត្តិ សង់ក្រាប ក. $y = 4^x$ ខ. $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$

គ. $y = 3^x$ ឃ. $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ ។

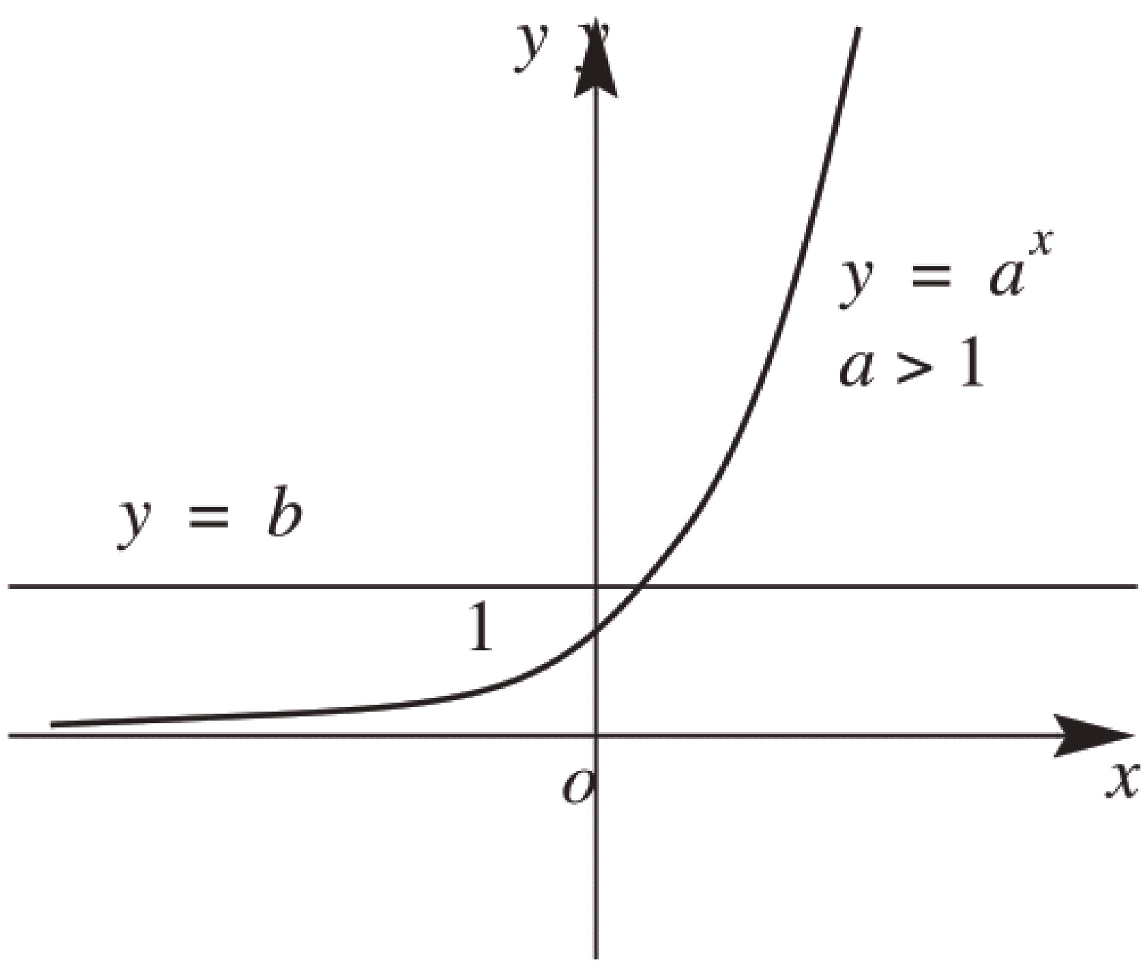
4. សមីការនិងវិសមីការអិចស្ប៉ូណង់ស្យែល

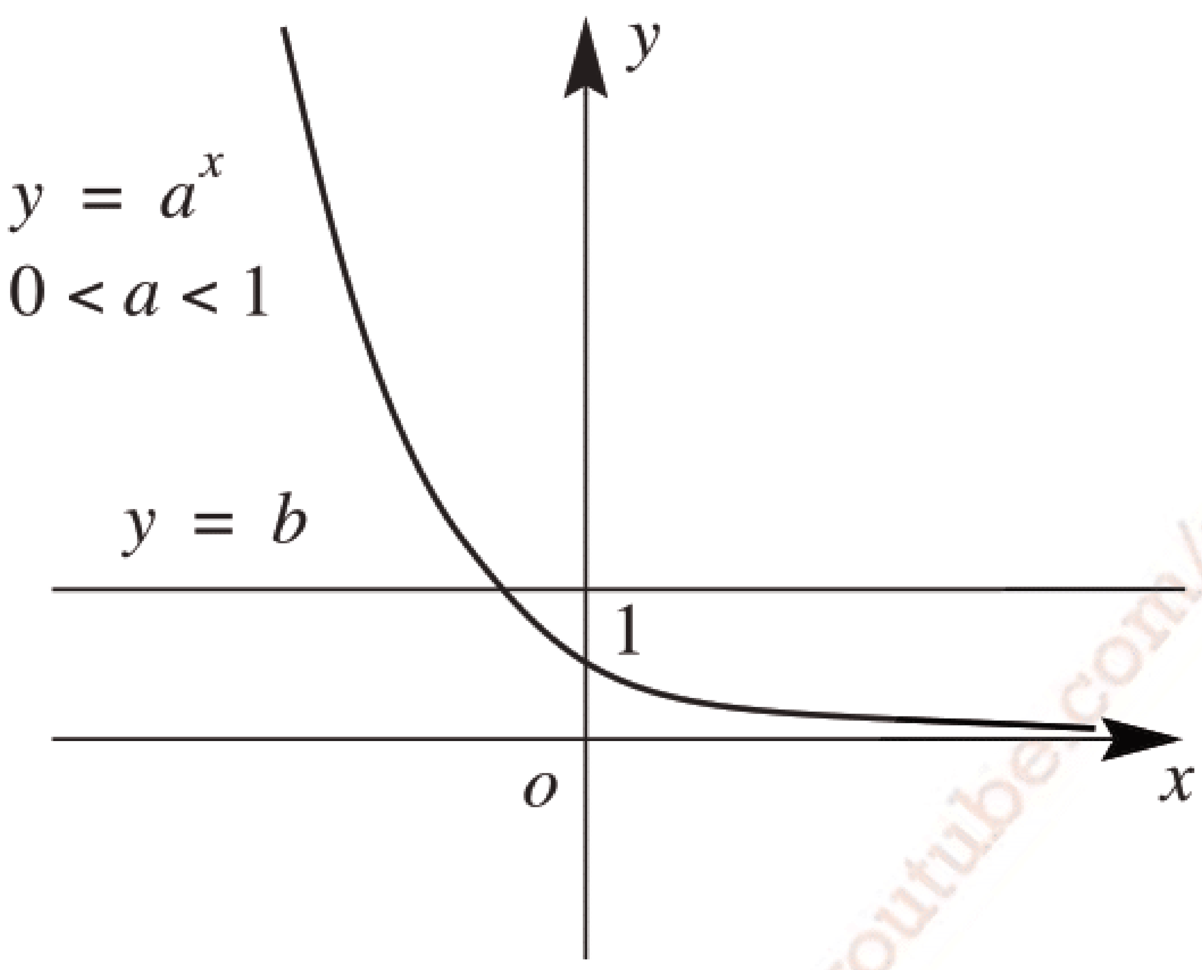
4.1 សមីការអិចស្ប៉ូណង់ស្យែល

គេមានអនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែល $y = a^x$ ដែល a ជាចំនួនពិត វិជ្ជមាន ខុសពី 1 និង បន្ទាត់ $y = b$ ដែល $b > 0$ ។

តាមក្រាបគេសង្កេតឃើញថា បន្ទាត់ $y = b$ កាត់ក្រាបនៃអនុគមន៍ $y = a^x$ ត្រង់មួយចំណុច ។ គេបានអាប់ស៊ីសនៃចំណុចប្រសព្វជាតម្លៃ x តែមួយគត់ ដែលជា **ឫស** របស់សមីការ $b = a^x$ ។ សមីការ $b = a^x$ ដែល a ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន ខុសពី 1 ហើយ $b > 0$ ហៅថា **សមីការអិចស្ប៉ូណង់ស្យែល** ។

បំណកស្រាយតាមក្រាប





ជាទូទៅ	ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត $a > 0$, $a \neq 1$ $a^x = a^y$ សមមូល $x = y$ ។

លំហាត់គំរូ ដោះស្រាយសមីការ

ក. $4^x = 8$ ខ. $3^{1-x} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ គ. $5 \times 2^x = 40$

ឃ. $18 \times 3^x = 2$ ង. $4^{x-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{1-3x}$ ច. $5^{1-x} = (0.2)^{3x}$ ។

ចម្លើយ

ក. $4^x = 8$, $(2^2)^x = 2^3$

$2x = 3$

$x = \frac{3}{2}$ ។

ខ. $3^{1-x} = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $3^{1-x} = 3^{-\frac{1}{2}}$

$1 - x = -\frac{1}{2}$

$x = \frac{3}{2}$ ។

គ. $5 \times 2^x = 40$, $2^x = 8$

$2^x = 2^3$

$x = 3$ ។

ឃ. $18 \times 3^x = 2$, $3^x = \frac{1}{9}$

$3^x = 3^{-2}$

$x = -2$ ។

ង. $4^{x-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{1-3x}$

$2^{2x-2} = (2^{-1})^{1-3x}$

$2x - 2 = 3x - 1$

$x = -1$ ។

ច. $5^{1-x} = (0.2)^{3x}$

$5^{1-x} = (5^{-1})^{3x}$

$1 - x = -3x$

$x = -\frac{1}{2}$ ។

ប្រតិបត្តិ ដោះស្រាយសមីការ

ក. $4^x = \frac{1}{2}$ ខ. $4^x = 1$ គ. $2^x = 0$

ឃ. $3^{x-1} = \left(\frac{1}{9}\right)^x$ ង. $2^x \times 8^{1-x} = \frac{1}{4}$ ច. $3^{x^2-2x} = 27$ ។

4.2 វិសមីការអិចស្ប៉ូណង់ស្យែល

គេមានអនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែល $y = a^x$ ដែល $a>0$, $a\neq 1$ និង $x\in R$

- បើ $a>1$ នោះ $y = a^x$ ជាអនុគមន៍កើនជានិច្ច ចំពោះគ្រប់តម្លៃ x ។

ដូចនេះ $a^x \geq a^y$ សមមូល $x\geq y$

$a^x \leq a^y$ សមមូល $x\leq y$ ។

- បើ $0<a<1$ នោះ $y = a^x$ ជាអនុគមន៍ចុះជានិច្ច ចំពោះគ្រប់តម្លៃ x ។

ដូចនេះ $a^x \geq a^y$ សមមូល $x\leq y$

$a^x \leq a^y$ សមមូល $x\geq y$ ។

លំហាត់គំរូ ដោះស្រាយវិសមីការ

ក. $2^x \leq \frac{1}{16}$ ខ. $16^n < 8^{n+1}$ គ. $32^{5x+2} \geq 16^{5x}$

ឃ. $(0.7)^x > 0.49$ ង. $4^x - 6\cdot 2^x + 8 < 0$ ច. $4^{3x-1} > \frac{1}{256}$ ។

ចម្លើយ

ក. $2^x \leq \frac{1}{16}$ សមមូល $2^x \leq \frac{1}{2^4}$ ព្រោះ $16 = 2^4$

$2^x \leq 2^{-4}$ លក្ខណៈនៃស្វ័យគុណ $\frac{1}{a^n} = a^{-n}$

$x\leq -4$ គោល $2>1$ ។

ដូចនេះ វិសមីការមានសំណុំចម្លើយ $x\in(-\infty, -4]$ ។

ខ. $16^n < 8^{n+1}$ សមមូល $(2^4)^n < 2^{3(n+1)}$ ព្រោះ $16 = 2^4$; $8 = 2^3$

$2^{4n} < 2^{3n+3}$ (គោល $2>1$)

$4n < 3n+3$ ឬ $4n-3n<3$ ឬ $n<3$ ។

ដូចនេះ វិសមីការមានសំណុំចម្លើយ $n\in(-\infty, 3)$ ។

គ. $32^{5x+2} \geq 16^{5x}$ សមមូល $(2^5)^{5x+2} \geq (2^4)^{5x}$ ព្រោះ $32 = 2^5$; $16 = 2^4$

$(2)^{5(5x+2)} \geq (2)^{4(5x)}$ លក្ខណៈនៃស្វ័យគុណ $(a^m)^n = a^{mn}$

$25x+10\geq 20x$ ឬ $25x-20x\geq -10$

ឬ $5x\geq -10$ (ចែកអង្គទាំងពីរនឹង 5) គេបាន $x\geq -2$ ។

ដូចនេះ វិសមីការមានសំណុំចម្លើយ $x\in[-2, +\infty)$ ។

ឃ. $(0.7)^x > 0.49$ សមមូល $(0.7)^x > (0.7)^2$ ព្រោះ $0.49 = (0.7)^2$

$x < 2$ (គោលនៃស្វ័យគុណ $0.7 < 1$ ត្រូវប្តូរទិសដៅវិសមីការ) ។

ដូចនេះ វិសមីការមានសំណុំចម្លើយ $x \in (-\infty,\ 2)$ ។

ង. $4^x - 6 \cdot 2^x + 8 < 0$ សមមូល $2^{2x} - 6 \cdot 2^x + 8 < 0$ ព្រោះ $4^x = 2^{2x}$

$t^2 - 6 \cdot t + 8 < 0$ តាង $t = 2^x$, $t > 0$

តាង $f(t) = t^2 - 6 \cdot t + 8$ មានឫស $t = 2$, $t = 4$

$f(t) < 0$ នោះ $2 < t < 4$ ឬ $t \in (2,\ 4)$

តែ $t = 2^x$ គេបាន $2 < 2^x < 2^2$ ឬ $1 < x < 2$ ។

ដូចនេះ វិសមីការមានសំណុំចម្លើយ $x \in (1, 2)$ ។

ច. $4^{3x-1} > \frac{1}{256}$ សមមូល $4^{3x-1} > 4^{-4}$ តម្រូវគោលអង្គទាំងពីរឱ្យដូចគ្នា $\frac{1}{256} = \frac{1}{4^4} = 4^{-4}$

$3x - 1 > -4$ លក្ខណៈវិសមីការអិចស្ប៉ូណង់ស្យែល

$3x > -3$ បូកអង្គទាំងពីរនឹង 1

$x > -1$ ចែកអង្គទាំងពីរនឹង 3

ដូចនេះ វិសមីការមានសំណុំចម្លើយ $x \in (-1,\ +\infty)$

ផ្ទៀងផ្ទាត់ សាកឱ្យតម្លៃ $x > -1$ ឧទាហរណ៍ $x = 0$

$4^{3x-1} > \frac{1}{256}$ សមមូល $4^{3(0)-1} > \frac{1}{256}$ ជំនួស x ដោយ 0

$4^{-1} > \frac{1}{256}$ សម្រួល

$\frac{1}{4} > \frac{1}{256}$ ពិត (ប្រើលក្ខណៈ $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$) ។

ប្រតិបត្តិ ដោះស្រាយវិសមីការ

ក. $3^x < \frac{1}{27}$ ខ. $4^x \geq 64$

គ. $16^{-x} < \frac{1}{256}$ ឃ. $3^{x-1} < \frac{1}{9}$

ង. $2^x \times 8^{1-x} \geq \frac{1}{4}$ ច. $3^{x^2-2x} < 27$ ។

5. អនុវត្តន៍អនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែល

ពូសុខ ទិញប័ណ្ណសន្សំប្រាក់ពីធនាគារតម្លៃ 50 000 រៀល ដោយទទួលបានអត្រាការប្រាក់ 6 % ក្នុងមួយឆ្នាំ ។ បើគាត់បន្តទុកប្រាក់នោះនៅធនាគារបាន 3 ឆ្នាំ តើប្រាក់របស់គាត់សរុបត្រូវជាប៉ុន្មាន ?

ឆ្នាំទី 1 : ការប្រាក់ $50\,000\times\frac{6}{100} = 3\,000$ រៀល

ប្រាក់សរុបក្នុងឆ្នាំទី 1 $50\,000+3000 = 53\,000$ រៀល ។

ឆ្នាំទី 2 : ការប្រាក់ $53\,000\times\frac{6}{100} = 3\,180$ រៀល

ប្រាក់សរុបក្នុងឆ្នាំទី 2 $53\,000+3180 = 56\,180$ រៀល ។

ឆ្នាំទី 3 : ការប្រាក់ $56\,000\times\frac{6}{100} = 3\,370\,8$ រៀល

ប្រាក់សរុបក្នុងឆ្នាំទី 3 $56180+3370.8 = 59\,550\,8$ រៀល ។

ដូចនេះ បើតាង P ជាចំនួនប្រាក់ដើម ហើយ i ជាអត្រាការប្រាក់ប្រចាំឆ្នាំ នោះ

- ចំនួនការប្រាក់នៃឆ្នាំទី 1 គឺ iP
- ចំនួនប្រាក់សរុបនៃឆ្នាំទី1 គឺ $P+iP = P(1+i)$
- ចំនួនប្រាក់សរុបនៃឆ្នាំទី 2 គឺ $P(1+i)+P(1+i)i = P(1+i)^2$
- ចំនួនប្រាក់សរុបនៃឆ្នាំទី 3 គឺ $P(1+i)^2+P(1+i)^2 i = p(1+i)^3$

$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$

- ចំនួនប្រាក់សរុបនៃឆ្នាំទី t គឺ $p(1+i)^t$ ។

ជាទូទៅ បើតាង P ជាប្រាក់ដើម i ជាអត្រាការប្រាក់ប្រចាំឆ្នាំ t ជាចំនួនឆ្នាំ នោះចំនួនប្រាក់សរុបគឺ $A = P(1+i)^t$ ។

សម្គាល់ - រូបមន្ត $A = P(1+i)^t$ ប្រើបានតែក្នុងករណីទូទាត់ការប្រាក់មួយឆ្នាំម្តង ។

- ករណីទូទាត់ការប្រាក់មួយឆមាសម្តងគេប្រើ $A = P\left(1+\frac{i}{2}\right)^{2t}$ ព្រោះមួយឆ្នាំទូទាត់ការប្រាក់ពីរដង នាំឱ្យ t ឆ្នាំទូទាត់ $2t$ ហើយមួយឆ្នាំទទួលការប្រាក់ i នាំឱ្យមួយ ឆមាសទទួលអត្រាការប្រាក់ $i/2$ ។

- ករណីទូទាត់ការប្រាក់មួយត្រីមាសម្តងគេប្រើ $A = P\left(1+\frac{i}{4}\right)^{4t}$ ព្រោះមួយឆ្នាំទូទាត់ការប្រាក់បួនដង នាំឱ្យ t ឆ្នាំទូទាត់ $4t$ ហើយមួយឆ្នាំទទួលការប្រាក់ i នាំឱ្យមួយត្រីមាស ទទួលការប្រាក់ $i/4$ ។

ជាទូទៅ បើ n ជាចំនួនដងនៃការទូទាត់ការប្រាក់ក្នុងមួយឆ្នាំ

គេបានរូបមន្ត $A = P\left(1+\frac{i}{n}\right)^{nt}$ ។

លំហាត់គំរូ 1 នៅឆ្នាំ 1987 អ្នកវិនិយោគទុនម្នាក់បានទិញដីមួយកន្លែងថ្លៃ 84 000 ដុល្លារ ហើយនៅឆ្នាំ 2007 គាត់បានលក់ដីនោះវិញដោយទទួលបានតម្លៃ 49 លានដុល្លារ ។ តើក្នុងមួយឆ្នាំអ្នកវិនិយោគទុននោះទទួលបានអត្រាការប្រាក់ចំណេញចំនួនប៉ុន្មាន បើប្រាក់របស់គាត់កើនពី 84 000 ដុល្លារ ដល់ 49 លានដុល្លារ ក្នុងរយៈពេល 20 ឆ្នាំ ។

ចម្លើយ តាង i ជាអត្រាការប្រាក់ចំណេញ

គេបាន $84000(1+i)^{20} = 49\,000\,000$

$$(1+i)^{20} = \frac{49\,000\,000}{84000}$$

$$(1+i)^{20} = \frac{49\,000}{84}$$ (លើកឫសទី 20)

$1+i = 1.375$ ឬ $i = 0.375$ ។

ដូចនេះ ក្នុងមួយឆ្នាំអ្នកវិនិយោគទុនទទួលបានអត្រាការប្រាក់ចំណេញ 37.5 % ។

លំហាត់គំរូ 2 នៅឆ្នាំ 1996 មានសិស្សប្រឡងជាប់សញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិចំនួន 3 405 នាក់ ហើយចំនួននេះមានការកើនឡើង 30 % ជារៀងរាល់ឆ្នាំ ។

ក. ចូរសរសេរសមីការដែលបង្ហាញចំនួនសិស្សប្រឡងជាប់នៅឆ្នាំ 1996 ។

ខ. តើនៅឆ្នាំ 2006 មានសិស្សប៉ុន្មាននាក់បានប្រឡងជាប់សញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ?

ចម្លើយ ក. សមីការសិស្សប្រឡងជាប់សញ្ញាបត្រនៅឆ្នាំ 1996

ប្រើរូបមន្ត $y = C(1+r)^t$ ដែល $C = 3405$ ចំនួនសិស្សប្រឡងជាប់

$r = 30\ \% = 0.30$ អត្រាសិស្សប្រឡងជាប់

t ឆ្នាំដែលសិស្សប្រឡងជាប់

y ចំនួនសិស្សប្រឡងជាប់នៅឆ្នាំ 1996

គេបាន $y = 3405(1+0.30)^t$ ។

ដូចនេះ សមីការតាងសិស្សប្រឡងជាប់នៅឆ្នាំ 1996 គឺ $y = 3405(1.30)^t$ ។

ខ. ចំនួនសិស្សប្រឡងជាប់នៅឆ្នាំ 2006

តាមសមីការខាងលើ $y = 3405(1.30)^t$ ដែល $t = 2006 - 1996 = 10$

គេបាន $y = 3405(1.30)^{10}$ ឬ 46941 ។

ដូចនេះ ចំនួនសិស្សដែលបានប្រឡងជាប់នៅឆ្នាំ 2006 គឺ 46941 នាក់ ។

លំហាត់គំរូ 3 កសិករម្នាក់ទិញត្រាក់ទ័រមួយគ្រឿងសម្រាប់ភ្ជួរស្រែ ក្នុងតម្លៃ 50 000 ដុល្លារ ។ ត្រាក់ទ័រនោះចុះថ្លៃ 10 % ជារៀងរាល់ឆ្នាំ ។ រកតម្លៃត្រាក់ទ័រក្នុងរយៈពេល 7 ឆ្នាំក្រោយ ។

ចម្លើយ ប្រើរូបមន្ត $y = C(1-r)^t$ ដែល $C = 50000$ ជាតម្លៃទិញ

$r = 10\,\% = 0.10$ ជាអត្រាចុះថ្លៃ

$t = 7$ ជាចំនួនឆ្នាំ

y ជាតម្លៃលក់នៅឆ្នាំក្រោយពីចុះថ្លៃ

គេបាន $y = 50\,000(1-0.10)^7$

$= 23914.85$ ។

ដូចនេះ ក្នុងរយៈពេល 7 ឆ្នាំក្រោយ តម្លៃត្រាក់ទ័រនៅសល់ត្រឹមតែ 23 914.85 ដុល្លារ ។

ប្រតិបត្តិ ក. ពូស៊ុយបានយកប្រាក់មួយចំនួនទៅផ្ញើនៅធនាគារមួយ ដោយទទួលបានអត្រាការប្រាក់ 9 % ក្នុងមួយឆ្នាំ ។ រយៈពេល 5 ឆ្នាំក្រោយមក គាត់បានដកប្រាក់ពីធនាគារនោះវិញ ដោយ ទទួលបានប្រាក់សរុបចំនួន 1000 ដុល្លារ ។ តើពូស៊ុយមានប្រាក់ដើមចំនួនប៉ុន្មាន ?

ខ. មនុស្សម្នាក់មានអាយុ 20 ឆ្នាំ បានយកប្រាក់ 1 000 ដុល្លារ ទៅផ្ញើនៅធនាគារមួយដោយទទួលបានអត្រាការប្រាក់ 12 % ក្នុងមួយឆ្នាំ ។ តើគាត់មានប្រាក់សរុបចំនួនប៉ុន្មាន បើបច្ចុប្បន្នគាត់មានអាយុ 60 ឆ្នាំ?

គ. មនុស្សម្នាក់បានទិញរថយន្តថ្មីមួយគ្រឿងម៉ាកតូយ៉ូតាកាម៉ារី ក្នុងតម្លៃ 3900 ដុល្លារ ។ រថយន្តនោះចុះថ្លៃ 14 % ជារៀងរាល់ឆ្នាំ ។ រកតម្លៃរថយន្តក្នុងរយៈពេល 10 ឆ្នាំក្រោយ ។

លំហាត់

1. គណនាតម្លៃនៃកន្សោមខាងក្រោម :

ក. $\sqrt{16}$ ខ. $\sqrt{225}$ គ. $\sqrt{144}$ ឃ. $\sqrt[3]{0.008(y-2)^3}$

ង. $\sqrt{(-6x)^2}$ ច. $\sqrt[3]{27}$ ឆ. $-\sqrt[3]{64}$ ជ. $\sqrt[3]{-64x^3}$ ។

2. សរសេរកន្សោមខាងក្រោមជាទម្រង់អិចស្ប៉ូណង់ស្វៃ

ក. $x = \sqrt[4]{10}$ ខ. $\sqrt[8]{56} = k$ គ. $a = \sqrt[28]{500h}$ ឃ. $b = \sqrt[x]{y}$ ។

3. សម្រួលកន្សោមខាងក្រោម :

ក. $\sqrt[4]{625}$ ខ. $\sqrt[5]{-1}$ គ. $-\sqrt[5]{-32}$ ឃ. $\sqrt[5]{-\frac{1}{32}}$

ង. $\sqrt[6]{x^6}$ ច. $\sqrt[4]{(7b)^4}$ ឆ. $\sqrt[7]{y^7}$ ជ. $\sqrt[5]{(x-2)^5}$ ។

4. រកដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ខាងក្រោម :

ក. $f(x) = \sqrt{x}$ ខ. $f(x) = \sqrt[3]{x}$ គ. $f(x) = \sqrt{2x+8}$

ឃ. $f(x) = \sqrt{4-3x}$ ង. $f(x) = \sqrt{-3x^2}$ ច. $f(x) = \sqrt{x^2+1}$

ឆ. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{2x^2-3x-5}$ ជ. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+3}}{x^2-x-2}$ ឈ. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+1}}{x+|x|}$ ។

5. គណនាកន្សោមខាងក្រោម :

ក. $\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}$ ខ. $\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt[3]{5}$ គ. $\sqrt[4]{8}\cdot\sqrt[4]{9}\cdot\sqrt[4]{72}$

ឃ. $\sqrt{3a}\cdot\sqrt{10b}$ ង. $\sqrt{x-a}\cdot\sqrt{x+a}$ ច. $\sqrt{\frac{6}{x}}\cdot\sqrt{\frac{y}{5}}$ ។

6. សម្រួលកន្សោមខាងក្រោម :

ក. $\frac{2}{3}\sqrt{4.5}+\frac{3}{2}\sqrt[3]{16}+\frac{1}{4}\sqrt{72}$ ខ. $x\sqrt[3]{2y}-\sqrt[3]{16x^3y}+\frac{x}{3}\sqrt[3]{54y}$ ។

7. ប្រៀបធៀបកន្សោមខាងក្រោម :

ក. $5\sqrt[3]{2}$ និង $2\sqrt[3]{31}$ ខ. $\sqrt[3]{2}$ និង $\sqrt[12]{45}$ គ. $\sqrt[6]{5}$ និង $\sqrt[8]{8}$ ។

8. សម្រួលកន្សោមខាងក្រោម :

ក. $\dfrac{\sqrt[3]{c^3+3c^2d+3cd^2+d^3}}{\sqrt{c^2-d^2}\cdot\sqrt{c^2-d^2}}$ ខ. $\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-\sqrt{x+1}}$

គ. $\dfrac{\sqrt{p}}{\sqrt{3q^2+4pq+p^2}}\cdot\dfrac{\sqrt{p+3q}}{\sqrt{p^2+6pq+8q^2}}\div\dfrac{1}{\sqrt{p^2+3pq+2q^2}}$ ។

9. សរសេរកន្សោមខាងក្រោមជាទម្រង់រ៉ាឌីកាល់

ក. $8^{\frac{1}{3}}$ ខ. $x^{\frac{1}{4}}$ គ. $y^{\frac{1}{5}}$ ឃ. $(a^5t^3)^{\frac{1}{2}}$ ង. $(x^3y^3)^{\frac{1}{4}}$ ច. $(x^3y^5)^{\frac{1}{4}}$ ។

10. ដោះស្រាយសមីការខាងក្រោម :

ក. $2^x = 32$ ខ. $(x+1)^{x^2-4x+3} = 1$ គ. $(2-\sqrt{3})^x + (2+\sqrt{3})^x = 2$

ឃ. $3^{(2^x)} = 6561$ ង. $81^{(4^x)} = 9$ ច. $3(4^x) + 2(9^x) - 5(6^x) = 0$

ឆ. $3^{(3^x)} = 1$ ជ. $(\sqrt{2+\sqrt{3}})^x + (\sqrt{2-\sqrt{3}})^x = 4$ ។

11. ដោះស្រាយវិសមីការខាងក្រោម :

ក. $2^x > 1$ ខ. $3^x \le 1$ គ. $2^{2x} \le \frac{1}{16}$

ឃ. $16^x < 8^{x+1}$ ង. $32^{5x+2} \ge 16^{5x}$ ច. $4^{3x-1} > \frac{1}{256}$ ។

12. ដោះស្រាយវិសមីការខាងក្រោម :

ក. $16^x > 0.125$ ខ. $2^x > -8$ គ. $27^x \cdot 3^{1-x} < \frac{1}{3}$

ឃ. $(0.2)^x \le 25$ ង. $3^x \le \sqrt[3]{9}$ ច. $\left(\frac{1}{2}\right)^x > \sqrt[3]{\frac{1}{4}}$ ។

13. មីងសយបានយកប្រាក់មួយចំនួនទៅផ្ញើនៅធនាគារមួយ ដោយទទួលបានអត្រាការប្រាក់ 6 % ក្នុងមួយឆ្នាំ។ រយៈពេល 7 ឆ្នាំក្រោយមក គាត់បានដកប្រាក់ពីធនាគារនោះវិញ ដោយទទួលបានប្រាក់សរុប ចំនួន 3 00 ដុល្លារ ។ តើមីងសយមានប្រាក់ដើមចំនួនប៉ុន្មាន ?

14. មនុស្សម្នាក់មានអាយុ 30 ឆ្នាំ បានយកប្រាក់ 5 0000 រៀល ទៅផ្ញើនៅធនាគារមួយ ដោយទទួលបានអត្រាការប្រាក់ 4 % ក្នុងមួយឆ្នាំ។ តើគាត់មានប្រាក់សរុបចំនួនប៉ុន្មានបើបច្ចុប្បន្នគាត់មានអាយុ 65 ឆ្នាំ ?

15. មនុស្សម្នាក់បានទិញរថយន្តថ្មីមួយគ្រឿងក្នុងតម្លៃ 45 000 ដុល្លារ ។ រថយន្តនោះចុះថ្លៃ 15 % ជារៀងរាល់ឆ្នាំ។ រកតម្លៃរថយន្តក្នុងរយៈពេល 7 ឆ្នាំក្រោយ ។

មេរៀនទី

2 អនុគមន៍លោការីត

1. អនុគមន៍ច្រាស

1.1 សញ្ញាណនៃអនុគមន៍ច្រាស

វត្ថុបំណង

- គណនាអនុគមន៍ច្រាស
- សង់ក្រាបនៃអនុគមន៍លោការីត
- ដោះស្រាយសមីការ និង វិសមីការលោការីត
- អនុវត្តលើអនុគមន៍លោការីត ។

គេមានអនុគមន៍ពីរ f និង g ។ កំណត់ដោយ

$f(x) = 2x+2$, $g(x) = \frac{x}{2}-1$ ។

គណនាតម្លៃលេខនៃ $f(x)$ ចំពោះ $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$ ។

បើ $x = 1$ នោះ $f(1) = 4$ គេបានគូមានលំដាប់ $(1, 4)$

បើ $x = 2$ នោះ $f(2) = 6$ គេបានគូមានលំដាប់ $(2, 6)$

បើ $x = 3$ នោះ $f(3) = 8$ គេបានគូមានលំដាប់ $(3, 8)$ ។

គណនាតម្លៃលេខនៃ $g(x)$ ចំពោះ $x = 4$, $x = 6$, $x = 8$ ។

បើ $x = 4$ នោះ $g(4) = 1$ គេបានគូមានលំដាប់ $(4, 1)$

បើ $x = 6$ នោះ $f(6) = 2$ គេបានគូមានលំដាប់ $(6, 2)$

បើ $x = 8$ នោះ $f(8) = 3$ គេបានគូមានលំដាប់ $(8, 3)$ ។

តាមការគណនាខាងលើគេសង្កេតឃើញថា គូមានលំដាប់នៃអនុគមន៍ $f(x)$ ច្រាសគ្នាទៅនឹងគូមានលំដាប់នៃអនុគមន៍ $g(x)$ មានន័យថា ធាតុដើម f ប្រែក្លាយជារូបភាពតាម g វិញ ហើយច្រាសមកវិញ ធាតុដើមតាម g ប្រែក្លាយជាតាមរូបភាព f វិញ ក្នុងករណីនេះ គេថា $g(x)$ ជាអនុគមន៍ច្រាសនៃអនុគមន៍ $f(x)$ ហើយ f ក៏ជាអនុគមន៍ច្រាសនៃអនុគមន៍ g ដែរ ។

ជាទូទៅ គេតាងអនុគមន៍ច្រាសនៃ f ដោយ f^{-1} ។

និយមន័យ បើ (a, b) ផ្ទៀងផ្ទាត់ $y = f(x)$ ហើយ (b, a) ផ្ទៀងផ្ទាត់ $y = f^{-1}(x)$ នោះ f^{-1} ជាអនុគមន៍ច្រាសនៃអនុគមន៍ f ។

លំហាត់គំរូ កំណត់អនុគមន៍ច្រាសនៃ $f(x) = \dfrac{1}{x+2}$ និង $g(x) = x^2$ ដែល $x \geq 0$ ។

ចម្លើយ - ចំពោះអនុគមន៍ $f(x) = \dfrac{1}{x+2}$ ឬ $y = \dfrac{1}{x+2}$

ដើម្បីកំណត់អនុគមន៍ច្រាស គេគណនាតម្លៃ x ជាអនុគមន៍នៃ y

$y = \dfrac{1}{x+2}$ ឬ $y(x+2) = 1$ គេបាន $x = \dfrac{1-2y}{y}$ ។

ហេតុនេះ $f^{-1}(x) = \dfrac{1-2x}{x}$ ជាអនុគមន៍ច្រាសនៃអនុគមន៍ $f(x) = \dfrac{1}{x+2}$ ។

- ចំពោះអនុគមន៍ $g(x) = x^2$ ឬ $y = x^2$

គេទាញបាន $x = \pm\sqrt{y}$ ដោយ $x \geq 0$ នោះ $x = \sqrt{y}$ ។

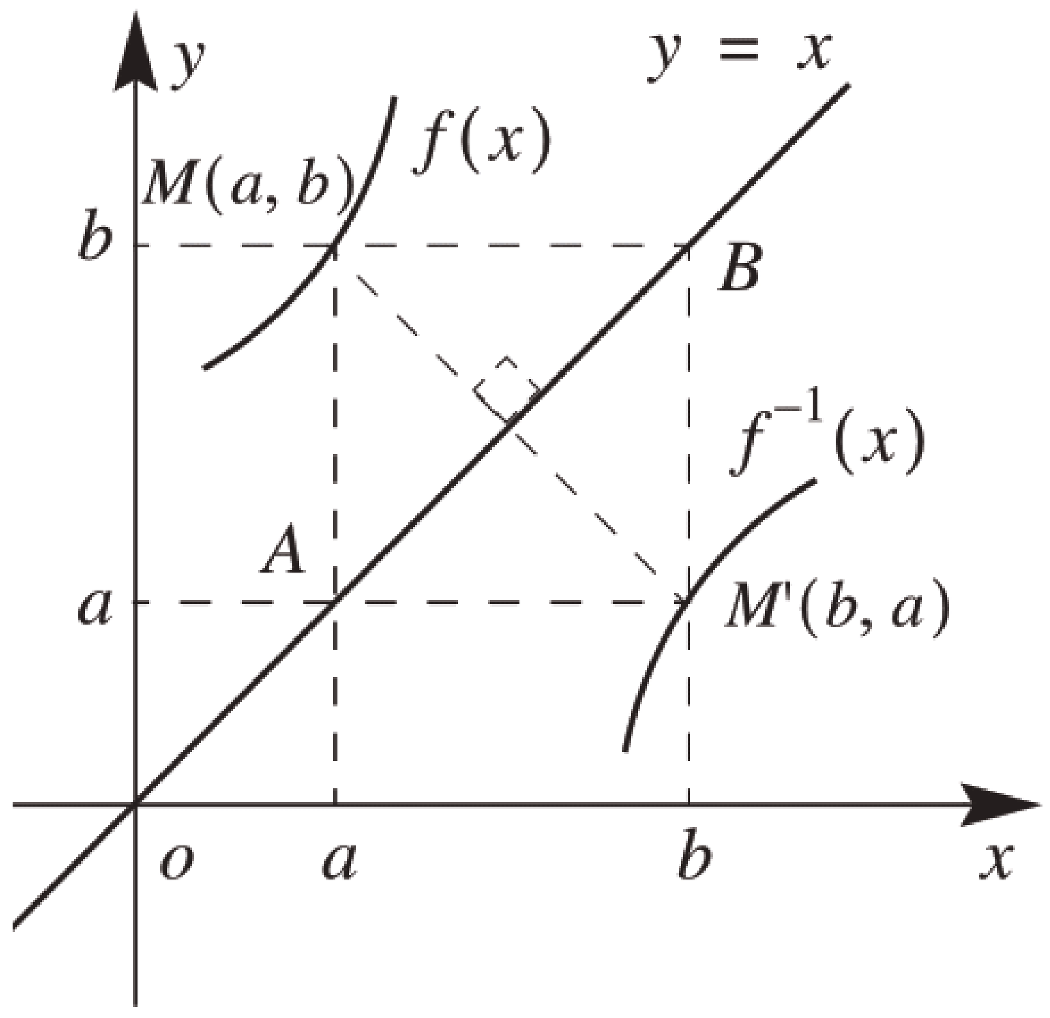
ហេតុនេះ $g^{-1}(x) = \sqrt{x}$ ជាអនុគមន៍ច្រាសនៃ $g(x) = x^2$ ។

ប្រតិបត្តិ

កំណត់អនុគមន៍ច្រាសនៃ $f(x) = \dfrac{x-1}{x}$ និង $g(x) = \sqrt{x} - 3$ ។

1.2 ក្រាបនៃអនុគមន៍ច្រាស

f និង f^{-1} ជាអនុគមន៍ច្រាសគ្នា បើ $M(a,b) \in f$ នោះ $M'(b,a) \in f^{-1}$ ដៅចំណុច $A(a, a)$ និង $B(b, b)$ គេបានការេ $AMBM'$ ។



AB ជាបន្ទាត់មានសមីការ $y = x$ ព្រោះវាកាត់តាមចំណុចដែលមានអាប់ស៊ីសស្មើនឹងអរដោនេ ។

$M(a,b)$ ឆ្លុះគ្នានឹង $M'(b,a)$ ធៀបនឹងបន្ទាត់ AB ។

ដូចនេះក្រាបនៃអនុគមន៍ច្រាស f^{-1} ត្រូវឆ្លុះនឹងក្រាបនៃអនុគមន៍ f ធៀបនឹងបន្ទាត់ $y = x$ ។

ជាទូទៅ បើអនុគមន៍ពីរ $f(x)$ និង $g(x)$ ច្រាសគ្នា នោះក្រាបនៃអនុគមន៍ទាំងពីរឆ្លុះគ្នាធៀបនឹងបន្ទាត់ $y = x$ ។

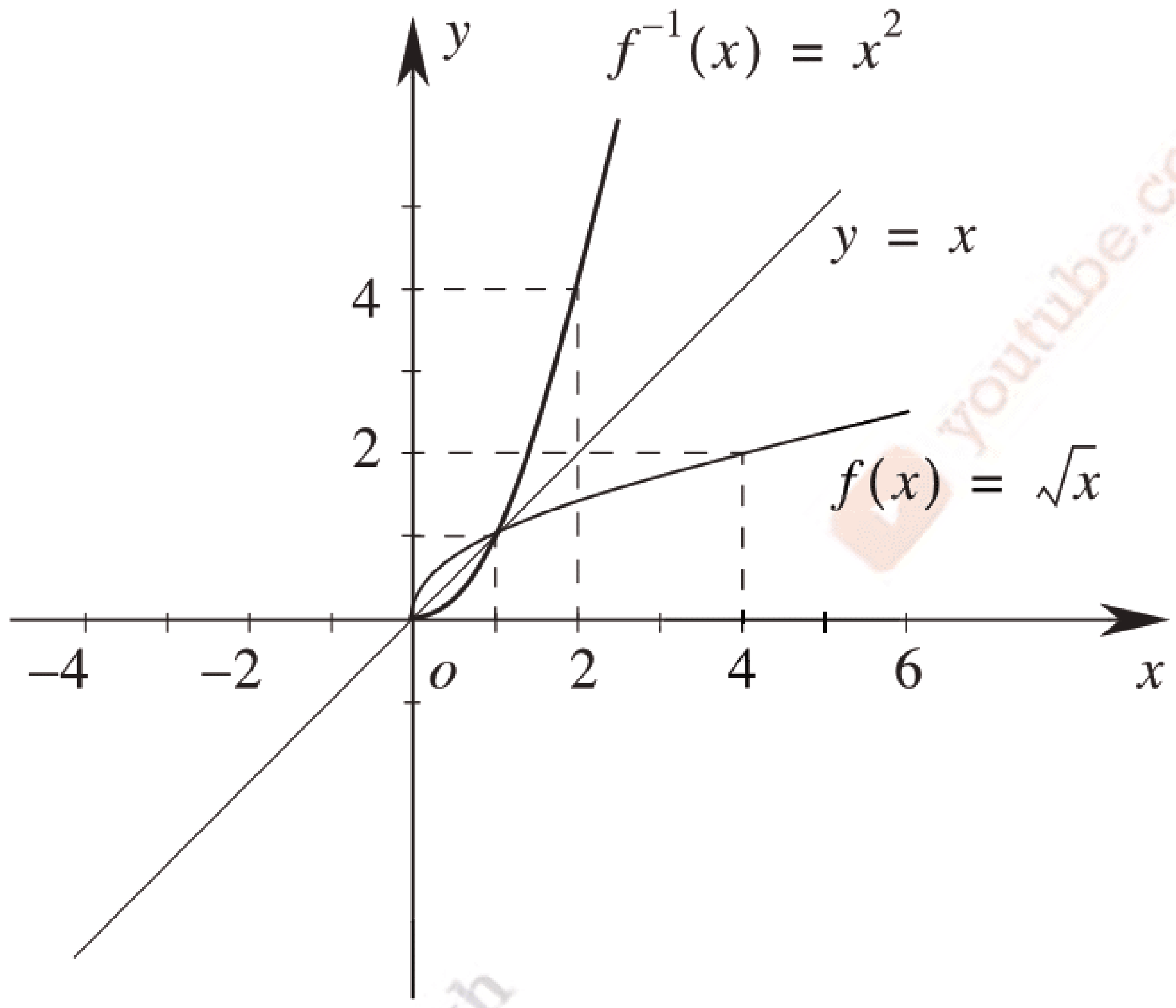
លំហាត់គំរូ 1 គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x) = \sqrt{x}$ ដែល $x \geq 0$ ។ ចូរកំណត់អនុគមន៍ច្រាសនៃ f រួចសង់ក្រាបរបស់វា ។

ចម្លើយ គេមាន $f(x) = \sqrt{x}$ ឬ $y = \sqrt{x}$ គេបាន $x = y^2$ ។

ហេតុនេះ $f^{-1}(x) = x^2$ ជាអនុគមន៍ច្រាសនៃ $f(x) = \sqrt{x}$ ។

សង់ក្រាបនៃ $f(x) = \sqrt{x}$ និង $f^{-1}(x) = x^2$

$f(x) = \sqrt{x}$			$f^{-1}(x) = x^2$	
x	$f(x)$		x	$f^{-1}(x)$
0	0		0	0
1	1		1	1
4	2		2	4



ក្រាបនៃអនុគមន៍ f ឆ្លុះគ្នានឹង f^{-1} ធៀបនឹងបន្ទាត់ $y = x$ ។

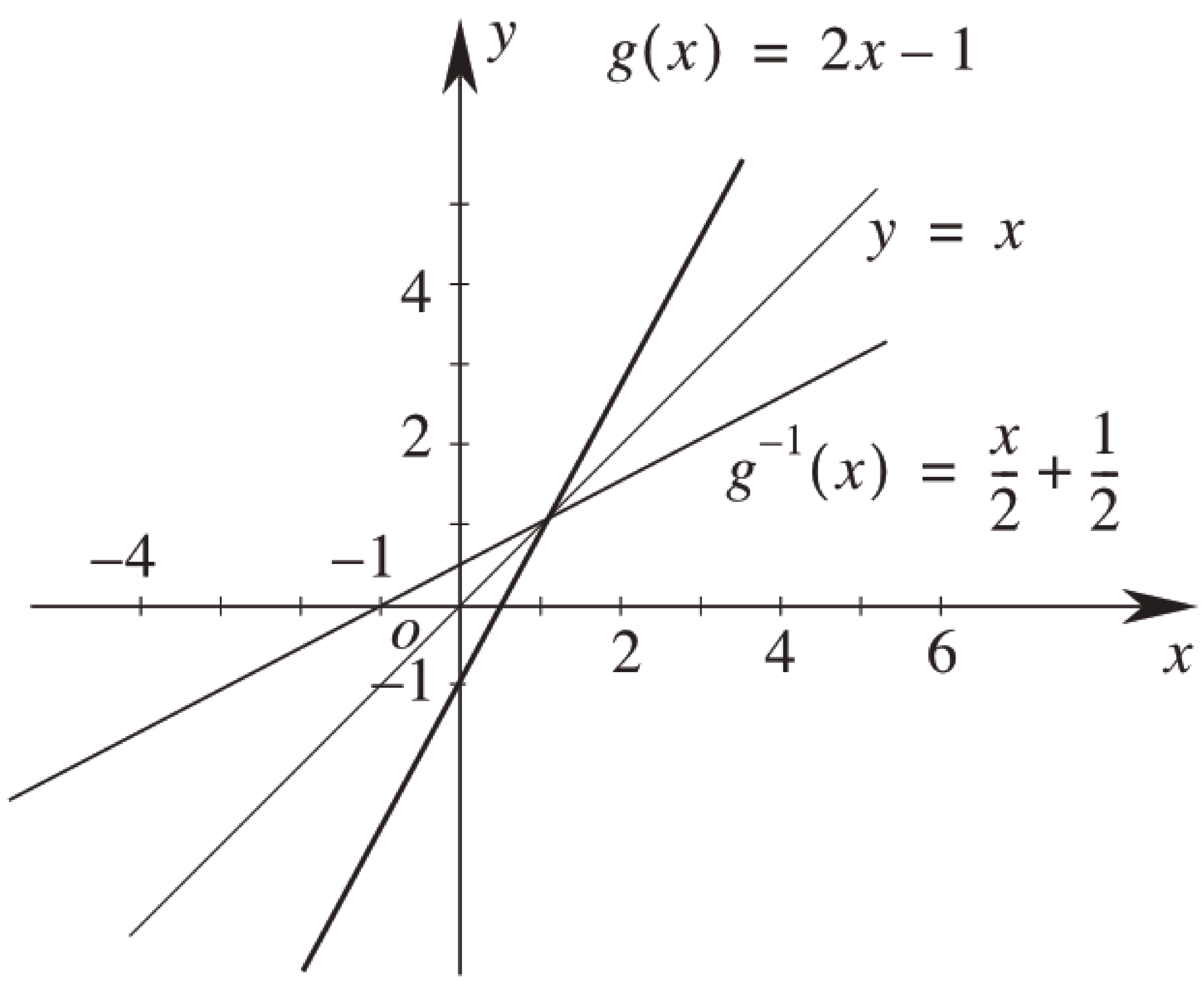
លំហាត់គំរូ 2 គេឱ្យអនុគមន៍ $g(x) = 2x - 1$ ។ ចូរកំណត់អនុគមន៍ច្រាស g^{-1} រួចសង់ក្រាបរបស់វា ។

ចម្លើយ គេមាន $g(x) = 2x - 1$ ឬ $y = 2x - 1$ គេបាន $x = \frac{1+y}{2} = \frac{y}{2} + \frac{1}{2}$ ។

ហេតុនេះ $g^{-1}(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{2}$ ។

សង់ក្រាបនៃ $g(x)$ និង $g^{-1}(x)$

$g(x) = 2x - 1$			$g^{-1}(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{2}$	
x	$g(x)$		x	$g^{-1}(x)$
0	-1		0	$1/2$
$1/2$	0		-1	0



ប្រតិបត្តិ គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x) = -\frac{x}{2} + 1$ ។

ចូរកំណត់អនុគមន៍ច្រាស $f^{-1}(x)$ រួចសង់ក្រាបរបស់វា ។

2. អនុគមន៍លោការីត

2.1 សញ្ញាណនៃអនុគមន៍លោការីត

បើគេមានសមីការ $x^2 = 3$, $(x \geq 0)$ នោះគេទាញបាន $x = \sqrt{3}$ ។

ជាទូទៅ បើគេមានសមីការ $y^2 = x$, $(x \geq 0)$, $(y \geq 0)$ នោះគេទាញបាន $y = \sqrt{x}$

ឬ $f(x) = \sqrt{x}$ ហៅថា អនុគមន៍ឫសការេ វាជាអនុគមន៍ច្រាសនៃអនុគមន៍ការេ ។

ដូចគ្នាដែរ បើគេមានសមីការអិចស្ប៉ូណង់ស្យែល

$2^x = 3$ គេប្រើសញ្ញា $\log_2 3$ ដើម្បីសម្គាល់ឱ្យតម្លៃនៃ x គឺ $x = \log_2 3$

$\log_2 3$ អានថា លោការីតគោល 2 នៃ 3 ។

បើ $2^x = y$ $(y > 0)$ នោះគេបាន $x = \log_2 y$

$x = \log_2 y$ ឬ $f(x) = \log_2 x$ ហៅថា អនុគមន៍លោការីតគោល 2 វាជាអនុគម៍ច្រាសនៃអនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែល 2^x ។

ជាទូទៅ បើគេមាន $a^x = y$ នោះ $x = \log_a y$, $y > 0$, $a > 0$, $a \neq 1$ ហើយ $f(x) = a^x$ មានអនុគមន៍ច្រាស $f^{-1}(x) = \log_a x$ ជាអនុគមន៍លោការីតគោល a នៃ x ។

ករណី $a = 10$, $\log_{10} x$ ហៅថា **លោការីតទសភាគ** គេអាចសរសេរដោយងាយ $\log x$ ។

លំហាត់គំរូ គណនា $\log_2 64$, $\log_3 243$, $\log_{\frac{1}{2}} 16$, $\log_2 1$ ។

ចម្លើយ គេគណនាតម្លៃលោការីត តាមអនុគមន៍ច្រាស

$a^x = y$ សមមូល $x = \log_a y$

- ចំពោះ $\log_2 64$

តាង $\log_2 64 = x$ សមមូល $64 = 2^x$ ឬ $2^6 = 2^x$ គេបាន $x = 6$ ។

ហេតុនេះ $\log_2 64 = 6$ ។

- ចំពោះ $\log_3 243$

តាង $\log_3 243 = x$ សមមូល $243 = 3^x$ ឬ $3^5 = 3^x$ គេបាន $x = 5$ ។

ហេតុនេះ $\log_3 243 = 5$ ។

- ចំពោះ $\log_2 \frac{1}{16}$

តាង $\log_2 \frac{1}{16} = x$ សមមូល $\frac{1}{16} = 2^x$ ឬ $2^{-4} = 2^x$ គេបាន $x = -4$ ។

ហេតុនេះ $\log_2 \frac{1}{16} = -4$ ។

- ចំពោះ $\log_2 1$

តាង $\log_2 1 = x$ សមមូល $1 = 2^x$ ឬ $2^0 = 2^x$ គេបាន $x = 0$ ។

ហេតុនេះ $\log_2 1 = 0$ ។

ប្រតិបត្តិ គណនា ក. $\log_5 125$ ខ. $\log_4 \frac{1}{4}$ គ. $\log_{\frac{1}{5}} 25$ ឃ. $\log_2 2$ ។

2.2 លក្ខណៈនៃលោការីត

ដោយ $a^1 = a$ នោះ $1 = \log_a a$ ហើយ $a^0 = 1$ នោះ $0 = \log_a 1$

គេបាន $\log_a a = 1$ និង $\log_a 1 = 0$ ។

ចំពោះគ្រប់ចំនួនវិជ្ជមាន x, y និង a ដែល $a \neq 1$ គេបាន :

- $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$
- $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$
- $\log_a x^n = n\log_a x$
- $\log_a x = \frac{1}{\log_x a}$
- $\log_a a = 1$
- $\log_a 1 = 0$
- $\log_a a^x = x$
- $a^{\log_a x} = x$ ។

តាង $m = \log_a x$ នោះ $a^m = x$

$n = \log_a y$ នោះ $a^n = y$ ។

ក. **សម្រាយបញ្ជាក់** $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$

គេបាន $x \cdot y = a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ នោះ $m + n = \log_a(x \cdot y)$ ។

ដូចនេះ $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$ ។

ខ. **សម្រាយបញ្ជាក់** $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$

គេបាន $\frac{a^m}{a^n} = \frac{x}{y}$ ឬ $a^{m-n} = \frac{x}{y}$ នោះ $m - n = \log_a\left(\frac{x}{y}\right)$

គេបាន $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$ ។

គ. សម្រាយបញ្ជាក់ $\log_a x^n = n\log_a x$

$$\log_a x^n = \log_a \underbrace{x \cdot x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}_{n\ \text{កត្តា}}$$ តាមលក្ខណៈវិធីគុណ

$$\log_a x^n = \underbrace{\log_a x + \log_a x + \log_a x + \ldots + \log_a x}_{n\ \text{តួ}}$$

$$= n\log_a x$$

គេបាន $\log_a x^n = n\log_a x$ ។

ឃ. សម្រាយបញ្ជាក់ $\log_a x = \dfrac{1}{\log_x a}$?

តាង $m = \log_a x$ នោះ $x = a^m$

$n = \log_x a$ នោះ $a = x^n$

គេបាន $x = a^m = (x^n)^m = x^{mn}$ គេទាញបាន $mn = 1$ ។

ហេតុនេះ $(\log_a x)(\log_x a) = 1$ ហើយ $\log_a x = \dfrac{1}{\log_x a}$ ។

លំហាត់គំរូ គណនា ក. $\log_2(4 \cdot 16)$ ខ. $\log_2 45 + \log_2 2$

គ. $3\log_7 4 - 2\log_7 8$ ឃ. $\log_2 4 + \log_4 2$ ។

ចម្លើយ ក. $\log_2(4 \cdot 16) = \log_2 4 + \log_2 16 = \log_2 2^2 + \log_2 2^4 = 2 + 4 = 6$ ។

ខ. $\log_2 45 + \log_2 2 = \log_2(45 \cdot 2) = \log_2 90$ ។

គ. $3\log_7 4 - 2\log_7 8 = \log_7 4^3 - \log_7 8^2 = \log_7 \dfrac{64}{64} = \log_7 1 = 0$ ។

ឃ. $\log_2 4 + \log_4 2 = \log_2 4 + \dfrac{1}{\log_2 4} = 2 + \dfrac{1}{2} = \dfrac{5}{2}$ ។

រូបមន្តប្តូរគោល : បើ $a \neq 1$, $a > o, b > o, b \neq 1$ និង x ជាចំនួនវិជ្ជមាន នោះ

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$ ។

សម្រាយបញ្ជាក់ តាង $y = \log_a x$ នោះ $a^y = x$ ។

ដូចនេះ $\log_b a^y = \log_b x$

$y\log_b a = \log_b x$ ។

$$y = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a} \text{ ។}$$

ឧទាហរណ៍ គណនា $\log_5 89$ និង $\log_{\sqrt{2}}\sqrt{5}$ ។

$$\log_5 89 = \frac{\log 89}{\log 5} \approx \frac{1.94939}{0.69897} = 2.7889 \text{ ។}$$

$$\log_{\sqrt{2}}\sqrt{5} = \frac{\log\sqrt{5}}{\log\sqrt{2}} = \frac{\frac{1}{2}\log 5}{\frac{1}{2}\log 2} \approx \frac{0.69897}{0.30103} = 2.3219 \text{ ។}$$

ប្រតិបត្តិ 1 • គណនា

ក. $\log_a MN$ ខ. $\log_3(8\cdot 3)$ គ. $\log_2(16\cdot 3)$ ឃ. $\log_a(xyz)$

ង. $\log_4 5^7$ ច. $\log_a\sqrt[3]{5}$ ឆ. $\log_2\sqrt[4]{3}$ ជ. $\log_2\sqrt[3]{a}$ ។

ប្រតិបត្តិ 2 • គណនា

ក. $\log_{0.5}\sqrt[3]{4}$ ខ. $\log_{0.2}25^{\frac{2}{3}}$ គ. $\log_{\sqrt{5}}(0.5)^{\frac{4}{3}}$

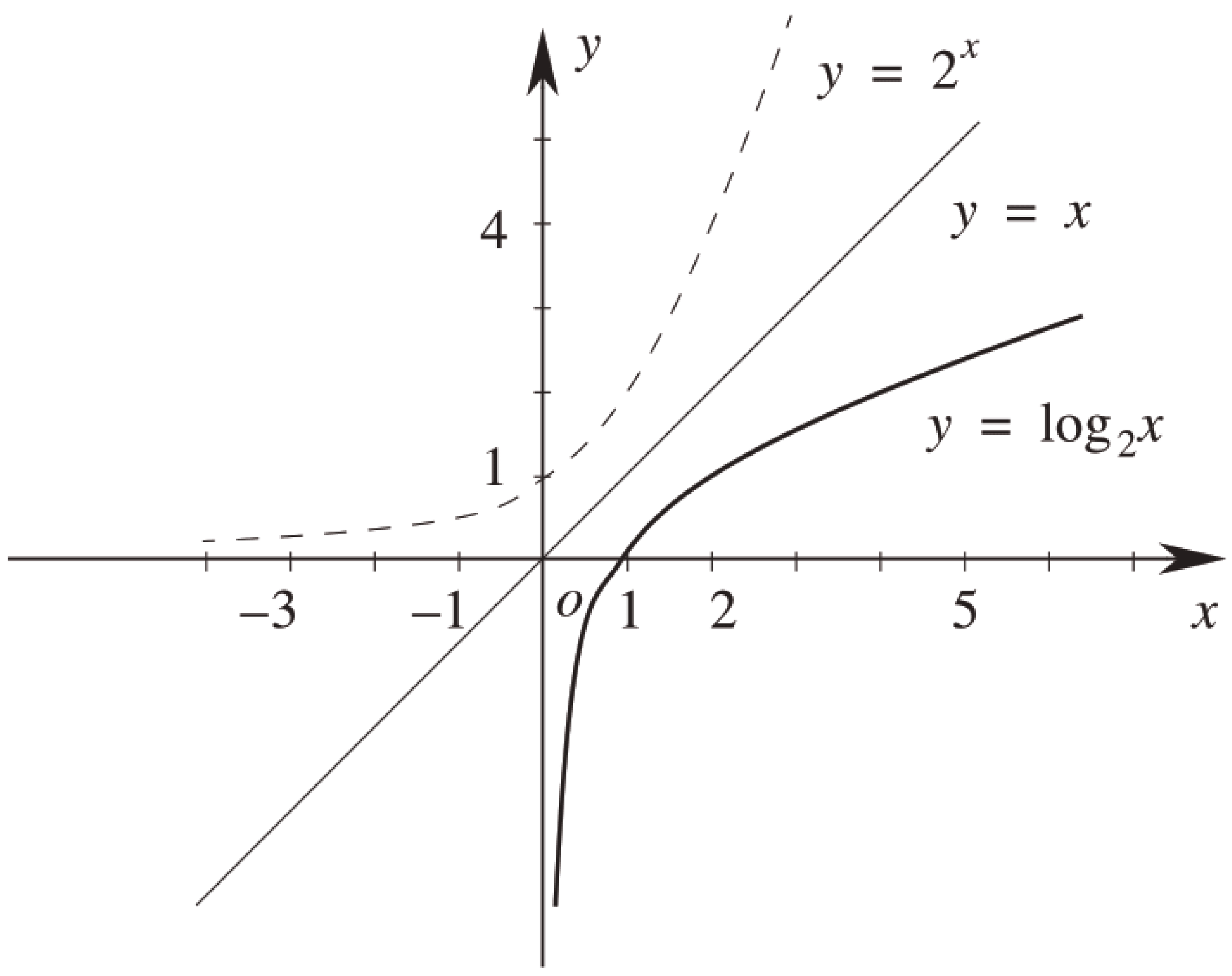
ឃ. $\log_{\sqrt[3]{7}}\log_2 2^{\sqrt{3}}$ ង. $\log_a x + \log_a y - \log_a z$ ច. $\log_a\sqrt{x} - \frac{1}{2}\log_a y$ ។

2.3 ក្រាបនៃអនុគមន៍លោការីត

ឧទាហរណ៍ 1 គណនាតម្លៃលេខ និងសង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ $y = \log_2 x$ ។

តារាងតម្លៃត្រូវគ្នានៃ x និង y

$y = 2^x$			$y = \log_2 x$	
x	y		x	y
-2	0.25		0.25	-2
-1	0.50		0.50	-1
0	1		1	0
1	2		2	1
2	4		4	2

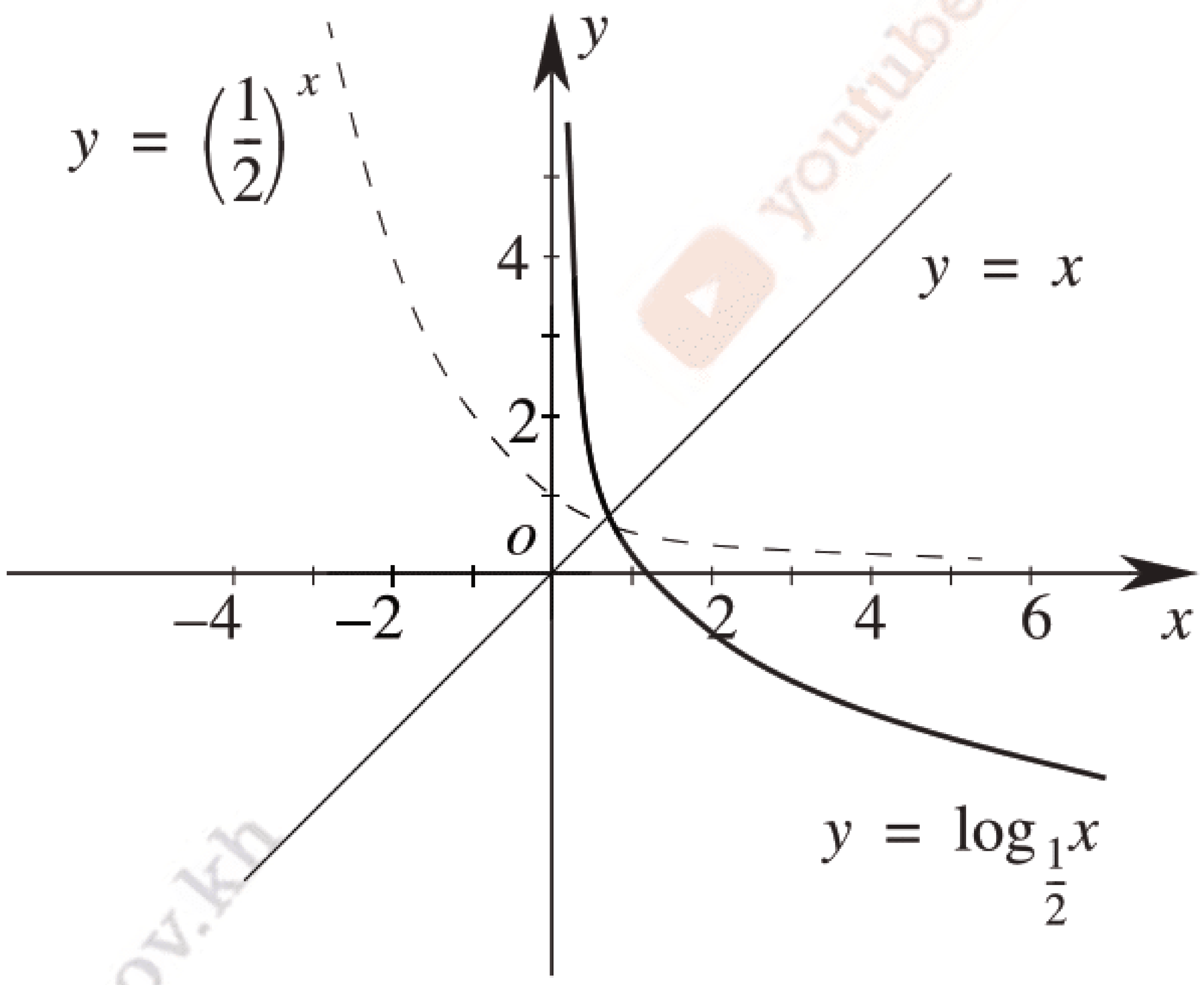


យើងសង្កេតឃើញថា តម្លៃ x កើន គេបានតម្លៃត្រូវគ្នានៃ $y = \log_2 x$ កើន ហើយក្រាបនៃ $y = \log_2 x$ កាត់អ័ក្ស (Ox) ត្រង់ចំណុច $(1, 0)$ ។ ដោយអនុគមន៍ $y = \log_2 x$ និង $y = 2^x$ ជាអនុគមន៍ច្រាសគ្នា ដូច្នេះក្រាបរបស់វាឆ្លុះគ្នាធៀបនឹងបន្ទាត់ $y = x$ ។

ឧទាហរណ៍ 2 គណនាតម្លៃលេខ និងសង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ ។

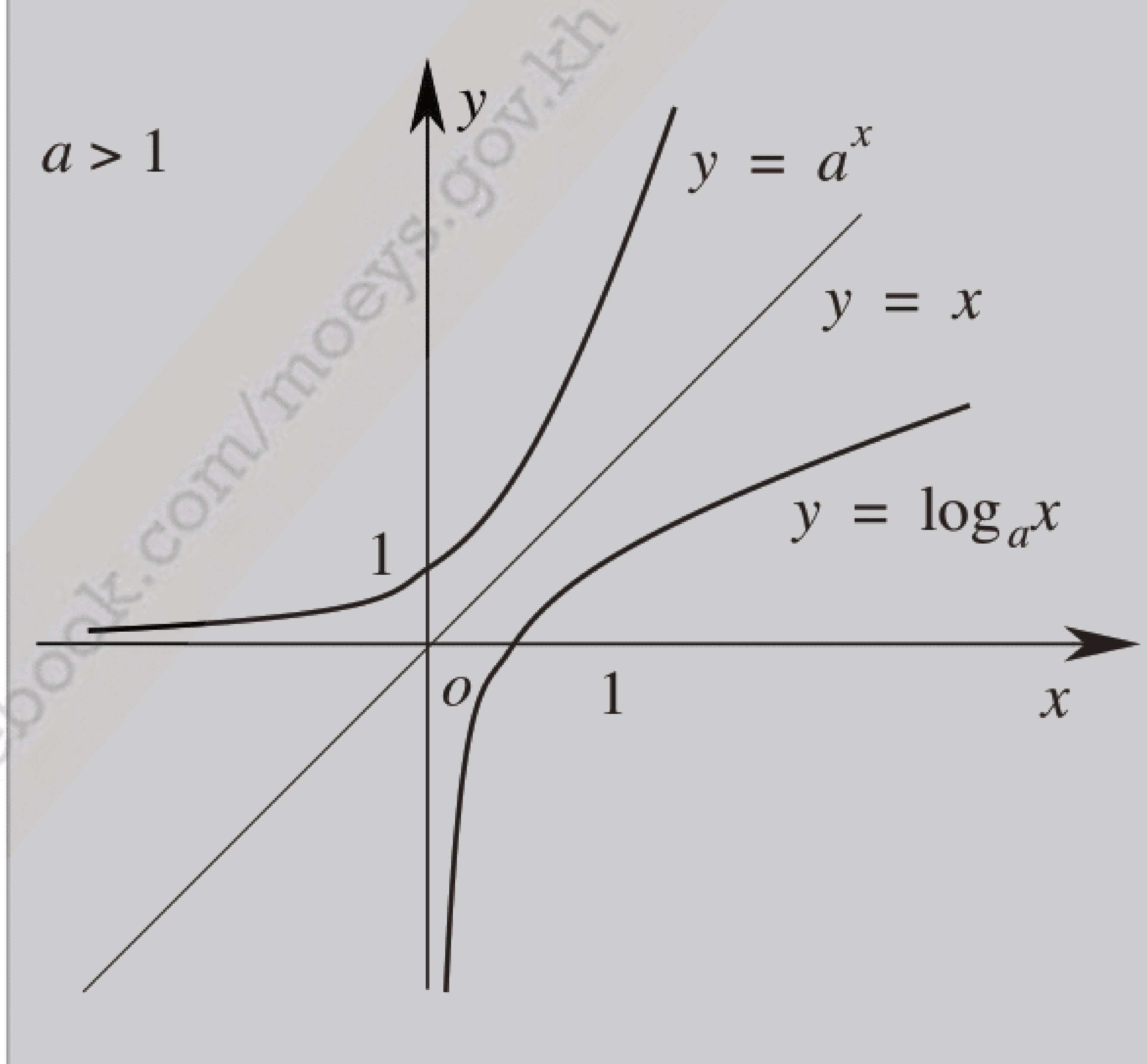
តារាងតម្លៃត្រូវគ្នានៃ x និង y

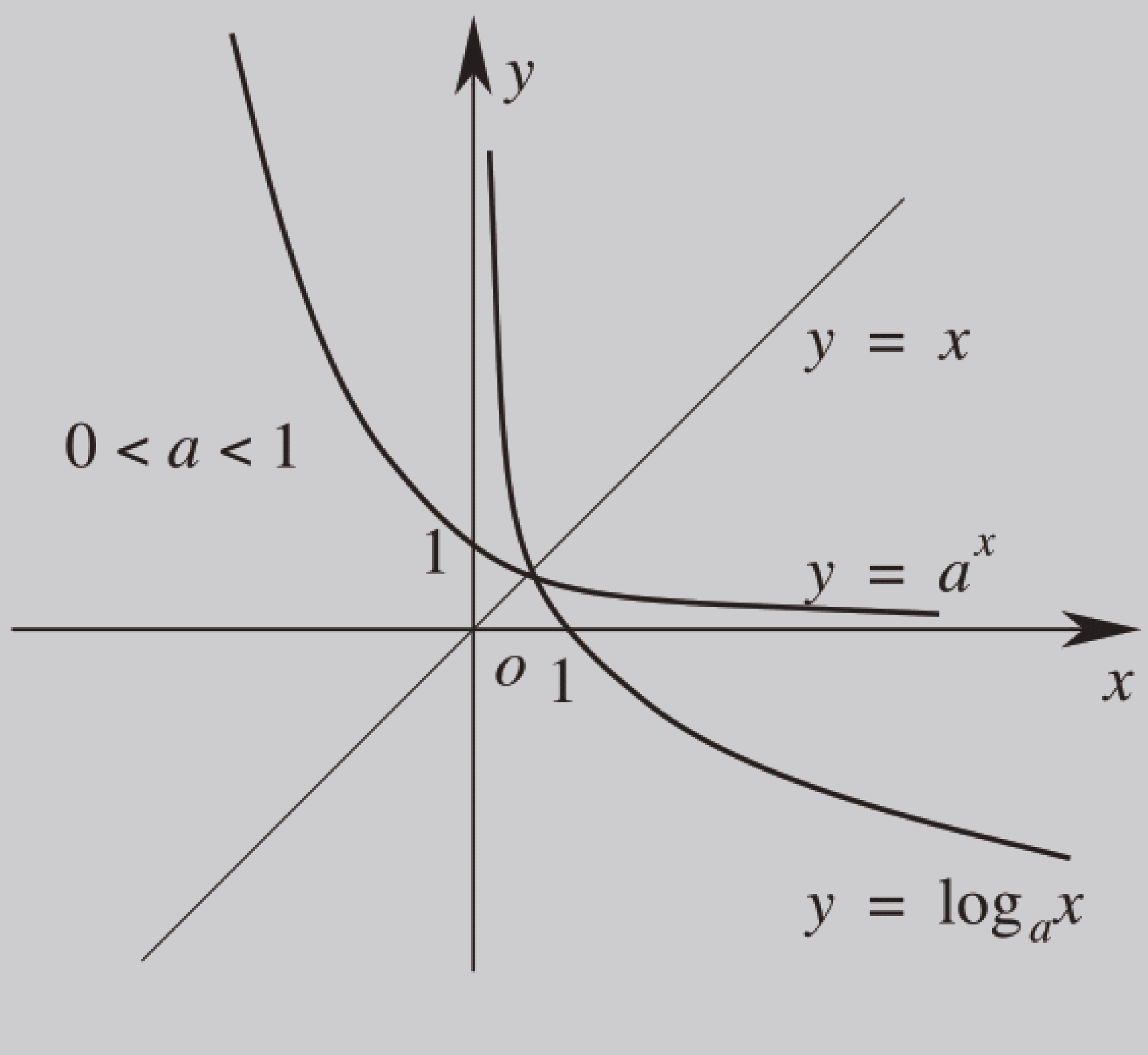
$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$			$y = \log_{\frac{1}{2}} x$	
x	y		x	y
-2	4		0.25	2
-1	2		0.5	1
0	1		1	0
1	0.5		2	-1
2	0.25		4	-2



យើងសង្កេតឃើញថា តម្លៃ x កើន គេបានតម្លៃត្រូវគ្នានៃ $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ ចុះ ហើយក្រាបនៃ $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ កាត់អ័ក្ស (Ox) ត្រង់ចំណុច $(1, 0)$ ។ ដោយអនុគមន៍ $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ និង $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ ជាអនុគមន៍ច្រាសគ្នា ដូច្នេះក្រាបរបស់វា ឆ្លុះគ្នាធៀបនឹងបន្ទាត់ $y = x$ ។

ជាទូទៅ អនុគមន៍ $y = a^x$ និង $y = \log_a x$ ដែល $a > 0$, $a \neq 1$ មានក្រាបដូចខាងក្រោម៖





យើងសង្កេតឃើញថា អនុគមន៍ $y = \log_a x$ មានក្រាប :

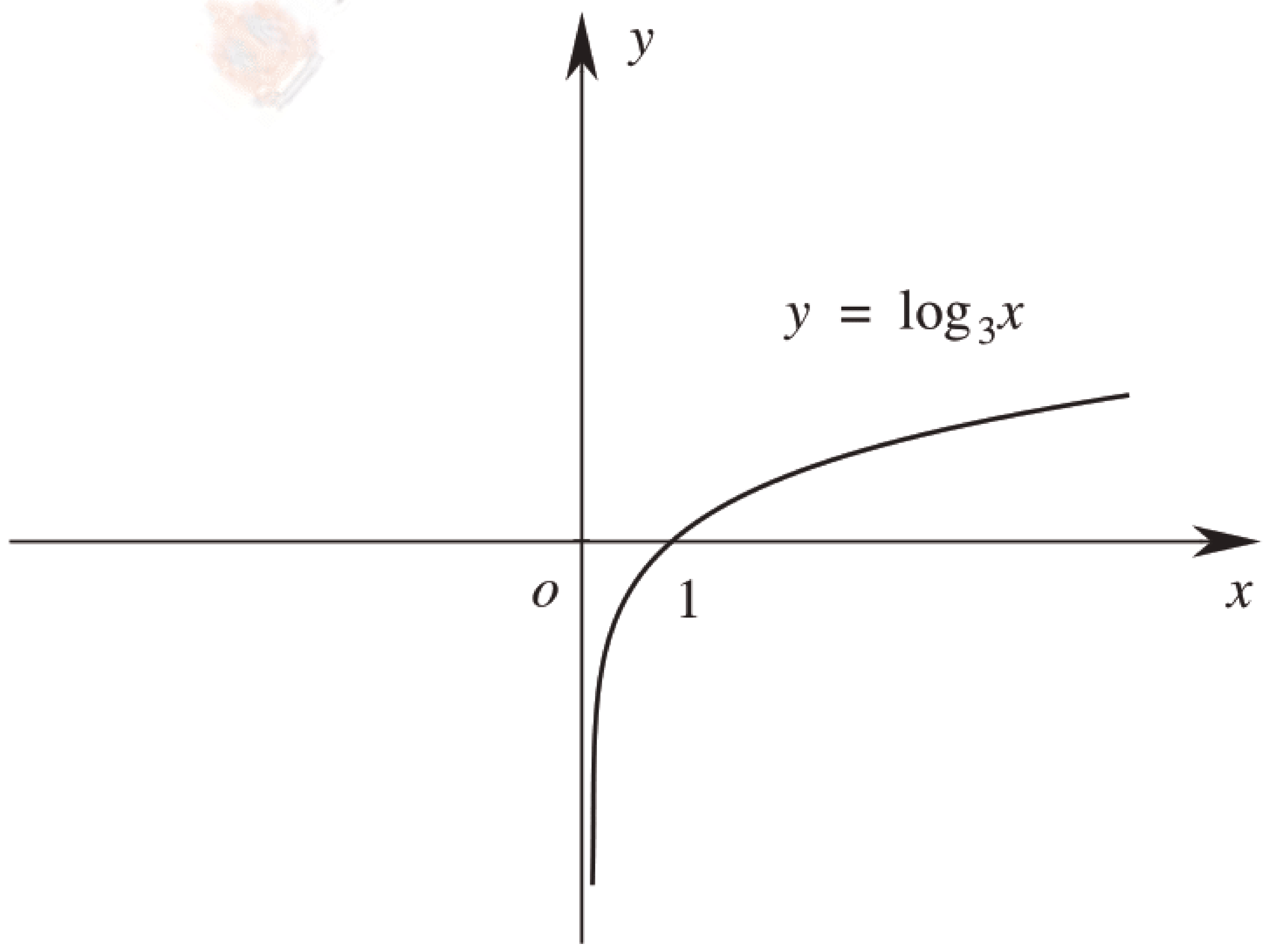
- បើ $a > 1$ ក្រាបកើនពីឆ្វេងទៅស្តាំ គេថា $y = \log_a x$ ជាអនុគមន៍កើន
  - ករណី $0 < x < 1$ តម្លៃ $y = \log_a x < 0$
  - ករណី $x > 1$ តម្លៃ $y = \log_a x > 0$ ។
- បើ $0 < a < 1$ ក្រាបចុះពីឆ្វេងទៅស្តាំ គេថា $y = \log_a x$ ជាអនុគមន៍ចុះ
  - ករណី $0 < x < 1$ តម្លៃ $y = \log_a x > 0$
  - ករណី $x > 1$ តម្លៃ $y = \log_a x < 0$ ។
- អនុគមន៍ $y = \log_a x$ មានក្រាបកាត់តាមចំណុចដែលមានកូអរដោនេ $(1, 0)$ ជានិច្ច ។
- អនុគមន៍ $y = \log_a x$ មានន័យចំពោះ $x > 0$ ជានិច្ច ។
- អនុគមន៍ $y = \log_a x$ និង $y = a^x$ មានក្រាបឆ្លុះគ្នាធៀបនឹងបន្ទាត់ $y = x$ ។

លំហាត់គំរូ សង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ ក. $y = \log_3 x$ ខ. $y = \log_{\frac{1}{3}} x$ ។

ចម្លើយ សង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ ក. $y = \log_3 x$

តារាងតម្លៃត្រូវគ្នានៃ x និង y

$y = \log_3 x$	
x	y
$1/9$	-2
$1/3$	-1
1	0
3	1
9	2

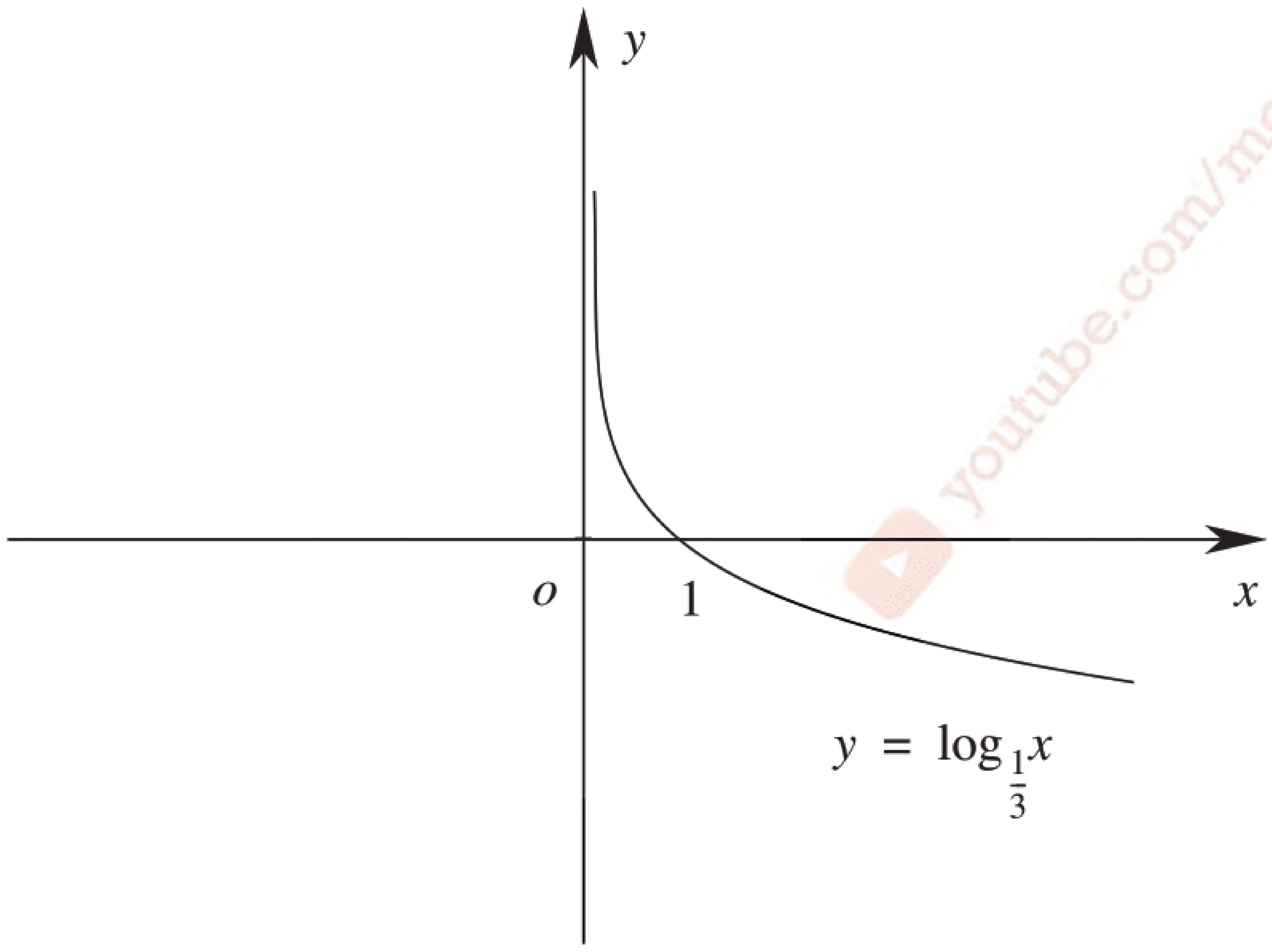


ក្រាបនៃអនុគមន៍ $y = \log_3 x$ ជាអនុគមន៍កើន ព្រោះគោលធំជាង 1 ។

ខ. $y = \log_{\frac{1}{3}} x$

តារាងតម្លៃត្រូវគ្នានៃ x និង y

$y = \log_{\frac{1}{3}} x$	
x	y
$1/9$	2
$1/3$	1
1	0
3	-1
9	-2



ប្រតិបត្តិ សង់ក្រាបនៃអនុគមន៍

ក. $y = \log_7 x$ ខ. $y = \log_{\frac{1}{7}} x$ ។

3. សមីការនិងវិសមីការលោការីត

3.1 សមីការលោការីត

បើ $a > 0$, $a \neq 1$ នោះសមីការ $\log_a x = \log_a y$ គេបាន $x = y$ ។

ឧទាហរណ៍ 1 ដោះស្រាយសមីការ $\log_3(5x+7) = 2$ ។

សមីការ $\log_3(5x+7) = 2$ មានន័យកាលណា $5x+7>0$ ឬ $x > -\frac{7}{5}$ ។

$\log_3(5x+7) = 2 \Leftrightarrow 5x+7 = 3^2$ (តាមនិយមន័យលោការីត)

$5x+7 = 9$ នាំឱ្យ $x = \frac{2}{5}$ ។

ដូចនេះ សមីការមានឫស $x = \frac{2}{5}$ ។

ឧទាហរណ៍ 2 ដោះស្រាយសមីការ $\log x + \log(x+3) = 1$ និងផ្ទៀងផ្ទាត់ ។

សមីការមានន័យលុះត្រាតែ $\begin{cases} x > 0 \\ x+3 > 0 \end{cases}$ ឬ $\begin{cases} x > 0 \\ x > -3 \end{cases}$ នាំឱ្យ $x > 0$ ។

សមីការ $\log x + \log(x+3) = 1$, $x \in (0, +\infty)$ ។

$\log[x(x+3)] = 1$ តាមលក្ខណៈលោការីតនៃផលគុណ

$x(x+3) = 10^1$ សរសេរជារាងអិចស្ប៉ូណង់ស្យែល

$x^2+3x-10 = 0$ ជារាងសមីការដឺក្រេទីពីរ

$(x+5)(x-2) = 0$ ដាក់ជាផលគុណកត្តា

$x = -5$, $x = 2$ ។

ផ្ទៀងផ្ទាត់ ចំពោះ $x = -5$ មិនយក ព្រោះមិនផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌនៃសមីការ $x \in (0, \ +\infty)$

ចំពោះ $x = 2$ ផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌ $x \in (0, \ +\infty)$ ។

ដូចនេះ សមីការមានឫស $x = 2$ ។

លំហាត់គំរូ ដោះស្រាយសមីការ

ក. $\log_6 x + \log_6(x-5) = 2$

ខ. $3\log_5 x - \log_5 4 = \log_5 16$

គ. $\log_4 x + \log_4(x-6) = 2$ ។

ចម្លើយ ក. $\log_6 x + \log_6(x-5) = 2$

មានន័យកាលណា $\begin{cases} x > 0 \\ x-5 > 0 \end{cases}$ ឬ $x > 5$ ។

$\log_6 x(x-5) = 2$ តាមលក្ខណៈផលគុណនៃលោការីត

$\log_6 x(x-5) = \log_6 6^2$ ព្រោះ $2 = \log_6 6^2$

$x^2-5x = 36$ ជារាងសមីការដឺក្រេទី 2

$x^2-5x-36 = 0$ ឬ $(x+4)(x-9) = 0 \Rightarrow x = -4$, $x = 9$ ។

ចំពោះ $x = -4$ មិនយក ព្រោះមិនផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌខាងលើ ។

ដូចនេះ សមីការមានឫស $x = 9$ ។

ខ. $3\log_5 x - \log_5 4 = \log_5 16$, សមីការមានន័យកាលណា $x > 0$

$\log_5 x^3 - \log_5 4 = \log_5 16$ ព្រោះ $3\log_5 x = \log_5 x^3$

$\log_5 \dfrac{x^3}{4} = \log_5 16$ តាមលក្ខណៈ: $\log_a\left(\dfrac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$

$x^3 = 64$ តាមលក្ខណៈនៃសមភាពរបស់អនុគមន៍លោការីត

$x = 4$ លើកឫសគូបលើអង្គទាំងពីរ ។

ដូចនេះ សមីការមានឫស $x = 4$ ។

គ. $\log_4 x + \log_4(x-6) = 2$ សមីការមានន័យកាលណា $\begin{cases} x > 0 \\ x-6 > 0 \end{cases}$ ឬ $x > 6$ ។

$\log_4 x(x-6) = 2$ លក្ខណៈនៃផលគុណលោការីត

$x^2 - 6x = 4^2$ តាមនិយមន័យនៃលោការីត

$x^2 - 6x - 16 = 0$ ដក 16 លើអង្គទាំងពីរ

$(x-8)(x+2) = 0$

$x - 8 = 0$ ឬ $x + 2 = 0$

$x = 8$ ឬ $x = -2$ ។

ដោយ $x = -2$ មិនបំពេញលក្ខខណ្ឌសមីការ ។

ដូចនេះ សមីការមានឫស $x = 8$ ។

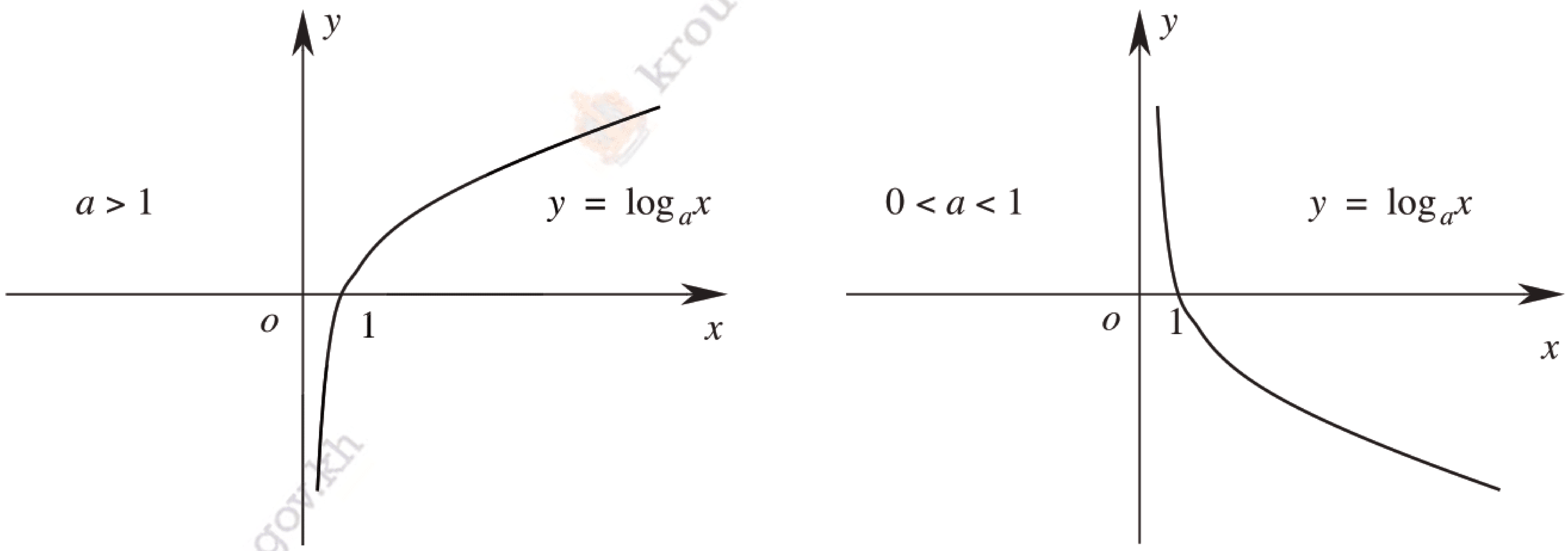
ប្រតិបត្តិ ដោះស្រាយនិងផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការខាងក្រោម :

ក. $\log_6 \frac{1}{36} = -2$ ខ. $\log_x 9 = 2$

គ. $\log_3 5 + \log_3 x = \log_3 10$ ឃ. $\log_8(x^2 + x) = \log_8 12$ ។

3.2 វិសមីការលោការីត

ក្រាបនៃអនុគមន៍លោការីត



តាមក្រាប គេសង្កេតឃើញថា :

- បើ $a > 1$ នោះក្រាបនៃអនុគមន៍ $y = \log_a x$ កើនពីឆ្វេងទៅស្តាំ មានន័យថា កាលណាតម្លៃ x កើន តម្លៃនៃអនុគមន៍ $y = \log_a x$ កើន ។

  ដូចនេះ បើ $\log_a x_1 < \log_a x_2$ គេបាន $x_1 < x_2$

  បើ $\log_a x_1 > \log_a x_2$ គេបាន $x_1 > x_2$ ។

- បើ $0 < a < 1$ នោះក្រាបនៃអនុគមន៍ $y = \log_a x$ ចុះពីឆ្វេងទៅស្តាំ មានន័យថា កាលណា

តម្លៃ x កើន តម្លៃនៃអនុគមន៍ $y = \log_a x$ ចុះ ។

ដូចនេះ បើ $\log_a x_1 < \log_a x_2$ គេបាន $x_1 > x_2$

បើ $\log_a x_1 > \log_a x_2$ គេបាន $x_1 < x_2$ ។

ជាទូទៅ - បើ $a > 1$ វិសមីការ $\log_a f(x) < \log_a g(x)$ សមមូល $\begin{cases} f(x) > 0 \\ f(x) < g(x) \end{cases}$

- បើ $0 < a < 1$ វិសមីការ $\log_a f(x) < \log_a g(x)$ សមមូល $\begin{cases} g(x) > 0 \\ f(x) > g(x) \end{cases}$ ។

លំហាត់គំរូ ដោះស្រាយវិសមីការខាងក្រោម :

ក. $\log_9 x > \dfrac{3}{2}$ ខ. $\log_8(3x-1) < \log_8(x+5)$ គ. $\log_{\frac{1}{2}} 12 < \log_{\frac{1}{2}}(5x-3)$ ។

ចម្លើយ ដោះស្រាយវិសមីការខាងក្រោម :

ក. $\log_9 x > \dfrac{3}{2}$ វិសមីការមានន័យកាលណា $x > 0$ ។

$\log_9 x > \dfrac{3}{2}$ សមមូល $x > 9^{\frac{3}{2}}$ បំប្លែងវិសមីការលោការីត ទៅជាវិសមីការអិចស្ប៉ូណង់ស្យែល

$x > (3^2)^{\frac{3}{2}}$ ព្រោះ $9 = 3^2$

$x > 3^3$ ស្វ័យគុណនៃស្វ័យគុណ

$x > 27$ ។

ដូចនេះ វិសមីការមានសំណុំឫស $x \in (27, \ +\infty)$ ។

ខ. $\log_8(3x-1) < \log_8(x+5)$ វិសមីការមានន័យកាលណា $\begin{cases} 3x-1>0 \\ x+5>0 \end{cases}$ ឬ $x > \dfrac{1}{3}$ ។

$\log_8(3x-1) < \log_8(x+5)$ នាំឱ្យ $3x-1 < x+5$

$2x < 6$ ឬ $x < 3$ ។

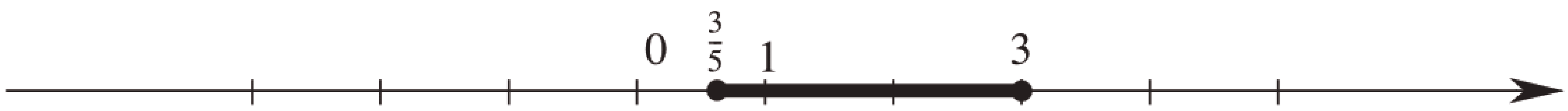
បកស្រាយតាមក្រាហ្វិក

ដូចនេះ វិសមីការមានចម្លើយ $x \in \left(\dfrac{1}{3}, \ 3\right)$ ។

គ. $\log_{\frac{1}{2}} 12 < \log_{\frac{1}{2}}(5x-3)$ វិសមីការមានន័យកាលណា $5x-3>0$ ឬ $x > \dfrac{3}{5}$ ។

$\log_{\frac{1}{2}}12 < \log_{\frac{1}{2}}(5x-3)$ សមមូល $12 > 5x-3$ (ប្ដូរទិសដៅវិសមីការ ព្រោះគោល $\frac{1}{2}$)

$5x < 15$ ឬ $x < 3$ ។



ដូចនេះ វិសមីការមានចម្លើយ $x\in\left(\frac{3}{5},\ 3\right)$ ។

ប្រតិបត្តិ ដោះស្រាយវិសមីការខាងក្រោម :

ក. $\log_2 n > 8$

ខ. $\log_{\frac{1}{3}} a < 0$

គ. $\log_8 x \le -2$

ឃ. $\log(x^2-6) > \log x$ ។

4. អនុវត្តន៍លើអនុគមន៍លោការីត

4.1 តម្លៃកើនតាមឆ្នាំ

មនុស្សម្នាក់បានយកប្រាក់ចំនួន 2 925 000 ៛ ទៅផ្ញើនៅធនាគារដោយទទួលបានអត្រាការប្រាក់ 10 % ក្នុងមួយឆ្នាំ។ ធនាគារទូទាត់ការប្រាក់ មួយឆមាសម្ដង ។ តើរយៈពេលប៉ុន្មានឆ្នាំ ទើបធ្វើឱ្យប្រាក់របស់គាត់កើនដល់ 3 705 000 ៛ ?

ចម្លើយ តាមរូបមន្ត $A = P\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt}$, $P = 2\ 925\ 000$ ៛ , $r = \frac{10}{100} = 0.10$, $A = 3\ 705\ 000$ ៛

គេបាន $3\ 705\ 000 = 2\ 925\ 000\left(1+\frac{0.10}{2}\right)^{2t}$ ឬ $\frac{3\ 705\ 000}{2\ 925\ 000} = 1.05^{2t}$

$$1266.67 = 1.05^{2t}$$

$$\log 1266.67 = \log 1.05^{2t}$$

$$\log 1266.67 = 2t\log 1.05$$

នាំឱ្យ $t = \frac{\log 1266.67}{2\log 1.05} \approx 2.42$ ។

ដូចនេះ ដើម្បីឱ្យប្រាក់របស់គាត់កើនដល់ 3 705 000 ៛ គាត់ត្រូវប្រើពេលអស់ប្រហែល 2.42 ឆ្នាំ ។

4.2 តម្លៃថយតាមឆ្នាំ

បើយើងសង្កេតលើរបស់មួយចំនួនដែលយើងជួបប្រទះរាល់ថ្ងៃ យើងឃើញថា មានរបស់ខ្លះ

ឡើងថ្លៃជារៀងរាល់ថ្ងៃដូចជា ដី ផ្ទះ ជាដើម ។ ល ។ ទន្ទឹមនឹងរបស់ដែលកើនតម្លៃរហូតដូចនេះ ក៏មានរបស់ខ្លះចុះថ្លៃរហូតដែរដូចជា រថយន្ត ម៉ូតូ ។ ល ។ ឧទាហរណ៍ បើយើងទិញរថយន្តថ្មីមួយគ្រឿងតម្លៃ 20 000 ដុល្លារ ហើយតម្លៃរថយន្តនេះនឹងចុះថ្លៃ 15 % ជារៀងរាល់ឆ្នាំ នោះតារាងតម្លៃរថយន្តចំនួន 4 ឆ្នាំក្រោយ បង្ហាញដូចតារាងខាងក្រោម :

ចំនួនឆ្នាំទិញរថយន្ត	**តម្លៃរថយន្តជាដុល្លារ**
0	20 000
1	17 000
2	14 450
3	12 282.5
4	10 440.13

យើងសង្កេតឃើញថា តម្លៃរថយន្តមានការថយចុះជារៀងរាល់ឆ្នាំ ទៅតាមអត្រាភាគរយកំណត់របស់វា ។

ឧទាហរណ៍ មនុស្សម្នាក់បានផឹកតែទឹកកកក្រូចឆ្មារមួយកែវ ដែលមានសារជាតិស្ករចំណុះ 130 មីលីក្រាម ។ បើស្ករលាយចូលក្នុងសារពាង្គកាយក្នុងអត្រា 11 % ក្នុងមួយម៉ោង ។ តើរយៈពេលប៉ុន្មានម៉ោង ទើបសារជាតិស្ករលាយចូលក្នុងរាងកាយអស់ពាក់កណ្ដាលនៃបរិមាណស្ករដែលមាន ?

ចម្លើយ ប្រើរូបមន្ត $y = a(1-r)^t$ ដោយ $y = \frac{130}{2} = 65$, $r = \frac{11}{100} = 0.11$, $a = 130$

គេបាន $65 = 130(1-0.11)^t$

$$0.89^t = 0.5 \text{ ឬ } \log 0.89^t = \log 0.5 \Leftrightarrow t \log 0.89 = \log 0.5$$

$$t = \frac{\log 0.5}{\log 0.89} \text{ ឬ } t \approx 5.9480 \text{ ។}$$

ដូចនេះ ដើម្បីឱ្យស្ករជ្រាបចូលក្នុងរាងកាយអស់ពាក់កណ្ដាល គេត្រូវប្រើពេលប្រហែល 6 ម៉ោង ។

ប្រតិបត្តិ

ក. ពូសៅបានយកប្រាក់ចំនួន 2 000 000 ៛ ទៅផ្ញើនៅធនាគារដោយទទួលបានអត្រាការប្រាក់ 6 % ក្នុងមួយឆ្នាំ ។ តើរយៈពេលប៉ុន្មានឆ្នាំ ទើបប្រាក់របស់គាត់កើនឡើងពីរដង ?

ខ. គ្រឹះស្ថានបោះពុម្ព និងចែកផ្សាយបានទិញកុំព្យូទ័រមួយគ្រឿងថ្លៃ 3 000 ដុល្លារ ។ បើគេគិតប្រាក់រំលេស់ 20 % ជារៀងរាល់ឆ្នាំ ចូររកតម្លៃកុំព្យូទ័រក្នុងរយៈពេល 3 ឆ្នាំក្រោយ ។

គ. តាមការស្រង់ស្ថិតិនាឆ្នាំ 2000 ប្រទេសចិនមានប្រជាជន 1.26 ពាន់លាននាក់ ដែលជាចំនួនច្រើនជាងគេបំផុតនៅលើពិភពលោក ។ ប្រទេសដែលមានចំនួនប្រជាជនច្រើនបន្ទាប់ពីប្រទេសចិន គឺប្រទេសឥណ្ឌា ដែលមានចំនួន 1.01 ពាន់លាននាក់ ។ ចំនួនប្រជាជននៃប្រទេសឥណ្ឌា និងប្រទេសចិន អាចគណនាតាមសមីការ $I(t) = 1.01e^{0.015t}$ និង $C(t) = 1.26e^{0.009t}$ (គេកំណត់ $e = 2.7183$) តាមសមីការគំរូទាំងពីរ តើនៅឆ្នាំណាដែលប្រទេសឥណ្ឌាកើនចំនួនប្រជាជនច្រើនជាងប្រទេសចិន ?

មេរៀនសង្ខេប

I. អនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែល

1. **ស្វ័យគុណ** បើ $\underbrace{a \cdot a \cdot a \ldots \cdot a}_{n\text{ កត្តា}} = a^n$ ដែល $n \in \mathbb{N}$

- បើ a និង b ជាចំនួនពិត ហើយ m និង n ជាចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីប គេបាន

ក. $a^m \times a^n = a^{m+n}$ ខ. $(a^m)^n = a^{mn}$ គ. $(ab)^n = a^n b^n$

ឃ. $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$, $(b \neq 0)$ ង. $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$, $(a \neq 0)$ ។

- ដើម្បីសម្រួលក្នុងការសរសេរ គេកំណត់ដូចតទៅ

ក. $a^0 = 1$, $(a \neq 0)$ ខ. $\frac{1}{a^n} = a^{-n}$, $(a \neq 0)$, $n \in \mathbb{N}$ ។

2. **ឫសទី n**

- បើ a ជាចំនួនពិត ក. $\sqrt[n]{a^n} = |a|$ បើ n ជាចំនួនគត់គូ ខ. $\sqrt[n]{a^n} = a$ បើ n ជាចំនួនគត់សេស ។

- លក្ខណៈឫសទី n

ក. $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$ ខ. $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$, $b \neq 0$

គ. $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$ ឃ. $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}$ ង. $\sqrt[nk]{a^{mk}} = \sqrt[n]{a^m}$ ។

- បើ $a > 0$, $a \neq 1$ $a^x = a^y$ សមមូល $x = y$ ។
- អនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែល កំណត់ដោយ $f(x) = a^x$, $x \in \mathbb{R}$, $a > 0$ និង $a \neq 1$ ។
- បើ P ប្រាក់ដើម i អត្រាការប្រាក់ប្រចាំឆ្នាំ n ជាចំនួនឆ្នាំ ចំនួនប្រាក់សរុបគឺ $A = P(1+i)^n$ ។

II. អនុគមន៍លោការីត

- បើ (a, b) ផ្ទៀងផ្ទាត់ $f(x)$ ហើយ (b, a) ផ្ទៀងផ្ទាត់ $f^{-1}(x)$ នោះ $f^{-1}(x)$ ជាអនុគមន៍ច្រាសនៃអនុគមន៍ $f(x)$ ។
- បើអនុគមន៍ពីរច្រាសគ្នា នោះក្រាបនៃអនុគមន៍ទាំងពីរឆ្លុះគ្នាធៀបនឹងបន្ទាត់ $y = x$ ។
- បើ $a^x = y$ នោះ $x = \log_a y$, $y > 0$, $a > 0$, $a \neq 1$ ហើយ $f(x) = a^x$ មានអនុគមន៍ច្រាស $f^{-1}(x) = \log_a x$ ។
- លក្ខណៈលោការីត : ចំពោះគ្រប់ $x > 0$, $y > 0$, $a > 0$, $a \neq 1$ និង $b > 0$, $b \neq 1$ គេបាន :

ក. $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y \quad (x, y > 0)$ ខ. $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$

គ. $\log_a x^n = n\log_a x$ ឃ. $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$

ង. $\log_a a = 1$ ច. $\log_a 1 = 0$ ឆ. $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$

ជ. $\log_a a^x = x$ ឃ. $a^{\log_a x} = x$ ។

លំហាត់

1. រកសមីការនៃអនុគមន៍ច្រាសរបស់អនុគមន៍ខាងក្រោម :

ក. $y = 4x - 3$ ខ. $y = 3x^2 + 1$ គ. $x^2 - 3y^2 = 3$

ឃ. $xy = -6$ ង. $xy^2 = 1$ ច. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$

ឆ. $y = \frac{5}{x}$ ជ. $y = \sqrt{x-2}$ ។

2. គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x) = x - 2$ ។ ចូរកំណត់អនុគមន៍ច្រាស $f^{-1}(x)$ រួចសង់ក្រាបរបស់វា ។

3. សង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម

ក. $y = \log_5 x$ ខ. $y = \log_7 x$ គ. $y = \log_{10} x$

ឃ. $y = \log_{1.5}x$ ង. $y = \log_{0.5}x$ ច. $y = \log_{0.3}x$ ។

4. បំប្លែងជាទម្រង់លោការីត

ក. $10^4 = 10000$ ខ. $8^{\frac{1}{3}} = 2$ គ. $16^{\frac{1}{4}} = 2$

ឃ. $5^{-2} = \frac{1}{25}$ ង. $4^{-3} = \frac{1}{64}$ ច. $10^{0.3010} = 2$

ឆ. $x^{-a} = y$ ជ. $A = k^c$ ។

5. សម្រួល ក. $3^{\log_3 2}$ ខ. $5^{\log_5 10}$ គ. $\log_a a^{10}$

ឃ. $\log_q q^a$ ង. $\log_4 64$ ច. $\log_{10} 0.1$

ឆ. $\log_{\sqrt{2}} 16$ ជ. $\log_{10} 1$ ។

6. ដោះស្រាយសមីការលោការីត

ក. $\log_3 x = 3$ ខ. $\log_x 16 = 2$ គ. $\log x + \log(x+9) = 1$

ឃ. $\log_2 x = -1$ ង. $\log_9 x = \frac{1}{2}$ ច. $\log_8 x = \frac{1}{3}$

ឆ. $\log\sqrt[3]{x} = \sqrt{\log x}$ ជ. $\log_4(x+3) + \log_4(x-3) = 2$

ឈ. $\log_5\sqrt{x^2+1} = \sqrt{1}$ ញ. $\log\sqrt[3]{x^2} + \log\sqrt[3]{x^4} = \log 2^{-3}$ ។

7. ដោះស្រាយវិសមីការលោការីត

ក. $\log_2 2x \le \log_4(x+3)$ ខ. $\log_3(3x-5) \ge \log_3(x+7)$

គ. $\log\frac{x^2-x}{x^2-1} < 0$ ឃ. $\log_{0.5}x^2 < \log_{0.5}3x$

ង. $\log_5 12 < \log_5(5x-3)$ ច. $\log(x^2-2x+3) \ge 0$

ឆ. $\log_8(3x-1) < \log_8(x+5)$ ។

8. ពូសេងយកប្រាក់ 4 000 000 ៛ ទៅធ្វើវិនិយោគទុន ដោយទទួលបានអត្រាការប្រាក់ 6 % ក្នុងមួយឆ្នាំ។ តើប៉ុន្មានឆ្នាំក្រោយ ទើបប្រាក់របស់គាត់កើនឡើងពីរដង ?

9. មីងសុខាបានទិញរថយន្តថ្មីមួយគ្រឿងថ្លៃ 38 500 ដុល្លារ ។បើរថយន្តចុះថ្លៃក្នុងអត្រា 15 % ក្នុងមួយឆ្នាំ។ តើរយៈពេល 7 ឆ្នាំក្រោយ រថយន្តគាត់នៅសល់ថ្លៃប៉ុន្មាន ?

លំហាត់ជំពូក

1. ដោះស្រាយសមីការអិចស្ប៉ូណង់ស្យែល

   ក. $3^{x^2} = 81^{x-1}$ ខ. $9^{(2x-1)^2} = 3^{x+3}$

   គ. $2(3)^{2x+3} = 3 - 7(3^x)$ ឃ. $2^{2x+3} - 2^x = 1 - 2^{x+3}$ ។

2. បើ $a^x = b^y = (ab)^z$ ។ បង្ហាញថា $xy = z(x+y)$ ។

3. បើ $2^x = 3^y = 12^z$ ។ បង្ហាញថា $ab = c(a+2b)$ ។

4. បើ $a = \sqrt{3} + \sqrt{2}$ និង $b = \sqrt{3} - \sqrt{2}$ ។ បង្ហាញថា $\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} = 1$ ។

5. បើ $a^2 + b^2 = 11ab$ ។ បង្ហាញថា $\log a + \log b = 2\log\left(\frac{a-b}{3}\right)$ ។

6. បើ $\log_x M = a$ និង $\log_y M = b$ ។ បង្ហាញថា $\log_{xy} M = \frac{ab}{a+b}$ ។

7. ដោះស្រាយសមីការលោការីត

   ក. $2 + \log_{10}(2x-3) = \log_{10}x^2 + \log_{10}25$ ខ. $6(\log_x 8 + \log_8 x) = 13$

   គ. $\log_x 9 + \log_9 x = \frac{5}{2}$ ឃ. $\log_9 x + \log_{x^2} 9 = 1$ ។

8. ដោះស្រាយវិសមីការអិចស្ប៉ូណង់ស្យែល

   ក. $25^x \geq 125^{3x-2}$ ខ. $3^x > 27$ គ. $4^x - 6(2^x) + 8 > 0$

   ឃ. $15^x \geq \frac{1}{\sqrt[4]{15^3}}$ ង. $\left(\frac{1}{5}\right)^x < \sqrt[3]{0.04}$ ច. $(0.3)^x \leq \frac{100}{9}$ ។

9. ដោះស្រាយវិសមីការលោការីត

   ក. $\log_{3x-2} x \leq 1$ ខ. $\log_4^2 x - \log_2 x - 15 < 0$

   គ. $\log_4(3^x - 1) \cdot \log_{\frac{1}{4}} \frac{3^x - 1}{16} < \frac{3}{4}$ ឃ. $x \cdot \log_{0.1}(x^2 + x + 1) \geq 0$

   ង. $\log_{\frac{x}{5}}(x^2 - 8x + 16) \leq 0$ ច. $\log_{x-\frac{9}{2}} \frac{x+4}{2x-6} \leq \log_{x-\frac{9}{2}}(x-5)$ ។

10. មនុស្សម្នាក់បានយកប្រាក់ទៅផ្ញើនៅធនាគារអេស៊ីលីដា ដោយទទួលបានអត្រាការប្រាក់ 4 % ក្នុងមួយឆ្នាំ។ បើគាត់វិនិយោគប្រាក់នេះតាំងពីឆ្នាំ 1996 មក តើបច្ចុប្បន្ននេះឆ្នាំ 2007 គាត់មានប្រាក់សរុបទាំងអស់ប៉ុន្មាននៅធនាគារ ?

11. គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x) = a^x$ និងអនុគមន៍ច្រាស $f^{-1}(x) = \log_a x$ ដែល a ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាននិង $a \neq 1$ ។

    ក. រកតម្លៃ a ដើម្បីឱ្យក្រាបនៃអនុគមន៍ $f(x)$ និង $f^{-1}(x)$ កាត់គ្នា។

    ខ. រកគ្រប់ចំណុចដែលក្រាបនៃអនុគមន៍ទាំងពីរកាត់គ្នា (ក្នុងសំណួរក)។

ជំពូក 3

អនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រ

❶ អនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រ

❷ រូបមន្តត្រីកោណមាត្រ

❸ សមីការនិងវិសមីការត្រីកោណមាត្រ

នៅថ្នាក់ទី 10 យើងបានសិក្សារួចមកហើយពីអនុគមន៍ពហុធា ដូចជា $y = au$, $y = au^2$ $y = au^3 \ldots$ ដែលអនុវត្តក្នុងចលនាស្មើ ឬទន្លាក់សេរី ។

នៅថ្នាក់ទី 11 នេះ យើងនឹងសិក្សាពីចលនាមួយទៀត ដូចចលនារំយោលនៃប៉ោលនាឡិកាមួយជាចលនាខួប ។ ចលនានេះសិក្សានៅក្នុងអនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រជាអនុគមន៍ខួប ដូចជាអនុគមន៍ស៊ីនុសអនុគមន៍កូស៊ីនុស និងអនុគមន៍តង់សង់ ។

មេរៀនទី

1 អនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រ

1. រង្វាស់មុំ

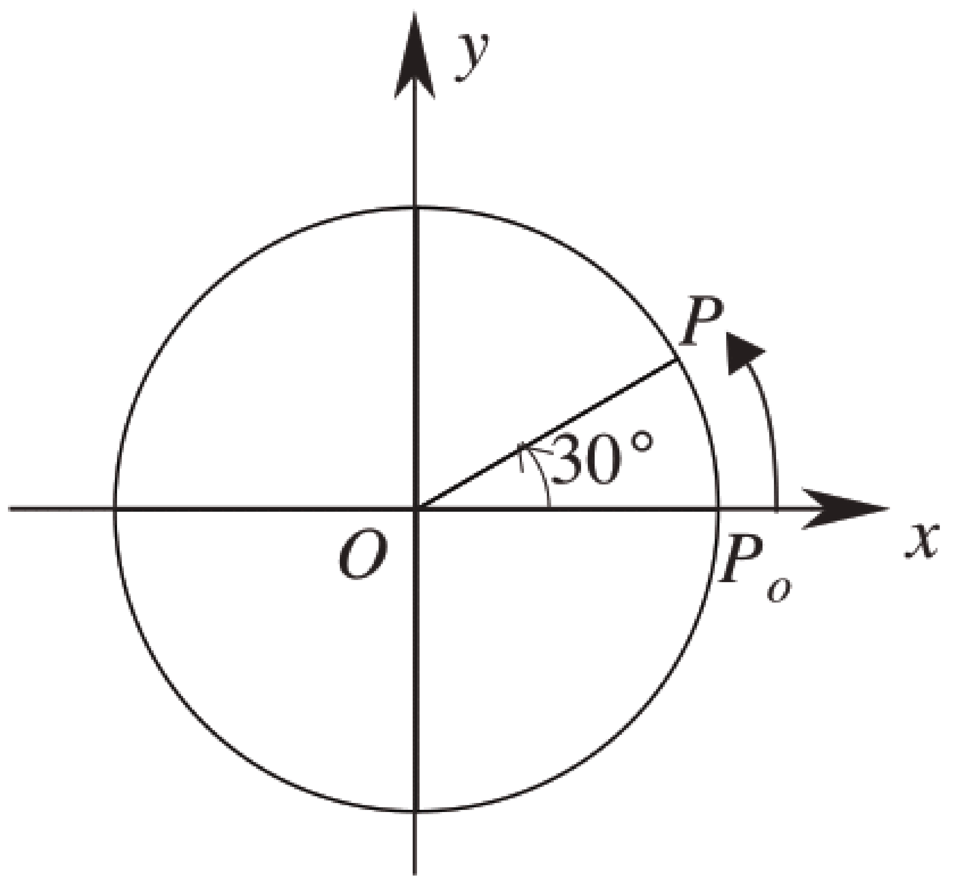
1.1 ការកំណត់មុំមានទិសដៅ

វត្ថុបំណង

- បំប្លែងមុំពីដឺក្រេទៅរ៉ាដ្យង់ និងពីរ៉ាដ្យង់ទៅដឺក្រេ
- ប្រើលក្ខណៈមុំផ្តុំក្នុងការគណនាអនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រ
- សង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រ ។

ឧទាហរណ៍ 1 ក្នុងរង្វង់ត្រីកោណមាត្រគេប្រើវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{OP_o}$ និង $\overrightarrow{OP}$ មកកំណត់មុំ ។

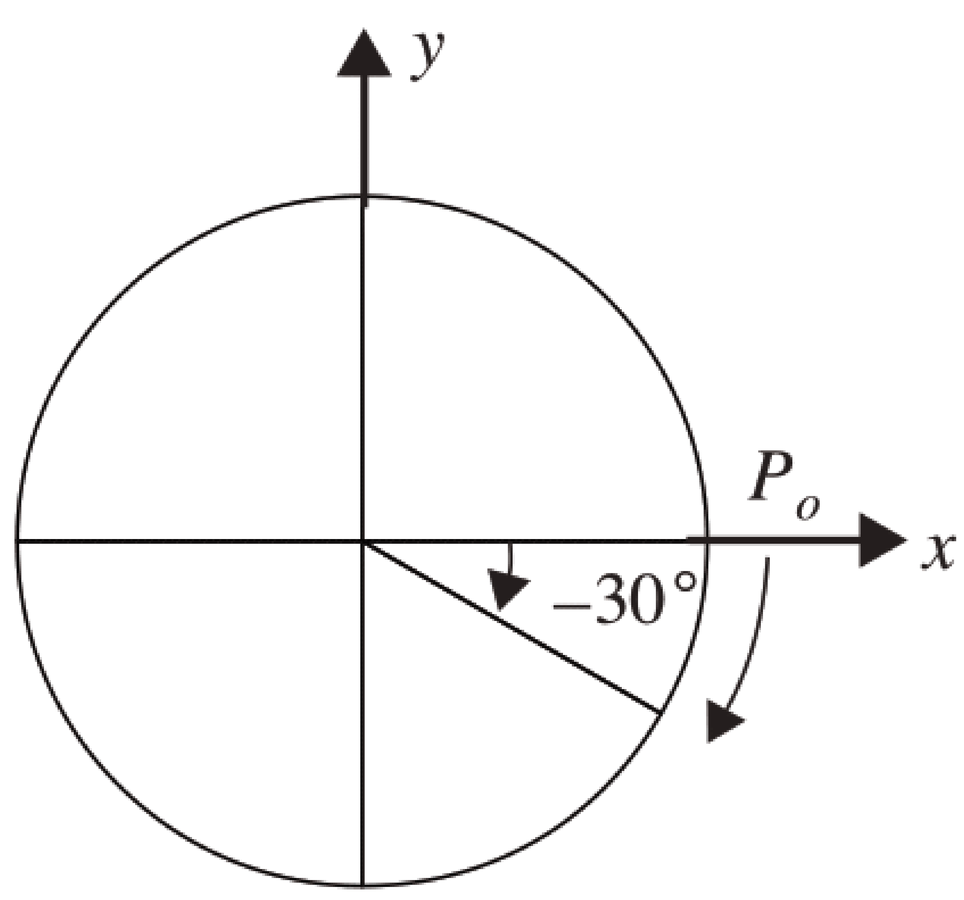
$\overrightarrow{OP_o}$ ជាវ៉ិចទ័រនឹងឋិតនៅផ្នែកវិជ្ជមាននៃអ័ក្ស $\overrightarrow{Ox}$ ហៅថាវ៉ិចទ័រគល់ ។ $\overrightarrow{OP}$ ជាវ៉ិចទ័រចល័តជុំវិញគល់ O ហៅថាវ៉ិចទ័រចុង ។



រូប ក

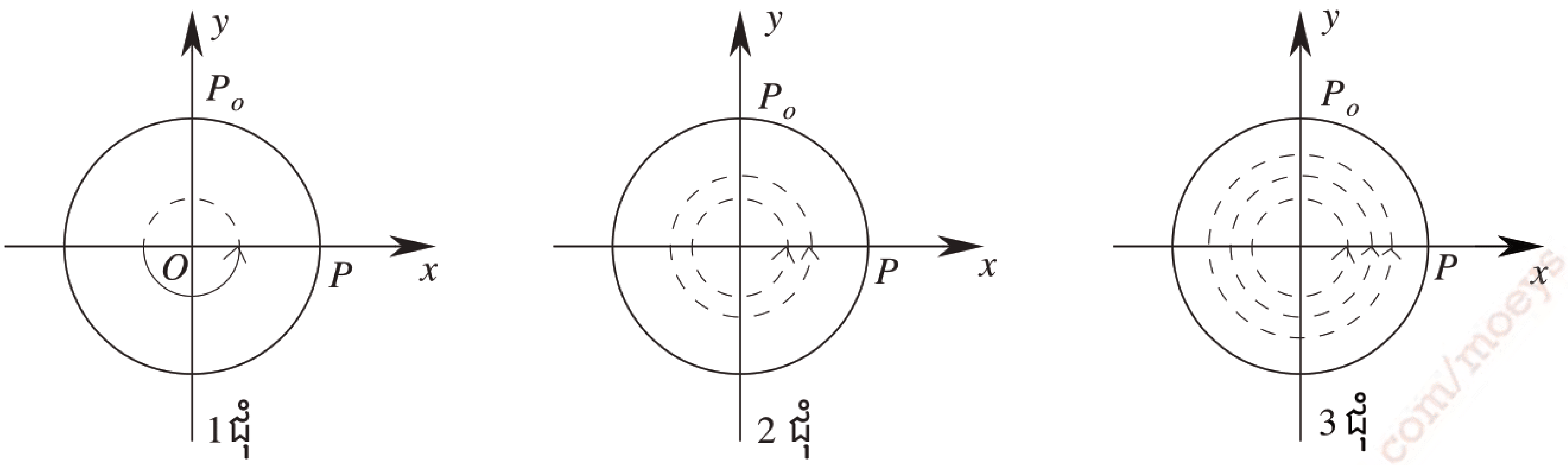
វ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{OP_o}$ និង $\overrightarrow{OP}$ បង្កើតបានមុំតាមករណីដូចខាងក្រោម :

- ក្នុងករណីវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{OP}$ វិលច្រាសនឹងទិសដៅនៃទ្រនិចនាឡិកា មុំដែលបង្កើតបានជាមុំវិជ្ជមាន ។ (រូប ក) $(\overrightarrow{OP_o}\ ,\overrightarrow{OP}) = 30°$ ។
- ក្នុងករណីវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{OP}$ វិលស្របនឹងទិសដៅនៃទ្រនិចនាឡិកា មុំដែលបង្កើតបានជាមុំអវិជ្ជមាន ។ (រូប ខ) $(\overrightarrow{OP_o}\ ,\overrightarrow{OP}) = -30°$ ។



រូប ខ

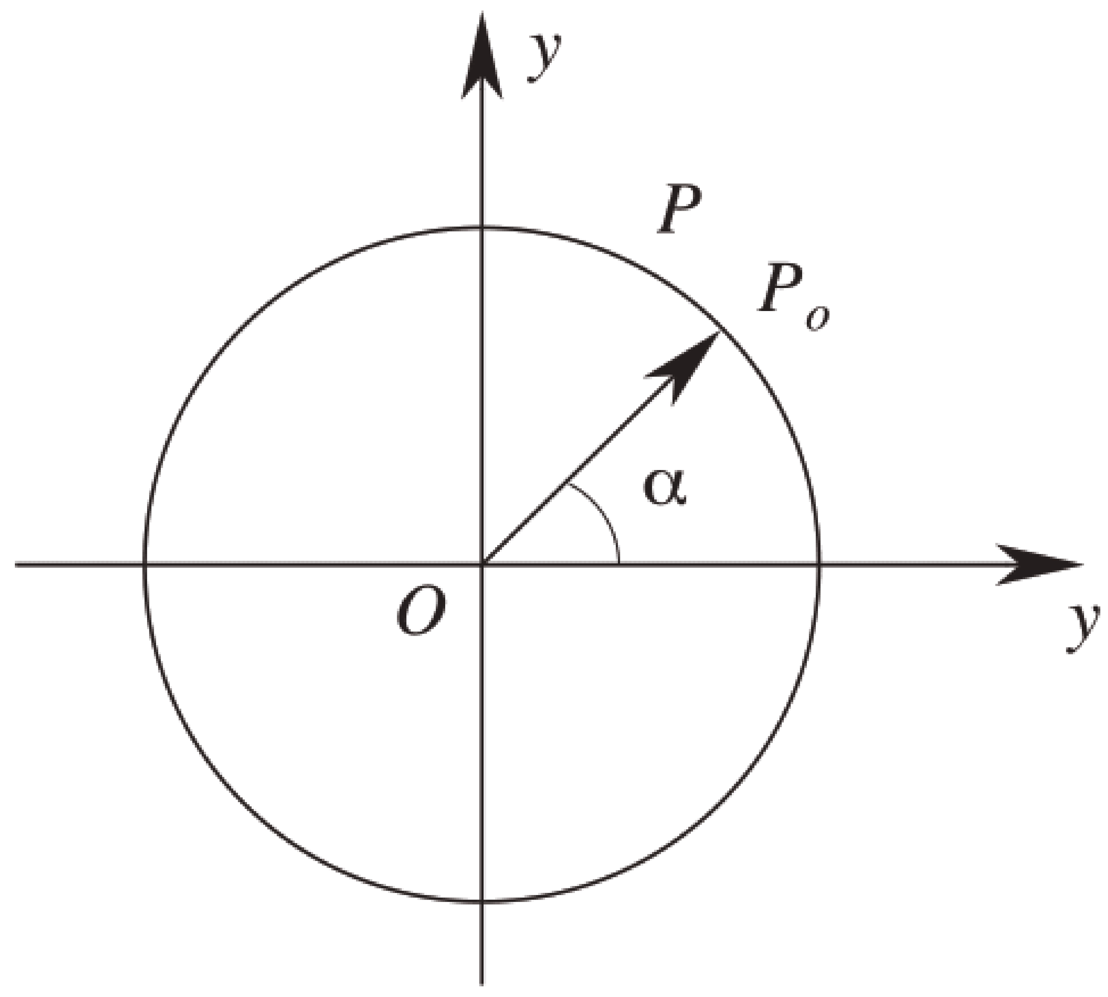
ឧទាហរណ៍ 2 តាមទិសដៅវិជ្ជមាន បើ $\overrightarrow{OP}$ វិលបានមួយជុំពេញនៃរង្វង់នោះ គេនឹងបានមុំ $360°$ ហើយរង្វាស់មុំនឹងកើនជា 2 ដង ជា 3 ដង ទៅតាមចំនួនជុំនៃការវិលនេះ ។



1 ជុំ $360°$ 2 ជុំ $2 \times 360°$ 3 ជុំ $3 \times 360°$

បើ α ជាមុំកំណត់ដោយវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{OP_o}$ និង $\overrightarrow{OP}$ នោះ $\overrightarrow{OP_o}$ និង $\overrightarrow{OP}$ ក៏កំណត់មុំដែលមានរង្វាស់ផ្សេងៗគ្នាដូចខាងក្រោម :

ជាទូទៅ $\overrightarrow{OP_o}$ និង $\overrightarrow{OP}$ ជាពីរវ៉ិចទ័រកំណត់បានមុំ $\alpha + k360°$ $(k \in \mathbb{Z})$ ។



សម្គាល់ មុំ α និង $\alpha + 360°$ មានរង្វាស់ខុសគ្នា ប៉ុន្តែមានវ៉ិចទ័រគល់ និងវ៉ិចទ័រចុងដូចគ្នា ។

លំហាត់គំរូ 1 វ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{OP}$ វិលចេញពីទីតាំងដើម $\overrightarrow{OP_o}$ បានមុំ $120°$ ហើយបន្ទាប់មកវិលបានមុំ $-155°$ ទៀត ។ គណនាមុំ $(\overrightarrow{OP_o}\ ,\ \overrightarrow{OP})$ ។

ចម្លើយ $(\overrightarrow{OP_o}\ ,\ \overrightarrow{OP}) = 120° + (-155°) = -35°$ ។

លំហាត់គំរូ 2 គណនាមុំ $\alpha = 45° + k \times 360°$ ក្នុងករណី $k = 1$, $k = -1$ ។

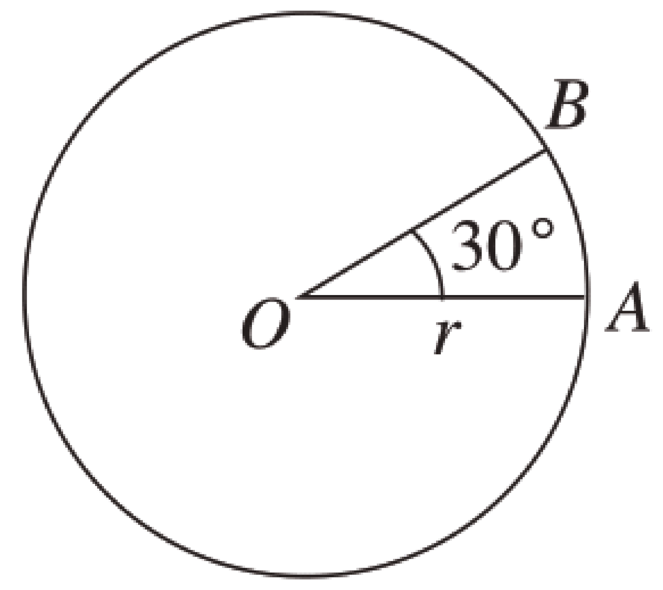
ចម្លើយ ចំពោះ $k = 1$, $\alpha = 45° + 360° = 405°$ ។ ចំពោះ $k = -1$, $\alpha = 45° - 360° = -315°$ ។

ប្រតិបត្តិ 1 បើវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{OP}$ ផ្ដើមវិលពីទីតាំងដើម $\overrightarrow{OP_o}$ បានមុំ $70°$ តាមទិសដៅអវិជ្ជមាន ហើយបន្ទាប់មកវិលបានមុំ $150°$ តាមទិសដៅវិជ្ជមាន ។ ចូរកំណត់មុំ $(\overrightarrow{OP_o}\ ,\ \overrightarrow{OP})$ ។

ប្រតិបត្តិ 2 គណនាមុំ $\alpha = -270° + k \times 360°$ ក្នុងករណី $k = 2$, $k = -3$ ។

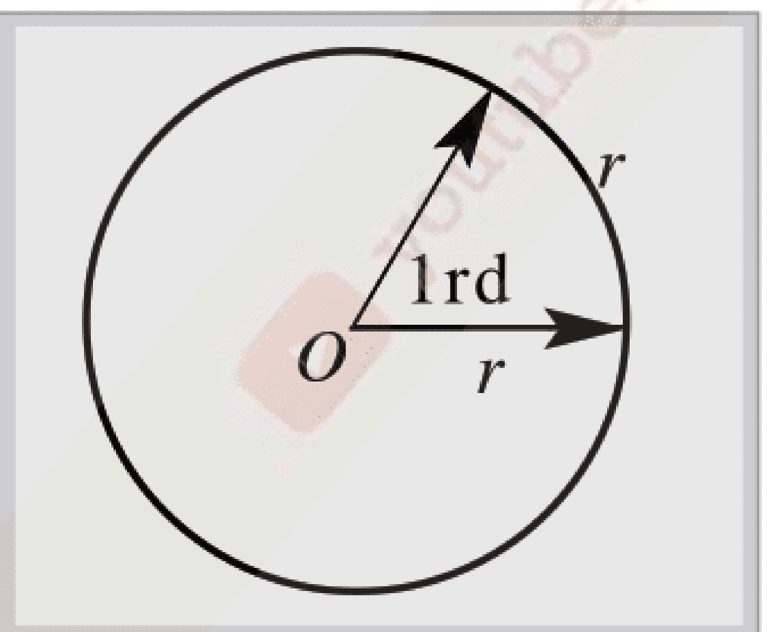
1.2 រង្វាស់មុំគិតជារ៉ាដ្យង់

ឧទាហរណ៍ រង្វង់មួយមានកាំ $r = 5\text{cm}$ និង $\angle AOB = 30°$ ។ គណនាប្រវែងធ្នូ AB ។ មុំផ្ចិតគិតជាដឺក្រេពុំមានទំនាក់ទំនងទៅនឹងប្រវែងធ្នូ AB ទេ ។



ហេតុនេះ គេបង្កើតខ្នាតរង្វាស់មុំមួយទៀត ដែលមានទំនាក់ទំនងទៅប្រវែងធ្នូ ។

និយមន័យ 1 រ៉ាដ្យង់ គឺជារង្វាស់មុំផ្ចិតដែលស្កាត់ធ្នូមួយមានប្រវែងស្មើនឹងកាំនៃរង្វង់ ហើយគេកំណត់សរសេរ $1rd$ ។



យើងដឹងថាប្រវែងធ្នូ $2\pi r$ ស្មើនឹងបរិមាត្ររង្វង់ស្កាត់ដោយមុំ $360°$ ឬ មុំ $2\pi(rd)$ ផង មានន័យថា $360° = 2\pi(rd)$ ។

យើងបានទំនាក់ទំនងរវាងរង្វាស់មុំគិតជាដឺក្រេនិងរ៉ាដ្យង់គឺ $1rd = \frac{180°}{\pi} \approx 57°$, $1° = \frac{\pi}{180} \approx 0.017$ ។

គេអាចគណនាប្រវែងធ្នូ AB ដោយគ្រាន់តែប្តូរឯកតាមុំដឺក្រេទៅរ៉ាដ្យង់ $\alpha = 30°$ ឬ $\alpha = 30 \times \frac{\pi}{180} = 0.52rd$ ប្រវែងធ្នូ $AB = \alpha \cdot r = 0.52 \times 5 = 2.6\text{cm}$ ។

ជាទូទៅ $(\overrightarrow{OP_o}\ ,\ \overrightarrow{OP}) = \alpha + 2k\pi (k \in \mathbb{Z})$ ។

សម្គាល់ រង្វាស់មុំគិតជារ៉ាដ្យង់អាចសរសេរដោយមិនប្រើ rd បាន ។

ឧទាហរណ៍ $\alpha = \frac{\pi}{4} rd$ អាចសរសេរដោយខ្លី $\alpha = \frac{\pi}{4}$ ។

លំហាត់គំរូ ប្តូរមុំ $30°$, $45°$, $150°$ ជារ៉ាដ្យង់ និងប្តូរមុំ $\frac{\pi}{5}$, $\frac{2}{3}\pi$, 3π ជាដឺក្រេ ។

ចម្លើយ $\frac{\pi}{180} \times 30 = \frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{180} \times 45 = \frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{180} \times 150 = \frac{5\pi}{6}$

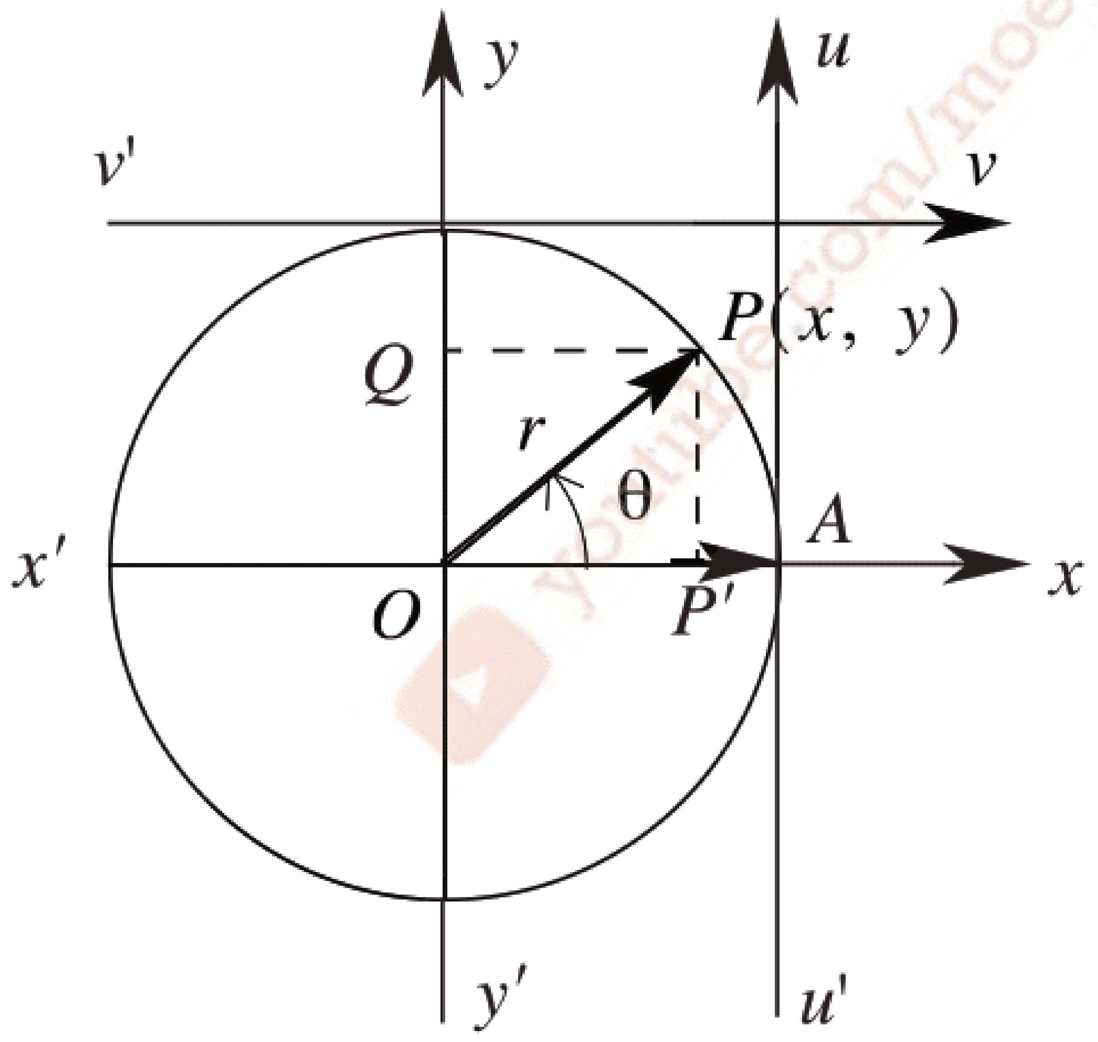
$\frac{180°}{\pi} \times \frac{\pi}{5} = 36°$, $\frac{180°}{\pi} \times \frac{2\pi}{3} = 120°$, $\frac{180°}{\pi} \times 3\pi = 540°$ ។

ប្រតិបត្តិ ប្តូរមុំពីរ៉ាដ្យង់ទៅជាដឺក្រេ $\frac{4\pi}{3}$, $\frac{-4\pi}{3}$, $\frac{7\pi}{4}$, $\frac{-7\pi}{2}$

2. អនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រ

2.1 ស៊ីនុស កូស៊ីនុស តង់សង់ និងកូតង់សង់

យើងបានសិក្សារួចមកហើយពីផលធៀបត្រីកោណមាត្រ មុំចន្លោះ $0°$ និង $180°$ ក្នុងថ្នាក់ទី 10 ។ ពេលនេះ យើងកំណត់ sin, cos, tan និង cot នៃមុំទូទៅ ។



ក្នុងរង្វង់ត្រីកោណមាត្រដែលមានផ្ចិត O និងកាំ r ។ P ជាចំណុចមួយនៅលើរង្វង់ដែលមានកូអរដោនេ $P(x, y)$ ហើយ $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OP}) = \theta$ ។ P' ជាចំណោលកែងនៃ P លើអ័ក្ស $\overrightarrow{x'x}$ និង Q ជាចំណោលកែងនៃ P លើអ័ក្ស $\overrightarrow{y'y}$ ។ គេបាន $\sin\theta = \frac{OQ}{OP} = \frac{y}{r}$, $\cos\theta = \frac{OP'}{OP} = \frac{x}{r}$, $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{y}{x}$, $\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{x}{y}$ ។

ជាទូទៅ គេបានស៊ីនុស កូស៊ីនុស តង់សង់ និងកូតង់សង់ ជាអនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រ ។

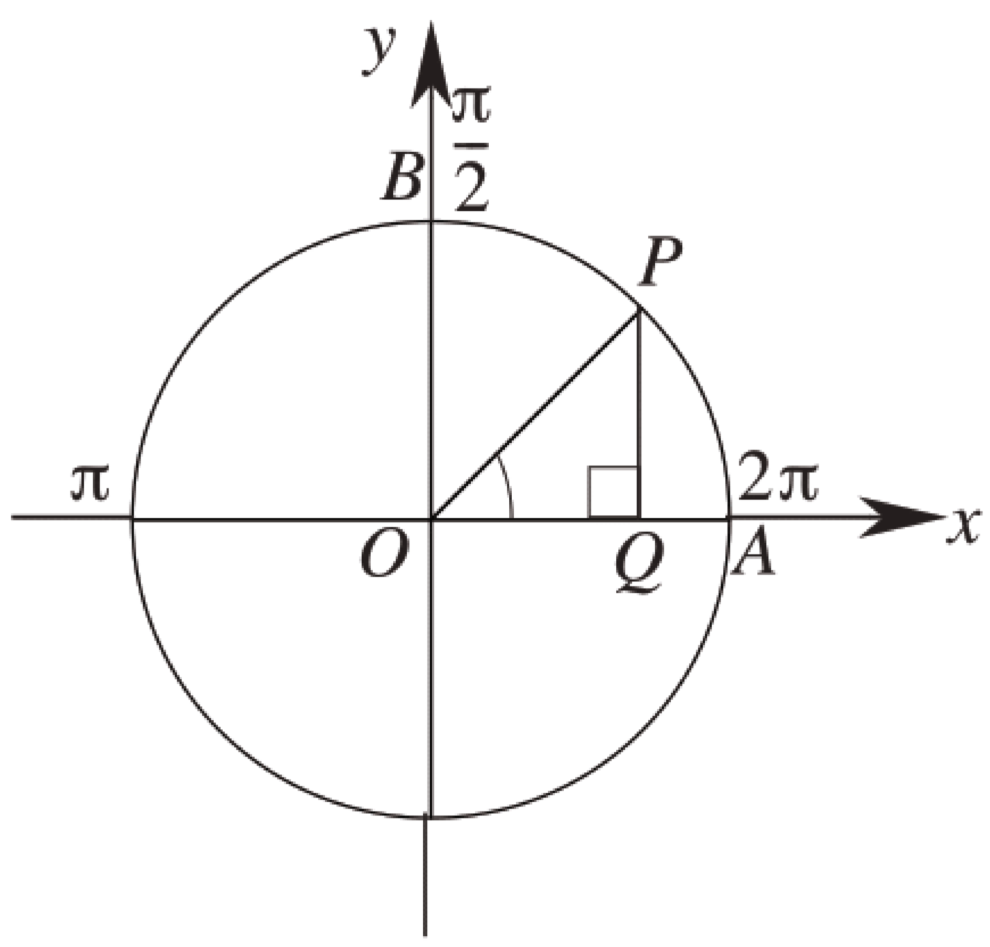
សម្គាល់ អ័ក្ស $\overrightarrow{y'y}$ ហៅថាអ័ក្សស៊ីនុស ហើយអ័ក្ស $\overrightarrow{x'x}$ ជាអ័ក្សកូស៊ីនុស ហើយអ័ក្ស $\overrightarrow{u'u}$ ជាអ័ក្សតង់សង់ និងអ័ក្ស $\overrightarrow{v'v}$ ជាអ័ក្សកូតង់សង់ ។

ឧទាហរណ៍ គណនាតម្លៃអនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រនៃមុំ $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{6}$ ។

B ជាចំណុចប្រសព្វរវាងរង្វង់និងអ័ក្ស $\overrightarrow{y'y}$ តាមទិសដៅវិជ្ជមាន ។

ដូចនេះ B ជាចំណុចដែលត្រូវនឹងតម្លៃ $\frac{\pi}{2}$ ។ តាមរូបភាពនេះគេបាន $\sin\frac{\pi}{2} = 1$, $\cos\frac{\pi}{2} = 0$ ។

$\cot\frac{\pi}{2} = \frac{\cos\frac{\pi}{2}}{\sin\frac{\pi}{2}} = \frac{0}{1} = 0$, $\tan\frac{\pi}{2} = \frac{\sin\frac{\pi}{2}}{\cos\frac{\pi}{2}}$ មិនអាចកំណត់បានព្រោះ $\cos\frac{\pi}{2} = 0$ ។



ក្នុងត្រីកោណកែង OPQ គេបាន $\angle AOP = \frac{\pi}{6}$ ហើយ $PQ = \frac{1}{2}$ ។

ដូចនេះ $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$, $\cos\frac{\pi}{6} = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ។

$$\tan\frac{\pi}{6} = \frac{\sin\frac{\pi}{6}}{\cos\frac{\pi}{6}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad , \quad \cot\frac{\pi}{6} = \frac{\cos\frac{\pi}{6}}{\sin\frac{\pi}{6}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3} \text{ ។}$$

ជាទូទៅ គេបានតារាងតម្លៃអនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រនៃមុំខ្លះដូចខាងក្រោម :

អនុ \ មុំ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\|$
cot	$\|$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

លំហាត់គំរូ គណនា ក. $2\sin\frac{\pi}{3} + 4\cos\frac{\pi}{6} - 3\tan\frac{\pi}{3} + 4\cot\frac{\pi}{4}$

ខ. $\dfrac{5 - 4\tan^2 45° + \cot^2 60°}{2\cos^2 60° - 2\sin^3 90° + 4\tan 45°}$ ។

ចម្លើយ ក. $2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} + 4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} - 3 \times \sqrt{3} + 4 \times 1 = \sqrt{3} + 2\sqrt{3} - 3\sqrt{3} + 4 = 4$ ។

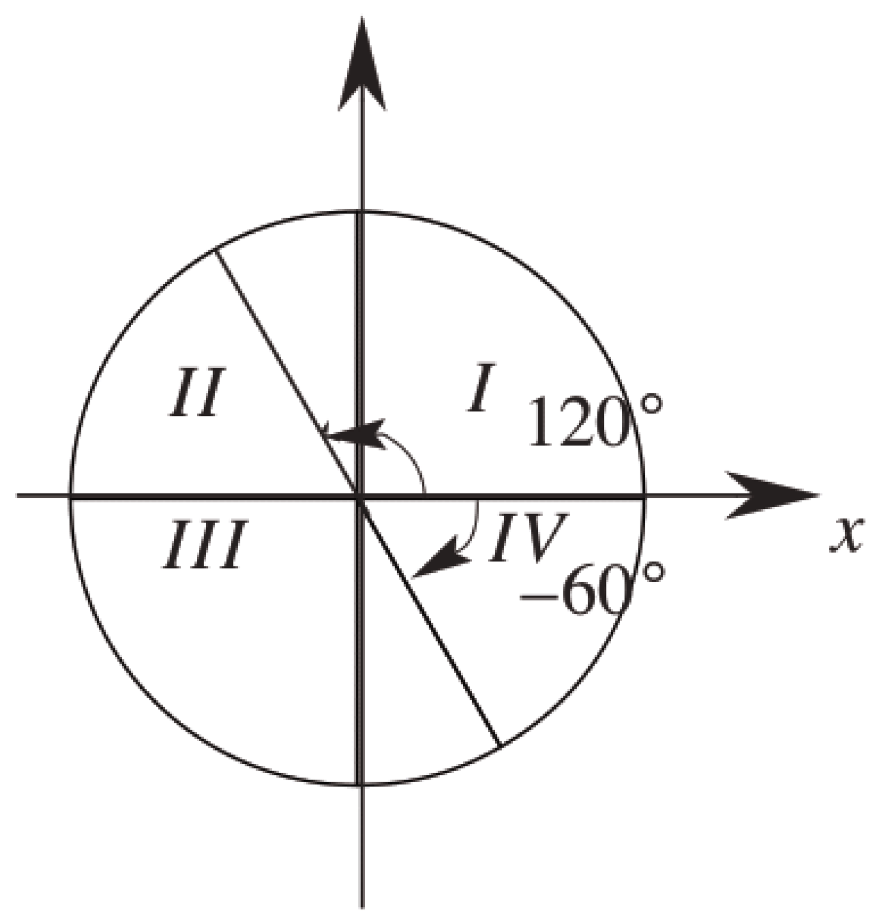
ខ $\dfrac{5 - 4 \times 1^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2}{2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 2 \times 1^3 + 4 \times 1} = \dfrac{1 + \frac{1}{3}}{2 \times \frac{1}{4} - 2 + 4} = \dfrac{8}{15}$ ។

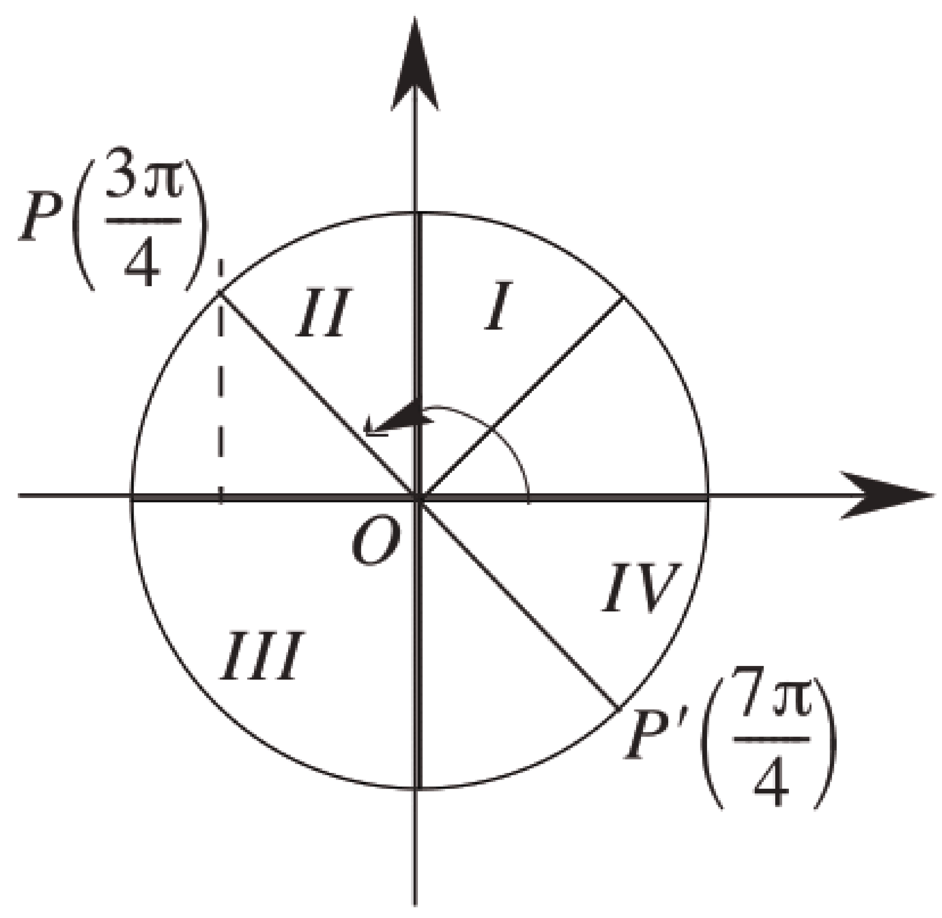
ប្រតិបត្តិ គណនា $2\sin\frac{2\pi}{4} - 3\tan^2\frac{\pi}{6} + 2\cos^4\frac{\pi}{2} + 3\cot^2\frac{\pi}{4}$ ។

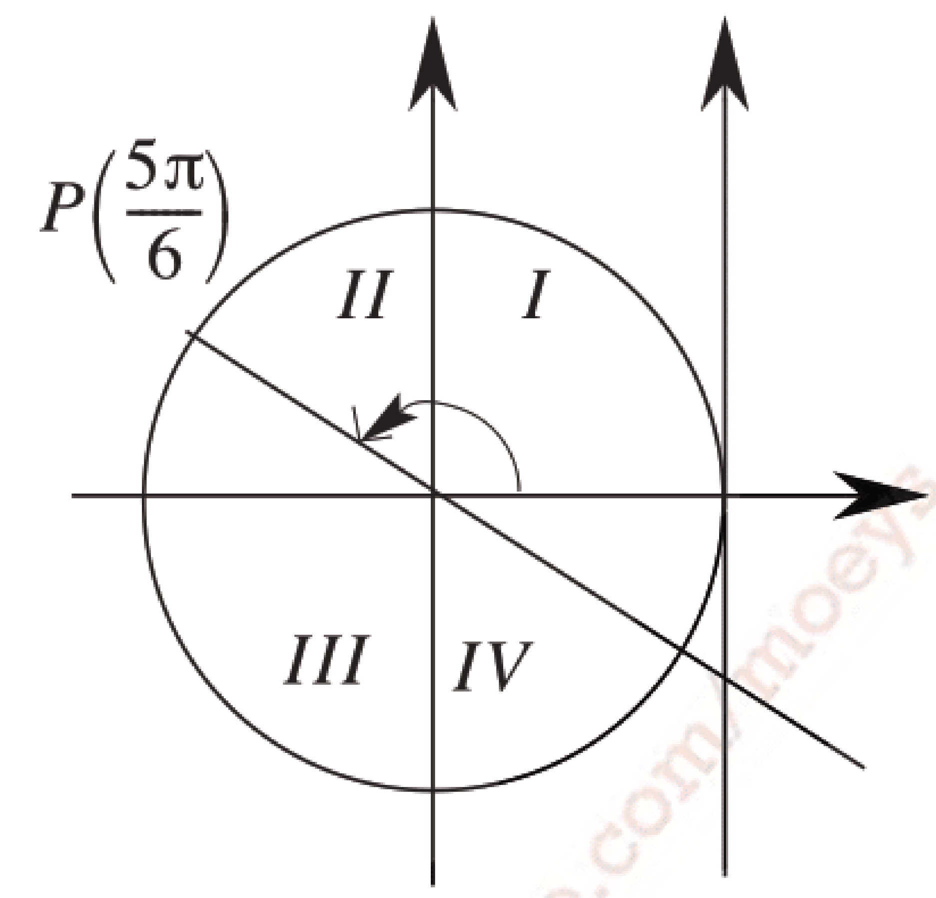
2.2 សញ្ញានៃអនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រ

រង្វង់ត្រីកោណមាត្រចែកចេញជាបួនកាដ្រង់គឺ កាដ្រង់ទី I, II, III និង IV ។ សញ្ញានៃអនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រ គឺអាស្រ័យលើរង្វាស់មុំដែលឋិតនៅក្នុងកាដ្រង់នីមួយៗ ។

ឧទាហរណ៍ គណនា $\cos 120°$, $\sin(-60°)$, $\cos\frac{3\pi}{4}$, $\sin\frac{7\pi}{4}$, $\tan\frac{5\pi}{6}$ ។







$\cos 120^\circ = -\frac{1}{2}$, $\sin(-60^\circ) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\cos\frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\tan\frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

គេបានតារាងសង្ខេបដូចខាងក្រោម :

កាដ្រង់ / អនុ	I	II	III	IV
$\sin\alpha$	+	+	−	−
$\cos\alpha$	+	−	−	+
$\tan\alpha$	+	−	+	−
$\cot\alpha$	+	−	+	−

លំហាត់គំរូ តើមុំ x នៅក្នុងកាដ្រង់ណាដែលផ្ទៀងផ្ទាត់វិសមីការ $\begin{cases}\sin x < 0\\ \cos x < 0\end{cases}$?

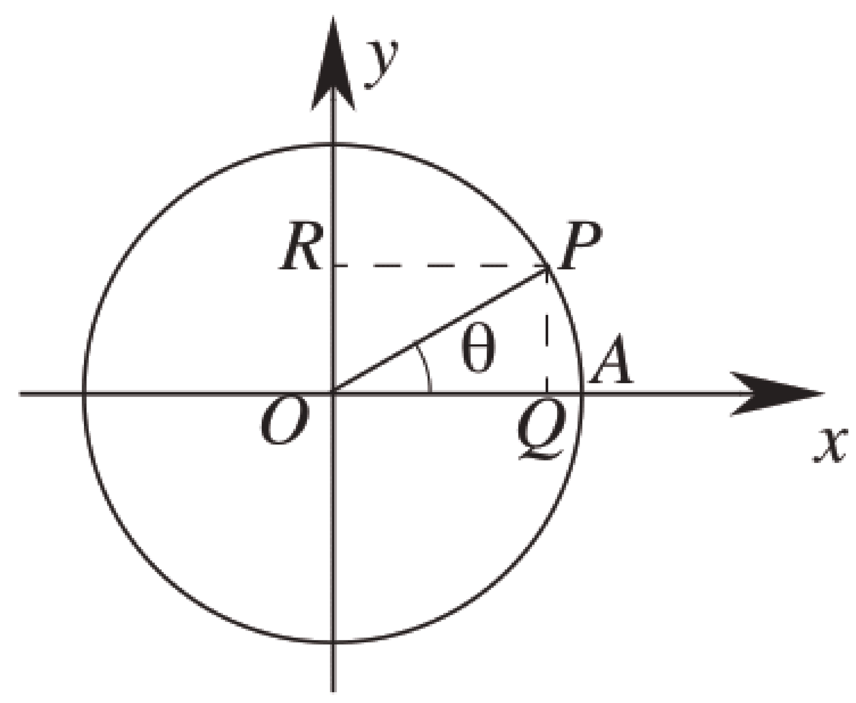
ចម្លើយ គេបាន $\sin x < 0$ និង $\cos x < 0 \Rightarrow x$ នៅកាដ្រង់ទី III ។ ដូចនេះ x នៅកាដ្រង់ទី III ។

ប្រតិបត្តិ 1 តើក្នុងកាដ្រង់ណាដែលគេអាចរកមុំផ្ទៀងផ្ទាត់វិសមីការ $\begin{cases}\cos x > 0\\ \tan x > 0\end{cases}$?

ប្រតិបត្តិ 2 តើក្នុងកាដ្រង់ណាដែល $\tan x$ និង $\cot x$ មានសញ្ញាដូចគ្នា ?

3. លក្ខណៈនៃអនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រ

3.1 ទំនាក់ទំនងសំខាន់ៗ



នៅលើរង្វង់ត្រីកោណមាត្រ θ ជារង្វាស់មុំ $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OP})$ គេបាន $\cos\theta = OQ$, $\sin\theta = OR$ ។ ក្នុងត្រីកោណកែង OPQ តាមទ្រឹស្តីបទពីតាករ គេបាន $OP^2 = OQ^2 + PQ^2$

ឬ $1 = \sin^2\theta + \cos^2\theta$ ឬ $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ (1)

គេដឹងថា $\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ ចំពោះ $\cos\theta \neq 0$ គេចែកអង្គទាំងពីរនៃទំនាក់ទំនង (1) និង $\cos^2\theta$

គេបាន $\dfrac{\sin^2\theta + \cos^2\theta}{\cos^2\theta} = \dfrac{1}{\cos^2\theta}$ ឬ $\tan^2\theta + 1 = \dfrac{1}{\cos^2\theta}$ ។

ដូចគ្នាដែរ បើគេចែកទំនាក់ទំនង (1) និង $\sin^2\theta \neq 0$ គេបាន $1 + \cot^2\theta = \dfrac{1}{\sin^2\theta}$ ។

$$\boxed{\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1 \ ; \ 1 + \tan^2\theta = \frac{1}{\cos^2\theta} \ ; \ 1 + \cot^2\theta = \frac{1}{\sin^2\theta}}$$ ។

ឧទាហរណ៍ គណនា $\cos\theta$, $\tan\theta$, $\cot\theta$ ដោយស្គាល់ $\sin\theta = \dfrac{8}{17}$ និងមុំ θ នៅកាដ្រង់ទី I ។

គេមាន $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ ។ ដោយ θ នៅកាដ្រង់ទី I នោះ $\cos\theta$ វិជ្ជមាន ។ គេបាន

$\cos\theta = \sqrt{1-\sin^2\theta} = \sqrt{1-\left(\dfrac{8}{17}\right)^2} = \sqrt{\dfrac{225}{289}} = \dfrac{15}{17}$, $\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} = \dfrac{8}{15}$ ហើយ $\cot\theta = \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta} = \dfrac{15}{8}$ ។

លំហាត់គំរូ គណនា $\dfrac{5\sin\alpha + 7\cos\alpha}{6\cos\alpha - 3\sin\alpha}$ ដោយដឹងថា $\tan\alpha = \dfrac{4}{15}$ ។

ចម្លើយ

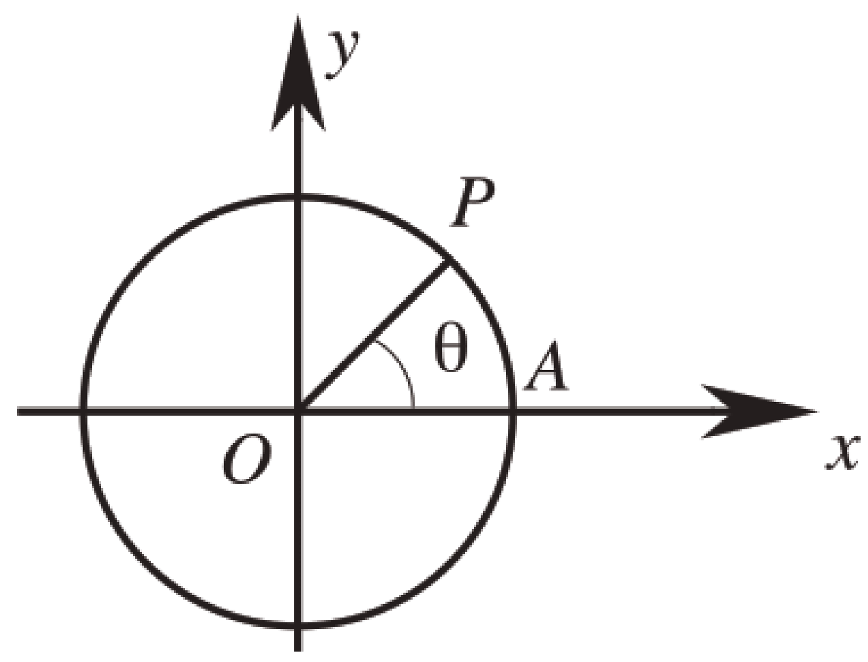
គេបាន $\dfrac{5\sin\alpha + 7\cos\alpha}{6\cos\alpha - 3\sin\alpha} = \dfrac{\cos\alpha(5\tan\alpha + 7)}{\cos\alpha(6 - 3\tan\alpha)} = \dfrac{5\tan\alpha + 7}{6 - 3\tan\alpha} = \dfrac{5\times\frac{4}{15} + 7}{6 - 3\times\frac{4}{15}} = \dfrac{\frac{4}{3} + 7}{6 - \frac{4}{5}} = \dfrac{125}{78}$ ។

ប្រតិបត្តិ 1 គណនា $\cos\alpha$, $\tan\alpha$, $\cot\alpha$ ដោយគេស្គាល់ $\sin\alpha = -\dfrac{12}{3}$ និង $\dfrac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$ ។

ប្រតិបត្តិ 2 គណនា $\dfrac{\cot\alpha + \tan\alpha}{\cot\alpha - \tan\alpha}$ ដោយស្គាល់ $\sin\alpha = \dfrac{3}{5}$ និង $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$

3.2 អនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រនៃមុំ θ និង $\theta + 2k\pi$

ដោយមុំ θ និង $\theta + 2k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$ ជាមុំកំណត់ដោយវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{OA}$ និង $\overrightarrow{OP}$ ដូចគ្នានោះ គេបានរូបមន្ត :



$$\boxed{\begin{array}{ll} \sin(\theta + 2k\pi) = \sin\theta \ , & \cos(\theta + 2k\pi) = \cos\theta \\ \tan(\theta + 2k\pi) = \tan\theta \ , & \cot(\theta + 2k\pi) = \cot\theta \ ; \ k \in \mathbb{Z} \end{array}}$$

សម្គាល់ $\tan(\theta + k\pi) = \tan\theta$, $\cot(\theta + k\pi) = \cot\theta$, $k \in \mathbb{Z}$

ឧទាហរណ៍ $\sin\dfrac{9}{2}\pi = \sin\left(\dfrac{\pi}{2} + 4\pi\right) = \sin\dfrac{\pi}{2} = 1$, $\cos\left(-\dfrac{17}{3}\pi\right) = \cos\left(\dfrac{\pi}{3} - 6\pi\right) = \cos\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{1}{2}$ ។

លំហាត់គំរូ គេដឹងថា $\cos\dfrac{\pi}{4} = \sin\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ។ គណនា $\cos\dfrac{65\pi}{4}$ និង $\sin\left(-\dfrac{39}{4}\right)$ ។

ចម្លើយ គេអាចសរសេរ $\dfrac{65\pi}{4} = \dfrac{64\pi}{4} + \dfrac{\pi}{4} = 16\pi + \dfrac{\pi}{4}$ ។

ដូចនេះ $\cos\dfrac{65\pi}{4} = \cos\left[\dfrac{\pi}{4} + (8\times 2\pi)\right] = \cos\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ។

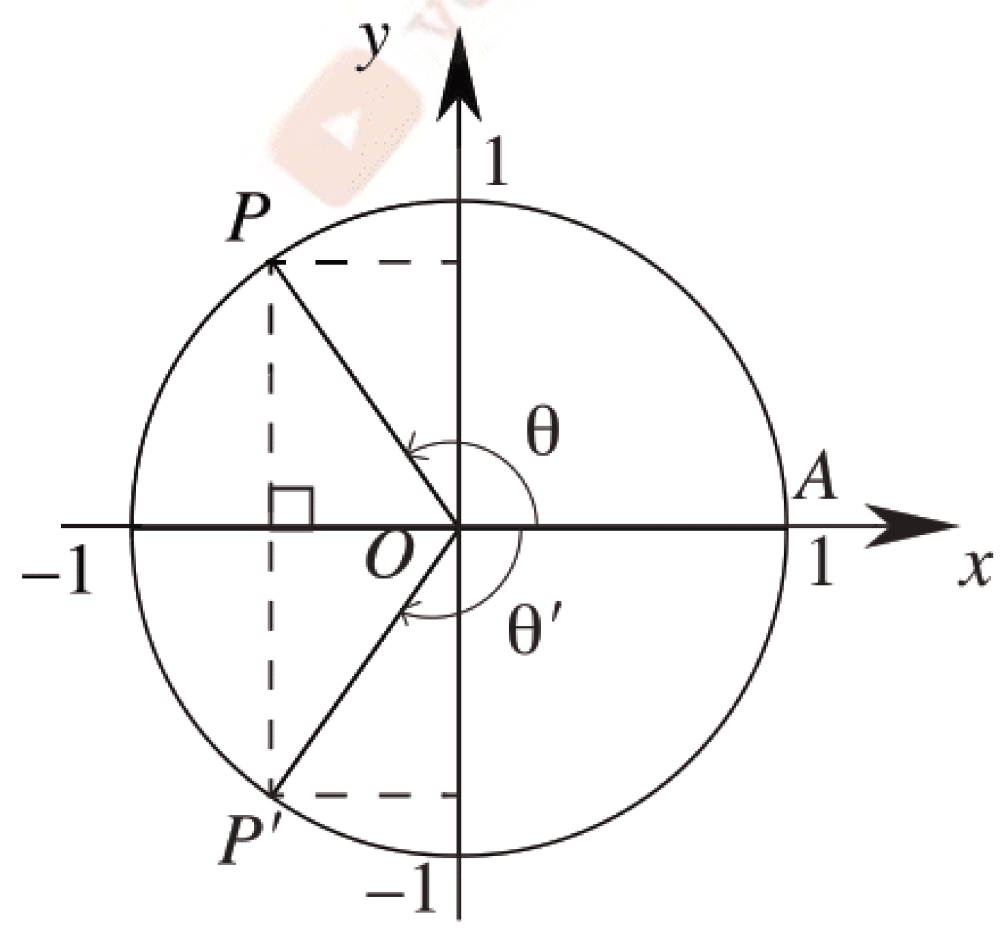
គេដឹងថា $-\frac{39\pi}{4} = \frac{\pi}{4} - \frac{40\pi}{4} = \frac{\pi}{4} - 10\pi$ ។

គេបាន $\sin\left(-\frac{39\pi}{4}\right) = \sin\left[\frac{\pi}{4} - (5 \times 2\pi)\right] = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ។

ប្រតិបត្តិ គណនាតម្លៃរបស់ $\sin 6\pi$, $\sin\frac{11\pi}{3}$, $\cos\left(-\frac{23\pi}{6}\right)$, $\tan\left(-\frac{27\pi}{4}\right)$ ។

3.3 មុំផ្ចិត

ក. មុំផ្ទុយគ្នា θ និង $-\theta$: មុំពីរផ្ទុយគ្នាកាលណាផលបូករង្វាស់វាស្មើនឹងសូន្យតាម 2π ។



ក្នុងរង្វង់ត្រីកោណមាត្រគេមាន $(\overrightarrow{OA}\ ,\ \overrightarrow{OP}) = \theta$ និង $(\overrightarrow{OA}\ ,\ \overrightarrow{OP'}) = \theta'$ ហើយ $\theta + \theta' = 0$ តាម 2π នាំឱ្យ $\theta' = -\theta$ តាម 2π ។ គេបានកូអរដោនេនៃចំណុច P និង P' គឺ $P(\cos\theta\ ,\ \sin\theta)$ និង $P'(\cos(-\theta), \sin(-\theta))$ ។ ដោយ P និង P' ឆ្លុះគ្នាធៀបនឹងអ័ក្សអាប់ស៊ីស គេបាន

$\sin(-\theta) = -\sin\theta$, $\cos(-\theta) = \cos\theta$ ដូចនេះ

$\tan(-\theta) = \frac{\sin(-\theta)}{\cos(-\theta)} = \frac{-\sin\theta}{\cos(-\theta)} = -\tan\theta$ និង

$\cot(-\theta) = \frac{\cos(-\theta)}{\sin(-\theta)} = \frac{\cos\theta}{-\sin\theta} = -\cot\theta$ ។

គេបានរូបមន្ត $\boxed{\begin{array}{ll} \sin(-\theta) = -\sin\theta\ , & \cos(-\theta) = \cos\theta \\ \tan(-\theta) = -\tan\theta\ , & \cot(-\theta) = -\cot\theta \end{array}}$ ។

សម្គាល់ មុំពីរផ្ទុយគ្នាមានកូស៊ីនុសដូចគ្នា ហើយមានស៊ីនុស តង់សង់ និងកូតង់សង់ផ្ទុយគ្នា។

ឧទាហរណ៍ $\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\sin\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$,
$\cot\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\cot\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ ។

ខ. មុំបំពេញ $\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$ និង θ : មុំពីរបំពេញគ្នា កាលណាផលបូករង្វាស់វាស្មើនឹង $\frac{\pi}{2}$ តាម 2π ។

ក្នុងរង្វង់ត្រីកោណគេមាន $(\overrightarrow{OA}\ ,\ \overrightarrow{OP}) = \theta$ និង $(\overrightarrow{OA}\ ,\ \overrightarrow{OP'}) = \frac{\pi}{2} - \theta$ ។ គេបានកូអរដោនេនៃចំណុច P គឺ $(\cos\theta\ ,\ \sin\theta)$ ។ បើគេយកចំណុច P' ឆ្លុះគ្នានឹងចំណុច P ធៀបនឹងបន្ទាត់ $y = x$ នោះគេបាន កូអរដោនេនៃចំណុច P' គឺ $(\sin\theta\ ,\ \cos\theta)$ (1) ។

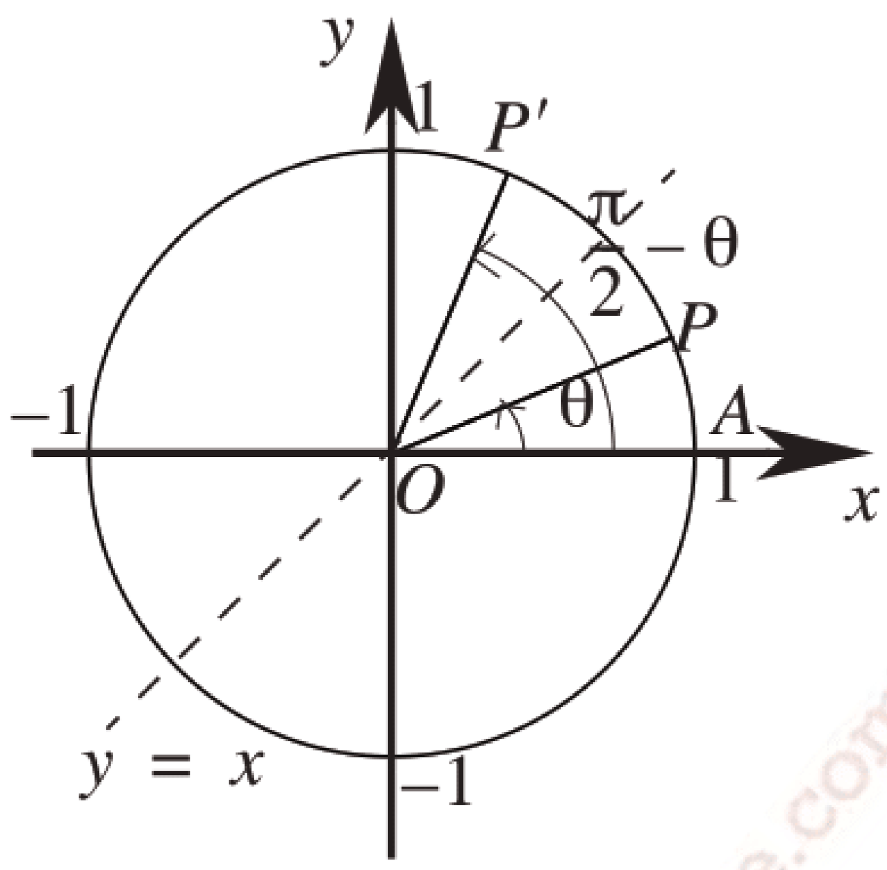
តាមរូបដែលនៅទំព័របន្ទាប់ OP' ជាជ្រុងមួយនៃមុំ $\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$ ។

ដូចនេះកូអរដោនេនៃ P' គឺ $\left[\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right), \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\right]$ (2) ។

តាម (1) និង (2) គេបាន $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos\theta$ និង $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin\theta$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)} = \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \cot\theta = \frac{1}{\tan\theta} \ ,$$

$$\cot\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \tan\theta \ ។$$



សម្គាល់ មុំពីរបំពេញគ្នា មានចុងឆ្លុះគ្នាធៀបនឹងបន្ទាត់ពុះទីមួយ ។

គេបានរូបមន្ត
$$\boxed{\begin{array}{l}\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \cos\theta \ , \ \cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \sin\theta \\ \tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \cot\theta \ , \ \cot\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \tan\theta\end{array}}$$ ។

សម្គាល់ មុំពីរបំពេញគ្នា មានស៊ីនុសនៃមុំមួយស្មើនឹងកូស៊ីនុសនៃមុំមួយទៀត ហើយតង់សង់នៃមុំមួយស្មើនឹងកូតង់សង់នៃមុំមួយទៀត ។

ឧទាហរណ៍ គណនា $\sin 60^\circ = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\tan\frac{\pi}{3} = \tan\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\right) = \cot\frac{\pi}{6} = \sqrt{3}$ ។

គ. មុំបន្ថែម $(\pi-\theta)$ និង θ : មុំពីរបន្ថែមគ្នា កាលណាផលបូករង្វាស់វាស្មើនឹង π តាម 2π ។

ក្នុងរង្វង់ត្រីកោណមាត្រគេមាន $(\overrightarrow{OA} , \overrightarrow{OP}) = \theta$ និង $(\overrightarrow{OA} , \overrightarrow{OP'}) = \pi-\theta$ ។ គេបានកូអរដោនេនៃចំណុច P គឺ $(\cos\theta , \sin\theta)$ និង កូអរដោនេនៃចំណុច $P'(-\cos\theta , \sin\theta)$ (1) ។

តាមរូបខាងស្តាំ OP' ជាជ្រុងមួយនៃមុំ $(\pi-\theta)$ ។

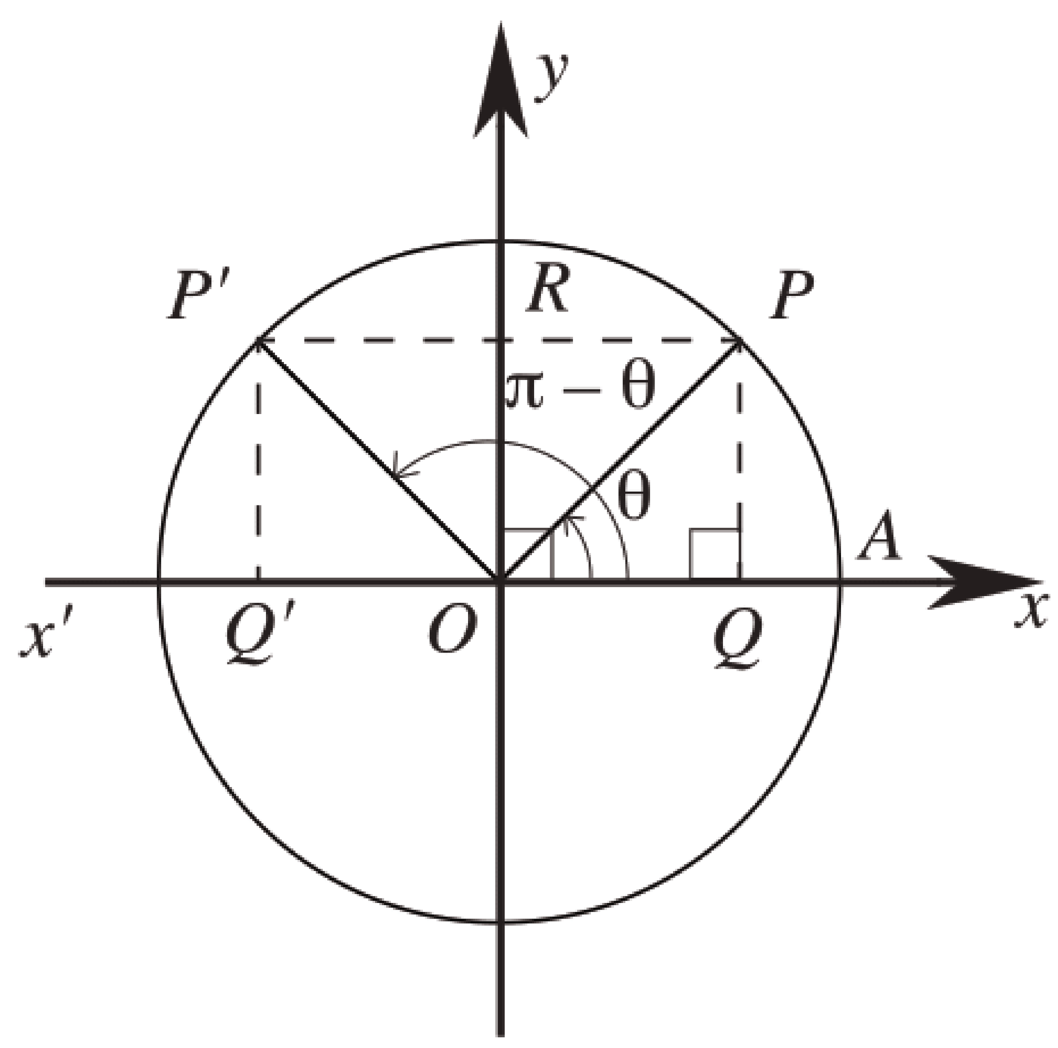
ដូចនេះ កូអរដោនេនៃ P' គឺ $(\cos(\pi-\theta),\sin(\pi-\theta))$ (2) ។

តាម (1) និង (2) គេបាន $\sin(\pi-\theta) = \sin\theta$,

$\cos(\pi-\theta) = -\cos\theta$

$$\tan(\pi-\theta) = \frac{\sin(\pi-\theta)}{\cos(\pi-\theta)} = \frac{\sin\theta}{-\cos\theta} = -\tan\theta$$

$$\cot(\pi-\theta) = \frac{\cos(\pi-\theta)}{\sin(\pi-\theta)} = \frac{-\cos\theta}{\sin\theta} = -\cot\theta \ ។$$



មុំពីរបន្ថែមគ្នា មានចុងឆ្លុះគ្នាធៀបនិងអ័ក្សស៊ីនុស ។

គេបានរូបមន្ត

$$\boxed{\begin{array}{l}\sin(\pi-\theta) = \sin\theta \ , \ \cos(\pi-\theta) = -\cos\theta \\ \tan(\pi-\theta) = -\tan\theta \ , \ \cot(\pi-\theta) = -\cot\theta\end{array}}$$ ។

សម្គាល់ មុំពីរបន្ថែមគ្នា មានស៊ីនុសដូចគ្នាហើយមានកូស៊ីនុស តង់សង់ និងកូតង់សង់ផ្ទុយគ្នា ។

ឧទាហរណ៍

$$\sin 135° = \sin(180° - 45°) = \sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad ,$$

$$\cos\left(-\frac{20\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{20\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{3} + 6\pi\right) = \cos\frac{2\pi}{3} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -\cos\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2} \text{ ។}$$

លំហាត់គំរូ គណនាតម្លៃលេខនៃកន្សោម :

$$A = \cos(-\theta) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) + \cos(\pi - \theta) + \sin\left(\frac{3}{2}\pi + \theta\right)$$

$$B = \sin\frac{5\pi}{6} + \cos\frac{3\pi}{4} + \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) \text{ ។}$$

ចម្លើយ $A = \cos\theta + \cos\theta - \cos\theta - \cos\theta = 0$ ។

$$B = \sin\frac{5\pi}{6} + \cos\frac{3\pi}{4} + \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) + \cos\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) - \sin\frac{\pi}{6}$$

$$= \sin\frac{\pi}{6} - \cos\frac{\pi}{4} - \sin\frac{\pi}{6} = -\cos\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ ។}$$

ប្រតិបត្តិ 1 ដោយស្គាល់ $\sin 47° = 0.6820$ គណនា $\cos 43°$ ។

ប្រតិបត្តិ 2 រកតម្លៃលេខនៃកន្សោម $A = \sin(-x) + \sin(\pi - x) + \cos(\pi - x) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

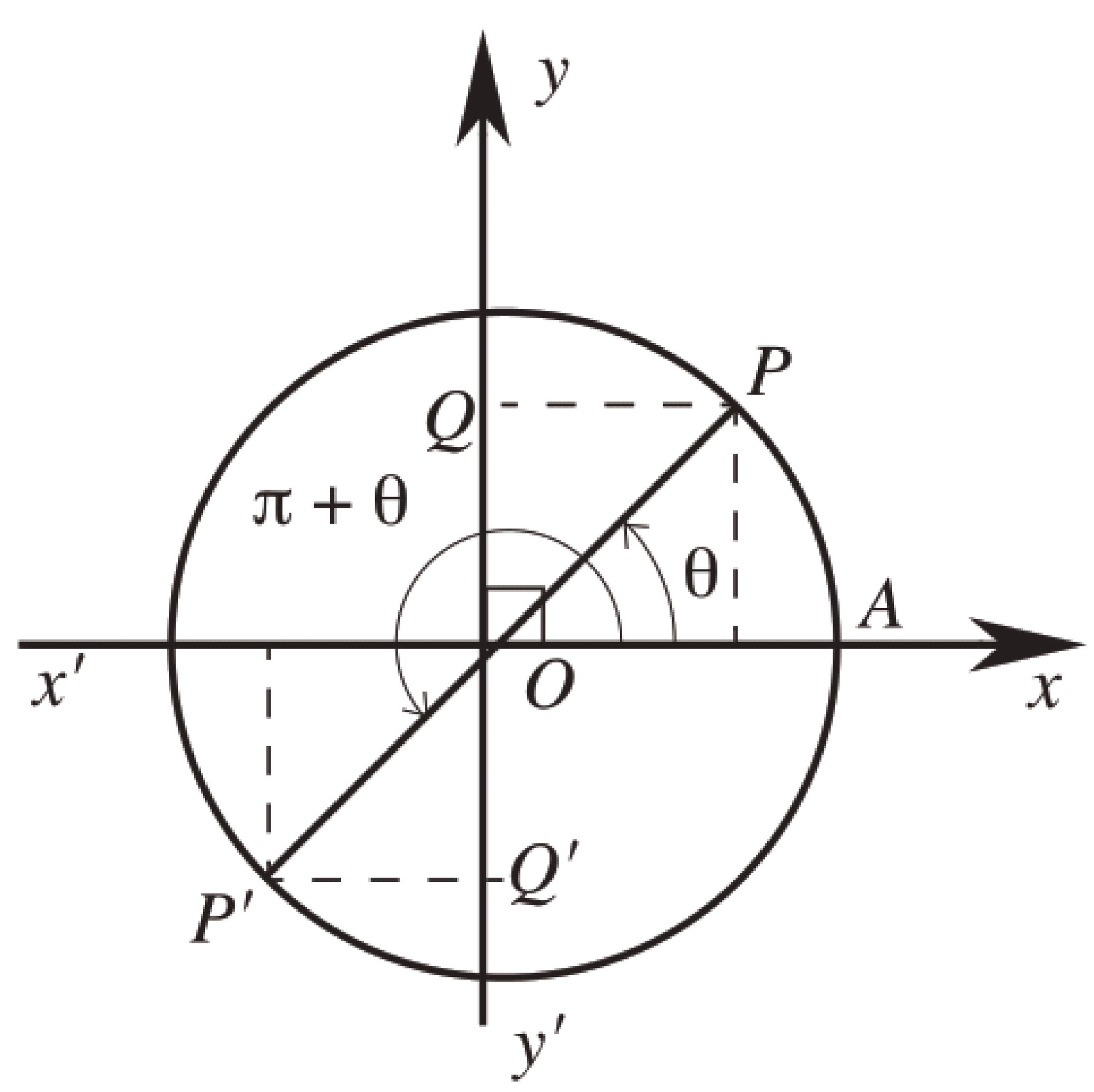
$$B = \sin\left(\frac{5\pi}{2} - x\right) + \cos(3\pi - x) \quad , \quad C = \tan\frac{5\pi}{6} + \cot\frac{7\pi}{4} + \frac{1}{\tan\frac{\pi}{3}} \text{ ។}$$

ឃ. មុំដែលមានផលសងស្មើ π

ក្នុងរង្វង់ត្រីកោណមាត្រគេមាន $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OP}) = \theta$ និង $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OP'}) = \pi + \theta$ គេបាន កូអរដោនេនៃចំណុច $P(\cos\theta, \sin\theta)$ និងកូអរដោនេនៃចំណុច $P'(\cos(\pi+\theta), \sin(\pi+\theta))$ ។

ចំណុច P និង P' ឆ្លុះគ្នាធៀបនឹងគល់ O

គេបាន OP និង OP' មានចំណោលកែងផ្ទុយគ្នា លើអ័ក្សស៊ីនុស និងអ័ក្សកូស៊ីនុស ។



គេបាន $\sin(\pi + \theta) = \sin[\pi - (-\theta)] = \sin(-\theta) = -\sin\theta$

$$\cos(\pi + \theta) = \cos[\pi - (-\theta)] = -\cos(-\theta) = -\cos\theta$$

$$\tan(\pi + \theta) = \frac{\sin(\pi + \theta)}{\cos(\pi + \theta)} = \frac{-\sin\theta}{-\cos\theta} = \tan\theta$$

$$\cot(\pi + \theta) = \frac{\cos(\pi + \theta)}{\sin(\pi + \theta)} = \frac{-\cos\theta}{-\sin\theta} = \cot\theta \text{ ។}$$

គេបានរូបមន្ត $\boxed{\begin{array}{l}\sin(\pi+\theta) = -\sin\theta \;\;,\;\; \cos(\pi+\theta) = -\cos\theta \\ \tan(\pi+\theta) = \tan\theta \;\;,\;\; \cot(\pi+\theta) = \cot\theta\end{array}}$ ។

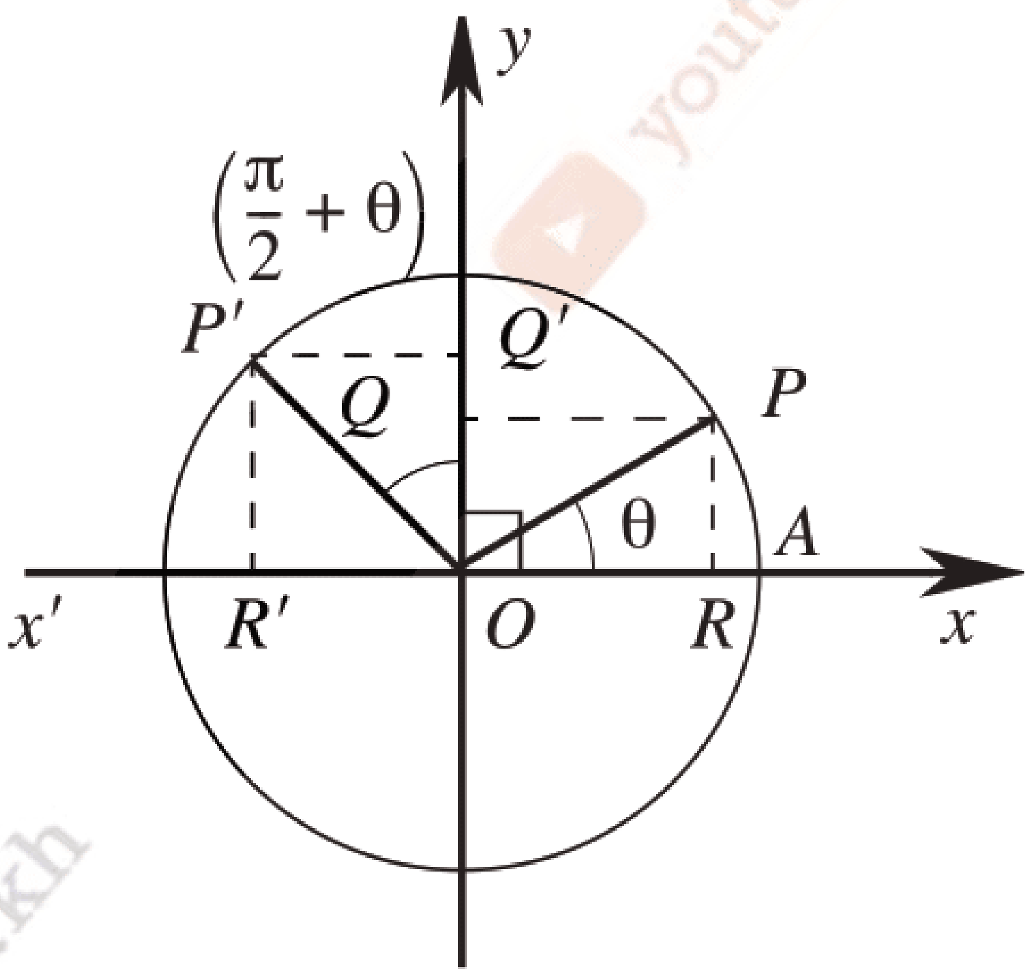
ឧទាហរណ៍ $\sin 210^\circ = \sin(180^\circ + 30^\circ) = -\sin 30^\circ = -\dfrac{1}{2}$ ។

$$\tan\frac{7\pi}{2} = \tan\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = \tan\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ ។}$$

$$A = 2\cos(\pi - 2x) + \sin(\pi + y) - 2\cos(\pi - 2x) - \sin(\pi + y)$$

$$= -2\cos 2x - \sin y + 2\cos 2x + \sin y = 0 \text{ ។}$$

ង. មុំដែលមានផលសងស្មើ $\frac{\pi}{2}$



ក្នុងរង្វង់ត្រីកោណមាត្រគេមាន $(\vec{OA}\ ,\ \vec{OP}) = \theta$ និង $(\vec{OA}\ ,\ \vec{OP'}) = \frac{\pi}{2} + \theta = \frac{\pi}{2} - (-\theta)$ ។

ធ្នូ AP' ជាធ្នូបំពេញនៃធ្នូដែលមានរង្វាស់ $(-\theta)$ តាម 2π ។

ដូចនេះ
$$\boxed{\begin{array}{l}\sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(-\theta) = \cos\theta \;, \\ \cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = \sin(-\theta) = -\sin\theta \\ \tan\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = \cot(-\theta) = -\cot\theta \;, \\ \cot\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = \tan(-\theta) = -\tan\theta \text{ ។}\end{array}}$$

ឧទាហរណ៍ $\sin 120^\circ = \sin(30^\circ + 90^\circ) = \cos 30^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$,

$$\tan\frac{5\pi}{6} = \tan\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3}\right) = -\cot\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{3} \text{ ។}$$

$$\frac{\cot\frac{3}{4}\pi}{\sin\frac{3}{2}\pi} = \frac{\cot\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \pi\right)} = \frac{-\tan\frac{\pi}{4}}{\cos\pi} = \frac{-1}{-1} = 1 \text{ ។}$$

លំហាត់គំរូ គណនា $\dfrac{\cos(-288^\circ)\cot 72^\circ}{\tan(-162^\circ)\sin 108^\circ} - \tan 18^\circ$ ។

ចម្លើយ $\dfrac{\cos(-288^\circ)\cot 72^\circ}{\tan(-162^\circ)\sin 108^\circ} - \tan 18^\circ = \dfrac{\cos(-360^\circ + 72^\circ)\cot 72^\circ}{\tan(-180^\circ + 18^\circ)\sin(90^\circ + 18^\circ)} - \tan 18^\circ$

$$= \frac{\cos 72^\circ \tan 18^\circ}{\tan 18^\circ \cos 18^\circ} - \tan 18^\circ = \frac{\cos(90^\circ - 18^\circ)\tan 18^\circ}{\tan 18^\circ \cos 18^\circ} - \tan 18^\circ$$

$$= \frac{\sin 18^\circ}{\cos 18^\circ} - \tan 18^\circ = \tan 18^\circ - \tan 18^\circ = 0 \text{ ។}$$

ប្រតិបត្តិ 1 គណនា $\sin 870^\circ$, $\cos(-135^\circ)$, $\tan 765^\circ$, $\cot\frac{25}{4}\pi$ ។

ប្រតិបត្តិ 2 គណនា $\dfrac{(\cot 44^\circ + \tan 226^\circ)\cos 406^\circ}{\cos 316^\circ} - \cot 72^\circ \cot 18^\circ$ ។

4. សិក្សាអនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រ

ដើម្បីសិក្សាអនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រ គេត្រូវរក :

ក. ដែនកំណត់ អនុគមន៍ស៊ីនុសនិងអនុគមន៍កូស៊ីនុសកំណត់លើ R ។ អនុគមន៍តង់សង់អាចកំណត់បាន លុះត្រាតែ $\cos x \neq 0$, $x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$ ។ ដូចនេះដែនកំណត់នៃអនុគមន៍តង់សង់គឺ $\mathbb{R} - \left\{(2k+1)\frac{\pi}{2}\right\}$; $k \in \mathbb{Z}$ ។

អនុគមន៍កូតង់សង់អាចកំណត់បាន លុះត្រាតែ $\sin x \neq 0$, $x \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ ។

ដូចនេះ ដែនកំណត់នៃអនុគមន៍កូតង់សង់គឺ $\mathbb{R} - \{k\pi\}$, $k \in \mathbb{Z}$ ។

ឧទាហរណ៍ អនុគមន៍ $y = \sin 2x$ មានដែនកំណត់ $D = \mathbb{R}$ ។

$y = \frac{4}{\cos x}$ កំណត់បានកាលណា $\cos x \neq 0$ $(2k+1)\frac{\pi}{2}$ ។

អនុគមន៍ $y = \tan(x-1)$ កំណត់បានកាលណា $x - 1 \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$, $x \neq 1 + (2k+1)\frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$ ។

ខ. ខួបនៃអនុគមន៍

និយមន័យ f ជាអនុគមន៍មានដែនកំណត់ D ។ f ជាអនុគមន៍មានខួប p លុះត្រាតែ p ជាចំនួនវិជ្ជមានតូចបំផុត ដែលគ្រប់ $x \in D$: $f(x+p) = f(x)$ ។ ពីនិយមន័យនេះ គេអាចសរសេរទាញបាន

$$f(x) = f(x+p) = f[(x+p)+p] = f(x+2p) = \ldots\ldots$$
$$f(x) = f(x-p) = f[(x-p)-p] = f(x-2p) = \ldots\ldots$$

ជាទូទៅ គ្រប់ $k \in \mathbb{Z}$, គ្រប់ $x \in D$, $f(x+kp) = f(x)$ ។

អនុគមន៍ស៊ីនុសនិងកូស៊ីនុសមានខួប 2π ព្រោះ 2π ជាចំនួនវិជ្ជមានតូចបំផុតដែល $\sin(x+2\pi) = \sin x$ និង $\cos(x+2\pi) = \cos x$ ។

សម្គាល់ អនុគមន៍ $y = \sin 2x$ និង $y = \cos 2x$ មានខួប π ព្រោះ

$\sin[2(x+\pi)] = \sin(2x+2\pi) = \sin 2x$ និង $\cos[2(x+\pi)] = \cos(2x+2\pi) = \cos 2x$ ។

ជាទូទៅ អនុគមន៍ $y = \sin ax$ និង $y = \cos ax$ មានខួប $p = \frac{2\pi}{|a|}$ ។

អនុគមន៍តង់សង់និងអនុគមន៍កូតង់សង់មានខួប π ព្រោះ គ្រប់ $x\in\mathbb{R}$, គ្រប់ $x\in\mathbb{Z}$ $\tan(x+\pi) = \tan x$ នាំឱ្យ $\tan(x+k\pi) = \tan x$ និង $\cot(x+\pi) = \cot x$ នាំឱ្យ $\cot(x+k\pi) = \cot x$ ។ ជាទូទៅអនុគមន៍ $y = \tan ax$ និង $y = \cot ax$ មានខួប $p = \frac{\pi}{|a|}$ ។

ឧទាហរណ៍ $y = \sin\frac{1}{2}x$ មានខួប $p = 8\pi$, $y = \cos(-3x)$ មានខួប $p = \frac{2\pi}{|-3|} = \frac{2\pi}{3}$

អនុគមន៍ $y = 3\tan\frac{1}{2}x$ មានខួប $p = 2\pi$, $y = \cot 5x$ មានខួប $p = \frac{\pi}{5}$ ។

គ. ភាពគូនិងភាពសេស

និយមន័យ • f ជាអនុគមន៍ដែលមានដែនកំណត់ D ។ f ជាអនុគមន៍គូ លុះត្រាតែ គ្រប់ $x\in D$, $-x\in D$, $f(-x) = f(x)$

• f ជាអនុគមន៍មានដែនកំណត់ D ។ f ជាអនុគមន៍សេសលុះត្រាតែគ្រប់ $x\in D$, $-x\in D$, $f(-x) = -f(x)$ ។

ឧទាហរណ៍ $y = x-\sin x$ មានដែនកំណត់ $D = \mathbb{R}$ ។ គ្រប់តម្លៃ $x\in D$, $-x\in D$ ហើយ $f(-x) = -x-\sin(-x) = -(x-\sin x) = -f(x)$ ។ ដូចនេះ $y = x-\sin x$ ជាអនុគមន៍សេស ។

$y = \tan x\cot^3 x$ មានដែនកំណត់ $D = \mathbb{R}-\left\{\frac{k\pi}{2}\right\}$ $k\in\mathbb{Z}$ គ្រប់តម្លៃ $x\in D$, $-x\in D$ ហើយ $f(-x) = \tan(-x)\cot^3(-x) = \tan x\cot^3 x = f(x)$ ។

ដូចនេះ $y = \tan x\cot^3 x$ ជាអនុគមន៍គូ ។

លក្ខណៈ

- ក្រាបនៃអនុគមន៍សេសមានគល់តម្រុយជាផ្ចិតឆ្លុះ ។
- ក្រាបនៃអនុគមន៍គូមានអ័ក្សអរដោនេជាអ័ក្សឆ្លុះ ។

4.1 អថេរភាពនិងក្រាបនៃអនុគមន៍ $y = \sin x$

ដែនកំណត់ : $y = \sin x$ ជាអនុគមន៍ កំណត់ចំពោះគ្រប់ $x\in\mathbb{R}$ ។

ខួប : $y = \sin x$ ជាអនុគមន៍ខួប ដែលមានខួប $p = 2\pi$ ដោយ $\sin(x+2\pi) = \sin x$ យើងសិក្សាអនុគមន៍ $y = \sin x$ លើ $[-\pi, \pi]$ ហើយក្រាបនៃអនុគមន៍ $y = \sin x$ លើចន្លោះ $[(2k-1)\pi, (2k+1)\pi]$ បានដោយរំកិលមែកលើ $[-\pi, \pi]$ ចំនួន 2π តាមអ័ក្ស $(x'x)$ ។

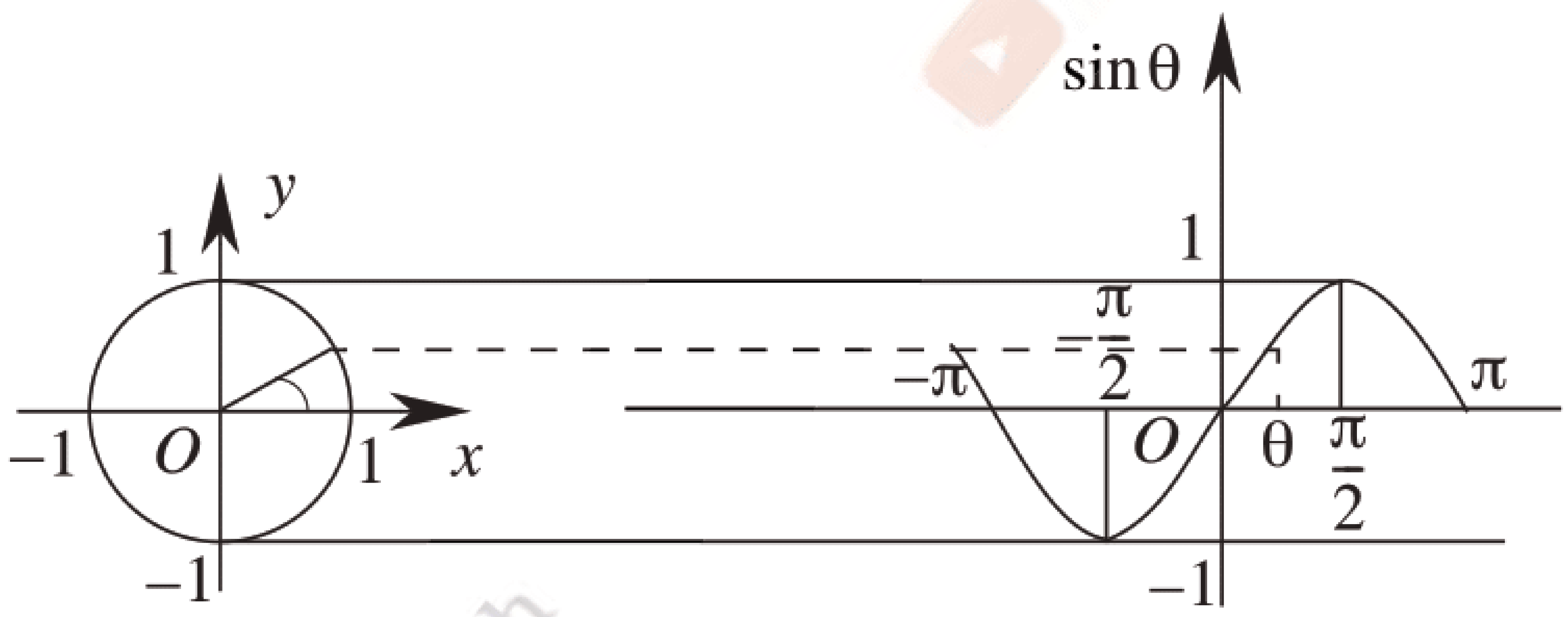
ភាពសេស : គេដឹងថា $\sin(-x) = -\sin x$ ។ ដូចនេះអនុគមន៍ $y = \sin x$ ជាអនុគមន៍សេស ។ ក្រាបនៃអនុគមន៍ $y = \sin x$ មានគល់តម្រុយជាផ្ចិតឆ្លុះ ។ ដូចនេះសិក្សាអនុគមន៍ $y = \sin x$ តែលើ $[0, \pi]$ រួចធ្វើបំលែងឆ្លុះធៀបនឹង O បានមែកលើ $[-\pi, 0]$ ។

ទិសដៅអថេរភាព : គេសង្កេតឃើញថា កាលណា x កើនពី 0 ទៅ $\frac{\pi}{2}$ នោះតម្លៃ $\sin x$ កើនពី 0 ទៅ 1 ។ បើ x កើនពី $\frac{\pi}{2}$ ទៅ π តម្លៃ $\sin x$ ចុះពី 1 ទៅ 0 ។

គេបានតារាងអថេរភាពដូចខាងក្រោម

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$\sin x$	0 ↗	1	↘ 0

ក្រាប $y = \sin x$ លើ $[-\pi, \pi]$



ក្រាបនេះហៅថា ស៊ីនុសសូអ៊ីត

ឧទាហរណ៍ សិក្សាអថេរភាពនិងសង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ $y = 2\sin x$ លើចន្លោះ $[0, 2\pi]$ ។

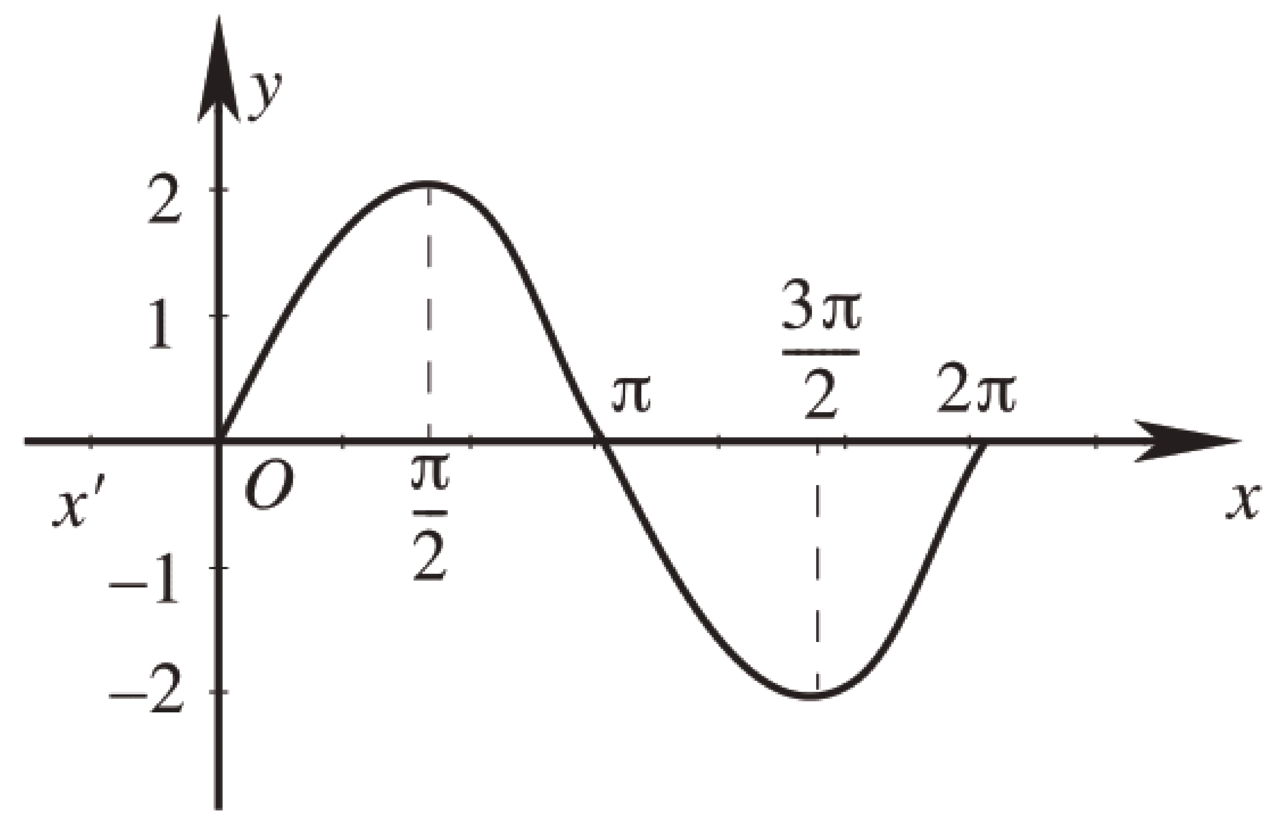
ដែនកំណត់ អនុគមន៍ $y = 2\sin x$ មានដែនកំណត់ $D = \mathbb{R}$ ។ អនុគមន៍ $y = 2\sin x$ មានខួប $P = 2\pi$ ។

ភាពគូ និងភាពសេស $x \in D$, $-x \in D$ ហើយ $f(-x) = 2\sin(-x) = -2\sin x = -f(x)$ ។

ដូចនេះ $y = 2\sin x$ ជាអនុគមន៍សេស ។

គេបានតារាងអថេរភាពដូចខាងក្រោម

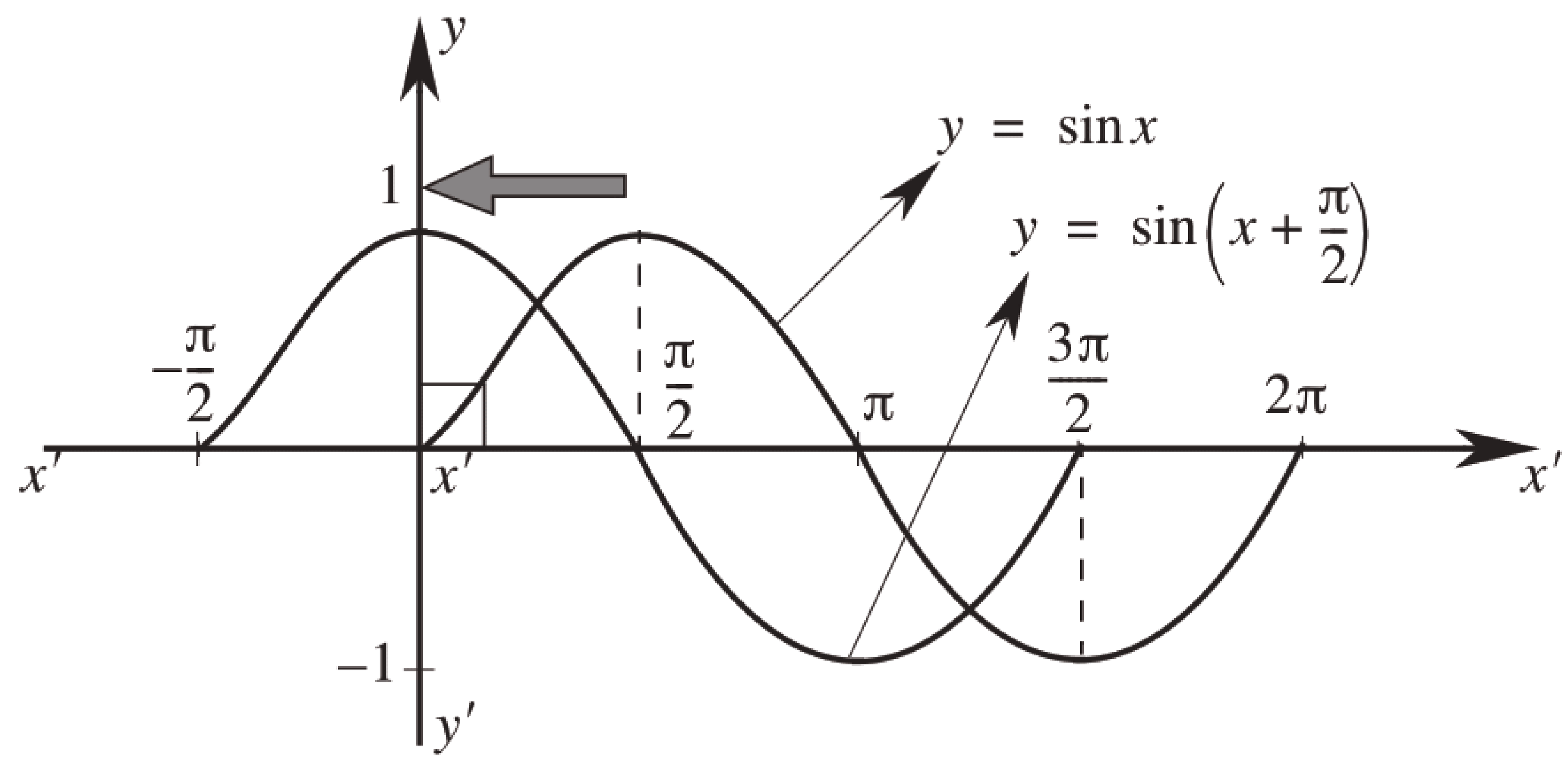
x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$2\sin x$	0 ↗	2 ↘	0 ↘	-2 ↗	0



សង់ក្រាប

លំហាត់គំរូ ដោយប្រើក្រាបនៃអនុគមន៍ $y = \sin x$ សង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ $y = \sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$ ។

ចម្លើយ ក្រាបនៃអនុគមន៍ $y = \sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$ សង់បានដោយរំកិលក្រាបនៃអនុគមន៍ $y = \sin x$ ពីស្តាំទៅឆ្វេងចំនួន $\frac{\pi}{2}$ ឯកតាតាមអ័ក្ស $(x'x)$ ។



ប្រតិបត្តិ 1 សិក្សាអថេរភាពនិងសង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ $y = \sin 2x$ ។

ប្រតិបត្តិ 2 ប្រើក្រាបនៃ $y = \sin x$ សង់ក្រាបនៃ $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ ។

4.2 អថេរភាពនិងក្រាបនៃអនុគមន៍ $y = \cos x$

ដែនកំណត់ : កូស៊ីនុសជាអនុគមន៍ កំណត់ចំពោះគ្រប់ $x \in \mathbb{R}$ ។

ខួប : $y = \cos x$ ជាអនុគមន៍ ដែលមានខួប $p = 2\pi$ ។ យើងសិក្សាអនុគមន៍ $y = \cos x$ លើចន្លោះ $[(2k-1)\pi;\ (2k+1)\pi]$; $k \in \mathbb{Z}$ បានដោយរំកិលមែកលើ $[-\pi;\ \pi]$ ចំនួន 2π តាម $(x'x)$ ។

ភាពគូ : គេដឹងថា $\cos(-x) = \cos x$ ។ ដូចនេះ $y = \cos x$ ជាអនុគមន៍គូ ។

ក្រាបនៃ $y = \cos x$ មានអ័ក្សអរដោនេជាអ័ក្សឆ្លុះ ។ ដូចនេះយើងសិក្សាអនុគមន៍ $y = \cos x$ តែលើ $[0, \pi]$ រួចធ្វើបំលែងឆ្លុះធៀបនឹងអ័ក្សអរដោនេនៃមែកលើ $[-\pi, 0]$ ។

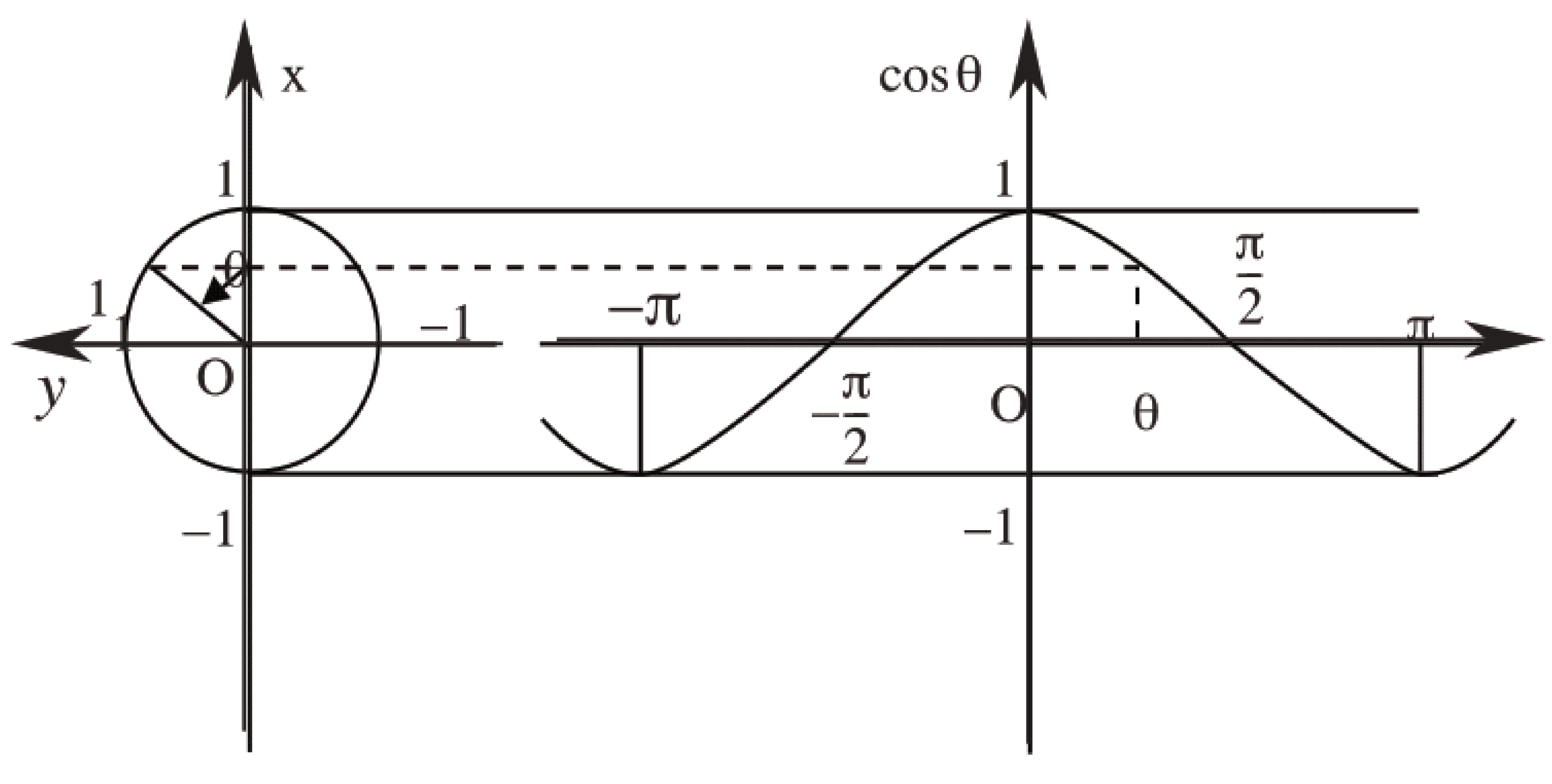
ទិសដៅអថេរភាព គេសង្កេតឃើញថា កាលណា x កើនពី 0 ទៅ $\frac{\pi}{2}$ តម្លៃ $\cos x$ ចុះពី 1 ទៅ 0 ។

បើ x កើនពី $\frac{\pi}{2}$ ទៅ π នោះតម្លៃ $\cos x$ ចុះពី 0 ទៅ -1 ។

គេបានតារាងអថេរភាពដូចខាងក្រោម

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos x$	1 ↘	0 ↘	-1

តាមតារាងអថេរភាព



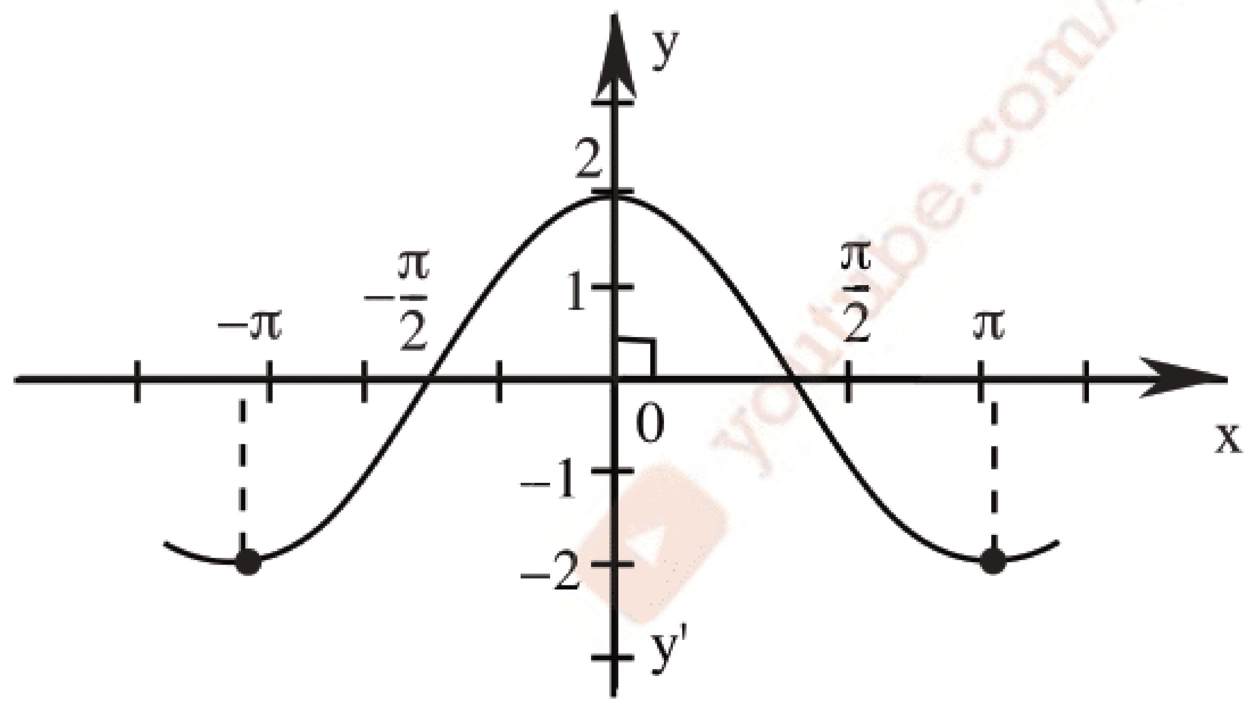
សង់ក្រាប $y = \cos x$

ឧទាហរណ៍ សិក្សាអថេរភាពនិងសង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ $y = 2\cos x$ ។

ដែនកំណត់ អនុគមន៍ $y = 2\cos x$ មានដែនកំណត់ $D = \mathbb{R}$ ។ អនុគមន៍ $y = 2\cos x$ មានខួប $p = 2\pi$ ។ $x\in D$, $-x\in D$ ហើយ $f(-x) = 2\cos(-x) = 2\cos x = f(x)$ ដូចនេះ $y = 2\cos x$ ជាអនុគមន៍គូ ។

តារាងអថេរភាព

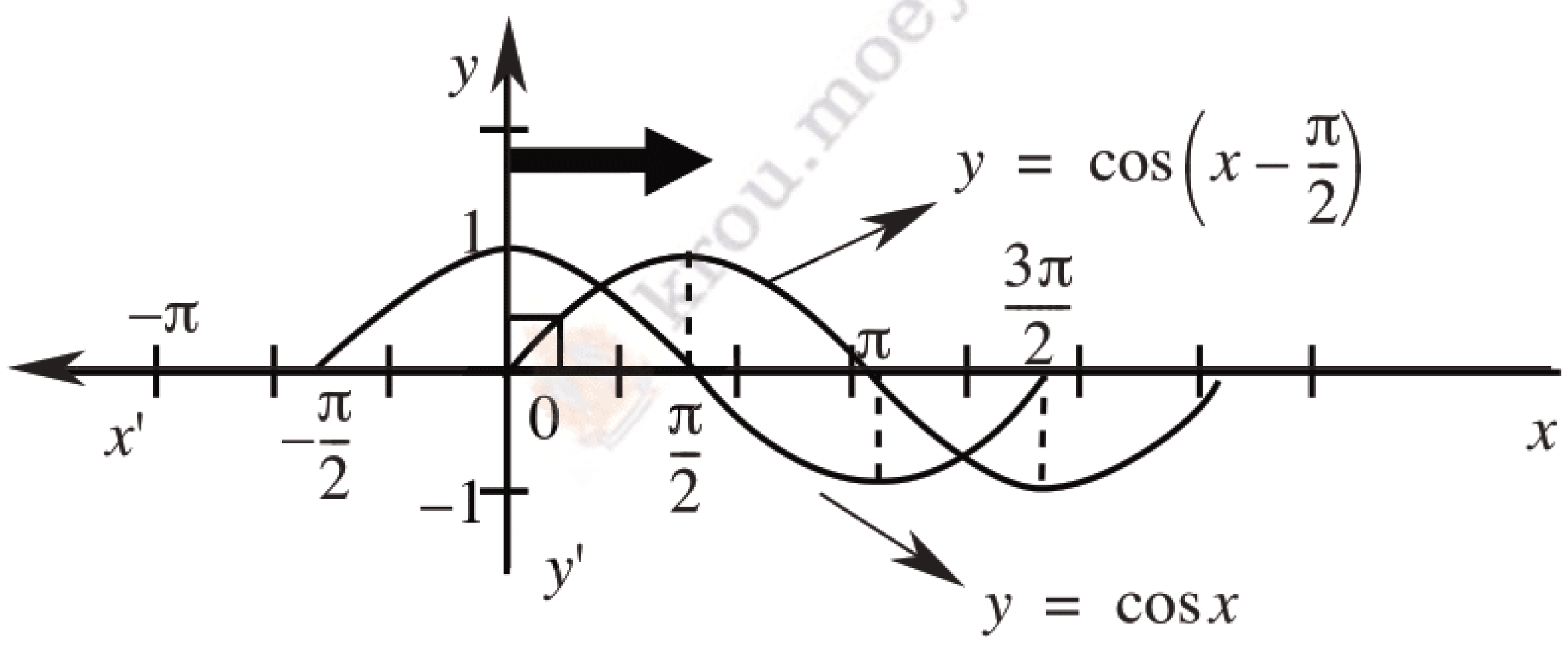
x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$		π
$2\cos x$	-2	$\nearrow$	0	$\nearrow$	2	$\searrow$	0	$\searrow$	-2



សង់ក្រាប

លំហាត់គំរូ ដោយប្រើក្រាបនៃអនុគមន៍ $y = \cos x$ សង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ $y = \cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$ ។

ចម្លើយ គេបានក្រាបនៃអនុគមន៍ $y = \cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$ ដោយរំកិលក្រាបនៃអនុគមន៍ $y = \cos x$ ពីឆ្វេងទៅស្តាំ $\frac{\pi}{2}$ ឯកតាស្របនឹងអ័ក្ស $(x'x)$ ។



ប្រតិបត្តិ សិក្សាអថេរភាពនិងសង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ $y = \cos 2x$ និង $y = \cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$ ។

4.3 អថេរភាពនិងក្រាបនៃអនុគមន៍ $y = \tan x$

ដែនកំណត់ : គេដឹងថា $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ ។ អនុគមន៍តង់សង់កំណត់ចំពោះគ្រប់ $x\in\mathbb{R}$ ខុសពី $\frac{\pi}{2}+k\pi$ $(k\in\mathbb{Z})$ ឬ $x\in\mathbb{R}-\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi\right\}, k\in\mathbb{Z}$ ។

ខួប : $y = \tan x$ ជាអនុគមន៍ដែលមានខួប $p = \pi$ ។ យើងសិក្សាអនុគមន៍ $y = \tan x$ លើចន្លោះ $\left((2k-1)\frac{\pi}{2} , (2k+1)\frac{\pi}{2}\right)$, $k\in\mathbb{Z}$ បានដោយរំកិលមែកលើ $\left(-\frac{\pi}{2} , \frac{\pi}{2}\right)$ ចំនួន π តាម $(x'x)$ ។

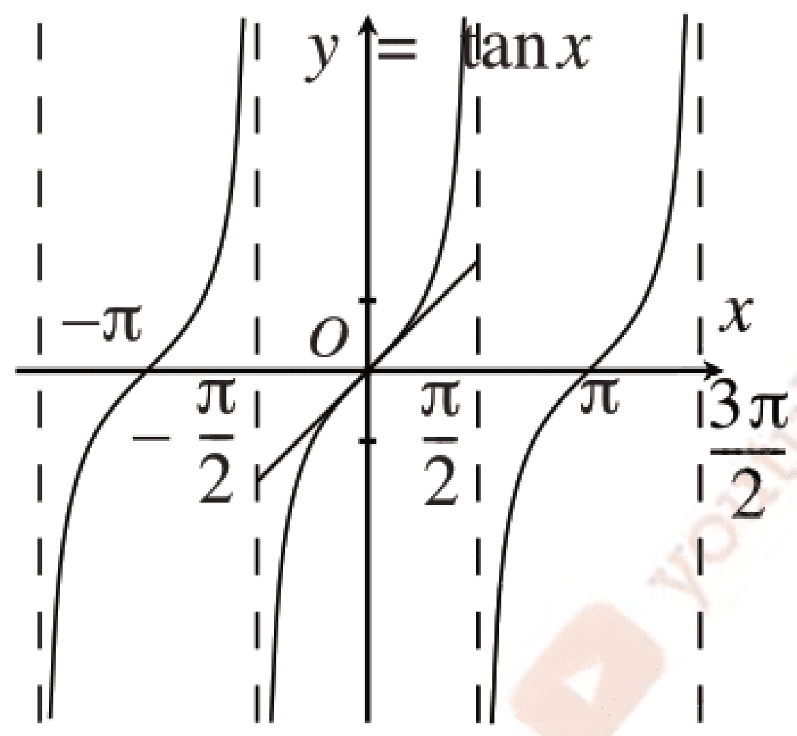
ភាពសេស : គេដឹងថាគ្រប់ $x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$ នាំឱ្យ $\tan(-x) = -\tan x$ ។ ដូចនេះ $y = \tan x$ ជាអនុគមន៍សេស ។ ក្រាបនៃ $y = \tan x$ មានគល់តម្រុយជាផ្ចិតឆ្លុះ ។ ដូចនេះ យើងសិក្សាតែលើ

$\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ ហើយមែកលើ $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right]$ បានដោយធ្វើបំប្លែងឆ្លុះធៀបនឹង O នៃមែកលើ $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ ។

ទិសដៅអថេរភាព គេសង្កេតឃើញថាអនុគមន៍ $y = \tan x$ កើនលើចន្លោះ $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ ។

គេបានតារាងអថេរភាពដូចខាងក្រោម

x	0	$\frac{\pi}{2}$
$\tan x$	$0 \nearrow$	$+\infty$



សង់ក្រាប

ឧទាហរណ៍ សិក្សាអថេរភាពនិងសង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ $y = \frac{1}{2}\tan x$ ។

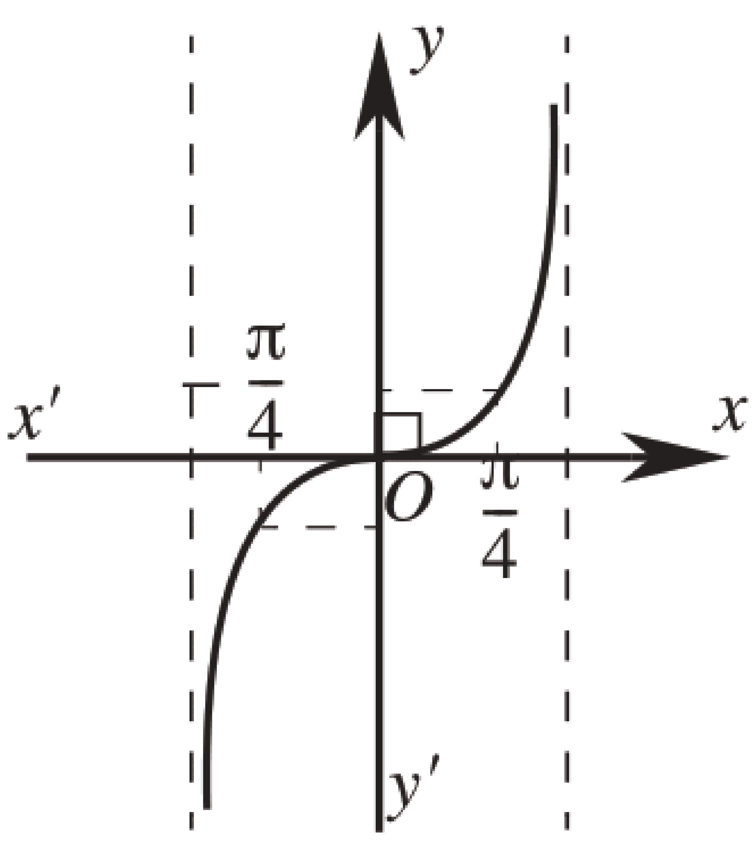
ដែនកំណត់ : អនុគមន៍ $y = \frac{1}{2}\tan x$ មានដែនកំណត់ $D = \mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \ ; \ (k \in \mathbb{Z})\right\}$ ។

ខួប : **អនុគមន៍** $y = \frac{1}{2}\tan x$ **មានខួប** $P = \pi$ ។

គេដឹងថាគ្រប់ $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ នាំឱ្យ $f(-x) = \frac{1}{2}\tan(-x) = -\frac{1}{2}\tan x = -f(x)$ ។ ដូចនេះ $y = \frac{1}{2}\tan x$ ជាអនុគមន៍សេស ។

តារាងអថេរភាព

x	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$
$\frac{1}{2}\tan x$	$\Vert$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\Vert$



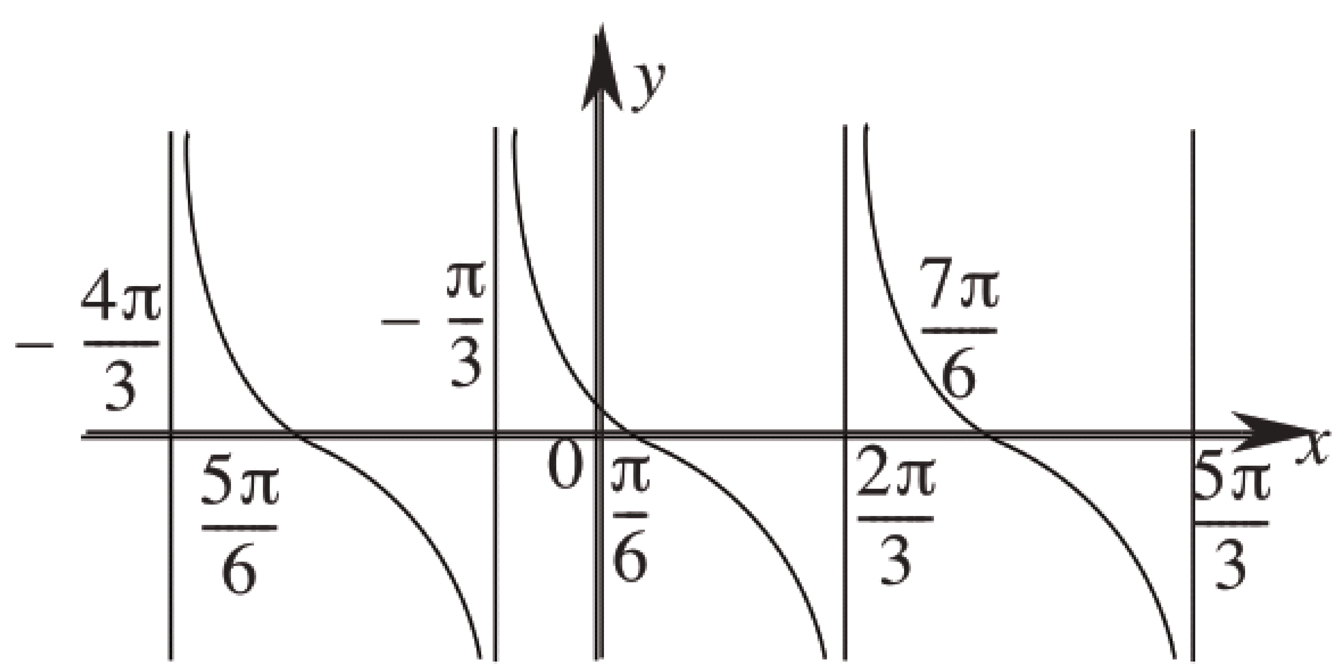
សង់ក្រាប

លំហាត់គំរូ សង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ $y = \tan\left(\frac{\pi}{6} - x\right)$ ។

ចម្លើយ តាង $X = x - \frac{\pi}{6}$, $x = X + \frac{\pi}{6}$, $y = -\tan X$ ។

តារាងអថេរភាព

X	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$
$x = X + \frac{\pi}{6}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{2\pi}{3}$
y	$\Vert\ \infty \searrow$	$1 \searrow$	$0 \searrow$	$-1 \searrow$	$-\infty\ \Vert$



សង់ក្រាប

ប្រតិបត្តិ សង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ $y = \frac{1}{2}\tan 2x$ និង $y = \tan\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$ ។

4.4 អថេរភាពនិងក្រាបនៃអនុគមន៍ $y = \cot x$

ដែនកំណត់ : គេដឹងថា $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$ ។

ដូចនេះ អនុគមន៍កូតង់សង់កំណត់និងជាប់ចំពោះគ្រប់ $x \neq k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$

ខួប : $y = \cot x$ ជាអនុគមន៍ដែលមានខួប $p = \pi$ ។ យើងសិក្សាអនុគមន៍ $y = \cot x$ លើចន្លោះ $(k\pi \ ,(k+1)\pi), (k \in \mathbb{Z})$ បានដោយ រំកិលមែកលើ $(0,\ \pi)$ ចំនួន π តាម $(x'x)$ ។

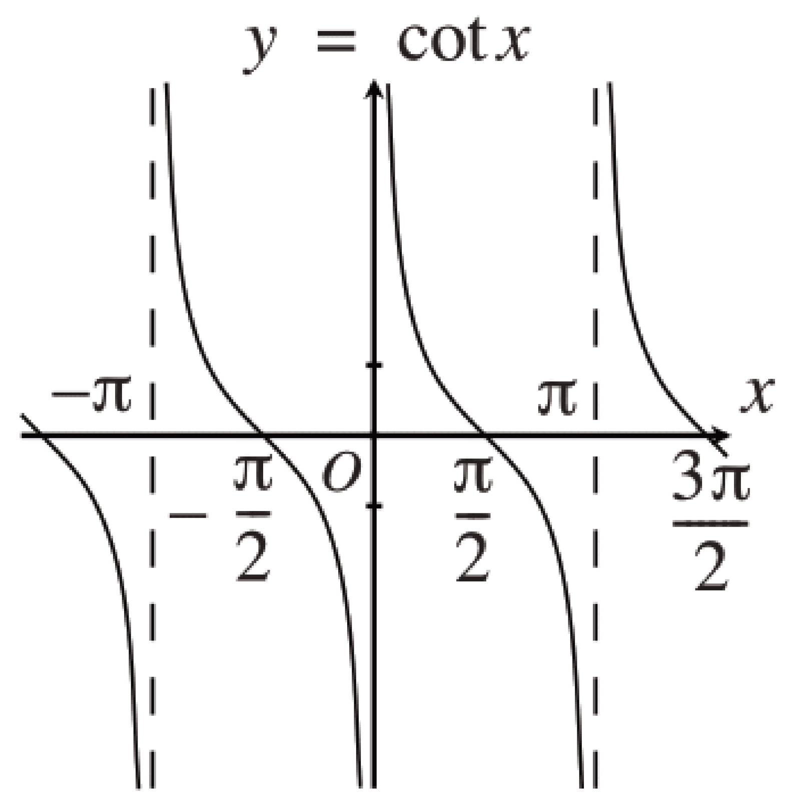
ភាពសេស : ដោយ $\cot(-x) = -\cot x$ នាំឱ្យ $y = \cot x$ ជាអនុគមន៍សេស ។ ក្រាបនៃ $y = \cot x$ មានគល់ 0 ជាផ្ចិតឆ្លុះ ។

យើងសិក្សាអនុគមន៍ $y = \cot x$ លើចន្លោះ $\left(0, \frac{\pi}{2}\right]$ ។

ទិសដៅអថេរភាព : អនុគមន៍ $y = \cot x$ ចុះលើចន្លោះ $\left(0, \frac{\pi}{2}\right]$ ។

គេបានតារាងអថេរភាពដូចខាងក្រោម

x	0 $\qquad\qquad\qquad$ $\frac{\pi}{2}$
$\cot x$	$\Vert$ $+\infty \searrow 0$



សង់ក្រាប

ប្រតិបត្តិ 1 សង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ $y = \frac{1}{2}\cot x$ ។

លំហាត់

1. បំប្លែងជារ៉ាដ្យង់នៃមុំ 200° , -100° , 225° , -240° , -135° , 330° , 570° , 630° ។

2. បំប្លែងជាដឺក្រេនៃមុំ $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{5\pi}{4}$, $\frac{5\pi}{6}$, $\frac{5\pi}{7}$, $\frac{7\pi}{4}$, $\frac{-11}{6}$, $\frac{-5\pi}{2}$, $\frac{-7\pi}{2}$, $\frac{\pi}{9}$ ។

3. គេមាន $\sin\theta + \cos\theta = -\frac{1}{2}$ ហើយ $\pi < \theta < 2\pi$ ។

   គណនា ក. $\sin\theta\cos\theta$ ខ. $\tan\theta + \frac{1}{\tan\theta}$ គ. $\sin^3\theta - \cos^3\theta$ ។

4. រកតម្លៃកន្សោមខាងក្រោម

   $A = \frac{8\cos^3\alpha - 2\sin^3\alpha + \cos\alpha}{2\cos\alpha - \sin^3\alpha}$ ដោយស្គាល់ $\tan\alpha = 2$ ។

   $B = \frac{\sin\alpha + \cos\alpha}{\cos\alpha - \sin\alpha}$ ដោយស្គាល់ $\tan\alpha = -2$ ។

   $C = \frac{\sin^2\alpha - \cos^2\alpha}{\sin^2\alpha - 2\cos^2\alpha}$ ដោយស្គាល់ $\cot\alpha = 3$ ។

5. សម្រួលកន្សោមខាងក្រោម :

   ក. $\sqrt{\tan^2\alpha + \cot^2\alpha + 2}$ ខ. $\frac{\sin^2\alpha - \tan^2\alpha}{\cos^2\alpha - \cot^2\alpha}$

   គ. $\sqrt{\sin^2\alpha(1+\cot\alpha) + \cos^2\alpha(1+\tan\alpha)}$ ឃ. $\frac{\cos^2\alpha + \cos^2\alpha\cot\alpha}{\sin^2\alpha + \sin^2\alpha\tan^2\alpha}$ ។

6. ផ្ទៀងផ្ទាត់សមភាពខាងក្រោម :

   ក. $\frac{\sin x + \cos x - 1}{\sin x - \cos x + 1} = \frac{\cos x}{1 + \sin x}$ ខ. $\frac{\cos x\cot x - \sin x\tan x}{\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\cos x}} = 1 + \sin x\cos x$

   គ. $(\tan\theta - \sin\theta)^2 + (1-\cos\theta)^2 = \left(\frac{1}{\cos\theta} - 1\right)^2$ ឃ. $\frac{2\sin\theta\cos\theta - \cos\theta}{1 - \sin\theta + \sin^2\theta - \cos^2\theta} = \frac{1}{\tan\theta}$ ។

7. រកខួបនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម :

   ក. $y = \sin\frac{2}{3}x$ ខ. $y = -\sin\frac{1}{4}x$ គ. $y = 2\cos\frac{1}{4}x$

   ឃ. $y = \tan\frac{1}{4}x$ ង. $y = \cot\frac{1}{3}x$ ច. $y = \sin 2x + \cos x$ ។

8. រកភាពគូនិងភាពសេសនៃអនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រខាងក្រោម ៖

ក. $y = x - \sin 2x$

ខ. $y = x^2\cos^2 x$

គ. $y = \tan x\cos^2 x$

ឃ. $y = \sin 5x + \sin 3x + 5\sin x\cos 2x \quad (x \in \mathbb{R})$

ង. $y = \sin x + \tan x + \cot 3x \quad \left(x \neq \frac{k\pi}{2}\right)$

ច. $y = \cos x + \sin\frac{x}{2}\sin x + 5x^2$ ។

9. សង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម ៖

ក. $y = -\sin\frac{x}{3}$ ខ. $y = -\sin\theta + 1$ គ. $y = \cos\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)$ ឃ. $y = 3\tan\theta$ ។

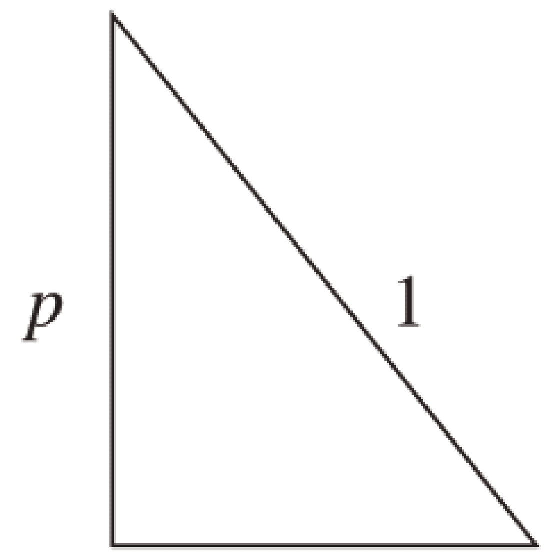
10. ដោយប្រើក្រាប $y = \sin x$ សង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម ៖

ក. $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ ខ. $y = 2 + \sin x$ គ. $y = 1 - \sin x$ ។

11. ដោយប្រើក្រាប $y = \cos x$ សង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម ៖

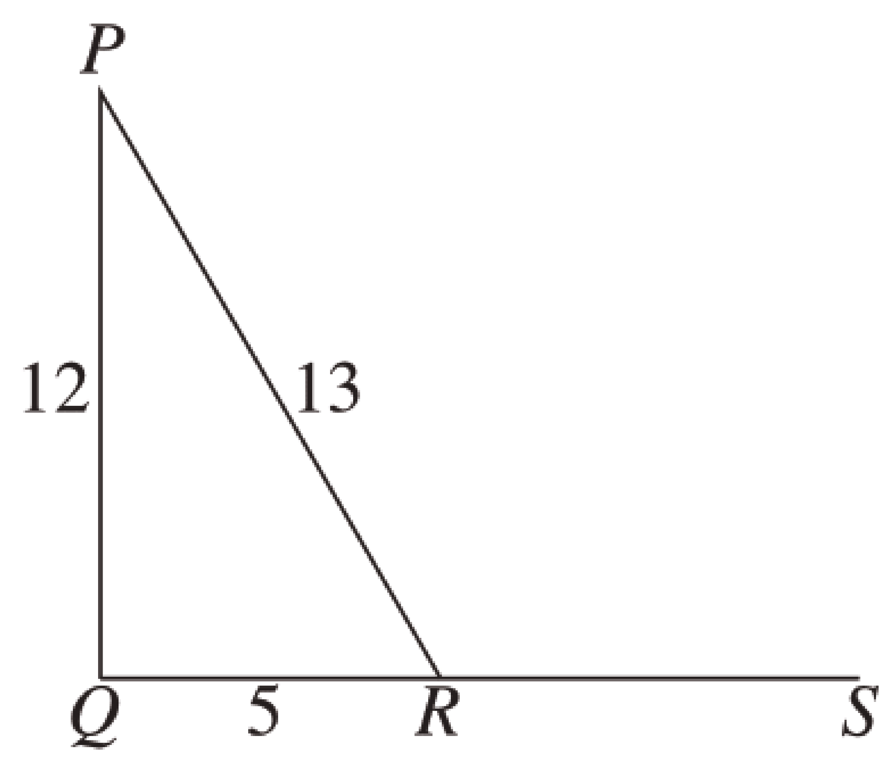
ក. $y = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ ខ. $y = 2 - \cos x$ គ. $y = \cos x + 2$ ។

12. គេមានត្រីកោណដូចរូបខាងស្ដាំដែលមាន $\sin\beta = p$ ហើយ β ជាមុំស្រួច ។ ចូរគណនាកន្សោមខាងក្រោមជាអនុគមន៍ P ។



ក. $\tan\beta$ ខ. $\sin(90° - \beta)$ គ. $\sin(180° + \beta)$ ។

13. តាមរូបខាងស្ដាំនេះ QRS ជាបន្ទាត់ត្រង់ ហើយ $PQ = 12\text{cm}$, $QR = 5\text{cm}$ និង $RP = 13\text{cm}$ ។



ក. ចូរពន្យល់ថាហេតុអ្វីបានជា $\angle PQR$ ជាមុំកែង ?

ខ. ទាញរកតម្លៃនៃ $\angle QPR$ និង $\cos\angle PRS$ ។

14. បង្ហាញថា $\cos\theta\left(\frac{1}{1-\sin\theta} - \frac{1}{1+\sin\theta}\right)$ អាចសរសេរក្នុងទម្រង់ $k\tan\theta$ និងរកតម្លៃនៃ k ។

មេរៀនទី

2 រូបមន្តត្រីកោណមាត្រ

1. រូបមន្តផលបូកនិងផលដក

1.1 គណនា $\cos(\alpha-\beta)$ និង $\cos(\alpha+\beta)$

វត្ថុបំណង

- ស្រាយបញ្ជាក់ រូបមន្តផលបូកមុំឌុបនិងរូបមន្តបំប្លែង
- ដោះស្រាយចំណោទត្រីកោណមាត្រ ។

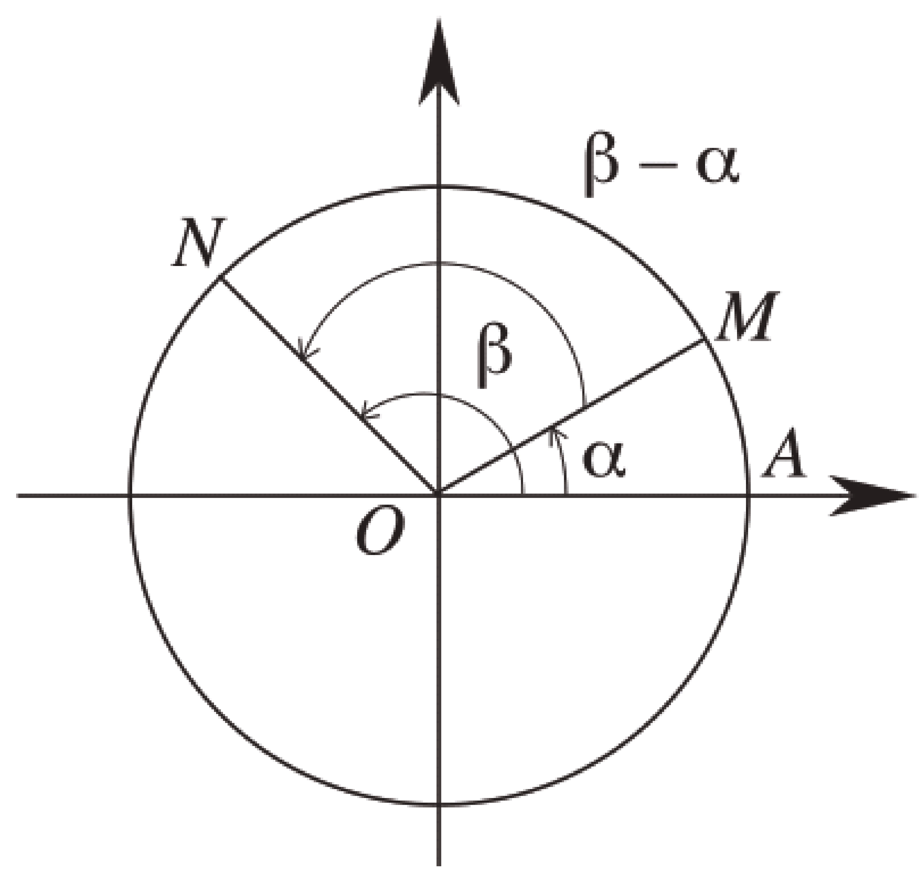
ឧទាហរណ៍ 1 ប្រៀបធៀបកន្សោម $\cos(60°-30°)$ និង $\cos 60° - \cos 30°$ ។ គេបាន

$\cos(60°-30°) = \cos 30° = \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 0.866$ និង

$\cos 60° - \cos 30° = \dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{1}{2}(1-\sqrt{3}) = -0.366$ ។

ដូចនេះ $\cos(60°-30°) \neq \cos 60° - \cos 30°$ ។

ក្នុងការគណនា $\cos(60°-45°) = \cos 15°$ គេមិនអាចរក $\cos 15°$ បានដោយងាយនោះទេ ព្រោះ $15°$ មិនមែនជាមុំពិសេស ។ ដូចនេះ គេបង្កើតរូបមន្តដើម្បីងាយស្រួលក្នុងការរកអនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រនៃមុំទាំងនោះដូចខាងក្រោម :



គេពិនិត្យរង្វង់ត្រីកោណមាត្រដែលមាន

$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM}) = \alpha$, $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{ON}) = \beta$ និង $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}) = \beta - \alpha$ ។

គេបាន $\overrightarrow{OM}\left|\begin{matrix}\cos\alpha \\ \sin\alpha\end{matrix}\right.$, $\overrightarrow{ON}\left|\begin{matrix}\cos\beta \\ \sin\beta\end{matrix}\right.$ ។

តាមនិយមន័យផលគុណស្កាលែ គេអាចសរសេរ:

$\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON} = OM \cdot ON \cdot \cos(\beta-\alpha) = \cos(\beta-\alpha)$ ព្រោះ

$OM = ON = 1$ (កាំរង្វង់ត្រីកោណមាត្រ) ហើយ $\cos(-x) = \cos x$

ម្យ៉ាងទៀតតាមកន្សោមវិភាគផលគុណស្កាលែ គេបាន $\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON} = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$ ។

ដូចនេះ $\boxed{\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta}$ (1) ។

ឧទាហរណ៍ 2 $\cos 15° = \cos(60°-45°) = \cos 60°\cos 45° + \sin 60°\sin 45°$

$$= \frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$$ ។

បើគេជំនួស $-\beta$ ដោយ β ក្នុងរូបមន្ត $\cos(\alpha-\beta)$ គេបាន

$\cos[\alpha-(-\beta)] = \cos\alpha\cos(-\beta)+\sin\alpha\sin(-\beta)$ នាំឱ្យ $\boxed{\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}$ (2) ។

ឧទាហរណ៍ 3 $\cos\frac{5\pi}{12} = \cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right) = \cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{6}-\sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ ។

1.2 គណនា $\sin(\alpha+\beta)$ និង $\sin(\alpha-\beta)$

តាមលក្ខណៈមុំបំពេញ គេបាន $\sin(\alpha+\beta) = \cos\left[\frac{\pi}{2}-(\alpha+\beta)\right] = \cos\left[\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-\beta\right]$

តាមរូបមន្ត (1) $\sin(\alpha+\beta) = \cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cos\beta+\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\sin\beta$

តែ $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \sin\alpha$ និង $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \cos\alpha$ ។

ដូចនេះ $\boxed{\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha}$ (3) ។

ឧទាហរណ៍ 1 $\sin 75^\circ = \sin(45^\circ+30^\circ) = \sin 45^\circ\cos 30^\circ+\cos 45^\circ\sin 30^\circ$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$ ។

បើយើងជំនួស β ដោយ $(-\beta)$ ក្នុងរូបមន្ត (3)

គេបាន $\sin(\alpha-\beta) = \sin[\alpha+(-\beta)]$

$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos(-\beta)+\sin(-\beta)\cos\alpha$ ដោយ $\cos(-\beta) = \cos\beta$ និង $\sin(-\beta) = -\sin\beta$ ។

ដូចនេះ $\boxed{\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta-\sin\beta\cos\alpha}$ (4) ។

ឧទាហរណ៍ 2 $\sin\frac{\pi}{12} = \sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right) = \sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{6}-\sin\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

លំហាត់គំរូ 1 គណនា $\dfrac{\sin 9^\circ\cos 39^\circ-\cos 9^\circ\sin 39^\circ}{\cos\frac{3\pi}{7}\cos\frac{5\pi}{28}+\sin\frac{3\pi}{7}\sin\frac{5\pi}{28}}$

ចម្លើយ $\dfrac{\sin 9^\circ\cos 39^\circ-\cos 9^\circ\sin 39^\circ}{\cos\frac{3\pi}{7}\cos\frac{5\pi}{28}+\sin\frac{3\pi}{7}\sin\frac{5\pi}{28}} = \dfrac{\sin(9^\circ-39^\circ)}{\cos\left(\frac{12\pi}{28}-\frac{5\pi}{28}\right)} = \dfrac{\sin(-30^\circ)}{\cos\frac{\pi}{4}} = -\dfrac{1}{\sqrt{2}} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ។

លំហាត់គំរូ 2 បង្ហាញថា $\sin a+\cos a = \sqrt{2}\sin\left(a+\frac{\pi}{4}\right)$ ។

ចម្លើយ $\sin a+\cos a = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin a+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos a\right) = \sqrt{2}\left(\sin a\cos\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{4}\cos a\right) = \sqrt{2}\sin\left(a+\frac{\pi}{4}\right)$ ។

ប្រតិបត្តិ 1 គណនា $\sin 105^\circ$, $\cos 105^\circ$, $\sin\frac{\pi}{12}$, $\cos\frac{\pi}{12}$ ។

ប្រតិបត្តិ 2 បង្ហាញថា $\dfrac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}+\dfrac{\sin(\beta-\theta)}{\cos\beta\cos\theta}+\dfrac{\sin(\theta-\alpha)}{\cos\theta\cos\alpha} = 0$ ។

1.3 គណនា $\tan(\alpha+\beta)$ និង $\tan(\alpha-\beta)$

គេមាន $\tan(\alpha+\beta) = \dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}$ ដោយប្រើរូបមន្ត (2) និង (3) ។

គេបាន $\tan(\alpha+\beta) = \dfrac{\sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha}{\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta}$ ឧបមាថា $\cos\alpha \neq 0$, $\cos\beta \neq 0$, $\cos(\alpha+\beta) \neq 0$

គេចែកតួទាំងពីរនៃផលធៀបនឹង $\cos\alpha\cos\beta$

គេបាន $\tan(\alpha+\beta) = \dfrac{\dfrac{\sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta} + \dfrac{\sin\beta\cos\alpha}{\cos\alpha\cos\beta}}{\dfrac{\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta} - \dfrac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}$ ឬ $\boxed{\tan(\alpha+\beta) = \dfrac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}}$ (5) ។

ឧទាហរណ៍ 1 $\tan 105° = \tan(60° + 45°) = \dfrac{\tan 60° + \tan 45°}{1 - \tan 60° \tan 45°} = \dfrac{\sqrt{3}+1}{1-\sqrt{3}\times 1} = \dfrac{\sqrt{3}+1}{1-\sqrt{3}}$ ។

បើគេជំនួស β ដោយ $(-\beta)$ ក្នុងរូបមន្ត $\tan(\alpha+\beta)$ គេបាន $\tan[\alpha+(-\beta)] = \dfrac{\tan\alpha + \tan(-\beta)}{1 - \tan\alpha\tan(-\beta)}$

$\boxed{\tan(\alpha-\beta) = \dfrac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta}}$ (6) ។ រូបមន្តនេះកំណត់បានលុះត្រាតែ $\alpha \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$,

$\beta \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, $(\alpha-\beta) \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ $(k \in Z)$ ។

ឧទាហរណ៍ 2 $\tan\dfrac{\pi}{12} = \tan\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{\tan\frac{\pi}{4} - \tan\frac{\pi}{6}}{1 + \tan\frac{\pi}{4}\tan\frac{\pi}{6}} = \dfrac{1 - \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 + 1\times\frac{\sqrt{3}}{3}} = \dfrac{\frac{3-\sqrt{3}}{3}}{\frac{3+\sqrt{3}}{3}} = 2 - \sqrt{3}$ ។

លំហាត់គំរូ 1 គេមាន $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$, $-\dfrac{\pi}{2} < \beta < 0$ និង $\tan\alpha = 2$, $\tan\beta = -3$ ។

ក. គណនា $\tan(\alpha-\beta)$ ខ. គណនាមុំ $(\alpha-\beta)$ ។

ចម្លើយ ក. $\tan(\alpha-\beta) = \dfrac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta} = \dfrac{2-(-3)}{1+2(-3)} = \dfrac{5}{-5} = -1$ ។

ខ. $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$, $\dfrac{\pi}{2} < \beta < 0$ នាំឲ្យ គេបាន $0 < \alpha - \beta < \pi$ ។ តាមសំណួរ ក.

$\tan(\alpha-\beta) = -1 \Rightarrow \alpha - \beta = \dfrac{3\pi}{4}$ ។

លំហាត់គំរូ 2 សម្រួលកន្សោម $\dfrac{\tan 3\theta - \tan\theta}{1 + \tan\theta\tan 3\theta} + \cot\left(\dfrac{\pi}{2} + 2\theta\right)$ ។

ចម្លើយ គេមាន $\dfrac{\tan 3\theta - \tan\theta}{1 + \tan\theta\tan 3\theta} = \tan(3\theta - \theta) = \tan 2\theta$ និង $\cot\left(\dfrac{\pi}{2} + 2\theta\right) = -\tan 2\theta$ ។

ដូចនេះ $\dfrac{\tan 3\theta - \tan\theta}{1 + \tan\theta\tan 3\theta} + \cot\left(\dfrac{\pi}{2} + 2\theta\right) = \tan 2\theta - \tan 2\theta = 0$ ។

ប្រតិបត្តិ 1 គណនា $\tan(a+b+c)$ ដោយប្រើរូបមន្ត $\tan(\alpha+\beta)$ ។

ប្រតិបត្តិ 2 ផ្ទៀងផ្ទាត់សមភាព $\dfrac{1-\tan\theta}{1+\tan\theta} = \tan\left(\dfrac{\pi}{4} - \theta\right)$ ។

2. អនុវត្តន៍រូបមន្តផលបូក

2.1 រូបមន្តមុំឌុប

ក. គេឱ្យ $\alpha = \beta$ ជំនួស β ដោយ α ក្នុងរូបមន្ត $\sin(\alpha+\beta)$ គេបាន ៖

$\sin 2\alpha = \sin(\alpha+\alpha) = \sin\alpha\cos\alpha + \cos\alpha\sin\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$ ។

ដូចនេះ $\boxed{\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha}$ (7) ។

ខ. បើគេជំនួស β ដោយ α ទៅក្នុងរូបមន្ត $\cos(\alpha+\beta)$ គេបាន ៖

$\cos 2\alpha = \cos(\alpha+\alpha) = \cos\alpha\cos\alpha - \sin\alpha\sin\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$ ។

គេសង្កេតឃើញថា $\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha$ និង $\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$ ។

គេបាន $\cos 2\alpha = (1 - \sin^2\alpha) - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$ និង

$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - (1 - \cos^2\alpha) = 2\cos^2\alpha - 1$ ។

ដូចនេះ $\boxed{\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1}$ (8) ។

គ. បើគេជំនួស β ដោយ α ទៅក្នុងរូបមន្ត $\tan(\alpha+\beta)$ គេបាន ៖

$\tan 2\alpha = \tan(\alpha+\alpha) = \dfrac{\tan\alpha + \tan\alpha}{1 - \tan\alpha\tan\alpha} = \dfrac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha}$ ។

ដូចនេះ $\boxed{\tan 2\alpha = \dfrac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha}}$ (9) ។

ឧទាហរណ៍ 1 រក $\sin 2\alpha$, $\cos 2\alpha$ និង $\tan 2\alpha$ បើ $\cos\alpha = -\dfrac{4}{5}$ និង $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ ។

ដោយ $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi \Rightarrow \sin\alpha > 0$ គេបាន $\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$, $\sin\alpha = \sqrt{1 - \cos^2\alpha}$

$\sin\alpha = \sqrt{1 - \left(-\dfrac{4}{5}\right)^2} = \dfrac{3}{5}$ ។ ដូចនេះ $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = 2 \times \dfrac{3}{5} \times \left(-\dfrac{4}{5}\right) = -\dfrac{24}{25}$

$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 2 \times \left(-\dfrac{4}{5}\right)^2 - 1 = \dfrac{7}{25}$ ។ គេបាន $\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\dfrac{3}{4}$ ។

នាំឱ្យ $\tan 2\alpha = \dfrac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha} = \dfrac{2 \times \left(-\dfrac{3}{4}\right)}{1 - \left(-\dfrac{3}{2}\right)^2} = -\dfrac{24}{7}$ ។ គេអាចរក $\tan 2\alpha = \dfrac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = -\dfrac{24}{7}$ ។

ឧទាហរណ៍ 2 គណនា $\sin 3\alpha$ និង $\cos 3\alpha$ ។

$\sin 3a = \sin(2\alpha + \alpha) = \sin 2\alpha\cos\alpha + \sin\alpha\cos 2\alpha$

$= 2\sin\alpha\cos\alpha\cos\alpha + \sin\alpha(1 - 2\sin^2\alpha) = 2\sin\alpha\cos^2\alpha + \sin\alpha - 2\sin^3\alpha$

$= 2\sin\alpha(1-\sin^2\alpha)+\sin\alpha-2\sin^3\alpha = 2\sin\alpha-2\sin^3\alpha+\sin\alpha-2\sin^3\alpha$

$= 3\sin\alpha-4\sin^3\alpha$ ។

ដូចនេះ $\sin3\alpha = 2\sin\alpha-4\sin^3\alpha$ ។

ប្រើរូបមន្ត $\cos2\alpha = \cos(2\alpha+\alpha) = \cos2\alpha\cos\alpha-\sin2\alpha\sin\alpha$ គេបាន

$\cos3a = 4\cos^3a-3\cos a$ ។

លំហាត់គំរូ បង្ហាញថា $\dfrac{1-2\sin^2\alpha}{2\cot\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)} = 1$ ។

ចម្លើយ គេបាន $\dfrac{1-2\sin^2\alpha}{2\cot\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)} = \dfrac{\cos2\alpha}{2\tan\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}$

$= \dfrac{\cos2\alpha}{2\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)} = \dfrac{\cos2\alpha}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-2\alpha\right)} = \dfrac{\cos2\alpha}{\cos2\alpha} = 1$ ។

2.2 រូបមន្តកន្លះមុំ

ក. បើគេជំនួស 2α ដោយ α និង α ដោយ $\frac{\alpha}{2}$ ទៅក្នុងរូបមន្ត $\sin2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$,

$\cos^2\alpha = \dfrac{1+\cos2\alpha}{2}$, $\sin^2\alpha = \dfrac{1-\cos2\alpha}{2}$ និង $\tan^2\alpha = \dfrac{1-\cos2\alpha}{1+\cos2\alpha}$

គេបាន $\boxed{\begin{array}{l} \sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} , \cos^2\frac{\alpha}{2} = \dfrac{1+\cos\alpha}{2} \\ \sin^2\frac{\alpha}{2} = \dfrac{1-\cos\alpha}{2} , \tan^2\frac{\alpha}{2} = \dfrac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha} \end{array}}$ ។

រូបមន្តម្យ៉ាងទៀតរបស់ $\tan\frac{\alpha}{2}$ គឺ $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x} = \dfrac{2\sin x\cos x}{2\cos x\cos x} = \dfrac{\sin2x}{2\cos^2x} = \dfrac{\sin2x}{1+\cos2x}$

បើគេជំនួស x ដោយ $\frac{\alpha}{2}$ និង $\alpha = 2x$ គេបាន $\boxed{\tan\frac{\alpha}{2} = \dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}}$ ។

ខ. បើគេជំនួស 2α ដោយ α និង α ដោយ $\frac{\alpha}{2}$ ទៅក្នុងរូបមន្ត (7) , (8) និង (9) គេបាន:

$\cos\alpha = \cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}$, $\sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$, $\tan\alpha = \dfrac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}$ ។

ដោយ $\cos^2\frac{\alpha}{2}+\sin^2\frac{\alpha}{2} = 1$ គេអាចសរសេរ $\cos\alpha = \dfrac{\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}+\sin^2\frac{\alpha}{2}}$, $\sin\alpha = \dfrac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}+\sin^2\frac{\alpha}{2}}$

គេចែកភាគយកនិងភាគបែងកន្សោមទាំងពីរនឹង $\cos^2\frac{\alpha}{2}$ ដែល $\cos\frac{\alpha}{2} \neq 0$ គេបាន

$\cos\alpha = \dfrac{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}}$, $\sin\alpha = \dfrac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}}$ ។ បើគេឱ្យ $\tan\frac{\alpha}{2} = t$

គេបានរូបមន្ត $\boxed{\cos\alpha = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}\ ,\ \sin\alpha = \dfrac{2t}{1+t^2}\ ,\ \tan\alpha = \dfrac{2t}{1-t^2}}$ ។

ឧទាហរណ៍ 1 គណនា $\sin 22°30'$, $\sin\frac{\pi}{12}$ និង $\tan\frac{3\pi}{8}$ ។

គេដឹងថាមុំ $22°30'$ នៅក្នុងកាជ្រង់ទី I ដូចនេះ sin និង cos មានតម្លៃវិជ្ជមាន ។

គេបាន $\sin 22°30' = \sin\dfrac{45°}{2} = \sqrt{\dfrac{1-\cos 45°}{2}} = \sqrt{\dfrac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} = \dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$ ។

$$\sin^2\frac{\pi}{12} = \sin^2\left(\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1-\cos\frac{\pi}{6}}{2} = \frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{2-\sqrt{3}}{4}$$ ដោយ $\sin\frac{\pi}{12} > 0$

$$\Rightarrow \quad \sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$$

$$\tan\frac{3\pi}{8} = \tan\left(\frac{1}{2}\times\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{\sin\frac{3\pi}{4}}{1+\cos\frac{3\pi}{4}} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} = \sqrt{2}+1$$ ។

ឧទាហរណ៍ 2 ក. ផ្ទៀងផ្ទាត់សមភាព $\dfrac{1-\cos x}{\sin x} = \tan\dfrac{x}{2}$ ។

តាង $\tan\frac{x}{2} = t$ គេបាន $\dfrac{1-\cos x}{\sin x} = \dfrac{1-\frac{1-t^2}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}} = \dfrac{\frac{1+t^2-1+t^2}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}} = \dfrac{2t^2}{2t} = t = \tan\dfrac{x}{2}$ ។

លំហាត់គំរូ គេមាន $\cos\alpha = -\frac{3}{5}$ ហើយ $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ ។ គណនា $\sin\frac{\alpha}{2}$, $\cos\frac{\alpha}{2}$ ។

ចម្លើយ ដោយ $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ នោះនាំឱ្យ $\sin\alpha > 0$ ។

គេបាន $\sin^2\alpha = 1-\cos^2\alpha = 1-\left(-\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{16}{25}$ ។ ដូចនេះ $\sin\alpha = \frac{4}{5}$ ។

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}} = \sqrt{\frac{1+\frac{3}{5}}{2}} = \sqrt{\frac{4}{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}\ ,\ \cos\frac{\alpha}{2} = -\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}} = \sqrt{\frac{1-\frac{3}{5}}{2}} = -\sqrt{\frac{1}{5}} = -\frac{\sqrt{5}}{5}$$ ។

ប្រតិបត្តិ គណនា $\tan\frac{\alpha}{2}$ ដោយស្គាល់ $\tan\alpha = \frac{24}{7}$ និង $180° < \alpha < 270°$ ។

3. រូបមន្តបំប្លែង

3.1 បំប្លែងពីផលគុណទៅជាផលបូកនិងផលដក

តាមរូបមន្តផលបូកនិងផលដកខាងក្រោម :

$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta \quad (1)\,,\quad \cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \quad (2)$

$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha \quad (3)\,,\quad \sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \sin\beta\cos\alpha \quad (4)$

ក. បូករូបមន្ត (1) និង (2) គេបាន $\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta) = 2\cos\alpha\cos\beta$

ដករូបមន្ត (1) និង (2) គេបាន $\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta) = -2\sin\alpha\sin\beta$ ។

ខ. បូករូបមន្ត (3) និង (4) គេបាន $\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta) = 2\sin\alpha\cos\beta$

ដករូបមន្ត (3) និង (4) គេបាន $\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta) = 2\sin\beta\cos\alpha$ ។

ដូចនេះ គេបានរូបមន្ត

$$\boxed{\begin{array}{l} \cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)]\,,\quad \sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)] \\ \sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)]\,,\quad \sin\beta\cos\alpha = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)] \end{array}}$$ ។

ឧទាហរណ៍ 1 គណនា $\cos 75°\cos 45°$ ។

គេបាន $\cos 75°\cos 45° = \frac{1}{2}[\cos(75°+45°)+\cos(75°-45°)] = \frac{1}{2}(\cos 120° + \cos 30°)$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}-1}{4}$$ ។

ឧទាហរណ៍ 2 $\sin\frac{5\pi}{12}\sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}\left[\cos\left(\frac{5\pi}{12}-\frac{\pi}{4}\right)-\cos\left(\frac{5\pi}{12}+\frac{\pi}{4}\right)\right] = \frac{1}{2}\left[\left(\cos\frac{\pi}{6}-\cos\frac{2\pi}{3}\right)\right]$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\sqrt{3}}{2}-\left(-\frac{1}{2}\right)\right] = \frac{\sqrt{3}+1}{4}$$ ។

3.2 បំប្លែងពីផលបូកទៅជាផលគុណ

តាង $\alpha+\beta = p$, $\alpha-\beta = q$ គេទាញបាន $\alpha = \frac{p+q}{2}$ និង $\beta = \frac{p-q}{2}$ ។ ជំនួស α និង β ទៅក្នុងរូបមន្តខាងលើ គេបាន

$$\boxed{\begin{array}{l} \cos p + \cos q = 2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}\,,\quad \cos p - \cos q = -2\sin\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2} \\ \sin p + \sin q = 2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}\,,\quad \sin p - \sin q = 2\sin\frac{p-q}{2}\cos\frac{p+q}{2} \end{array}}$$ ។

ដូចគ្នាដែរគេបាន $\tan p + \tan q = \frac{\sin p}{\cos p}+\frac{\sin q}{\cos q} = \frac{\sin p\cos q + \sin q\cos p}{\cos p\cos q} = \frac{\sin(p+q)}{\cos p\cos q}$ ។

ជំនួស q ដោយ $-q$ គេបាន $\tan p - \tan q = \dfrac{\sin(p-q)}{\cos p\cos q}$ ។

ធ្វើតាមវិធីដូចខាងលើ គេបាន $\cot p + \cot q = \dfrac{\sin(p+q)}{\sin p\sin q}$ និង $\cot p - \cot q = \dfrac{\sin(q-p)}{\sin p\sin q}$ ។

ដូចនេះ
$$\boxed{\begin{array}{l} \tan p + \tan q = \dfrac{\sin(p+q)}{\cos p\cos q}\ ,\ \cot p + \cot q = \dfrac{\sin(p+q)}{\sin p\sin q} \\ \tan p - \tan q = \dfrac{\sin(p-q)}{\cos p\cos q}\ ,\ \cot p - \cot q = \dfrac{\sin(q-p)}{\sin p\sin q} \end{array}}$$ ។

ឧទាហរណ៍ 1 $\sin 105^\circ + \sin 15^\circ = 2\sin\dfrac{105^\circ + 15^\circ}{2}\cos\dfrac{105^\circ - 15^\circ}{2} = 2\sin 60^\circ\cos 45^\circ$

$$= 2\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$ ។

ឧទាហរណ៍ 2 សរសេរជាផលគុណ $1 + \cos a + \cos 2a$ ។

គេបាន $1 + \cos a + \cos 2a = 1 + \cos 2a + \cos a = 2\cos^2 a + \cos a = 2\cos a\left(\cos a + \dfrac{1}{2}\right)$

$$= 2\cos a\left(\cos a + \cos\frac{\pi}{3}\right) = 4\cos a\cos\left(\frac{a}{2}+\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(\frac{a}{2}-\frac{\pi}{6}\right)$$ ។

លំហាត់គំរូ 1 ផ្ទៀងផ្ទាត់សមភាព $2\left(\dfrac{1}{\sin 2\alpha} + \cot 2\alpha\right) = \cot\dfrac{\alpha}{2} - \tan\dfrac{\alpha}{2}$ ។

ចម្លើយ

$$2\left(\frac{1}{\sin 2\alpha} + \cot 2\alpha\right) = 2\left(\frac{1}{\sin 2\alpha} + \frac{\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}\right) = 2\left(\frac{2\cos^2\alpha}{2\sin\alpha\cos\alpha}\right) = \frac{2\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{2\left(\cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}\right)}{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}$$

$$= \frac{\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}} - \frac{\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}} = \cot\frac{\alpha}{2} - \tan\frac{\alpha}{2}$$ ។

លំហាត់គំរូ 2 គេមាន $A,\ B,\ C$ ជាមុំក្នុងត្រីកោណមួយ ។ ចូរបង្ហាញថា

$$\sin A + \sin B + \sin C = 4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$$ ។

ចម្លើយ គេមាន $\sin A + \sin B + \sin C = 2\sin\dfrac{A+B}{2}\cos\dfrac{A-B}{2} + 2\sin\dfrac{C}{2}\cos\dfrac{C}{2}$

ដោយ $A + B + C = \pi \Rightarrow \dfrac{A+B}{2} = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{C}{2}$ ។ ដូចនេះ $\sin\dfrac{A+B}{2} = \cos\dfrac{C}{2}$,
$\cos\dfrac{A+B}{2} = \sin\dfrac{C}{2}$ ។

គេបាន $\sin A + \sin B + \sin C = 2\cos\dfrac{C}{2}\cos\dfrac{A-B}{2} + 2\cos\dfrac{A+B}{2}\cos\dfrac{C}{2}$

$$= 2\cos\frac{C}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2} + \cos\frac{A+B}{2}\right) = 4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$$ ។

ប្រតិបត្តិ $A,\ B,\ C$ ជាមុំក្នុងត្រីកោណមួយ ។ ចូរបង្ហាញថា

$$\cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$ ។

លំហាត់

1. គេមាន $\sin\alpha = \frac{1}{2}$ $\left(0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$, $\sin\beta = \frac{1}{3}$ $\left(\frac{\pi}{2}<\beta<\pi\right)$ ។

   គណនា $\sin(\alpha+\beta)$, $\cos(\alpha-\beta)$, $\tan(\alpha-\beta)$ និង $\cot(\alpha-\beta)$ ។

2. គេមាន $\cos\theta = -\frac{2}{3}$, $\left(\frac{\pi}{2}<\theta<\pi\right)$ ។ គណនា $\cos 2\theta$, $\sin\frac{\theta}{2}$, $\sin 3\theta$ ។

3. គេមាន $t = \tan\frac{\theta}{2}$ $(t\neq\pm1)$, $\sin\theta = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos\theta = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $\tan\theta = \frac{2t}{1-t^2}$ ។

   តាមសមភាព $2\cos 2\theta - \cos\theta + 2 = 0$ គណនា $\tan\frac{\theta}{2}$ ដែល $-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}$ ។

4. គេមាន $\theta = 36°$ និង $2\theta = 180° - 3\theta$ ។ តាមលក្ខណៈនេះ គណនា $\cos 36°$ ។

5. គេមាន $\sin\alpha + \cos\beta = \frac{5}{4}$ និង $\cos\alpha + \sin\beta = \frac{5}{4}$ ហើយ $\left(0\le\alpha\le\frac{\pi}{2}\right)$, $\left(0\le\beta\le\frac{\pi}{2}\right)$ ។

   គណនា $\sin(\alpha+\beta)$ និង $\tan(\alpha+\beta)$ ។

6. ចូរបង្ហាញសមភាពខាងក្រោម :

   ក. $\cot(a\pm b) = \frac{\cot a\cot b \mp 1}{\cot b \pm \cot a}$

   ខ. $\tan(a+b) - \tan a - \tan b = \tan a\tan b\tan(a+b)$

   គ. $\frac{\sin^4\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha - \cos^4\alpha}{\tan 2\alpha - 1} = \cos 2\alpha$

   ឃ. $\frac{\cos^3\alpha - \cos 3\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\sin^3\alpha + \sin 3\alpha}{\sin\alpha} = 3$ ។

7. សម្រួលកន្សោមខាងក្រោម :

   ក. $\sin 4x - 4\sin 3x + 6\sin 2x - 4\sin x$

   ខ. $\cos^2(\alpha+\beta) + \cos^2(\alpha-\beta) - \cos 2\alpha\cos 2\beta$

   គ. $\frac{\sin\alpha + \sin 3\alpha + \sin 5\alpha}{\cos\alpha + \cos 3\alpha + \cos 5\alpha}$

   ឃ. $\frac{\sin\alpha + \sin 3\alpha + \sin 5\alpha + \sin 7\alpha}{\cos\alpha + \cos 3\alpha + \cos 5\alpha + \cos 7\alpha}$ ។

8. ចូរបង្ហាញសមភាពខាងក្រោម ៖

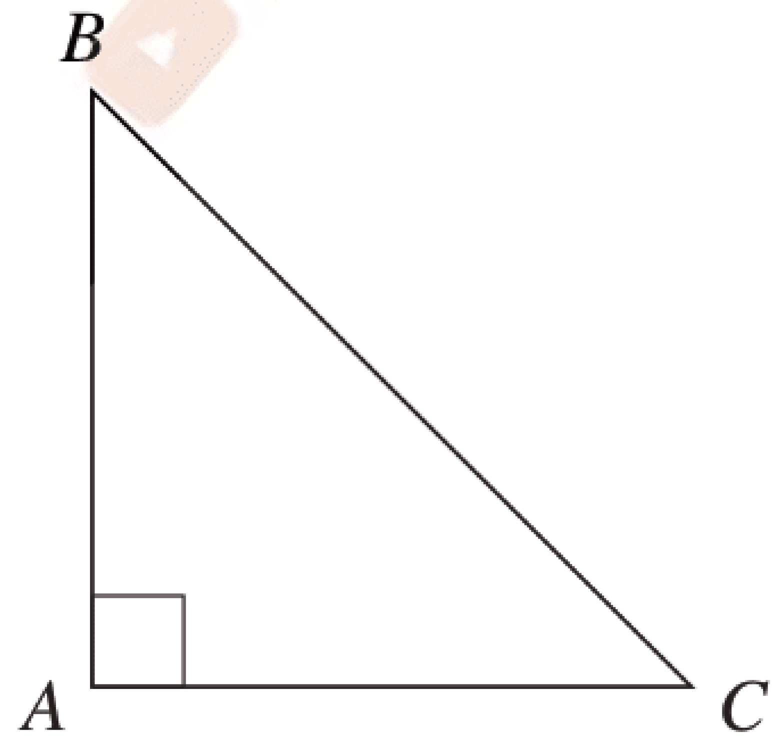
ក. $\sin 3a = 4\sin a \sin\left(\frac{\pi}{3}+a\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}-a\right)$

ខ. $\cos 3a = 4\cos a \cos\left(\frac{\pi}{3}+a\right)\cos\left(\frac{\pi}{3}-a\right)$

គ. $4\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right) = 4\sin^2\alpha - 3$

ឃ. $\sin a - \cos a = \sqrt{2}\sin\left(a-\frac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{2}\sin\left(a+\frac{\pi}{4}\right)$ ។

9. ចូរបង្ហាញថាត្រីកោណដែលផ្ទៀងផ្ទាត់សមភាព



ក. $\sin A = \dfrac{\sin B + \sin C}{\cos B + \cos C}$

ខ. $\dfrac{\sin C}{\cos B} = \sin A + \cos A \cot C$ ជាត្រីកោណកែង ។

10. ចូរបង្ហាញថា ត្រីកោណ ABC ផ្ទៀងផ្ទាត់សមភាព $\sin A = 2\sin B \sin C$ ជាត្រីកោណសមបាត ។

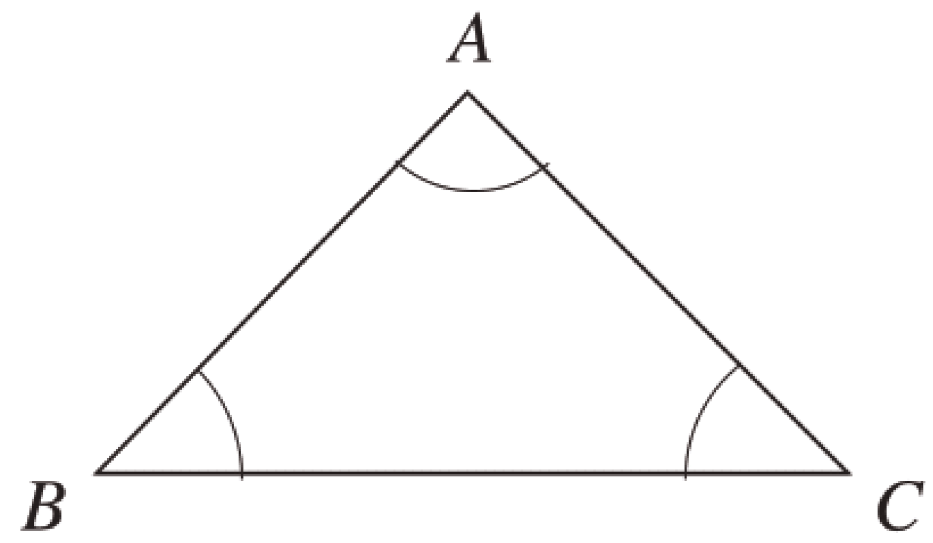
11. គេឱ្យ $\tan A + \tan B = 2\cot\frac{C}{2}$ ។ បង្ហាញថាត្រីកោណ ABC ជាត្រីកោណសមបាត ។

12. គេមាន ΔABC និង A, B, C ជាមុំក្នុងត្រីកោណនេះ ។

ក. បើគេដឹងថា $\sin A + \sin B + \sin C = 1$ គណនា $\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$

ខ. បង្ហាញថា $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 1 - 2\cos A\cos B\cos C$ ។

13. គណនារង្វាស់មុំនៃត្រីកោណ ABC បើគេដឹងថា



ក. $\sin 3A + \sin 3B + \sin 3C = 0$

ខ. $\sin 5A + \sin 5B + \sin 5C = 0$

គ. $\sin 6A + \sin 6B + \sin 6C = 0$ ។

មេរៀនទី

3 សមីការនិងវិសមីការត្រីកោណមាត្រ

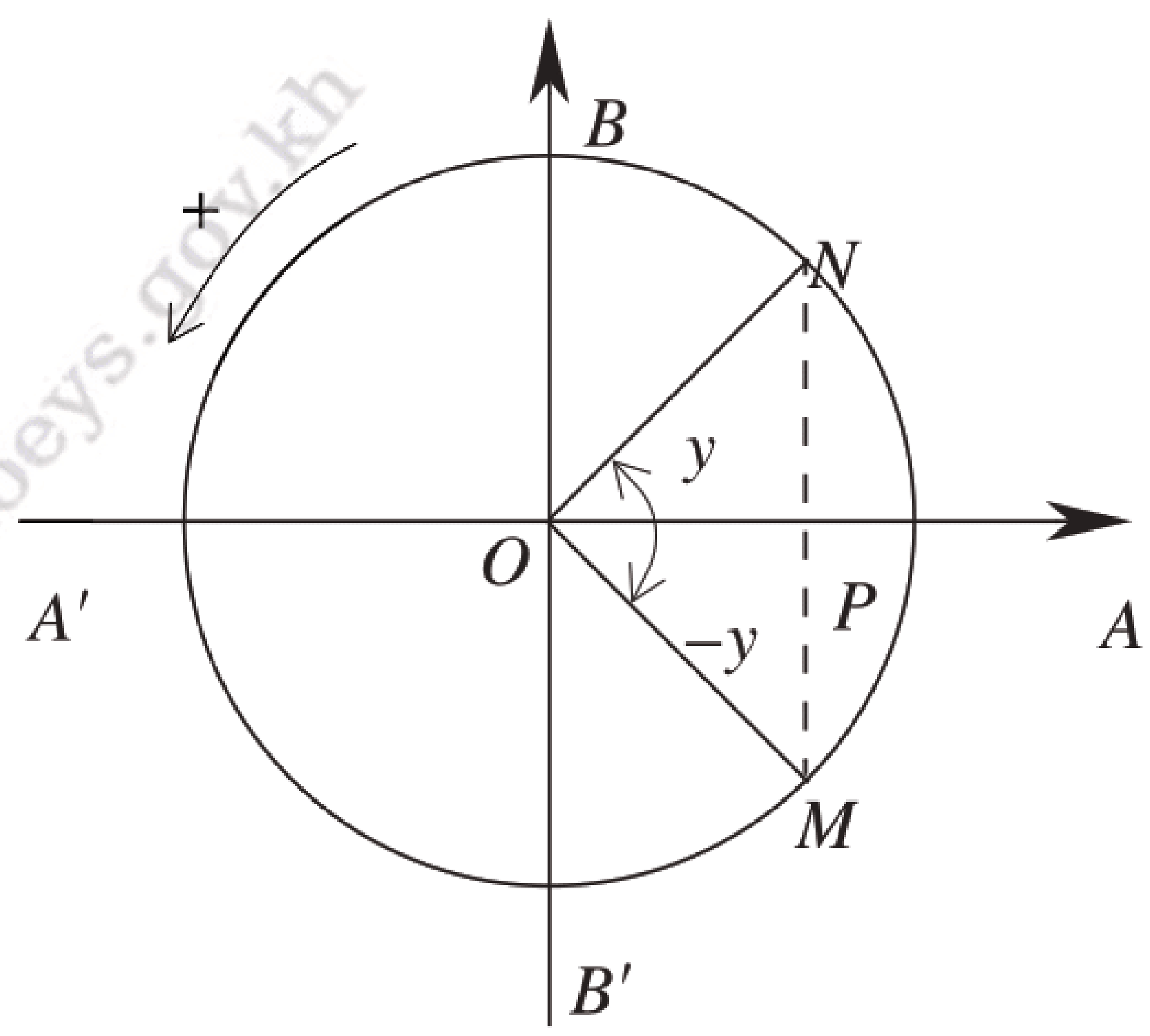
1. ចំនួនដែលមានកូស៊ីនុសដូចគ្នា

វត្ថុបំណង

- ដោះស្រាយសមីការត្រីកោណមាត្រ
- ដោះស្រាយវិសមីការត្រីកោណមាត្រ

គេឱ្យពីរចំនួន x និង y ដែលមានកូស៊ីនុសដូចគ្នា $\cos x = \cos y$ ។ ក្នុងរង្វង់ត្រីកោណមាត្រដែលមានផ្ចិត O គេមាន M និង N ជាចំណុចនៅលើរង្វង់ដែល $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{ON}) = y$ និង $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM}) = x$ ។

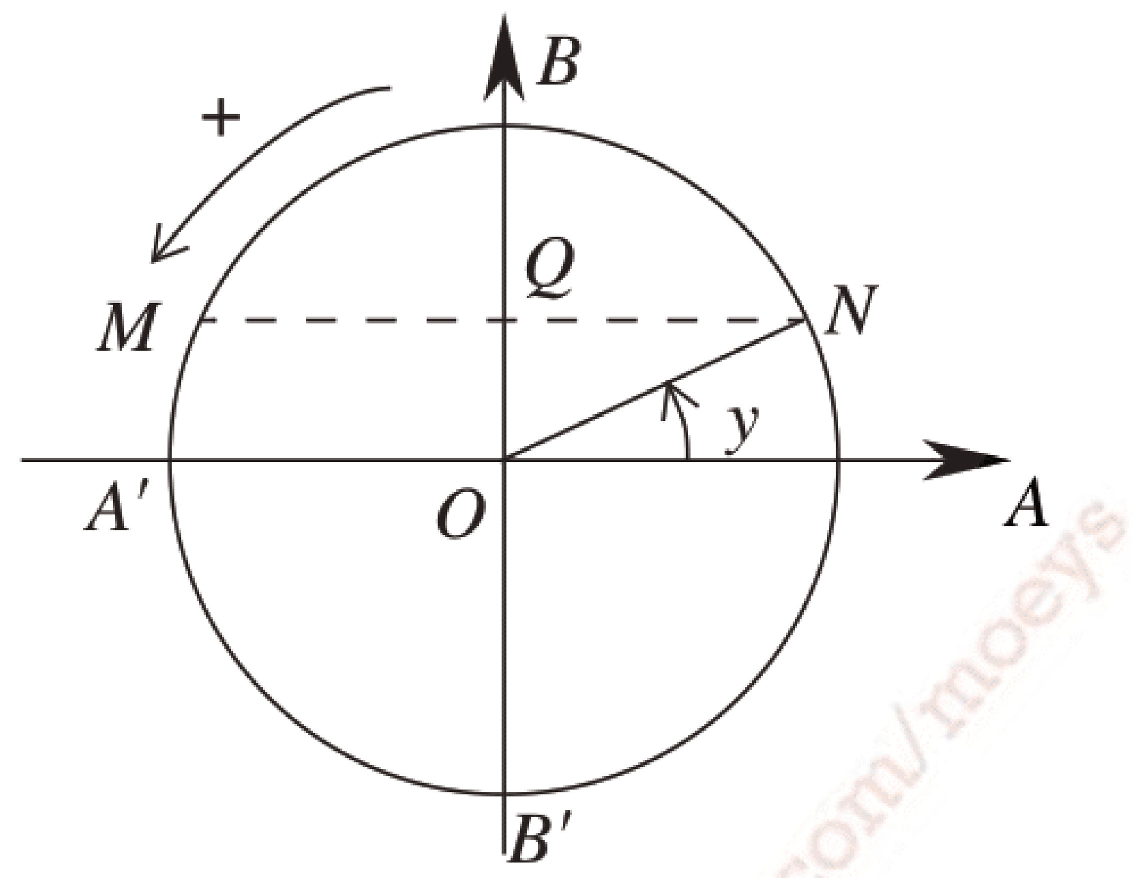
អាប់ស៊ីសនៃចំណុច N គឺ $\cos y$ ។ ដោយ $\cos x = \cos y$ នោះចំណុច M និង N មានអាប់ស៊ីសដូចគ្នា។ ដូចនេះ គេបានករណីពីរដូចខាងក្រោម ៖



- បើ M និង N ត្រួតស៊ីគ្នា នោះ x និង y ជារង្វាស់មុំតែមួយ ។
  ដូចនេះ $x = y + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$ ។
- បើ M និង N ឆ្លុះគ្នាធៀបនឹងអ័ក្ស $(x'x)$
  នោះមុំ $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{ON})$ និង $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM})$ ផ្ទុយគ្នា ហើយ $-y$ ជារង្វាស់មួយនៃមុំ $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM})$ ។
  ដូចនេះ $x = -y + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$ ។

ជាទូទៅ គេបាន (I) ពីរចំនួន x និង y មានកូស៊ីនុសដូចគ្នា $\cos x = \cos y$
លុះត្រាតែ $x = y + 2k\pi$ ឬ $x = -y + 2k\pi \quad (k \in Z)$ ។

2. ចំនួនដែលមានស៊ីនុសដូចគ្នា



គេឱ្យពីរចំនួន x និង y ដែលមានស៊ីនុសដូចគ្នា $\sin x = \sin y$ ។

ក្នុងរង្វង់ត្រីកោណមាត្រដែលមានផ្ចិត O គេមាន M និង N ជាចំណុចនៅលើរង្វង់ដែល $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{ON}) = y$ និង $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM}) = x$ ។

$\sin x$ ជាអរដោនេនៃចំណុច M និង $\sin y$ ជាអរដោនេនៃចំណុច N ។ ដោយ $\sin x = \sin y$ នោះ M និង N មានអរដោនេដូចគ្នា។ ដូចនេះ គេបានករណីពីរដូចខាងក្រោម ៖

- បើ M និង N ត្រួតស៊ីគ្នា នោះ $x = y + 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$
- បើ M និង N ឆ្លុះគ្នាធៀបនឹងអ័ក្ស $(y'y)$ នោះមុំ $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{ON})$ និង $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM})$ ជាមុំបន្ថែមគ្នា ហើយ $\pi - y$ ជារង្វាស់នៃមុំ $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM})$ ។ ដូចនេះ $x = \pi - y + 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ ។

ជាទូទៅ (II) x និង y ពីរចំនួនពិតមានស៊ីនុសដូចគ្នា $\sin x = \sin y$ លុះត្រាតែ $x = y + 2k\pi$ ឬ $x = \pi - y + 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ ។

3. សមីការត្រីកោណមាត្រ

3.1 ដំណោះស្រាយសមីការ $\cos x = a$

ឧទាហរណ៍ 1 ដោះស្រាយសមីការ $\cos x = \frac{1}{2}$ ។

គេដឹងថា $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ សមីការអាចសរសេរ $\cos x = \cos\frac{\pi}{3}$ ។ តែ $\cos\frac{\pi}{3} = \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)$ ។

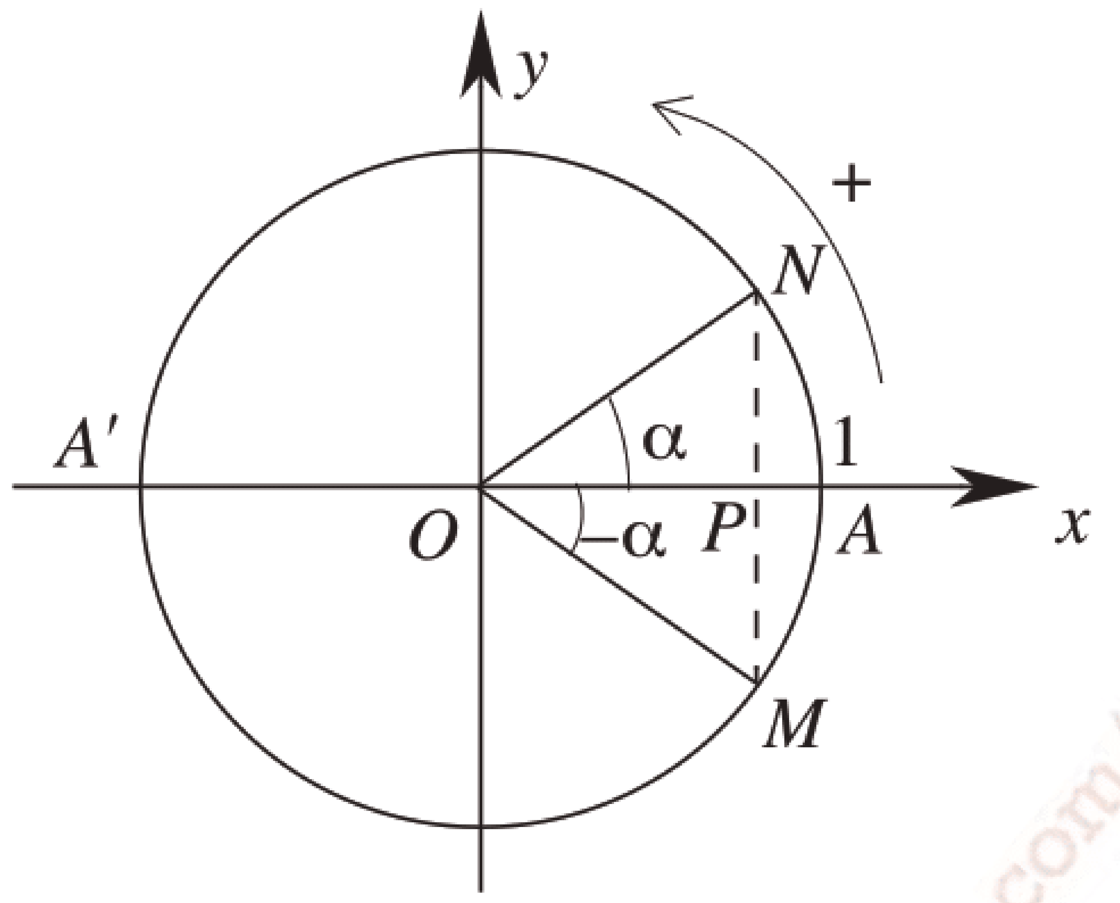
ដូចនេះ សមីការមានចម្លើយពីរគឺ $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$, $x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ ។

ឧទាហរណ៍ 2 ដោះស្រាយសមីការ $\cos x = a$ ។

a ជាចំនួនពិតដែលគេឱ្យ ៖

- កាលណា $|a| > 1$ សមីការ $\cos x = a$ គ្មានចម្លើយព្រោះគ្រប់ចំនួន $x \in \mathbb{R}$, $-1 \le \cos x \le 1$ ។
- កាលណា $|a| \le 1$ គេបានករណីដូចខាងក្រោម ៖

ក្នុងរង្វង់ត្រីកោណមាត្រដែលមានផ្ចិត O និង A ជាចំណុចគល់នៃធ្នូហើយ $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{ON}) = \alpha$ ដែល $\cos\alpha = OP = a$ (ដូចរូបខាងស្តាំ) ។



ម្យ៉ាងវិញទៀត $a = OP = \cos(-\alpha)$ ដែល $-\alpha$ ជារង្វាស់នៃមុំ $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM})$ ។ គេបាន :

- បើ $a \notin [-1, 1]$ សមីការ $\cos x = a$ គ្មានចម្លើយ ។
- បើ $a = 1$ ឬ $\cos x = 1$ នោះចុងធ្នូត្រួតស៊ីគ្នានឹងចំណុច A ជាចម្លើយនៃសមីការ ។ ដូចនេះ $x = 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$ ។
- បើ $a = -1$ ឬ $\cos x = -1$ នោះចុងធ្នូត្រួតស៊ីគ្នានឹងចំណុច A' ជាចម្លើយនៃសមីការ ។ ដូចនេះ $x = \pi + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$ ។
- បើ $a \in (-1, 1)$ មាន α តែមួយគត់ដែល $\cos\alpha = a = \cos x$ ។

ដោះស្រាយសមីការ $\cos x = a$ គឺដោះស្រាយសមីការ $\cos x = \cos\alpha$ ។ តាមលក្ខណៈ (I) គេបាន :

ចម្លើយនៃសមីការ $\cos x = \cos\alpha$ មានពីរគឺ $x = \alpha + 2k\pi$ ឬ $x = -\alpha + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$ ។

សម្គាល់ 1. បើ $a = 0$ នោះ $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ។ ចម្លើយរបស់សមីការ $\cos x = 0$ គឺ $x = \frac{\pi}{2} + k\pi; \ (k \in \mathbb{Z})$ ។

2. តាមលក្ខណៈមុំពីរដែលមានកូស៊ីនុសដូចគ្នា លុះត្រាតែមុំទាំងពីរស្មើគ្នា ឬផ្ទុយគ្នានោះ គេអាចដោះស្រាយសមីការ $\cos u(x) = \cos v(x) \Leftrightarrow u(x) = \pm v(x) + 2k\pi \ , \ (k \in \mathbb{Z})$ ដែល $u(x)$ និង $v(x)$ ជាអនុគមន៍នៃ x ។

លំហាត់គំរូ 1 ដោះស្រាយសមីការ $\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \sin 3x$ រួចដៅចុងធ្នូនៃចម្លើយលើរង្វង់ត្រីកោណមាត្រ ។

ចម្លើយ តាមធ្នូបំពេញ គេបាន $\sin 3x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right)$ ។ ដូចនេះ $\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right)$

$\Rightarrow \quad x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} - 3x + 2k\pi$ ឬ $x - \frac{\pi}{4} = -\left(\frac{\pi}{4} - 3x\right) + 2k\pi \ , \ k \in \mathbb{Z}$ ។

គេបាន $4x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$ និង $-2x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi$ ។

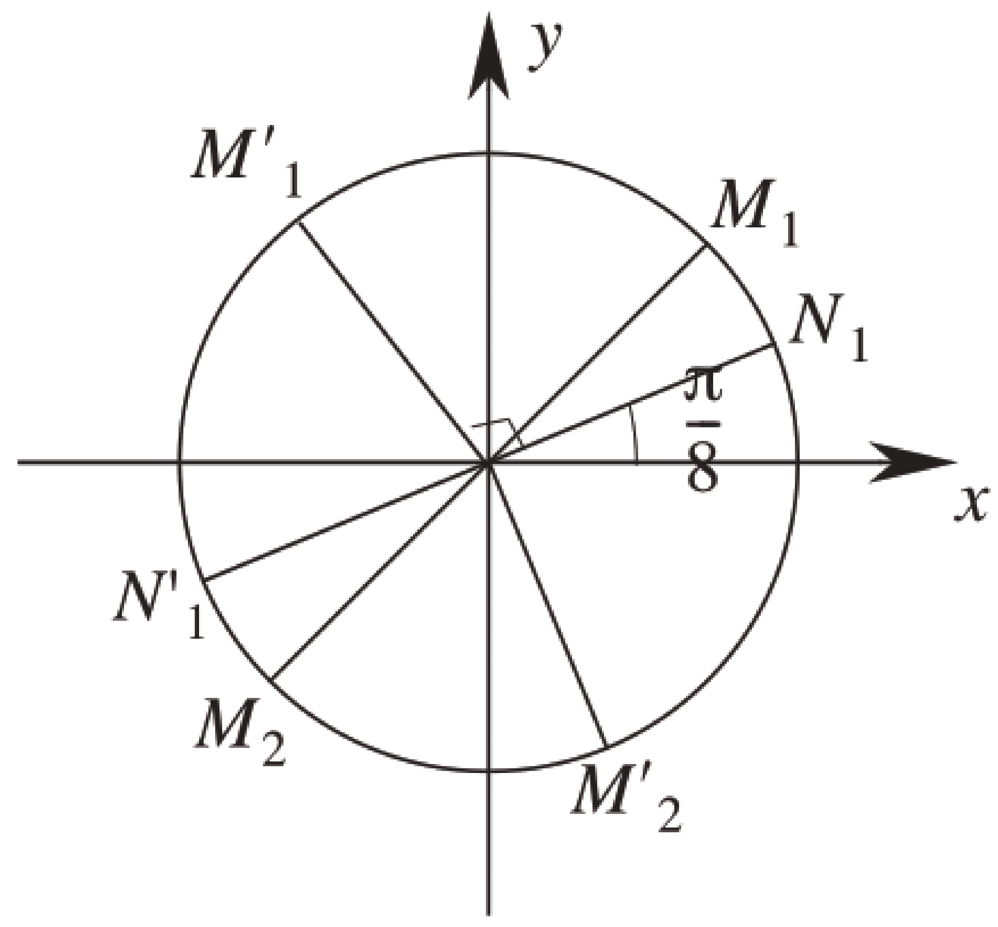
ដូចនេះ $x = \frac{3\pi}{16} + \frac{k\pi}{2}$ និង $x = \frac{\pi}{8} - k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ ។

គេអាចសរសេរ $\frac{\pi}{8} - k\pi$ ទៅជា $\frac{\pi}{8} + k\pi$ ដែល $K = -k$ $(k \in \mathbb{Z}$ ដូចនេះ $K \in \mathbb{Z})$ ។

គេបាន (1) $x = \frac{3\pi}{16} + k\frac{\pi}{2}$ បើ $k = 0$, $x = \frac{3\pi}{16}$ ចុងធ្នូត្រង់ចំណុច M_1 ។

បើ $k = 1$, $x = \frac{3\pi}{16} + \frac{\pi}{2}$ ចុងធ្នូត្រង់ចំណុច M'_1 ។ បើ $k = 2$, $x = \frac{3\pi}{16} + \pi$ ចុងធ្នូត្រង់ចំណុច M_2 ។

បើ $k = 3$, $x = \frac{3\pi}{16} + \frac{3\pi}{2}$ ចុងធ្នូត្រង់ចំណុច M'_2 , $k = 4$, $x = \frac{3\pi}{16} + 4\pi$ ចុងធ្នូត្រួតលើ M_1 ។



ដូចនេះ (1) មានសំណុំចម្លើយចុងធ្នូបួនគឺ M_1 , M'_1 , M_2 , M'_2 ។

ចំពោះ (2) $x = \frac{\pi}{8} + k\pi$ បើ $k = 0$, $x = \frac{\pi}{8}$ ចុងធ្នូត្រង់ចំណុច N

បើ $k = 1$, $x = \frac{\pi}{8} + \pi$ ចុងធ្នូត្រង់ចំណុច N'_1

បើ $k = 2$, $x = \frac{\pi}{8} + 2\pi$ ចុងធ្នូត្រង់ចំណុច N_1 ។

ដូចនេះ (2) មានសំណុំចម្លើយចុងធ្នូពីរគឺ N_1 និង N'_1 ។

លំហាត់គំរូ 2 ដោះស្រាយសមីការ $1 + 3\cos x + \cos 2x = \cos 3x + 2\sin x \cdot \sin 2x$ ។

ចម្លើយ $1 + 3\cos x + \cos 2x = \cos 3x + 2\sin x \cdot \sin 2x$

$3\cos x + 2\cos^2 x = \cos 3x + \cos x + -\cos 3x \Leftrightarrow 2\cos x + 2\cos^2 x = 0$

$2\cos x(1 + \cos x) = 0 \Leftrightarrow \cos x = 0$ ឬ $\cos x = -1$ ។

ដូចនេះ សមីការមានឫស $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $x = \pi + k2\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ ។

ប្រតិបត្តិ ដោះស្រាយសមីការខាងក្រោម :

ក. $\cos\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) = -1$

ខ. $\cos\left(3x + \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$

គ. $\cos\frac{\pi}{6}\cos x - \sin\frac{\pi}{6}\sin x = \frac{\pi}{4}$

ឃ. $\sin^4 x - \cos^4 x = \frac{1}{2}$ ។

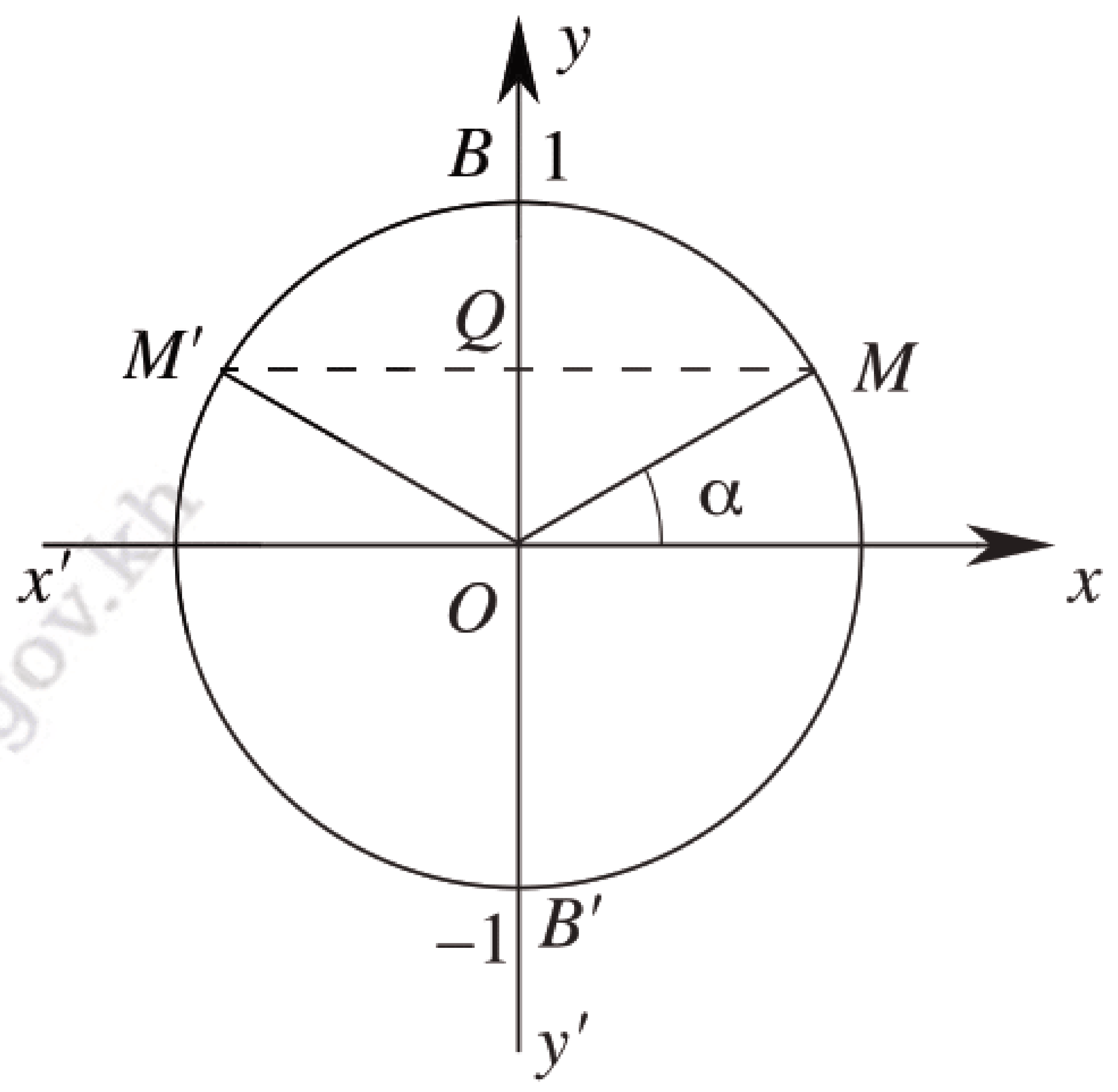
3.2 ដំណោះស្រាយសមីការ $\sin x = a$

ឧទាហរណ៍ 1 ដោះស្រាយសមីការ $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ។

គេដឹងថា $\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ សមីការអាចសរសេរ $\sin x = \sin\frac{\pi}{4}$ ។ ដូចនេះ សមីការមានចម្លើយពីរ គឺ : $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$, $x = \pi - \frac{\pi}{4} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ ឬ $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$, $x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ ។

ឧទាហរណ៍ 2 ដោះស្រាយសមីការ $\sin x = a$ ។

- កាលណា $|a| > 1$ សមីការ $\sin x = a$ គ្មានចម្លើយព្រោះគ្រប់ចំនួន $x \in \mathbb{R} : -1 \le \sin x \le 1$ ។
- កាលណា $|a| \le 1$ គេបានករណីដូចខាងក្រោម



ក្នុងរង្វង់ត្រីកោណមាត្រដែលមានផ្ចិត O និង A ជាចំណុចគល់នៃធ្នូ ហើយ $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM}) = \alpha$ ដែល $\sin\alpha = OQ = a$ (ដូចរូបខាងស្តាំ) ។ ម្យ៉ាងវិញទៀត $OQ = \sin(\pi - \alpha) = a$ ដែល $\pi - \alpha$ ជារង្វាស់នៃមុំ $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM'})$ ។ គេបាន

- បើ $a \notin [-1, 1]$ សមីការ $\sin x = a$ គ្មានចម្លើយ ។
- បើ $a = 1$ ឬ $\sin x = 1$ នោះធ្នូទាំងឡាយណាដែលមានចុងត្រង់ចំណុច B ជាចម្លើយនៃសមីការ ។
- បើ $a = -1$ ឬ $\sin x = -1$ នោះធ្នូទាំងឡាយដែលមានចុងត្រង់ចំណុច B' ជាចម្លើយនៃសមីការ ។ ដូចនេះ $\sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $(k \in \mathbb{Z})$ ។
- បើ $a \in (-1, 1)$ មាន α តែមួយគត់ក្នុងចន្លោះ $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ ដែល $\sin\alpha = a = \sin x$ ។

ដោះស្រាយសមីការ $\sin x = a$ សមមូលនឹង $\sin x = \sin\alpha$ ។ តាមលក្ខណៈ (1) គេបាន :

សមីការ $\sin x = \sin\alpha$ មានចម្លើយពីរគឺ $x = \alpha + 2k\pi$ ឬ $x = \pi - \alpha + 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ ។

សម្គាល់ 1. បើ $a = 0$ នោះ $\sin x = 0$ ។ ចម្លើយរបស់សមីការគឺ $x = 2k\pi$, $(k \in \mathbb{Z})$ ។

2. តាមលក្ខណៈមុំពីរដែលមានស៊ីនុសដូចគ្នា លុះត្រាតែមុំទាំងពីរស្មើគ្នា ឬបន្ថែមគ្នានោះ គេអាចដោះស្រាយសមីការ $\sin v(x) = \sin u(x)$ ដែល $u(x)$ និង $v(x)$ ជាអនុគមន៍នៃ x ។

$\sin v(x) = \sin u(x) \Leftrightarrow u(x) = v(x) + 2k\pi$ និង $u(x) = \pi - v(x) + 2k\pi$, $(k \in \mathbb{Z})$ ដែល $u(x)$ និង $v(x)$ ជាអនុគមន៍នៃ x ។

លំហាត់គំរូ 1 ដោះស្រាយសមីការ $\sin\frac{x}{2}\cos\frac{\pi}{3}-\cos\frac{x}{2}\sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ ។

ចម្លើយ គេបាន $\sin\frac{x}{2}\cos\frac{\pi}{3}-\cos\frac{x}{2}\sin\frac{\pi}{3} = \sin\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$ ដោយ $\frac{1}{2} = \sin\frac{\pi}{6}$ គេបាន $\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{3}\right) = \sin\frac{\pi}{6}$ ។ សមីការមានចម្លើយពីរគឺ $\frac{x}{2}-\frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6}+2k\pi$ ឬ $\frac{x}{2}-\frac{\pi}{3} = \pi-\frac{\pi}{6}+2k\pi$ ។

ដូចនេះ $x = \pi+4k\pi$, $x = \frac{7\pi}{3}+4k\pi$ ។

លំហាត់គំរូ 2 ដោះស្រាយសមីការ $2\sin x\cos x+\sqrt{3}-2\cos x-\sqrt{3}\sin x = 0$ ។

ចម្លើយ គេបាន $(2\sin x\cos x-\sqrt{3}\sin x)-(2\cos x-\sqrt{3}) = 0$

$$\sin x(2\cos x-\sqrt{3})-(2\cos x-\sqrt{3}) = 0 \Leftrightarrow (2\cos x-\sqrt{3})(\sin x-1) = 0$$

គេបាន $2\cos x-\sqrt{3} = 0$ ឬ $\sin x-1 = 0 \Rightarrow \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ឬ $\sin x = 1$ ។

ដូចនេះ $\cos x = \cos\frac{\pi}{6} \Rightarrow x = \pm\frac{\pi}{6}+2k\pi$ ឬ $\sin x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}+2k\pi$ ។

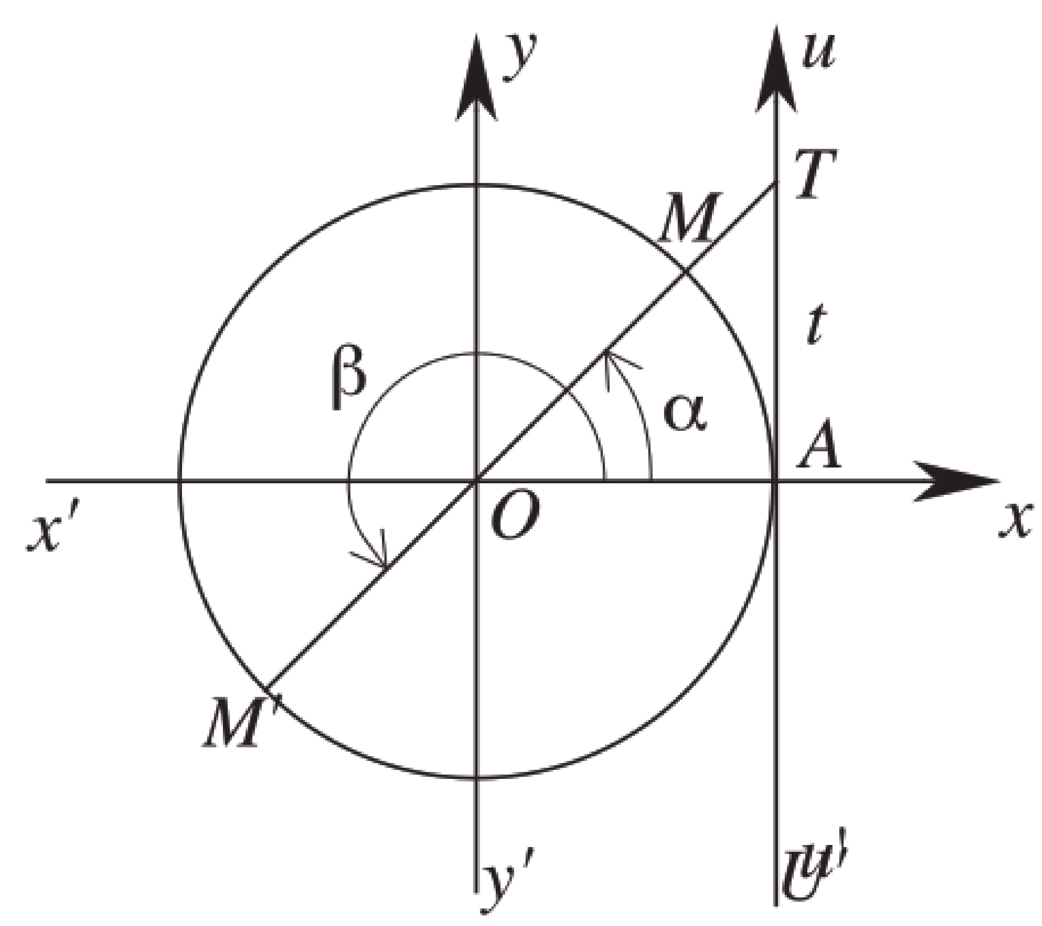
សមីការមានចម្លើយ $x = \pm\frac{\pi}{6}+2k\pi$ ឬ $x = \frac{\pi}{2}+2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$ ។

ប្រតិបត្តិ ដោះស្រាយសមីការខាងក្រោម

ក. $\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right) = 1$ ខ. $\sin 2x = \sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right)$ គ. $2\sin x\cos x-3\sin 2x = 0$ ។

3.3 ដំណោះស្រាយសមីការ $\tan x = a$

ឧទាហរណ៍ 1 ដោះស្រាយសមីការ $\tan x = -1$ ។



គេដឹងថា អនុគមន៍តង់សង់មានខួបស្មើនឹង π ។ ដូចនេះគេអាចរកចំនួនពិត x មួយដែល $\tan x = -1$ ។ ដោយសមីការសរសេរ $\tan x = \tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)$

ដូចនេះសមីការមានចម្លើយ $x = -\frac{\pi}{4}+k\pi$, $(k\in\mathbb{Z})$ ។

បកស្រាយតាមក្រាបចម្លើយរបស់សមីការនេះជាអាប់ស៊ីសនៃចំណុចប្រសព្វរបស់ក្រាបនៃអនុគមន៍ $y = \tan x$ និងបន្ទាត់ដេក $y = -1$ ។

ឧទាហរណ៍ 2 ដោះស្រាយសមីការ $\tan x = t$ ។

គេមានរង្វង់ត្រីកោណមាត្រ (C) ហើយ $(u'u)$ ជាអ័ក្សតង់សង់ដែលប៉ះរង្វង់ (C) ត្រង់ A ។ នៅលើ $u'Au$ គេដៅចំណុច T ដោយ $AT = t$ ។ រកធ្នូ $\widehat{AM}$ ទាំងអស់ដែលមានតង់សង់ t ។

α ជារង្វាស់មួយនៃធ្នូ $\widehat{AM}$ ចំណុច M និង M' ឆ្លុះគ្នាធៀបនឹង O ។

ធ្នូចម្លើយត្រូវមានចុងត្រង់ M និង M' ។

ធ្នូទាំងអស់ដែលមានចុង M មានរង្វាស់ $x = \alpha + 2k\pi$

ធ្នូមួយដែលមានចុង M' មានរង្វាស់ $\pi + \alpha$ ហើយធ្នូទាំងអស់ដែលមានចុង M' មានរង្វាស់ $x = \pi + \alpha + 2k\pi$ ឬ $x = \alpha + (2k+1)\pi$ ។ គេបានចម្លើយ $x = \alpha + k\pi$, $(k \in \mathbb{Z})$ ។

ដូចនេះ $\boxed{\text{សមីការ } \tan x = a = \tan\alpha \text{ មានចម្លើយ } x = \alpha + k\pi \text{ , } (k \in \mathbb{Z}) \text{ ។}}$

សម្គាល់ គេបាន $\tan u(x) = \tan v(x) \Leftrightarrow u(x) = v(x) + k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ ដែល u និង v ជាអនុគមន៍នៃ x ។

ឧទាហរណ៍ 3 ដោះស្រាយសមីការ $\tan 3x = \tan\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right)$ ។

គេបាន $\tan 3x = \tan\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right) \Leftrightarrow 3x = \frac{\pi}{3} - 2x + k\pi \Leftrightarrow 5x = \frac{\pi}{3} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$) ។

សមីការមានចម្លើយ $x = \frac{\pi}{15} + k\frac{\pi}{5}$, $(k \in \mathbb{Z})$ ។

លំហាត់គំរូ 1 ដោះស្រាយសមីការ $\tan x = -0.7456$ ។

តាមតារាងត្រីកោណមាត្រគេបាន $\tan 36° = 0.7265$ និង $\tan 37° = 0.7536$ រកមុំ α' ដែល $\tan\alpha' = 0.7456$ ។

គេបាន $\tan 36° < \tan\alpha' < \tan 37°$ និង $\tan 37° - \tan 36° = 0.0271$

$\tan\alpha' - \tan 36° = 0.0191$ $(\alpha' > 36°)$ ។ គេត្រូវថែមលើ $36°$ ចំនួន $\frac{60' \times 0.0191}{0.0271} \approx 42'24''$

គេបាន $\alpha' = 36°42'24''$ ហើយ $-0.7456 = \tan(-36°42'24'')$ ។

ដូចនេះ $\tan x = \tan(-36°42'24'') \Rightarrow x = -36°42'24'' + 180°k$, $(k \in \mathbb{Z})$ ។

លំហាត់គំរូ 2 ដោះស្រាយសមីការ $\dfrac{\tan\frac{\pi}{4} - \tan x}{1 + \tan x \tan\frac{\pi}{4}} = \sqrt{3}$ ។

ចម្លើយ ដោយ $\dfrac{\tan\frac{\pi}{4} - \tan x}{1 + \tan x \tan\frac{\pi}{4}} = \tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$ និង $\tan\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$ សមីការអាចសរសេរ

$\tan\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \tan\left(-\frac{\pi}{3}\right)$

$\Rightarrow x - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{3} + k\pi$ ឬ $x = -\frac{\pi}{12} + k\pi$, $(k \in \mathbb{Z})$ ជាចម្លើយរបស់សមីការ ។

ប្រតិបត្តិ ដោះស្រាយសមីការខាងក្រោម :

ក. $\tan x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ខ. $\tan 3x = \sqrt{3}$

គ. $\frac{2\tan x}{1-\tan^2 x} = \sqrt{3}$ ឃ. $2\tan x\cos x + 1 = 2\cos x + \tan x$ ។

3.4 ដំណោះស្រាយសមីការ $\cot x = m$

សមីការ $\cot x = \cot a$ អាចសរសេរ $\frac{1}{\tan x} = \frac{1}{\tan\alpha} \Rightarrow \tan x = \tan\alpha$ ។

ដូចនេះ គេអាចដោះស្រាយសមីការ $\cot x = m$ ដូចសមីការ $\tan x = t$ ខាងលើដែរ ។

ចំពោះសមីការ $\cot u(x) = \cot v(x)$ ដូចសមីការ $\tan u(x) = \tan v(x)$ ដែរ ។

សមីការ $\cot u(x) = \cot v(x) \Leftrightarrow u(x) = v(x) + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ ដែល u និង v ជាអនុគមន៍នៃ x ។

ឧទាហរណ៍ 1 ដោះស្រាយសមីការ $\cot\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$ ។

គេបាន $\cot\left(2x+\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3} = \cot\frac{\pi}{6} \Rightarrow 2x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ ។

ដូចនេះ $2x = \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{3} + k\pi \Rightarrow x = -\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$ ។

លំហាត់គំរូ ដោះស្រាយសមីការ $2(\cot 2x - \cot 3x) = \tan 2x + \cot 3x$ ។

ចម្លើយ លក្ខខណ្ឌនៃសមីការ $\sin 2x \neq 0$, $\sin 3x \neq 0$, $\cos 2x \neq 0$ ។

គេបាន $2(\cot 2x - \cot 3x) = \tan 2x + \cot 3x$

$$2\left(\frac{\cos 2x}{\sin 2x} - \frac{\cos 3x}{\sin 3x}\right) = \frac{\sin 2x}{\cos 2x} + \frac{\cos 3x}{\sin 3x}$$

$$2\left(\frac{\sin 3x\cos 2x - \sin 2x\cos 3x}{\sin 2x\sin 3x}\right) = \frac{\sin 3x\sin 2x + \cos 3x\cos 2x}{\sin 3x\cos 2x}$$

$$\frac{2\sin x}{\sin 2x\sin 3x} = \frac{\cos x}{\sin 3x\cos 2x}$$

$$\frac{2\sin x\cos 2x - \sin 2x\cos x}{\sin 2x\sin 3x\cos x} = 0$$

$$\frac{2\sin x(\cos 2x - \cos^2 x)}{\sin 2x\sin 3x\cos x} \Leftrightarrow \sin x = 0 \text{ ។}$$

តាមលក្ខខណ្ឌនៃសមីការ $\sin 2x \neq 0 \Rightarrow \sin x \neq 0$ ។ ដូចនេះសមីការគ្មានចម្លើយ ។

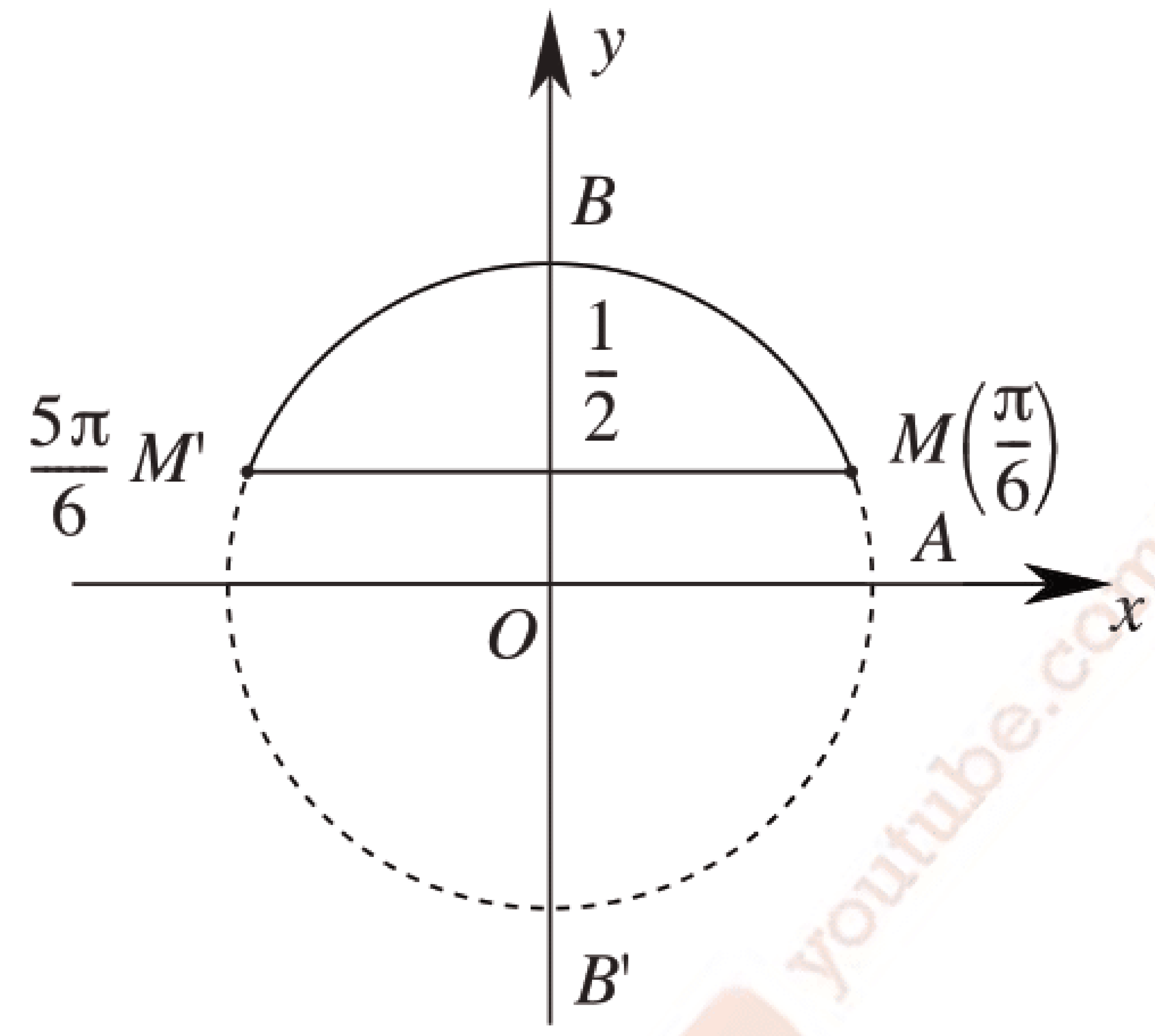
ប្រតិបត្តិ ដោះស្រាយសមីការខាងក្រោម

ក. $\cot x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ ខ. $\cot 3x = \sqrt{3}$

គ. $\cot\left(\frac{x}{2} - 3\right) = -1$ ឃ. $3\cot x - \sqrt{3} = 0$ ។

4. វិសមីការត្រីកោណមាត្រ

ឧទាហរណ៍ 1 ដោះស្រាយវិសមីការ $\sin x - \frac{1}{2} \ge 0$ ។



វិសមីការអាចសរសេរ $\sin x \ge \frac{1}{2}$ តែ $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} = \sin\frac{5\pi}{6}$ ។

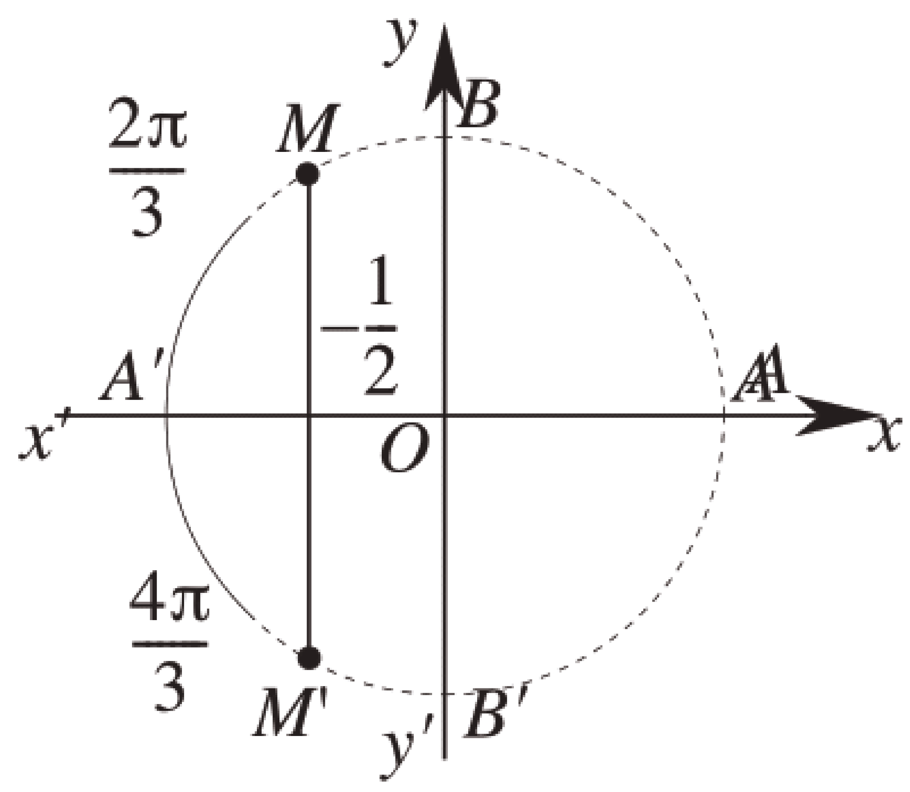
នៅលើរង្វង់ត្រីកោណមាត្រ គេមានចំណុច M និង M' ដែលធ្នូ $\widehat{AM} = \frac{\pi}{6}$ និងធ្នូ $\widehat{AM'} = \frac{5\pi}{6}$ ។

គេសង្កេតឃើញថាស៊ីនុសនៃមួយចំនួនធំជាង ឬស្មើនឹង $\frac{1}{2}$ លុះត្រាតែរូបភាពនៃចំនួននោះនៅលើធ្នូ $\widehat{MBM'}$ រួមទាំងចំណុច M និង M' ។

ដូចនេះចម្លើយនៃវិសមីការ $\sin x - \frac{1}{2} \ge 0$ គឺ $\frac{\pi}{6} + 2k\pi \le x \le \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$, $(k \in \mathbb{Z})$ ។

ឧទាហរណ៍ 2 ដោះស្រាយវិសមីការ $2\cos x + 1 < 0$ ។

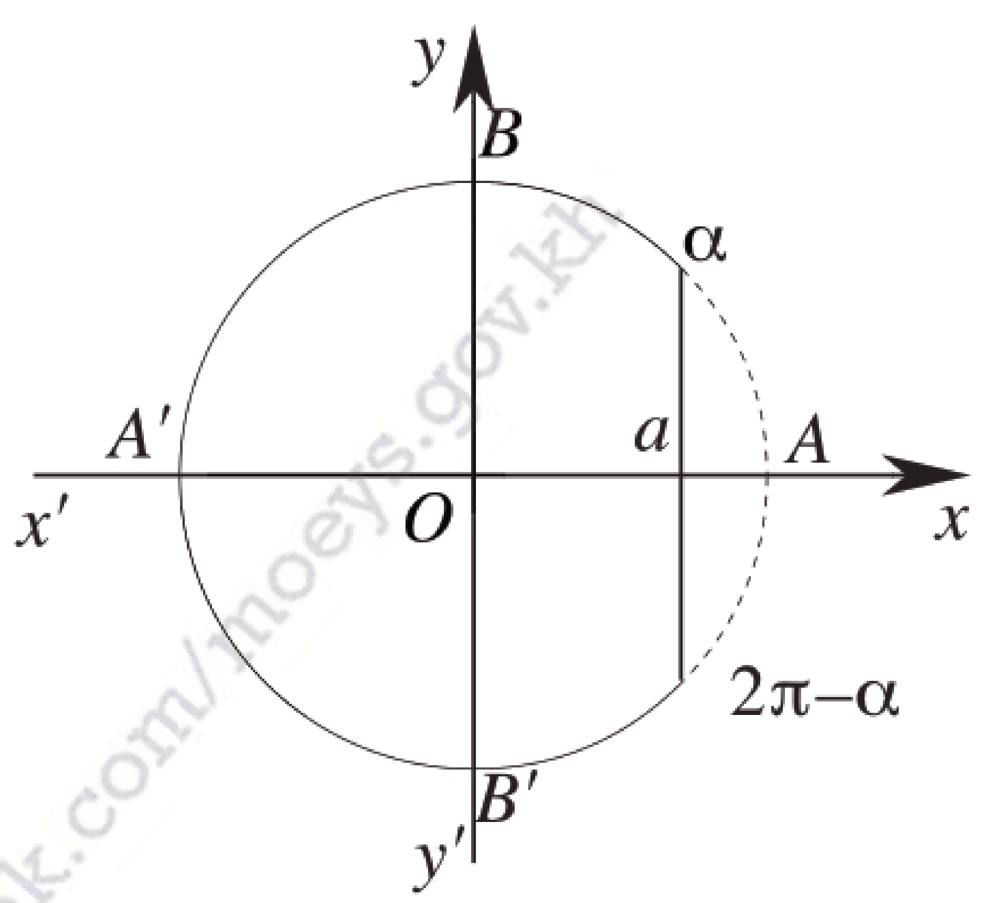
វិសមីការអាចសរសេរ $\cos x < -\frac{1}{2}$ តែ $\cos\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} = \cos\frac{4\pi}{3}$ ។

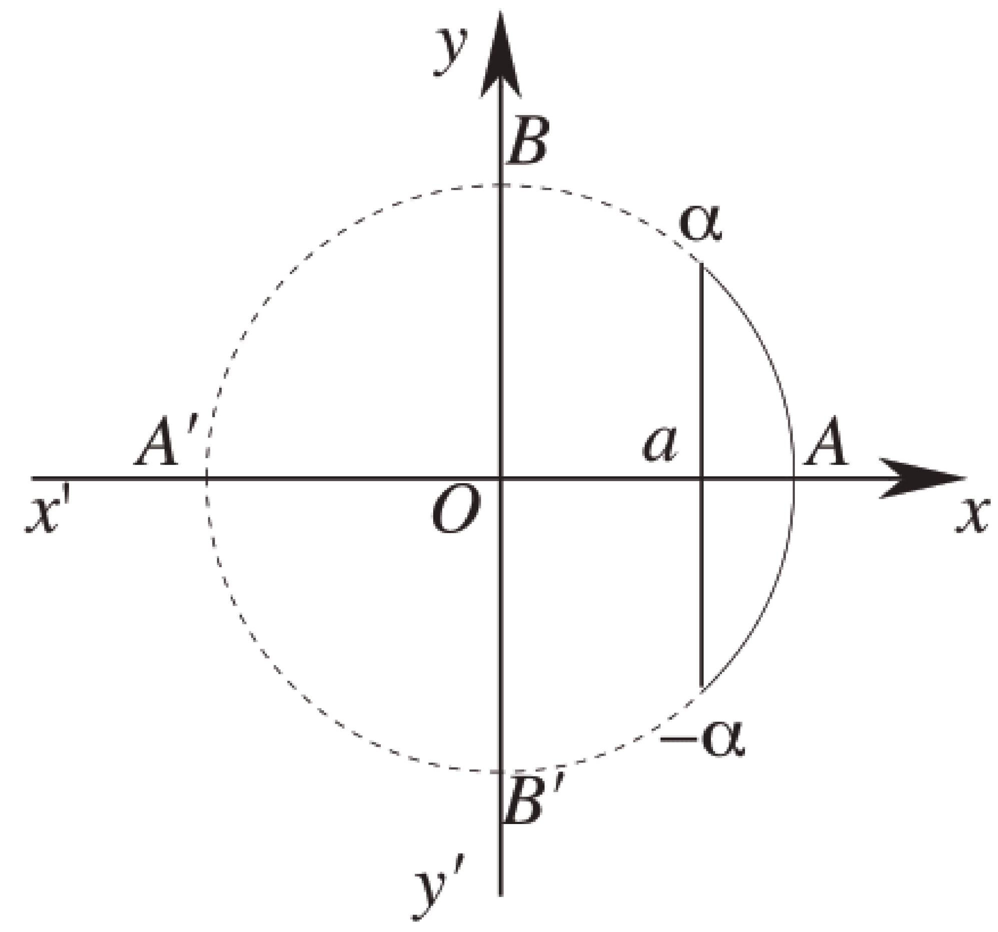


នៅលើរង្វង់ត្រីកោណមាត្រ គេមានចំណុច M និង M' ដែលធ្នូ $\widehat{AM} = \frac{2\pi}{3}$ និងធ្នូ $\widehat{AM'} = \frac{4\pi}{3}$ ។ គេសង្កេតឃើញថា កូស៊ីនុសនៃមួយចំនួនតូចជាង $-\frac{1}{2}$ លុះត្រាតែរូបភាពនៃចំនួននោះនៅលើធ្នូ $\widehat{MA'M'}$ លើកលែងចំណុច M និង M' ។

ដូចនេះចម្លើយនៃវិសមីការ $2\cos x + 1 < 0$ គឺ

$\frac{2\pi}{3} + 2k\pi < x < \frac{4\pi}{3} + 2k\pi$; $(k \in \mathbb{Z})$ ។





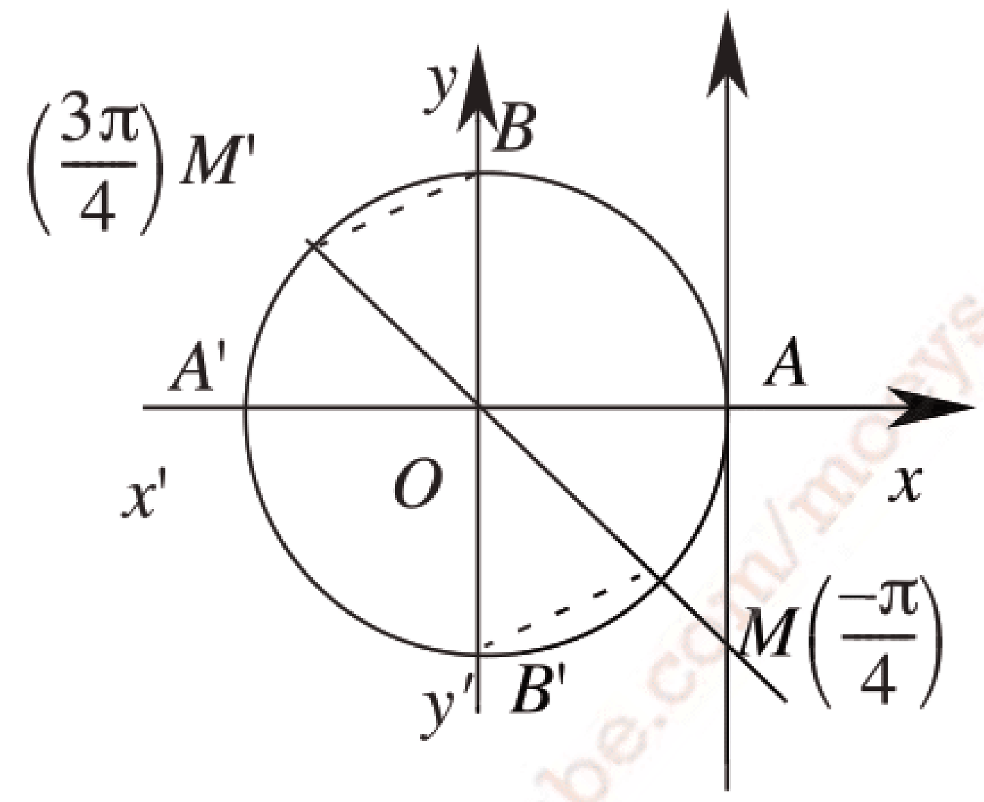
ជាទូទៅវិសមីការ $\cos x \le a$ គ្មានឫស កាលណា $a > 1$ ឬ $a < -1$ ៖ ហើយមានចម្លើយ បើ $-1 \le a \le 1$

$\cos x \ge a$ គ្មានឫសកាលណា $a < -1$ ឬ $a > 1$ ហើយមានចម្លើយ បើ $-1 \le a \le 1$

ចម្លើយ $\alpha + 2k\pi \le x \le 2\pi - \alpha + 2k\pi$; $(k \in \mathbb{Z})$ **ចម្លើយ** $-\alpha + 2k\pi \le x \le \alpha + 2k\pi$; $(k \in \mathbb{Z})$ ។

ករណីពិសេស វិសមីការ $\sin x > 0$ មានចម្លើយ $2k\pi < x < \pi + 2k\pi\,;\ (k \in \mathbb{Z})$

ឧទាហរណ៍ 3 ដោះស្រាយវិសមីការ $\tan x \geq -1$ ។

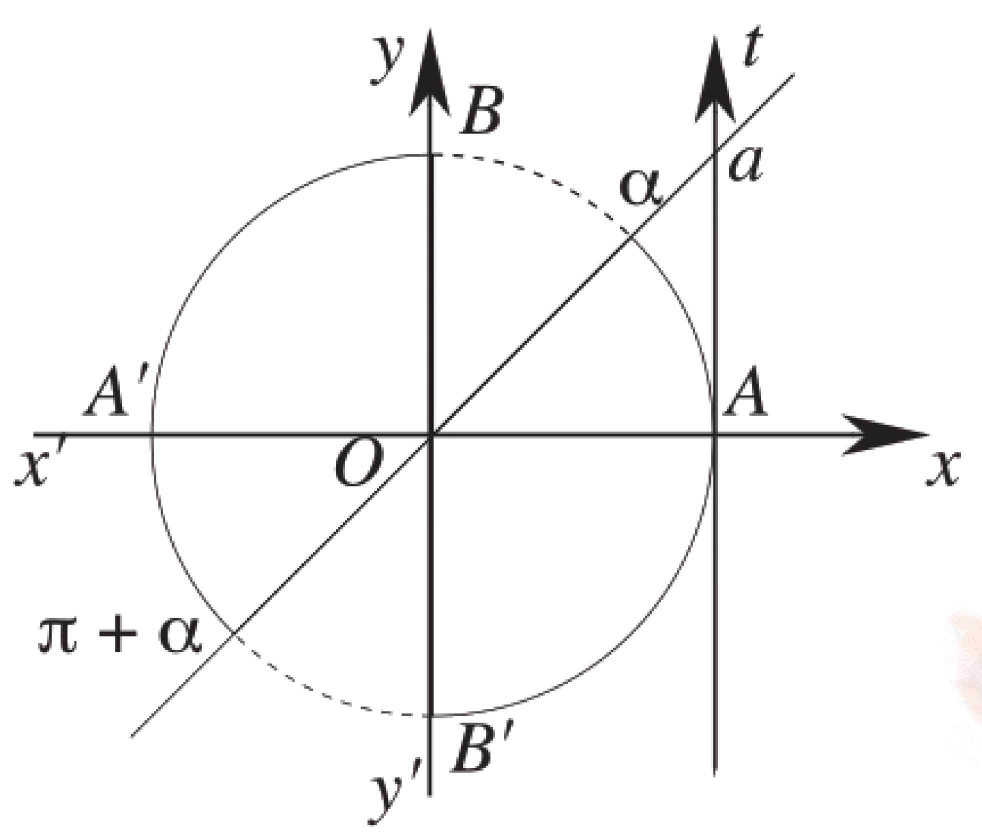


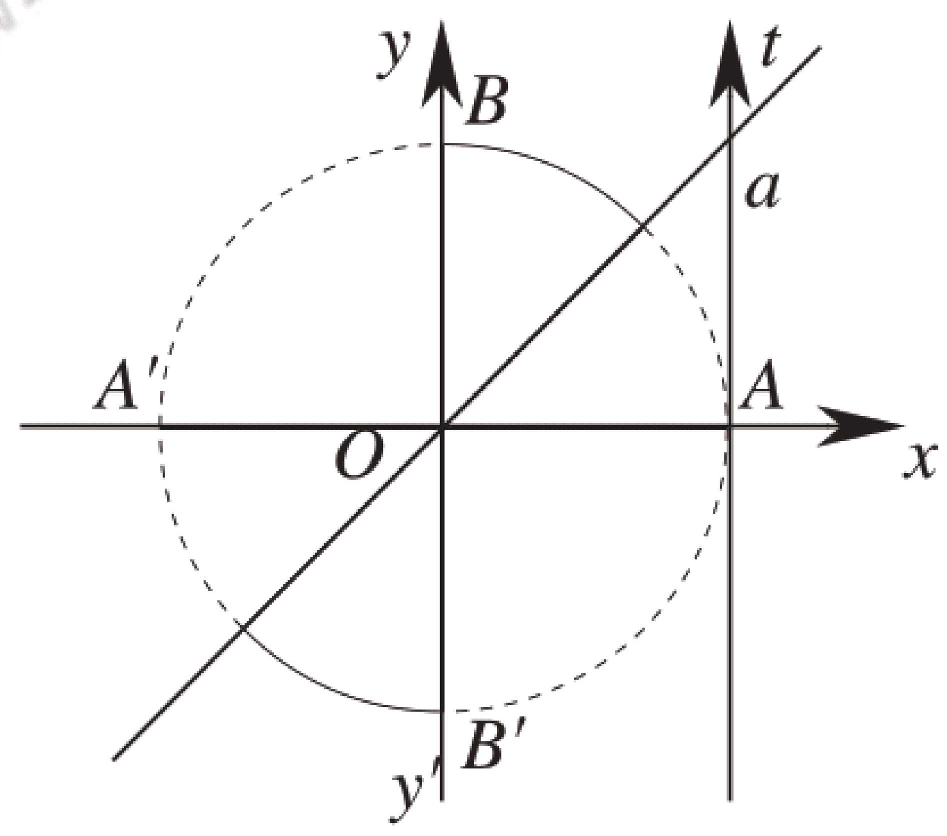
ដោយ $\tan\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -1 = \tan\frac{3\pi}{4}$ ។

នៅលើរង្វង់ត្រីកោណមាត្រគេមានចំណុច M និង M' ដែល $\widehat{AM} = \frac{-\pi}{4}$, $\widehat{AM'} = \frac{3\pi}{4}$ ។ គេសង្កេតឃើញថាតង់សង់នៃមួយចំនួនធំជាង ឬស្មើ -1 លុះត្រាតែរូបភាពនៃចំនួននោះនៅលើធ្នូ $\widehat{MAB}$ ឬ $\widehat{M'A'B'}$ ។ ដូចនេះ វិសមីការ $\tan x \geq -1$ មានចម្លើយ $\frac{-\pi}{4} + k\pi \leq x < \frac{3\pi}{4} + k\pi$, $(k \in \mathbb{Z})$ ។

ជាទូទៅគេបាន $\tan x \leq a$ $\tan x \geq a$

មានចម្លើយ $-\frac{\pi}{2} + k\pi < x \leq \alpha + k\pi\,;\ (k \in Z)$ មានចម្លើយ $\alpha + k\pi \leq x < \frac{\pi}{2} + k\pi\,;\ (k \in \mathbb{Z})$





សម្គាល់ ដំណោះស្រាយវិសមីការ $\cot x$ ដូចគ្នានឹងដំណោះស្រាយវិសមីការ $\tan x$ ដែរ ។ ជាទូទៅដើម្បីដោះស្រាយវិសមីការដែលមានរាង $\sin x \geq a$, $\cos x < a$, $\tan x > a$, $\cot x < a$…… គេត្រូវ

- រក α ដែល $\sin\alpha = a$, $\cos\alpha = a$, $\tan\alpha = a$, $\cot\alpha = a$
- ដៅចុងធ្នូតាមតម្លៃ α រួចបកស្រាយដោយប្រើរង្វង់ត្រីកោណមាត្រ ។
- ទាញរកសំណុំចម្លើយ

របៀបបំប្លែងអង្គទី 1 នៃវិសមីការគឺមានរបៀបដូចសមីការត្រីកោណមាត្រដែរ គេយករូបមន្តត្រីកោណមាត្រមកប្រើ ។

លំហាត់គំរូ 1 ដោះស្រាយវិសមីការ $\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right) > \sin x$ ។

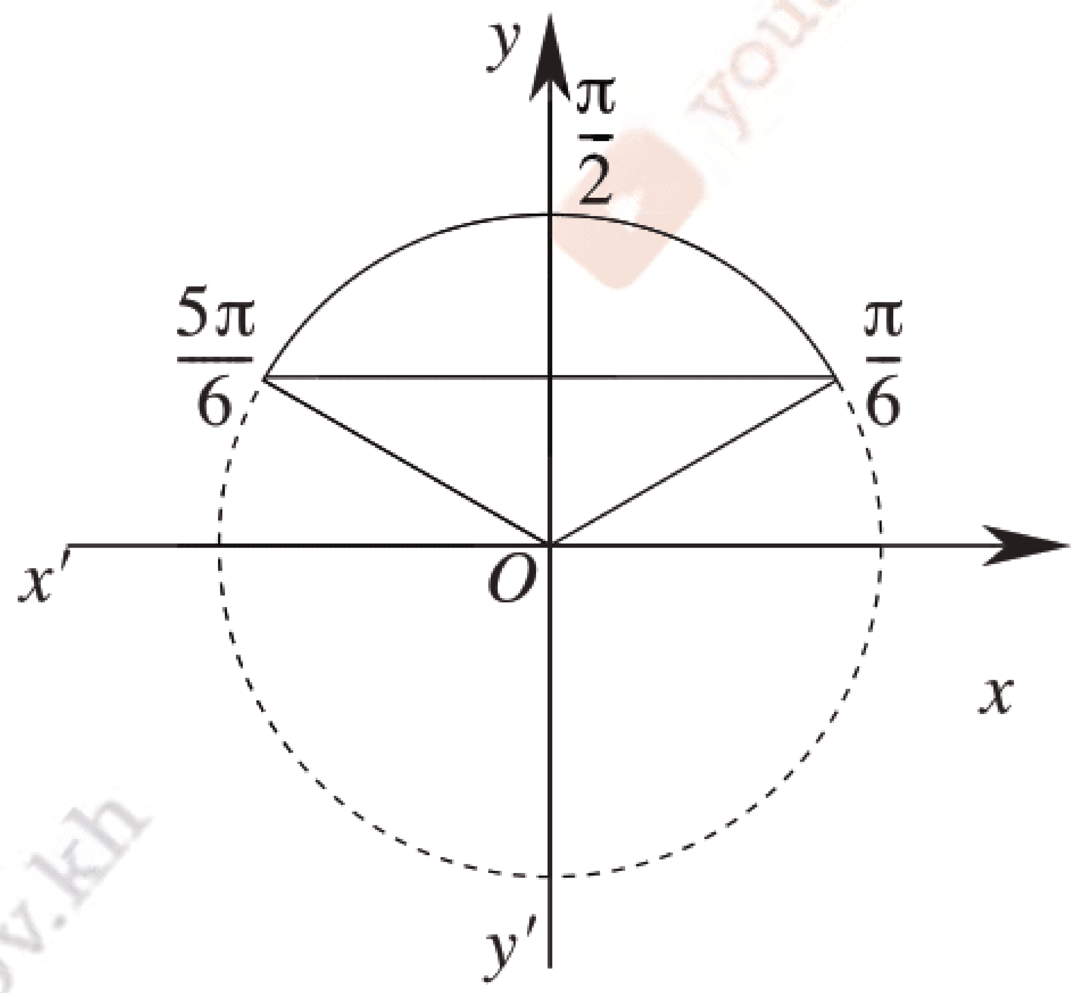
ចម្លើយ វិសមីការអាចសរសេរ $\sin x - \sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right) < 0$ ។

$$2\sin\frac{x-x+\frac{\pi}{3}}{2}\cos\frac{x+x-\frac{\pi}{3}}{2} < 0 \;,\quad 2\sin\frac{\pi}{6}\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right) < 0$$

$$\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right) < 0 \;,\quad \frac{\pi}{2}+2k\pi < x-\frac{\pi}{6} < \pi+\frac{\pi}{2}+2k\pi \;,\quad \frac{2\pi}{3}+2k\pi < x < \frac{5\pi}{3}+2k\pi \;,\quad k\in\mathbb{Z}$$ ។

លំហាត់គំរូ 2 ដោះស្រាយសមីការ

$2\sin^2 x + 3\sin x - 2 \geq 0$ ។



ចម្លើយ តាង $t = \sin x$ វិសមីការអាចសរសេរ

$2t^2 + 3t - 2 \geq 0$ ឬ $(2t-1)(t+2) \geq 0$ ។

គេទាញ $t \leq -2$ ឬ $t \geq \frac{1}{2}$

ដោយ $-1 \leq t \leq 1$ យើងយកតែ $\frac{1}{2} \leq t \leq 1$

$t = \sin x \geq \frac{1}{2}$ ដោយ $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} = \sin\frac{5\pi}{6}$

គេបាន $\frac{\pi}{6}+2k\pi \leq x \leq \frac{5\pi}{6}+2k\pi$ $(k\in\mathbb{Z})$ ជាសំណុំចម្លើយនៃវិសមីការ ។

ប្រតិបត្តិ ដោះស្រាយវិសមីការខាងក្រោម

ក. $2\cos x \geq -\sqrt{2}$ ខ. $\cos 2x > \cos\frac{2\pi}{3}$ គ. $\sqrt{3}\cos x - 1 < 0$

ឃ. $\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right) < \cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{x}{2}\right)$ ង. $\cot x < \frac{\sqrt{3}}{3}$ ។

មេរៀនសង្ខេប

រូបមន្តផលបូក និងផលដក

$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$, $\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$

$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha$, $\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \sin\beta\cos\alpha$

$\tan(\alpha+\beta) = \dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$ $\tan(\alpha-\beta) = \dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$ ។

រូបមន្តមុំឌុប : $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$, $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$ ។

រូបមន្តកន្លះមុំ : $\sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$, $\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{2}$, $\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$

$\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{2}$, $\tan^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$

បើ $\tan\frac{\alpha}{2} = t$ គេបាន $\cos\alpha = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $\sin\alpha = \frac{2t}{1+t^2}$, $\tan\alpha = \frac{2t}{1-t^2}$ ។

រូបមន្តបំប្លែង : បំប្លែងពីផលគុណទៅផលបូកនិងផលដក

$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)]$ $\qquad$ $\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)]$

$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)]$ $\qquad$ $\sin\beta\cos\alpha = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta)]$ ។

បំប្លែងពីផលបូកទៅផលគុណ

$\cos p + \cos q = 2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$ $\qquad$ $\cos p - \cos q = -2\sin\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}$

$\sin p + \sin q = 2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$ $\qquad$ $\sin p - \sin q = 2\sin\frac{p-q}{2}\cos\frac{p+q}{2}$

$\tan p + \tan q = \frac{\sin(p+q)}{\cos p\cos q}$, $\cot p + \cot q = \frac{\sin(p+q)}{\sin p\sin q}$

$\tan p - \tan q = \frac{\sin(p-q)}{\cos p\cos q}$, $\cot p - \cot q = \frac{\sin(p-q)}{\sin p\sin q}$ ។

សមីការ $\cos x = \cos\alpha$ មានចម្លើយពីរគឺ : $x = \alpha + 2k\pi$ និង $x = -\alpha + 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$

$\cos u(x) = \cos v(x) \Leftrightarrow u(x) = \pm v(x) + 2k\pi$, $(k \in Z)$ ដែល $u(x)$ និង $v(x)$ ជាអនុគមន៍នៃ x ។

សមីការ $\sin x = \sin\alpha$ មានចម្លើយពីរគឺ : $x = \alpha + 2k\pi$ និង $x = \pi - \alpha + 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$

$\sin v(x) = \sin u(x) \Leftrightarrow u(x) = v(x) + 2k\pi$ និង $u(x) = \pi - v(x) + 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$

សមីការ $\tan x = \tan\alpha$ មានចម្លើយ $x = \alpha + k\pi$, $(k \in \mathbb{Z})$

$\tan u(x) = \tan v(x) \Leftrightarrow u(x) = v(x) + k\pi (k \in \mathbb{Z})$ ដែល $u(x)$ និង $v(x)$ ជាអនុគមន៍នៃ x ។

សមីការ $\cot x = \cot\alpha$ មានចម្លើយ $x = \alpha + k\pi$, $(k \in \mathbb{Z})$

$\cot u(x) = \cot v(x) \Leftrightarrow u(x) = v(x) + k\pi$, $(k \in \mathbb{Z})$ ដែល $u(x)$ និង $v(x)$ ជាអនុគមន៍នៃ x ។

វិសមីការ $\sin x \le a$ មានសំណុំចម្លើយ $\pi - \alpha + 2k\pi \le x \le \alpha + 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$

$\sin x \ge a$ មានសំណុំចម្លើយ $\alpha + 2k\pi \le x \le -\alpha + 2k\pi$; $(k \in \mathbb{Z})$

$\cos x \le a$ មានសំណុំចម្លើយ $\alpha + 2k\pi \le x \le 2\pi - \alpha + 2k\pi$; $(k \in \mathbb{Z})$

$\cos x \ge a$ មានសំណុំចម្លើយ $-\alpha + 2k\pi < x \le \alpha + 2k\pi$; $(k \in \mathbb{Z})$

$\tan x \le a$ មានសំណុំចម្លើយ $-\frac{\pi}{2} + k\pi < x \le \alpha + k\pi$; $(k \in \mathbb{Z})$

$\tan x \ge a$ មានសំណុំចម្លើយ $\alpha + k\pi \le x < \frac{\pi}{2} + k\pi$; $(k \in \mathbb{Z})$ ។

លំហាត់

1. ដោះស្រាយសមីការខាងក្រោម :

ក. $\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ខ. $\cos\theta = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ គ. $\cos\left(4x + \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$

ឃ. $\cos^2 x = 1$ ង. $\sin\sqrt{x} = -1$ ច. $\cot x = 1$

ឆ. $\frac{1}{\cos 2x} = \sqrt{2}$ ជ. $2\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = 1$ ឈ. $\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

ញ. $\tan^3\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \tan x - 1$ ដ. $\cot\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = 2$ ឋ. $\frac{2\tan x}{1 - \tan^2 x} = 5$ ។

2. ដោះស្រាយសមីការខាងក្រោម :

ក. $\tan^3 3x - 2\sin^3 3x = 0$ ខ. $\cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = \sqrt{2}\sin x\cos x$

គ. $\sin 2x = (\cos x - \sin x)^2$ ឃ. $\sqrt{3}\sin x + \sin x = \frac{1}{\cos x}$

ង. $\sin 2x + \tan x = 2$ ច. $\frac{\sqrt{3}}{\cos^2 x} = 4\tan x$

ឆ. $\frac{1 + \sin x}{1 + \cos x} = \frac{1}{2}$ ជ. $\sin 3x + \cos 2x = 1 + 2\sin x\cos 2x$

ឈ. $\sin 2(x - \pi) - \sin(3x - \pi) = \sin x$ ញ. $\tan x + \cot x = 2(\sin 2x + \cos 2x)$

ដ. $\frac{\sin x + \sin 2x + \sin 3x}{\cos x + \cos 2x + \cos 3x} = \sqrt{3}$ ។

3. ដោះស្រាយវិសមីការខាងក្រោម :

ក. $2\cos\theta \le -\sqrt{2}$ ខ. $-\sqrt{2}\sin\theta + 1 \ge 0$ គ. $\sqrt{3}\tan\theta - 1 < 0$

ឃ. $\sin\left(2\theta + \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ $(-\pi \le \theta < \pi)$ ង. $\cos\left(\frac{1}{2}\theta - \frac{\pi}{3}\right) \le \frac{1}{\sqrt{2}}$ $(0 \le \theta < 2\pi)$ ។

4. រកគ្រប់មុំចន្លោះ $0°$ និង $360°$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការ

ក. $2\tan y = 5\sin y$ ខ. $8\sin x\cos x = \sin x$ គ. $4\sin^2 x = 6 - 9\cos x$

ឃ. $3\cos y + \cot y = 0$ ង. $2\sin 2x + 1 = 0$ ច. $6\sin x - 8\sin^2 x = 5\cos^2 x$

ឆ. $2\cot 2x = 5$ ជ. $3\sin y\tan y + 8 = 0$ ឈ. $3\cos^2 y = 7\sin y + 5$

ញ. $\cot\left(\frac{z}{2}\right) - 2\cos\left(\frac{z}{2}\right) = 0$ ដ. $\tan(x - 30^\circ)\tan 50^\circ = 0$ ។

5. គេឱ្យ $x = 3\sin\theta - 2\cos\theta$ និង $y = 3\cos\theta + 2\sin\theta$

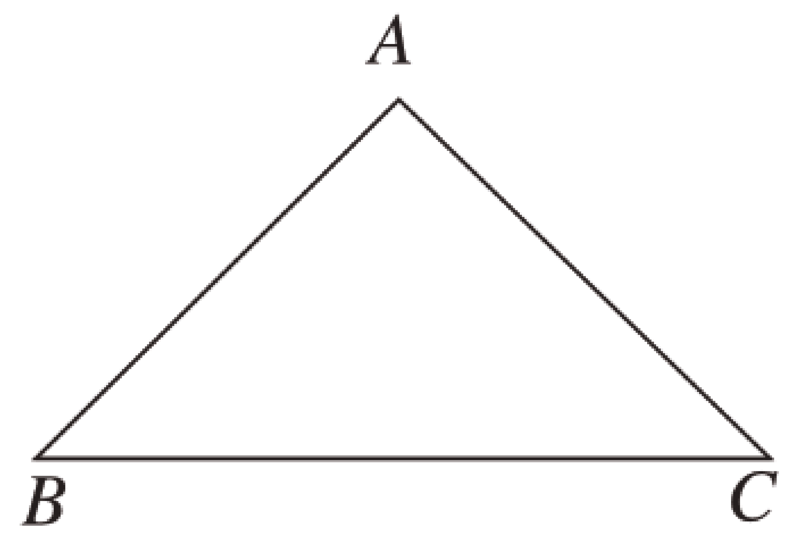
ក. រកតម្លៃនៃមុំស្រួច θ ចំពោះ $x = y$

ខ. បង្ហាញថា $x^2 + y^2$ ជាចំនួនថេរចំពោះគ្រប់តម្លៃនៃ θ ។

6. គេឱ្យត្រីកោណ ABC មាន $\frac{\sin A + \cos B}{\sin B + \cos A} = \tan A$ ។ បង្ហាញថា ΔABC ជាត្រីកោណកែង ។

7. គេឱ្យត្រីកោណ ABC មាន $\frac{\sin C}{\sin B} = 2\cos A$ ។ រកប្រភេទនៃ ΔABC ។

8. គេឱ្យ ΔABC មានមុំបំពេញលក្ខខណ្ឌ $\tan B + \tan C = 2\cos\frac{A}{2}$ ។
បង្ហាញថា ΔABC ជាត្រីកោណសមបាត ។



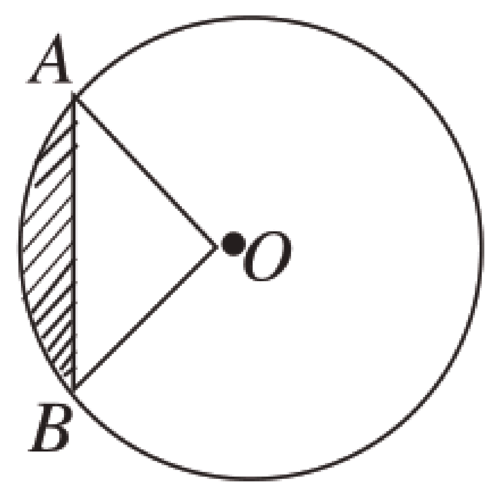
លំហាត់ជំពូក

1. អង្កត់ធ្នូ AB ចែករង្វង់មួយដែលមានកាំស្មើនឹង 2cm ជាពីរអង្កត់ ។ គេដឹងថា AB ស្កាត់ធ្នូដែលមានមុំផ្ចិត $= 60^\circ$ ។ គណនា

ក. ផ្ទៃក្រឡាចម្រៀកថាស AOB ។

ខ. ផ្ទៃក្រឡាត្រីកោណ AOB ។

គ. ផ្ទៃក្រឡាអង្កត់ថាសតូច (ផ្នែកតូច) ។



2. គណនា ក. $\sin 960^\circ$ ខ. $\cos 1215^\circ$ គ. $\sin 2940^\circ$

ឃ. $\cos\frac{13\pi}{6}$ ង. $\tan\left(-\frac{19}{4}\pi\right)$ ច. $\sin\left(-\frac{17}{3}\pi\right)$ ។

3. គណនា ក. $\sin\theta + \sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) + \sin(\theta + \pi) + \left(\theta + \frac{3}{2}\pi\right)$

ខ. $\cos\frac{20}{3}\pi\tan\frac{7}{4}\pi + \sin\frac{5}{2}\pi\cos(-3\pi)$

គ. $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2} + 2\theta\right) + \sin(\pi - 2\theta) + \cos(\pi - \theta)$ ។

4. គេមាន $\tan\alpha + \tan\beta + \tan y = \tan\alpha\tan\beta\tan\gamma$ $\left(-\frac{\pi}{2} < \alpha,\ \beta,\ \gamma < \frac{\pi}{2}\right)$ ។

គណនាមុំ $(\alpha + \beta + \gamma)$ ។

5. គេមាន $\alpha = \cos 10°$, $\beta = \cos 50°$, $\gamma = \cos 70°$ ។ គណនា $\alpha - \beta - \gamma$, $\alpha^2 - \beta\gamma$ និង $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$ ។

6. បង្ហាញថា

ក. $(1 - \sin A + \cos A)^2 = 2(1 - \sin A)(1 + \cos A)$

ខ. $\cot A + \tan A = \frac{1}{\sin A \cos A}$

គ. $(\tan\theta + \sin\theta)(\tan\theta - \sin\theta) = \tan^2\theta \sin^2\theta$

ឃ. $\left(1 + \frac{1}{\sin\theta}\right)(1 - \sin\theta) = \cos\theta\cot\theta$ ។

7. ដោះស្រាយសមីការខាងក្រោម :

ក. $4\cos^3 x - \cos 2x - 4\cos x + 1 = 0$

ខ. $\sin^2 2x - \cos^2 8x = 0.5\cos 10x$

គ. $1 + \sin x + \cos x + \sin 2x + \cos 2x = 0$

ឃ. $\sin^4 x + \cos^4 x - \cos 2x + \frac{1}{4}\sin^2 2x - 2 = 0$

ង. $\sin^{2007} x + \cos^{2007} x = 1$

ច. $\tan x = \cot x + 2\cot^2 2x$ ។

8. ក. គេឱ្យ $2\sin A\cos A + (\cos A + \sin A)^2 - (2\cos A + \sin A)^2 = p\sin^2 A + q$

រកតម្លៃនៃចំនួនថេរ p និង q ។

ខ. គេឱ្យ $\sin x\cos x(5\tan x + 2\cot x) = a + b\sin^2 x$ ។

រកតម្លៃនៃចំនួនថេរ a និង b ។

9. ដោះស្រាយវិសមីការខាងក្រោម ដោយដឹងថា $0 \le x < 2\pi$

ក. $\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \ge -\frac{1}{2}$

ខ. $\tan\left(x - \frac{\pi}{6}\right) \ge -1$ ។

10. ដោះស្រាយសមីការវិសមីការខាងក្រោម :

ក. $2\sin^2\theta - \sqrt{2}\cos\theta = 0$

ខ. $2\cos^2\theta + \sqrt{3}\sin\theta + 1 > 0$ ។

11. គេឱ្យ ΔABC មានមុំ 3 ជាមុំស្រួច ។

ក. បង្ហាញថា $\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \cdot \tan B \cdot \tan C$

ខ. តាង $T = \tan A + \tan B + \tan C$ ។

បង្ហាញថា $T \ge 3\sqrt{3}$ ។

ជំពូក 4

ម៉ាទ្រីសនិងដេទែរមីណង់

❶ ម៉ាទ្រីស

❷ ដេទែរមីណង់

TAKAKAZU SEKI

អ្នកដែលនាំឱ្យមានបញ្ញត្តិម៉ាទ្រីសមុនគេ គឺ Arthur Cayley (1875 - 1921) ។ តាមពិតរបស់ដេទែរមីណង់បានកើតឡើងមុនម៉ាទ្រីស ហើយមានប្រភពនៅក្នុងចម្លើយទូទៅនៃប្រព័ន្ធសមីការលីនេអ៊ែរ ។ ដើមកំណើតនៃដេទែរមីណង់ត្រូវបានសរសេរដោយ Leibniz នៅឆ្នាំ 1678 ស្របពេលដែលនៅក្នុងប្រទេសជប៉ុន TAKA KAZU SEKI បានសម្រេចស្នាដៃដ៏ធំធេងលើនេះក្នុងឆ្នាំ 1680 ។

នៅចុងសតវត្សទី 19 Cayley, Jame Sylüester and Ferdinand Frobenius បានសិក្សាទ្រឹស្តីម៉ាទ្រីសនិងដេទែរមីណង់យ៉ាងស៊ីជម្រៅ ។ ដោយមានការរីកចម្រើនក្នុងពីជគណិតលីនេអ៊ែរ ម៉ាទ្រីសត្រូវបានគេយកទៅដោះស្រាយក្នុងបំប្លែងលីនេអ៊ែរ ឬអនុគមន៍លីនេអ៊ែរ ហើយក៏ក្លាយជាបញ្ញត្តិសំខាន់ក្នុងទ្រឹស្តីពីជគណិតលីនេអ៊ែរ ។

មេរៀនទី

1 ម៉ាទ្រីស

1. សញ្ញាណនៃម៉ាទ្រីស

1.1 និយមន័យ

វត្ថុបំណង

- កំណត់ម៉ាទ្រីស
- ធ្វើប្រមាណវិធីលើម៉ាទ្រីស
- គណនាម៉ាទ្រីសច្រាសលំដាប់ 2 ។

ឧទាហរណ៍ ទូតាំងសៀវភៅមួយមានពីរថ្នាក់ដែលថ្នាក់លើ 1 គេតម្រៀបសៀវភៅបីប្រភេទគឺ សៀវភៅគណិតវិទ្យា 13 ក្បាល រូបវិទ្យា 5 ក្បាល និងគីមីវិទ្យា 7 ក្បាល ។ នៅថ្នាក់ក្រោម 2 មានសៀវភៅគណិតវិទ្យា 8 ក្បាល រូបវិទ្យា 10 ក្បាល និងគីមីវិទ្យា 4 ក្បាល ។

	គណិតវិទ្យា	រូបវិទ្យា	គីមីវិទ្យា
ថ្នាក់លើ	13	5	7
ថ្នាក់ក្រោម	8	10	4

គេអាចបង្ហាញព័ត៌មាននេះដោយសរសេរចំនួននីមួយៗតាមលំដាប់លំដោយដាក់ក្នុងតង្កៀបជារាងចតុកោណកែង

$$\begin{bmatrix} 13 & 5 & 7 \\ 8 & 10 & 4 \end{bmatrix}$$

ការតាងចំនួនដើម្បីបង្ហាញទិន្នន័យបែបនេះហៅថា ម៉ាទ្រីស ។ ចំនួននីមួយៗដែលសរសេរនៅក្នុងតង្កៀបហៅថា ធាតុនៃម៉ាទ្រីស ។ បើម៉ាទ្រីសមានជួរដេកពីរនិងជួរឈរបី នោះគេថាម៉ាទ្រីសមានលំដាប់ 2×3 ឬមានវិមាត្រ 2×3 ដែល 2 ជាចំនួនជួរដេកត្រូវសរសេរមុន និង 3 ជាចំនួនជួរឈរត្រូវសរសេរក្រោយ ។ គេនិយាយថាម៉ាទ្រីសលំដាប់ 2×3 (អានថា 2 ខ្វែង 3) ។

$$\begin{array}{c|ccc} & \text{ជួរឈរទី 1} & \text{ជួរឈរទី 2} & \text{ជួរឈរទី 3} \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \text{ជួរដេកទី 1} \to & 13 & 5 & 7 \\ \text{ជួរដេកទី 2} \to & 8 & 10 & 4 \end{array}$$

ជាទូទៅ ម៉ាទ្រីសគឺជាការរៀបចំនួនជារាងចតុកោណកែងដាក់ក្នុងតង្កៀប ។ គេកំណត់តាងម៉ាទ្រីសដោយអក្សរធំ ដូចជា $A, B, C, \ldots$ និងធាតុនៃម៉ាទ្រីសតាងដោយអក្សរតូច ។

ម៉ាទ្រីស A មានលំដាប់ $m \times n$ កំណត់ដោយ :

$$A_{m\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\ldots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\ldots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3}\ldots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

មានន័យថា ម៉ាទ្រីស A មាន m ជួរដេកនិងមាន n ជួរឈរ

a_{11} សម្គាល់ធាតុនៃម៉ាទ្រីស A ស្ថិតនៅជួរដេកទី 1 និងជួរឈរទី 1 ។

a_{12} សម្គាល់ធាតុនៃម៉ាទ្រីស A ស្ថិតនៅជួរដេកទី 1 និងជួរឈរទី 2 ។

a_{31} សម្គាល់ធាតុនៃម៉ាទ្រីស A ស្ថិតនៅជួរដេកទី 3 និងជួរឈរទី 1 ។

....

....

ឧទាហរណ៍ គេមានម៉ាទ្រីស

$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 5 & -6 \\ -1 & 2 & -3 & 7 \end{bmatrix}$ មាន 3 ជួរដេក និង 4 ជួរឈរ គេថាម៉ាទ្រីស A មានលំដាប់ 3×4

$B = \begin{bmatrix} -4 & 5 & 1 & -2 & 5 \end{bmatrix}$ មាន 1 ជួរដេក និង 5 ជួរឈរ គេថាម៉ាទ្រីស B មានលំដាប់ 1×5 ហៅថា ម៉ាទ្រីសជួរដេក ។

$C = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -8 \end{bmatrix}$ មាន 3 ជួរដេក និង 1 ជួរឈរ គេថាម៉ាទ្រីស C មានលំដាប់ 3×1 ហៅថា ម៉ាទ្រីសជួរឈរ ។

លំហាត់គំរូ អ្នកគ្រប់គ្រងសាលារៀនបានកត់ត្រាចំនួនសិស្សប្រុសនិងសិស្សស្រីដែលបានរៀនភាសាអង់គ្លេសតាម 4 កម្រិតផ្សេងគ្នា ។ កម្រិត 1 មានសិស្សប្រុស 105 នាក់ ស្រី 63 នាក់ កម្រិត 2 មានប្រុស 132 នាក់ ស្រី 89 នាក់ កម្រិត 3 មានប្រុស 98 នាក់ ស្រី 102 នាក់ កម្រិត 4 មានប្រុស 92 នាក់ ស្រី 90 នាក់ ។ បង្ហាញព័ត៌មាននេះជាម៉ាទ្រីសនិងប្រាប់លំដាប់ម៉ាទ្រីស ។

ចម្លើយ គេអាចបង្ហាញព័ត៌មាននេះជាម៉ាទ្រីសបាន 2 របៀប ៖

$$\begin{array}{c} \\ \text{សិស្សប្រុស} \\ \text{សិស្សស្រី} \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc}\text{កម្រិត 1} & \text{កម្រិត 2} & \text{កម្រិត 3} & \text{កម្រិត 4}\end{array} \\ \begin{bmatrix} 105 & 132 & 98 & 92 \\ 63 & 89 & 102 & 90 \end{bmatrix} \end{array}$$

មានលំដាប់ 2×4

$$\begin{array}{c} \\ \text{កម្រិត 1} \\ \text{កម្រិត 2} \\ \text{កម្រិត 3} \\ \text{កម្រិត 4} \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc}\text{សិស្សប្រុស} & \text{សិស្សស្រី}\end{array} \\ \begin{bmatrix} 105 & 63 \\ 132 & 89 \\ 98 & 102 \\ 92 & 90 \end{bmatrix} \end{array}$$

មានលំដាប់ 4×2

ប្រតិបត្តិ ក្នុងការធ្វើតេស្តគណិតវិទ្យាមានសិស្ស 10 នាក់បានពិន្ទុល្អ 20 នាក់បានពិន្ទុមធ្យម និង 12 នាក់បានពិន្ទុខ្សោយ ។ បង្ហាញព័ត៌មាននេះជាម៉ាទ្រីសនិងប្រាប់លំដាប់នៃម៉ាទ្រីសនេះ ។

1.2 ប្រភេទនៃម៉ាទ្រីស

ក. ម៉ាទ្រីសសូន្យ ៖ ម៉ាទ្រីសដែលមានធាតុទាំងអស់ស្មើនឹងសូន្យ នោះហៅថា ម៉ាទ្រីសសូន្យ តាងដោយ 0 ។

$O = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $O = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$, $O = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $O = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

លំដាប់ 2×2 លំដាប់ 1×2 លំដាប់ 3×1 លំដាប់ 3×5

ខ. ម៉ាទ្រីសការេ ៖ ឧទាហរណ៍ គេមានម៉ាទ្រីស

$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$ មាន 2 ជួរដេក និង 2 ជួរឈរ គេថាម៉ាទ្រីស A ជាម៉ាទ្រីសការេលំដាប់ 2 ។

$B = \begin{bmatrix} 5 & 10 & -9 \\ -7 & 0 & 2 \\ 3 & -8 & 13 \end{bmatrix}$ មាន 3 ជួរដេក និង 3 ជួរឈរ គេថាម៉ាទ្រីស B ជាម៉ាទ្រីសការេ លំដាប់ 3 ។

ជាទូទៅ ម៉ាទ្រីសការេជាម៉ាទ្រីសមានចំនួនជួរដេកស្មើនឹងចំនួនជួរឈរ

ដោយ

$$A_{n \times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \ldots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \ldots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

ហៅថាម៉ាទ្រីសការេលំដាប់ n ។

ដែល $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \ldots, a_{nn}$ ជាធាតុនៅលើអង្កត់ទ្រូងពិសេស ។

គ. ម៉ាទ្រីសឯកតា

ម៉ាទ្រីសការេដែលធាតុនៅលើអង្កត់ទ្រូងពិសេស $a_{11} = a_{22} = a_{33} = \dots = a_{nn} = 1$ ហើយធាតុផ្សេងទៀតស្មើនឹងសូន្យ ហៅថាម៉ាទ្រីសឯកតាតាងដោយ I

ដែល $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ។

2. ប្រមាណវិធីលើម៉ាទ្រីស

2.1 ម៉ាទ្រីសស្មើគ្នា

គេមានម៉ាទ្រីស $A = \begin{bmatrix} 3 & 23 & 0 \\ 12 & -5 & 6 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix}$ មានលំដាប់ 2×3 ដូចគ្នា ។

បើ $b_{11} = 3$, $b_{12} = 23$, $b_{13} = 0$, $b_{21} = 12$, $b_{22} = -5$, $b_{23} = 6$ នោះគេថាម៉ាទ្រីស A ស្មើនឹងម៉ាទ្រីស B ។ គេសរសេរ $A = B$ ។

ជាទូទៅ ម៉ាទ្រីសពីរស្មើគ្នា កាលណាម៉ាទ្រីសទាំងពីរមានលំដាប់ដូចគ្នានិងមានធាតុត្រូវគ្នាស្មើរៀងគ្នា ។

លំហាត់គំរូ 1 ចូររកតម្លៃ a, b, c, n និង m ដើម្បីឱ្យម៉ាទ្រីស $M = N$

$$M = \begin{bmatrix} c & 23 & 0 & 9 \\ 12 & -5 & n & 4 \\ a & 18 & 2 & 32 \end{bmatrix} \qquad N = \begin{bmatrix} 2 & 23 & m & 9 \\ 12 & b & 6 & 4 \\ 15 & 18 & 2 & 32 \end{bmatrix} ។$$

ចម្លើយ ម៉ាទ្រីស $M = N$ កាលណា $c = 2$, $m = 0$, $b = -5$, $n = 6$ និង $a = 15$ ។

លំហាត់គំរូ 2 តើគូនីមួយៗនៃម៉ាទ្រីសខាងក្រោមនេះអាចស្មើគ្នាឬទេ ? បើស្មើគ្នាតើស្មើក្នុងករណីណា ? ហើយបើមិនស្មើគ្នាព្រោះអ្វី ?

ក. $\begin{bmatrix} a & 0 \\ 12 & d \end{bmatrix}$ និង $\begin{bmatrix} 5 & b \\ 12 & -3 \end{bmatrix}$ ខ. $\begin{bmatrix} 3 & -5 & 6 \\ 14 & 8 & -2 \end{bmatrix}$ និង $\begin{bmatrix} 3 & -5 & 6 \\ 41 & 8 & -2 \end{bmatrix}$ គ. $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 \end{bmatrix}$ និង $\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$ ។

ចម្លើយ ក. $\begin{bmatrix} a & 0 \\ 12 & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & b \\ 12 & -3 \end{bmatrix}$ បើ $a = 5,\ b = 0,\ d = -3$ ។

ខ. $\begin{bmatrix} 3 & -5 & 6 \\ 14 & 8 & -2 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 3 & -5 & 6 \\ 41 & 8 & -2 \end{bmatrix}$ ព្រោះធាតុនៅទីតាំង $(2,\ 1)$ ខុសគ្នា ។

គ. $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$ មានលំដាប់ខុសគ្នា ។

ប្រតិបត្តិ 1 រកតម្លៃ a, b, c និង d បើ $\begin{bmatrix} a & 2b \\ c & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2d & d \\ 4 & 3a \end{bmatrix}$ ។

ប្រតិបត្តិ 2 រកតម្លៃអថេរចំពោះសមភាពនីមួយៗខាងក្រោម :

ក. $\begin{bmatrix} -2 & 3 \\ a & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b & 3 \\ 5 & c \end{bmatrix}$

ខ. $\begin{bmatrix} a & 5 & b \\ 3 & 9 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & c & -1 \\ d & 9 & 2 \end{bmatrix}$

គ. $\begin{bmatrix} a \\ 6 \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 6 & 0 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$

ឃ. $\begin{bmatrix} x & y \\ 9 & -2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -8 \\ c & -2 \\ 3 & d \end{bmatrix}$ ។

2.2 វិធីបូកនិងវិធីដកនៃម៉ាទ្រីស

ឧទាហរណ៍ 1 តារាងនីមួយៗបង្ហាញពីចំនួនផលិតផល 3 ប្រភេទ M, N និង S ដែលផលិត ដោយម៉ាស៊ីនពីរនៅខែកុម្ភៈនិងខែមីនា

ខែកុម្ភៈ	M	N	S
ម៉ាស៊ីនទី 1	30	20	25
ម៉ាស៊ីនទី 2	35	25	23

ខែមីនា	M	N	S
ម៉ាស៊ីនទី 1	35	28	20
ម៉ាស៊ីនទី 2	40	21	30

គេបានម៉ាទ្រីសតំណាងផលិតផលនៅខែកុម្ភៈនិងខែមីនា

$A = \begin{bmatrix} 30 & 20 & 25 \\ 35 & 25 & 23 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 35 & 28 & 20 \\ 40 & 21 & 30 \end{bmatrix}$ ។

ចំនួនផលិតផលសរុបទាំងពីរខែចំពោះ

ម៉ាស៊ីនទី 1 : $M = 30 + 35 = 65$

$N = 20 + 28 = 48$

$S = 25 + 20 = 45$ ។

ម៉ាស៊ីនទី 2 : $M = 35 + 40 = 75$

$N = 25 + 21 = 46$

$S = 23 + 30 = 53$ ។

ម៉ាទ្រីសតំណាងផលិតផលសរុបទាំងពីរខែគឺ :

$$C = \begin{bmatrix} 30+35 & 20+28 & 20+25 \\ 35+40 & 25+21 & 23+30 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 65 & 48 & 45 \\ 75 & 46 & 53 \end{bmatrix}$$ ។

គេឃើញថាម៉ាទ្រីស C ជាផលបូកនៃម៉ាទ្រីស A និង B :

$$\begin{bmatrix} 30 & 20 & 25 \\ 35 & 25 & 23 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 35 & 28 & 20 \\ 40 & 21 & 30 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 65 & 48 & 45 \\ 75 & 46 & 53 \end{bmatrix}$$

គេសរសេរ $A+B=C$ ហើយម៉ាទ្រីស A, B និង C មានលំដាប់ដូចគ្នា ។

ជាទូទៅ ម៉ាទ្រីសពីរអាចបូកគ្នាបានលុះត្រាតែម៉ាទ្រីសទាំងពីរនោះមានលំដាប់ដូចគ្នា ហើយគេបូកធាតុត្រូវគ្នា រៀងគ្នា ។

លក្ខណៈនៃវិធីបូកម៉ាទ្រីស

គេឱ្យម៉ាទ្រីស $A=\begin{bmatrix}2&-3&4\\1&0&-1\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}3&9&0\\4&-1&8\end{bmatrix}$, $C=\begin{bmatrix}4&2\\1&3\end{bmatrix}$, $D=\begin{bmatrix}1&6\\7&12\end{bmatrix}$

និង $E=\begin{bmatrix}1&-2\\-2&3\end{bmatrix}$ ។ គេបាន

$$A+B=\begin{bmatrix}2&-3&4\\1&0&-1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3&9&0\\4&-1&8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5&6&4\\5&-1&7\end{bmatrix}$$

$$B+A=\begin{bmatrix}3&9&9\\4&-1&8\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2&-3&4\\1&0&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5&6&4\\5&-1&7\end{bmatrix}\text{ ។}$$

ដូចនេះ $A+B=B+A$ វិធីបូកម៉ាទ្រីសមានលក្ខណៈត្រឡប់ ។

$$(C+D)+E=\left\{\begin{bmatrix}4&2\\1&3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&6\\7&12\end{bmatrix}\right\}+\begin{bmatrix}1&-2\\-2&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5&8\\8&15\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&-2\\-2&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6&6\\6&18\end{bmatrix}\text{ ។}$$

$$C+(D+E)=\begin{bmatrix}4&2\\1&3\end{bmatrix}+\left\{\begin{bmatrix}1&6\\7&12\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&-2\\-2&3\end{bmatrix}\right\}=\begin{bmatrix}4&2\\1&3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2&4\\5&15\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6&6\\6&18\end{bmatrix}\text{ ។}$$

ដូចនេះ $(C+D)+E=C+(D+E)$ វិធីបូកម៉ាទ្រីសមានលក្ខណៈផ្តុំ ។

$$A+O=\begin{bmatrix}2&-3&4\\1&0&-1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&-3&4\\1&0&-1\end{bmatrix}\text{ ។}$$

$$O+A=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2&-3&4\\1&0&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&-3&4\\1&0&-1\end{bmatrix}\text{ ។}$$

ដូចនេះ $A+O=O+A=A$ ម៉ាទ្រីសសូន្យជាម៉ាទ្រីសណឺតចំពោះវិធីបូក ។

ឧទាហរណ៍ 2 តារាងនេះបង្ហាញពីផលិតផល 3 ប្រភេទដែលត្រូវនាំចូលនិងលក់ចេញរបស់សាខា 2 ក្នុងក្រុមហ៊ុនមួយ ។

	ម៉ាញ៉េ	ទូរទស្សន៍	ទូរទឹកកក
សាខាទី 1	1000	500	100
សាខាទី 2	600	300	200

	ម៉ាញ៉េ	ទូរទស្សន៍	ទូរទឹកកក
សាខាទី 1	850	450	80
សាខាទី 2	480	280	150

ម៉ាទ្រីសតំណាងផលិតផលនាំចូលគឺ $A = \begin{bmatrix} 1000 & 500 & 100 \\ 600 & 300 & 200 \end{bmatrix}$ ។

ម៉ាទ្រីសតំណាងផលិតផលលក់ចេញគឺ $B = \begin{bmatrix} 850 & 450 & 80 \\ 480 & 280 & 150 \end{bmatrix}$ ។

ផលិតផលដែលនៅសល់ក្រោយពីបានលក់ចេញគឺ

សាខាទី 1 : ម៉ាញ៉េ : $1000 - 850 = 150$ សាខាទី 2 : ម៉ាញ៉េ : $600 - 480 = 120$

ទូរទស្សន៍ : $500 - 450 = 50$ ទូរទស្សន៍ : $300 - 280 = 20$

ទូរទឹកកក : $100 - 80 = 20$ ។ ទូរទឹកកក : $200 - 150 = 50$ ។

ម៉ាទ្រីសតំណាងផលិតផលដែលនៅសល់ក្នុងសាខាទាំងពីរគឺ :

$$C = \begin{bmatrix} 1000-850 & 500-450 & 100-80 \\ 600-480 & 300-280 & 200-150 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 150 & 50 & 20 \\ 120 & 20 & 50 \end{bmatrix}$$

គេបាន $\begin{bmatrix} 1000 & 500 & 100 \\ 600 & 300 & 200 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 850 & 450 & 80 \\ 480 & 280 & 150 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1000-850 & 500-450 & 100-80 \\ 600-480 & 300-280 & 200-150 \end{bmatrix}$

គេសរសេរ $A - B = C$ ។

ជាទូទៅ ម៉ាទ្រីសពីរដកគ្នាបាន លុះត្រាតែម៉ាទ្រីសទាំងពីរមានលំដាប់ដូចគ្នា ហើយគេដកធាតុត្រូវគ្នា រៀងគ្នា ។

លំហាត់គំរូ គេឱ្យម៉ាទ្រីស $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 1 & 3 & 7 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & 9 & 0 \\ 4 & -1 & -8 \end{bmatrix}$ និង $C = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$ ។

គណនាប្រមាណវិធីលើម៉ាទ្រីសខាងក្រោមបើអាច

ក. $A - B$ ខ. $B - C$ គ. គណនាម៉ាទ្រីស X បើ $A + X = B$ ។

ចម្លើយ ក. $A - B = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 1 & 3 & 7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 9 & 0 \\ 4 & -1 & -8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -7 & 6 \\ -3 & 4 & 15 \end{bmatrix}$

ខ. $B - C$ មិនអាចធ្វើបាន ព្រោះ B និង C មានលំដាប់ខុសគ្នា

គ. $A + X = B$ អាចធ្វើបានប្រមាណវិធីបាន កាលណាម៉ាទ្រីស X មានលំដាប់ 2×3 ។

គេបាន $X = B - A = \begin{bmatrix} 3 & 9 & 0 \\ 4 & -1 & -8 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 1 & 3 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 7 & -6 \\ 3 & -4 & -15 \end{bmatrix}$ ។

ប្រតិបត្តិ គេឱ្យម៉ាទ្រីស $A = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 3 \\ 9 & 5 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 7 \\ 10 & 6 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 7 & -4 \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -13 & 4 \end{bmatrix}$ ។

គណនា ក. $A + B$ ខ. $B - A$ គ. $B + D$ ឃ. $C + D$ ង. $A - B$ ។

2.3 ផលគុណមួយចំនួនពិតនឹងម៉ាទ្រីស

ឧទាហរណ៍ 1 គេឱ្យម៉ាទ្រីស $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -5 \end{bmatrix}$ ។ គណនាម៉ាទ្រីស $A + A = 2A$ ។

គេបាន $A + A = 2A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 2 & -10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\times 2 & 2\times 3 \\ 2\times 1 & 2(-5) \end{bmatrix}$ ។

ដូចគ្នាដែរគេបាន $3A = A + A + A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 9 \\ 3 & -15 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 3\times 2 & 3\times 3 \\ 3\times 1 & 3(-5) \end{bmatrix}$ ។

បើ k ជាចំនួនពិតនោះ $kA = \begin{bmatrix} k\times 2 & k\times 3 \\ k\times 1 & k(-5) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2k & 3k \\ k & -5k \end{bmatrix}$ ។

ជាទូទៅ បើគេមានចំនួនពិត k និងម៉ាទ្រីស A នោះម៉ាទ្រីស Ak បានដោយគុណធាតុនីមួយៗនៃម៉ាទ្រីស A នឹងចំនួនពិត k ។ បើ $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ នោះ

$kA = Ak = k\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}k = \begin{bmatrix} ka & kb \\ kc & kd \end{bmatrix}$ ។

ឧទាហរណ៍ 2 គេឱ្យម៉ាទ្រីស $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$ និង $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$, k និង h ជាចំនួនពិត ។ គណនាម៉ាទ្រីស

ក. $k(A+B)$ ខ. $kA + kB$ គ. $(kh)A$ ឃ. $k(hA)$ ។

ចម្លើយ ក. $k(A+B) = k\left\{\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}\right\} = k\begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6k & 0 \\ 3k & k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6k & 0 \\ 3k & k \end{bmatrix}$

ខ. $kA + kB = k\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} + k\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4k & k \\ 2k & -3k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2k & -k \\ k & 4k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6k & 0 \\ 3k & k \end{bmatrix}$

គ. $(kh)A = kh\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4kh & kh \\ 2kh & -3kh \end{bmatrix}$

ឃ. $k(hA) = k\left\{h\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}\right\} = k\begin{bmatrix} 4h & h \\ 2h & -3h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4kh & kh \\ 2kh & -3kh \end{bmatrix}$ ។

គេទាញបានលក្ខណៈ: $\boxed{1.\ k(A+B) = kA + kB \qquad 2.\ (kh)A = k(hA)}$ ។

លំហាត់គំរូ ម៉ាទ្រីស A បង្ហាញពីប្រាក់កម្រៃប្រចាំថ្ងៃរបស់កម្មករនិងកម្មករជំនាញធ្វើការនៅការដ្ឋានទី 1 និងការដ្ឋានទី 2 ពីថ្ងៃច័ន្ទដល់ថ្ងៃសុក្រ ។ ម៉ាទ្រីស B ជាប្រាក់កម្រៃប្រចាំថ្ងៃរបស់ពួកគេសម្រាប់ថ្ងៃសៅរ៍និងថ្ងៃអាទិត្យ (គិតជារៀល) ។

$$\begin{array}{ccc} & \text{កម្មករ} \quad \text{កម្មករជំនាញ} & \\ A = & \begin{bmatrix} 7000 & 13000 \\ 8000 & 14000 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \text{ការដ្ឋានទី 1} \\ \text{ការដ្ឋានទី 2} \end{array} \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} & \text{កម្មករ} \quad \text{កម្មករជំនាញ} & \\ B = & \begin{bmatrix} 8000 & 14000 \\ 9000 & 15500 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \text{ការដ្ឋានទី 1} \\ \text{ការដ្ឋានទី 2} \end{array} \end{array}$$

គណនាម៉ាទ្រីស $5A+2B$ ។ តើម៉ាទ្រីស $5A+2B$ បង្ហាញពីពត៌មានអ្វី ?

ចម្លើយ $5A+2B = 5\begin{bmatrix} 7000 & 13000 \\ 8000 & 14000 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 8000 & 14000 \\ 9000 & 15500 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 35000 & 65000 \\ 40000 & 70000 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 16000 & 28000 \\ 18000 & 31000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 51000 & 93000 \\ 58000 & 101000 \end{bmatrix}$ ។

ម៉ាទ្រីសនេះបង្ហាញពីប្រាក់កម្រៃក្នុង 1 អាទិត្យរបស់កម្មករ និងកម្មករជំនាញធ្វើការនៅការដ្ឋានទី 1 និងការដ្ឋានទី 2 ។

ប្រតិបត្តិ គេឱ្យម៉ាទ្រីស $A = \begin{bmatrix} 3 & 21 \\ 16 & -4 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 9 & -24 \\ -9 & 14 \\ -7 & 9 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 4 & -9 \\ 3 & 10 \end{bmatrix}$ និង $D = \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ -13 & 5 \end{bmatrix}$ ។

រកម៉ាទ្រីសខាងក្រោម : ក. $3A+B$ ខ. $B-A+C$ គ. $2C+5C-4D$

ឃ. $-A+3(B-A)$ ង. $2(3C)-7D$ ច. $-A+2(D+C)$ ។

2.4 វិធីគុណនៃពីរម៉ាទ្រីស

ឧទាហរណ៍ 1 សុខត្រូវការទិញសៀវភៅ 18 ក្បាល ប៊ិច 12 ដើម និងខ្មៅដៃ 11 ដើម ។ សៅត្រូវការទិញសៀវភៅ 16 ក្បាល ប៊ិច 20 ដើម និងខ្មៅដៃ 10 ដើម ។ គេដឹងថាតូបទី 1 លក់សៀវភៅមួយក្បាលថ្លៃ 7 រយរៀល ប៊ិចមួយដើមថ្លៃ 4 រយរៀល និងខ្មៅដៃមួយដើមថ្លៃ 2 រយរៀល រីឯតូបទី 2 លក់សៀវភៅមួយថ្លៃ 6 រយរៀល ប៊ិចមួយដើមថ្លៃ 5 រយរៀល និងខ្មៅដៃមួយដើមថ្លៃ 2 រយរៀល ។ គេចង់ដឹងថ្លៃទិញរបស់ម្នាក់ៗក្នុងករណីដែលគេទិញនៅតូបទី 1 ឬនៅតូបទី 2 ។

ចម្លើយ ថ្លៃទិញរបស់សុខ : នៅតូបទី 1 $= 18(7)+12(4)+11(2) = 196$

នៅតូបទី 2 $= 18(6)+12(5)+11(2) = 190$ ។

ថ្លៃទិញរបស់សៅ : នៅតូបទី 1 $= 16(7)+20(4)+10(2) = 212$

នៅតូបទី 2 $= 16(6)+20(5)+10(2) = 216$ ។

ដើម្បីងាយសិក្សា គេអាចបកស្រាយទិន្នន័យនេះជាម៉ាទ្រីស ៖

ម៉ាទ្រីសទំនិញ

$$\begin{array}{c} \\ \text{សុខ} \\ \text{សៅ} \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{ស} & \text{ប} & \text{ខ} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 18 & 12 & 11 \\ 16 & 20 & 10 \end{bmatrix} \end{array}$$

ម៉ាទ្រីសតម្លៃ 1 ឯកតា

$$\begin{array}{c} \\ \text{ស} \\ \text{ប} \\ \text{ខ} \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{តូបទី 1} & \text{តូបទី 2} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 7 & 6 \\ 4 & 5 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \\ \text{សុខ} \\ \text{សៅ} \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{តូបទី 1} & \text{តូបទី 2} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 18(7)+12(4)+11(2) & 18(6)+12(5)+11(2) \\ 16(7)+20(4)+10(2) & 16(6)+20(5)+10(2) \end{bmatrix} \end{array} \text{ ។}$$

ដោយថ្លៃទិញជាផលគុណនៃបរិមាណទំនិញ និងតម្លៃទំនិញក្នុង 1 ឯកតា នោះម៉ាទ្រីសថ្លៃទិញជាផលគុណនៃម៉ាទ្រីសទំនិញនិងម៉ាទ្រីសតម្លៃក្នុង 1 ឯកតា ។ គេសរសេរ ៖

$$\begin{bmatrix} 18 & 12 & 11 \\ 16 & 20 & 10 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 7 & 6 \\ 4 & 5 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18(7)+12(4)+11(2) & 18(6)+12(5)+11(2) \\ 16(7)+20(4)+10(2) & 16(6)+20(5)+10(2) \end{bmatrix}$$

បើគេតាង A ជាម៉ាទ្រីសទំនិញ B ជាម៉ាទ្រីសតម្លៃក្នុង 1 ឯកតា និង P ជាម៉ាទ្រីសថ្លៃទំនិញ នោះគេបាន $A \times B = P$

សង្កេត $18(7)+12(4)+11(2)$ ជាធាតុទី 1 នៃម៉ាទ្រីសផលគុណ ទីតាំងឋិតនៅត្រង់ជួរដេកទី 1 និងជួរឈរទី 1 ។ ធាតុនេះជាផលបូករបស់ផលគុណតួនៃជួរដេកទី 1 និងជួរឈរទី 1 ។

តាមលំនាំនេះ គេមានវិធានក្នុងការគណនាផលគុណនៃពីរម៉ាទ្រីសដូចខាងក្រោម ៖

$$\begin{bmatrix} 18 & 12 & 11 \\ 16 & 20 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & 6 \\ 4 & 5 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18(7)+12(4)+11(2) & \boxed{\qquad\qquad} \\ \boxed{\qquad\qquad} & \boxed{\qquad\qquad} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 18 & 12 & 11 \\ 16 & 20 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & 6 \\ 4 & 5 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boxed{\qquad\qquad} & 18(6)+12(5)+11(2) \\ \boxed{\qquad\qquad} & \boxed{\qquad\qquad} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 18 & 12 & 11 \\ 16 & 20 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & 6 \\ 4 & 5 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boxed{\qquad\qquad} & \boxed{\qquad\qquad} \\ 16(7)+20(4)+10(2) & \boxed{\qquad\qquad} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 18 & 12 & 11 \\ 16 & 20 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & 6 \\ 4 & 5 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boxed{\qquad\qquad} & \boxed{\qquad\qquad} \\ \boxed{\qquad\qquad} & 16(6)+20(5)+10(2) \end{bmatrix}$$

ហេតុនេះ $\begin{bmatrix}18 & 12 & 11\\16 & 20 & 10\end{bmatrix}\begin{bmatrix}7 & 6\\4 & 5\\2 & 2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}18(7)+12(4)+11(2) & 18(6)+12(5)+11(2)\\16(7)+20(4)+10(2) & 16(6)+20(5)+10(2)\end{bmatrix}$ ។

សង្កេត បើម៉ាទ្រីស A មានលំដាប់ 2×3 ; B មានលំដាប់ 3×2 នោះលំដាប់នៃផលគុណម៉ាទ្រីសគឺ 2×2

$$\begin{array}{lccccc} & A & \times & B & = & P\\ \text{លំដាប់} & 2\times \underbrace{3 & & 3}_{\text{ស្មើគ្នា}}\times 2 & & 2\times 2\end{array}$$

គេអាចគុណម៉ាទ្រីសនឹងម៉ាទ្រីសបាន កាលណាចំនួនជួរឈរនៃម៉ាទ្រីសទី 1 ស្មើនឹងចំនួនជួរដេកនៃម៉ាទ្រីសទី 2 ។

លក្ខណៈនៃវិធីគុណម៉ាទ្រីស : គេមានម៉ាទ្រីស

$A = \begin{bmatrix}-1 & 2\\3 & -6\end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix}2 & 1\\-3 & 7\end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix}3 & -2 & 1\\2 & 4 & -6\end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix}4 & 2\\2 & 1\end{bmatrix}$ និងម៉ាទ្រីស $I = \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$ ។

ក. $AB = \begin{bmatrix}-1 & 2\\3 & -6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 1\\-3 & 7\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-8 & 13\\24 & -39\end{bmatrix}$

$BA = \begin{bmatrix}2 & 1\\-3 & 7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 2\\3 & -6\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & -2\\24 & -48\end{bmatrix}$ ។

ដូចនេះ $AB \neq BA$ វិធីគុណម៉ាទ្រីសគ្មានលក្ខណៈត្រឡប់ទេ ។

ខ. $AB = \begin{bmatrix}-1 & 2\\3 & -6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 1\\-3 & 7\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-8 & 13\\24 & -39\end{bmatrix}$, $(AB)C = \begin{bmatrix}-8 & 13\\24 & -39\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & -2 & 1\\2 & 4 & -6\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2 & 68 & -86\\-6 & -204 & 258\end{bmatrix}$

$A(BC) = \begin{bmatrix}-1 & 2\\3 & -6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}8 & 0 & -4\\5 & 34 & -45\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2 & 68 & -86\\-6 & -204 & 258\end{bmatrix}$ ។

ដូចនេះ $(AB)C = A(BC)$: វិធីគុណម៉ាទ្រីសមានលក្ខណៈផ្តុំ ។

គ. $(A+B)C = \left\{\begin{bmatrix}-1 & 2\\3 & -6\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2 & 1\\-3 & 7\end{bmatrix}\right\}\begin{bmatrix}3 & -2 & 1\\2 & 4 & -6\end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix}1 & 3\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & -2 & 1\\2 & 4 & -6\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}9 & 10 & -17\\2 & 4 & -6\end{bmatrix}$ ។

$AC + BC = \begin{bmatrix}1 & 10 & -13\\-3 & -30 & 39\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}8 & 0 & -4\\5 & 34 & -45\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}9 & 10 & -17\\2 & 4 & -6\end{bmatrix}$ ។

ដូចនេះ $(A+B)C = AC+BC$: វិធីគុណម៉ាទ្រីសមានលក្ខណៈបំបែកចំពោះវិធីបូក ។

ឃ. $AI = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -6 \end{bmatrix} = A$ ។

$IA = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -6 \end{bmatrix} = A$ ។

ដូចនេះ $AI = IA = A$: ម៉ាទ្រីសឯកតាជាម៉ាទ្រីសណឺត ចំពោះវិធីគុណម៉ាទ្រីស ។

លំហាត់គំរូ សុខមានរថយន្តធំ 7 មធ្យម 2 និងតូច 4 សៅមានរថយន្តធំ 5 មធ្យម 6 និងតូច 3 ។ រថយន្តរបស់អ្នកទាំងពីរបម្រើសេវាដឹកនាំភ្ញៀវទេសចរ ម្តងទៅប្រទេសថៃនិងម្តងទៀតទៅប្រទេសវៀតណាម ។ គេកំណត់តម្លៃដឹកទៅប្រទេសថៃ គឺក្នុងមួយលើក រថយន្តធំ 900 \$ មធ្យម 700 \$ និងតូច 500 \$ រីឯប្រទេសវៀតណាមរថយន្តធំ 600 \$ មធ្យម 500 \$ និងតូច 400 \$ ។ រកម៉ាទ្រីសដែលទាក់ទងទៅនឹងថ្លៃដឹកភ្ញៀវក្នុងមួយលើកសម្រាប់ប្រទេសនីមួយៗរបស់សុខនិងសៅ ។

ចម្លើយ ម៉ាទ្រីសដែលទាក់ទងទៅនឹងចំនួនរថយន្តតាមប្រភេទរថយន្ត និងម្ចាស់រថយន្ត :

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} \text{ធំ} & \text{មធ្យម} & \text{តូច} \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{សុខ} \\ \text{សៅ} \end{array} & \begin{bmatrix} 7 & 2 & 4 \\ 5 & 6 & 3 \end{bmatrix} \end{array} \quad \text{ឬ} \quad \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} \text{សុខ} & \text{សៅ} \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{ធំ} \\ \text{មធ្យម} \\ \text{តូច} \end{array} & \begin{bmatrix} 7 & 5 \\ 2 & 6 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \end{array} \text{ ។}$$

ម៉ាទ្រីសដែលទាក់ទងទៅនឹងតម្លៃដឹកតាមប្រភេទរថយន្ត និងប្រទេសនីមួយៗ :

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} \text{ថៃ} & \text{វៀតណាម} \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{ធំ} \\ \text{មធ្យម} \\ \text{តូច} \end{array} & \begin{bmatrix} 900 & 600 \\ 700 & 500 \\ 500 & 400 \end{bmatrix} \end{array} \quad \text{ឬ} \quad \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} \text{ធំ} & \text{មធ្យម} & \text{តូច} \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{ថៃ} \\ \text{វៀតណាម} \end{array} & \begin{bmatrix} 900 & 700 & 500 \\ 600 & 500 & 400 \end{bmatrix} \end{array} \text{ ។}$$

ម៉ាទ្រីសដែលត្រូវរកជាម៉ាទ្រីសដែលទាក់ទងទៅនឹងតម្លៃដឹក ដែលសុខ និងសៅបានទទួលសម្រាប់ប្រទេសនីមួយៗ :

គេបាន ម៉ាទ្រីសចំនួនរថយន្តតាមប្រភេទ $\times$ ម៉ាទ្រីសតម្លៃដឹកតាមប្រភេទ $=$ ម៉ាទ្រីសថ្លៃដឹក

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} \text{ធំ} & \text{មធ្យម} & \text{តូច} \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{សុខ} \\ \text{សៅ} \end{array} & \begin{bmatrix} 7 & 2 & 4 \\ 5 & 6 & 3 \end{bmatrix} \end{array} \times \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} \text{ថៃ} & \text{វៀតណាម} \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{ធំ} \\ \text{មធ្យម} \\ \text{តូច} \end{array} & \begin{bmatrix} 900 & 600 \\ 700 & 500 \\ 500 & 400 \end{bmatrix} \end{array} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} \text{ថៃ} & \text{វៀតណាម} \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{សុខ} \\ \text{សៅ} \end{array} & \begin{bmatrix} 9700 & 6800 \\ 10200 & 7200 \end{bmatrix} \end{array}$$

គេអាចគណនាបានមួយបែបទៀត

$$\begin{array}{c} \\ \text{ថៃ} \\ \text{វៀតណាម} \end{array}\begin{array}{c} \text{ធំ} \quad \text{មធ្យម} \quad \text{តូច} \\ \begin{bmatrix} 900 & 700 & 500 \\ 600 & 500 & 400 \end{bmatrix} \end{array} \times \begin{array}{c} \\ \text{ធំ} \\ \text{មធ្យម} \\ \text{តូច} \end{array}\begin{array}{c} \text{សុខ} \quad \text{សៅ} \\ \begin{bmatrix} 7 & 5 \\ 2 & 6 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \end{array} = \begin{array}{c} \\ \text{ថៃ} \\ \text{វៀតណាម} \end{array}\begin{array}{c} \text{សុខ} \quad \text{សៅ} \\ \begin{bmatrix} 9700 & 10200 \\ 6800 & 7200 \end{bmatrix} \end{array}$$

ម៉ាទ្រីសដែលបានគណនាទាំងពីរបែបនេះអាចឱ្យដឹងថា ថ្លៃដឹករបស់សុខសម្រាប់ប្រទេសថៃ 9700 \$ និងប្រទេសវៀតណាម 6800 \$ ចំណែកឯថ្លៃដឹករបស់សៅប្រទេសថៃ 10200 \$ និងប្រទេសវៀតណាម 7200 \$ ។

ប្រតិបត្តិ 1 សិស្សបីនាក់មានឈ្មោះ A, B និង C ដោះស្រាយលំហាត់ 8 ។ សិស្ស A ឆ្លើយត្រឹមត្រូវល្អបាន 4 សំណួរ ត្រូវខ្លះបាន 1 សំណួរ និងខុស 3 សំណួរ សិស្ស B ឆ្លើយត្រឹមត្រូវល្អបាន 5 សំណួរ ត្រូវខ្លះបាន 2 សំណួរ និងខុស 1 សំណួរ រីឯសិស្ស C ឆ្លើយត្រឹមត្រូវល្អបាន 2 សំណួរ ត្រូវខ្លះបាន 4 សំណួរ និងខុស 2 សំណួរ ។ គេសន្មតថា ចម្លើយត្រឹមត្រូវបានពិន្ទុ 3 ត្រូវខ្លះបានពិន្ទុ 1 និងខុសបានពិន្ទុ 0 ។

ក. ចូរបង្ហាញចំនួនចម្លើយរបស់សិស្សម្នាក់ៗ ជាម៉ាទ្រីសនិងពិន្ទុរបស់ចម្លើយជា ម៉ាទ្រីស ។

ខ. ចូររកម៉ាទ្រីសពិន្ទុសរុបរបស់សិស្សម្នាក់ៗ ។

ប្រតិបត្តិ 2 គេឱ្យម៉ាទ្រីស $C = \begin{bmatrix} 1 & a \\ b & 6 \end{bmatrix}$ និង $D = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$ ។

ក. គណនា $4D - 3D$ ខ. រកតម្លៃ a និង b បើ $DC = 8C$ ។

3. ម៉ាទ្រីសច្រាស

ឧទាហរណ៍ 1 គេមានម៉ាទ្រីស $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ និង $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$ ជាម៉ាទ្រីសការេលំដាប់ 2 ។ គណនា AB និង BA ។

$$AB = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I \text{ និង } BA = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I \text{ ។}$$

គេសង្កេតឃើញថា $AB = BA = I$ ។ B ហៅថាម៉ាទ្រីសច្រាសនៃម៉ាទ្រីស A ។

គេកំណត់សរសេរ : A^{-1} ជាម៉ាទ្រីសច្រាសនៃម៉ាទ្រីស A ។

ដូចនេះ $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ ។

ឧទាហរណ៍ 2 គេមានម៉ាទ្រីស $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ និង $M = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$ ដែល $ad-bc \neq 0$ ។

ក. គណនា AM និង MA ។

ខ. រកម៉ាទ្រីស B បើ $AB = BA = I$ ដែល I ជាម៉ាទ្រីសឯកតាលំដាប់ 2 ។

ចម្លើយ ក. $AM = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{bmatrix} = (ad-bc)\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = (ad-bc)I$

$MA = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{bmatrix} = (ad-bc)\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = (ad-bc)I$ ។

ខ. បើ $AM = (ad-bc)I$ នោះ $I = \frac{1}{ad-bc}AM$ $(ad-bc \neq 0)$

ដោយ $AB = I$, $AB = \frac{1}{ad-bc}AM$

$$B = \frac{1}{ad-bc}M = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \text{ ។}$$

បើ $MA = (ad-bc)I$, $I = \frac{1}{ad-bc}MA$

ដោយ $BA = I$, $BA = \frac{1}{ad-bc}MA$

$$B = \frac{1}{ad-bc}M = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \text{ ។}$$

ដូចនេះ បើ $AB = BA = I$ នោះ $B = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$ ។

គេថា $\frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$ ជាម៉ាទ្រីសច្រាសនៃម៉ាទ្រីស $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ។

ជាទូទៅ

- បើម៉ាទ្រីស $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ដែល $ad-bc \neq 0$ នោះម៉ាទ្រីសច្រាសនៃ A គឺ $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$ ។
- បើ $ad-bc = 0$ នោះ A គ្មានម៉ាទ្រីសច្រាសទេ ។
- បើ A^{-1} ជាម៉ាទ្រីសច្រាសនៃម៉ាទ្រីស A នោះគេបាន $AA^{-1} = A^{-1}A = I$ ។

លំហាត់

1. ទិន្នន័យក្នុងភោសជ្ជដ្ឋានមួយបង្ហាញថា នៅថ្ងៃសុក្រគេលក់កាហ្វេបាន 160 កែវ តែក្រូចឆ្មារ 125 កែវ និងសុរា 210 កែវ ។ នៅថ្ងៃសៅរ៍ គេលក់កាហ្វេបាន 145 កែវ តែក្រូចឆ្មារ 130 កែវ និង សុរា 275 កែវ និងថ្ងៃអាទិត្យលក់កាហ្វេបាន 120 កែវ តែក្រូចឆ្មារ 155 កែវនិងសុរា 325 កែវ ។ ចូរបង្ហាញព័ត៌មាននេះជាម៉ាទ្រីសនិងប្រាប់លំដាប់នៃម៉ាទ្រីសនេះ ។

2. គណនាម៉ាទ្រីសខាងក្រោម :

ក. $\begin{bmatrix} 6 & -2 \\ 5 & -1 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 7 \\ 2 & -5 \end{bmatrix}$ ខ. $\begin{bmatrix} 1 & 8 & 9 \\ 13 & 21 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -8 & 9 \\ 5 & 10 \end{bmatrix}$

គ. $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 7 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 8 & 2 \end{bmatrix}$ ឃ. $\begin{bmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 5 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} 1 & 6 & -3 \\ 5 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ ។

3. គេឱ្យម៉ាទ្រីស :

$A = \begin{bmatrix} 3 & 21 \\ 16 & -4 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 9 & 12 \\ -9 & 14 \\ -7 & 9 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 4 & -9 \\ 3 & 10 \end{bmatrix}$ និង $D = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -13 & 5 \end{bmatrix}$ ។

គណនា : ក. $3A + B$ ខ. $B - A + C$ គ. $2C + 5C - 4D$

ឃ. $-A + 3(B - A)$ ង. $2(3C) - 7D$ ច. $-A + 2(D + C)$ ។

4. គណនា ក. $\begin{bmatrix} 12 & 4 & -2 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 7 & 4 \\ 6 & 5 \end{bmatrix}$ ខ. $\begin{bmatrix} 3 & -2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 29 \\ 5 \\ -6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 15 \end{bmatrix}$ ។

5. គេឱ្យ $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b & -7 \\ a & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 6 & 3c \end{bmatrix}$ ។ រកតម្លៃ a, b និង c ។

6. គេដឹងថាតម្លៃសំបុត្រចូលទស្សនាពិព័រណ៍មួយសន្លឹកសម្រាប់កូនក្មេង 2000 ៛ មនុស្សចាស់ 5000 ៛ និងជនបរទេស 10000 ៛ ។ ចំនួនសំបុត្រដែលបានលក់នៅចុងសប្តាហ៍កន្លងទៅនេះ មានសង្ខេបក្នុងតារាងខាងក្រោម :

	កូនក្មេង	មនុស្សចាស់	ជនបរទេស
ថ្ងៃសៅរ៍	205	160	70
ថ្ងៃអាទិត្យ	310	200	65

ក. តាងតម្លៃសំបុត្រជាម៉ាទ្រីសជួរឈរ C ។

ខ. តាងព័ត៌មានក្នុងតារាងខាងលើជាម៉ាទ្រីស N ។

គ. គណនាផលគុណ NC ។ តើធាតុរបស់ម៉ាទ្រីស NC តាងឱ្យអ្វី ?

7. គេមានម៉ាទ្រីស $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & k \\ 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 12 & 4 \\ -9 & m \end{bmatrix}$ ។

ក. គណនា A^2 និង A^{-1} ដែលជាម៉ាទ្រីសច្រាសនៃ A

ខ. រកតម្លៃ k ដើម្បីឱ្យ AB ជាម៉ាទ្រីសឯកតា

គ. រកតម្លៃ m ដើម្បីឱ្យដេទែរមីណង់ A ស្មើនឹងដេទែរមីណង់ C ។

8. គេឱ្យម៉ាទ្រីស $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -5 & -4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ ។ គណនា

ក. AB និង $(AB)^{-1}$

ខ. A^{-1} , B^{-1} , $B^{-1}A^{-1}$

គ. តើអ្នកសង្កេតឃើញយ៉ាងណាចំពោះ $(AB)^{-1}$ និង $B^{-1}A^{-1}$ ។

9. រកម៉ាទ្រីស X ដែល :

ក. $\begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} -11 \\ 9 \end{bmatrix}$ ខ. $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} X = 2\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$ ។

10. រកតម្លៃ p, q, a និង b ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់

ក. $\begin{bmatrix} 10 & 3 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix}$ ខ. $\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \\ b \end{bmatrix}$ គ. $\begin{bmatrix} -1 & a \\ b & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$ ។

11. ក្នុងសមីការ $M\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ ចូរប្រាប់លំដាប់នៃម៉ាទ្រីស M និងរកម៉ាទ្រីស M ។

មេរៀនទី

2 ដេទែរមីណង់

1. ដេទែរមីណង់លំដាប់ 2

កន្សោម $ad-bc$ ដែលបានពីម៉ាទ្រីស $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ហៅថា ដេទែរមីណង់លំដាប់ 2 នៃម៉ាទ្រីស A ។

គេកំណត់សរសេរ $detA$ ឬ $|A|$ ឬ $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$

វត្ថុបំណង

- គណនាដេទែរមីណង់លំដាប់ 2×3 និងលំដាប់ 3
- ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការលីនេអ៊ែរដោយប្រើដេទែរមីណង់

តម្លៃដេទែរមីណង់នៃម៉ាទ្រីស $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

គឺ $detA = |A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad-bc$

លំហាត់គំរូ គេឱ្យម៉ាទ្រីស $M = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$, $N = \begin{bmatrix} -4 & 14 \\ 10 & 10 \end{bmatrix}$ និង $P = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -4 & 6 \end{bmatrix}$ ។

ក. គណនាដេទែរមីណង់និងម៉ាទ្រីសច្រាស (បើមាន) នៃម៉ាទ្រីសនីមួយៗ ។

ខ. គណនាម៉ាទ្រីស X បើ $MX = N$ គ. គណនាម៉ាទ្រីស Y បើ $YM = N$

ចម្លើយ ក. $|M| = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 6+12 = 18$ និង $M^{-1} = \frac{1}{18}\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ -\frac{2}{9} & \frac{1}{9} \end{bmatrix}$ ។

$|N| = \begin{vmatrix} -4 & 14 \\ 10 & 10 \end{vmatrix} = (-4)(10)-14(10) = -180$ និង $N^{-1} = -\frac{1}{180}\begin{bmatrix} 10 & -14 \\ -10 & (-4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{18} & \frac{7}{90} \\ \frac{1}{18} & \frac{1}{45} \end{bmatrix}$ ។

$|P| = \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -4 & 6 \end{vmatrix} = -12+12 = 0$, P គ្មានម៉ាទ្រីសច្រាសទេ ។

ខ. គេមានសមីការម៉ាទ្រីស $MX = N$

បើគេគុណពីខាងឆ្វេងអង្គនីមួយៗនៃសមីការម៉ាទ្រីសនឹង M^{-1} នោះគេបាន :

$M^{-1}MX = M^{-1}N \Rightarrow IX = M^{-1}N$ (ព្រោះ $MM^{-1} = 1$)

$\Rightarrow X = M^{-1}N$ (ព្រោះ $IX = X$)

$$X = \frac{1}{18}\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -4 & 14 \\ 10 & 10 \end{bmatrix} = \frac{1}{18}\begin{bmatrix} 18 & 72 \\ 36 & -36 \end{bmatrix} \ , \ X = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \text{ ។}$$

គ. គេមានសមីការម៉ាទ្រីស $YM = N$

បើគេគុណពីខាងស្តាំអង្គនីមួយៗនៃសមីការម៉ាទ្រីសនឹង M^{-1} នោះគេបាន :

$$YMM^{-1} = NM^{-1} \Rightarrow YI = NM^{-1} \quad (\text{ ព្រោះ } MM^{-1} = 1)$$

$$\Rightarrow Y = NM^{-1} \quad (\text{ ព្រោះ } YI = Y)$$

$$Y = \begin{bmatrix} -4 & 14 \\ 10 & 10 \end{bmatrix}\frac{1}{18}\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{18}\begin{bmatrix} -68 & 16 \\ -10 & 50 \end{bmatrix} \ , \ Y = \begin{bmatrix} -\frac{34}{9} & \frac{8}{9} \\ -\frac{5}{9} & \frac{25}{9} \end{bmatrix}$$

ប្រតិបត្តិ គេមានម៉ាទ្រីស $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ និង $B = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$ ។

ក. រកម៉ាទ្រីស X ដែល $AX = B$ ។

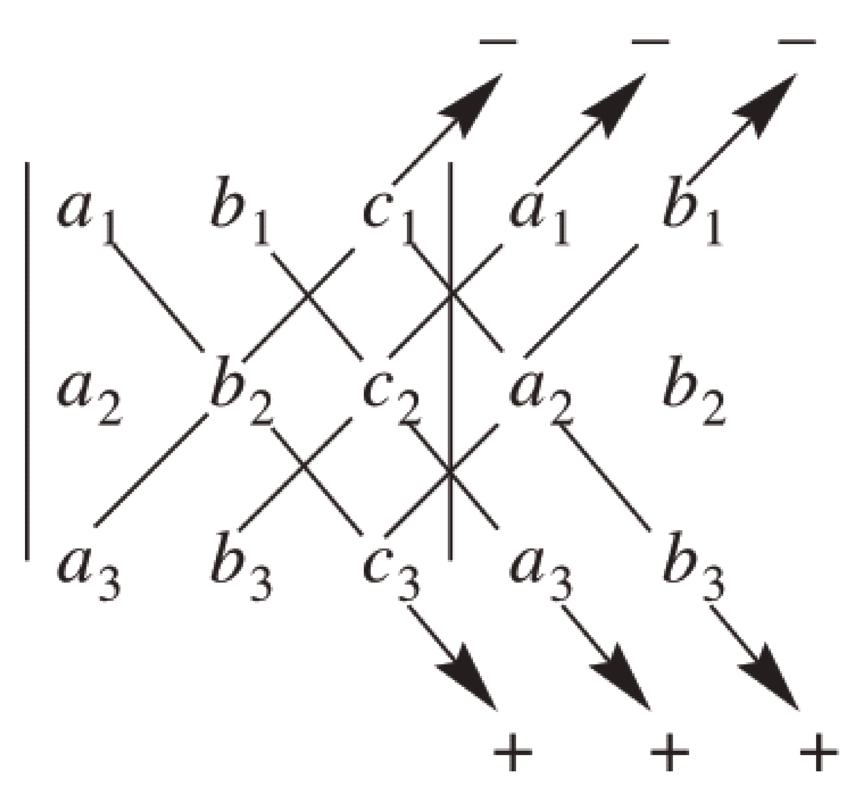
ខ. គណនា $(AB)^{-1}$ និង $B^{-1}A^{-1}$ រួចសន្និដ្ឋាន ។

2. ដេទែរមីណង់លំដាប់ 3

2.1 គណនាដេទែរមីណង់លំដាប់ 3 តាមក្បួនរបស់សារុស

គេមានដេទែរមីណង់ $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ ។

គេអាចយកជួរទី 1 និងទី 2 សរសេរបន្ថែមបន្ទាប់ពីដេទែរមីណង់



បន្ទាប់មកគេគណនាផលគុណនៃធាតុដែលនៅតាមសញ្ញាព្រួញនីមួយៗ

គេបាន $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3 + b_1c_2a_3 + c_1a_2b_3 - a_3b_2c_1 - b_3c_2a_1 - c_3c_2b_1$ ។

ឧទាហរណ៍ គណនាតម្លៃដេទែរមីណង់ $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & -3 & 5 \\ -4 & 0 & -1 \end{vmatrix}$ ។

ចម្លើយ

$$\begin{array}{ccccc} & & - & - & - \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 6 & -3 & 5 & 6 & -3 \\ -4 & 0 & -1 & -4 & 0 \\ & & + & + & + \end{array}$$

គេបាន $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & -3 & 5 \\ -4 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 3 - 40 + 0 - 36 - 0 + 12 = -61$ ។

2.2 ការគណនាដេទែរមីណង់លំដាប់ 3 តាមមីន័រ

គេមាន $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3 + b_1c_2a_3 + c_1a_2b_3 - a_3b_2c_1 - b_3c_2a_1 - c_3a_2b_1$

គេអាចសរសេរ $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \begin{aligned} &= (a_1b_2c_3 - a_1c_2b_3) - (b_1a_2c_3 - b_1c_2a_3) + (c_1a_1b_3 - c_1b_2a_3) \\ &= a_1(b_2c_3 - c_2b_3) - b_1(a_2c_3 - c_2a_3) + c_1(a_2b_3 - b_2a_3) \end{aligned}$

ដូចនេះ $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$ ។

ហៅថាវិធីពន្លាតមីន័រតាមជួរដេកទី 1 ព្រោះ a_1, b_1, c_1 ជាធាតុស្ថិតនៅជួរដេកទី 1

$\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ មីន័រនៃធាតុ a_1 , $\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}$ មីន័រនៃធាតុ b_1 , $\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$ មីន័រនៃធាតុ C_1 ។

មីន័រនៃធាតុ a_1 បានពីការលុបជួរឈរនិងជួរដេកដែលមានធាតុ a_1 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ ។

មីន័រនៃធាតុ b_1 បានពីការលុបជួរឈរ និងជួរដេកដែលមានធាតុ b_1 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ ។

មីន័រនៃធាតុ c_1 បានពីការលុបជួរឈរ និងជួរដេកដែលមានធាតុ c_1 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ ។

ចំណាំ ក្នុងការគណនាដេទែរមីណង់លំដាប់ 3 តាមមីន័រ គេអាចពន្លាតតាមជួរណាមួយក៏បាន ប៉ុន្តែសញ្ញានៃតួនីមួយៗអាស្រ័យនឹងលំដាប់ទីដែលធាតុស្ថិតនៅដូចជា ៖

a_1 មានសញ្ញា $+$ ព្រោះ a_1 ជាធាតុនៅជួរដេកទី 1 និងជួរឈរទី 1 , $1+1=2$ គូ

b_1 មានសញ្ញា $-$ ព្រោះ b_1 ជាធាតុនៅជួរដេកទី 1 និងជួរឈរទី 2 , $1+2=3$ សេស

3. ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការលីនេអ៊ែរតាមរូបមន្តក្រាម័រ

ឧទាហរណ៍ 1 គេមានប្រព័ន្ធសមីការ $\begin{cases} a_1x+b_1y = m_1 \\ a_2x+b_2y = m_2 \end{cases}$ ។

គេអាចសរសេរប្រព័ន្ធសមីការនេះជាសមីការ $\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \end{bmatrix}$

ម៉ាទ្រីស $\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}$ ហៅថា ម៉ាទ្រីសមេគុណ ។

$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ ជាម៉ាទ្រីសអថេរ $\begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \end{bmatrix}$ ជាម៉ាទ្រីសចំនួនថេរ

គេប្រើម៉ាទ្រីសច្រាសនៃម៉ាទ្រីសមេគុណ ដើម្បីដោះស្រាយសមីការម៉ាទ្រីសនេះ :

ដេទែរមីណង់នៃម៉ាទ្រីស $\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}$ គឺ $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1$ ។

ម៉ាទ្រីសច្រាសនៃម៉ាទ្រីស $\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}$ គឺ $\dfrac{1}{a_1b_2-a_2b_1}\begin{bmatrix} b_2 & -b_1 \\ -a_2 & a_1 \end{bmatrix}$

$$\frac{1}{a_1b_2-a_2b_1}\begin{bmatrix} b_2 & -b_1 \\ -a_2 & a_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{a_1b_2-a_2b_1}\begin{bmatrix} b_2 & -b_1 \\ -a_2 & a_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{a_1b_2-a_2b_1}\begin{bmatrix} b_2m_1 - b_1m_2 \\ -a_2m_1 + a_1m_2 \end{bmatrix} \text{ ។}$$

គេសង្កេតឃើញថា :

$a_1b_2 - a_2b_1 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ ជាដេទែរមីណង់នៃម៉ាទ្រីសមេគុណ ។

$b_2m_1 - b_1m_2 = \begin{vmatrix} m_1 & b_1 \\ m_2 & b_2 \end{vmatrix}$ ជាដេទែរមីណង់នៃម៉ាទ្រីស $\begin{bmatrix} m_1 & b_1 \\ m_2 & b_2 \end{bmatrix}$ ដែលធាតុមិនមែនជាមេគុណនៃ x ។

$a_1m_2 - a_2m_1 = \begin{vmatrix} a_1 & m_1 \\ a_2 & m_2 \end{vmatrix}$ ជាដេទែរមីណង់នៃម៉ាទ្រីស $\begin{bmatrix} a_1 & m_1 \\ a_2 & m_2 \end{bmatrix}$ ដែលធាតុមិនមែនជាមេគុណនៃ y ។

ដូចនេះ គូចម្លើយនៃប្រព័ន្ធសមីការ $\begin{cases} a_1x+b_1y = m_1 \\ a_2x+b_2y = m_2 \end{cases}$ គឺ $x = \dfrac{\begin{vmatrix} m_1 & b_1 \\ m_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$, $y = \dfrac{\begin{vmatrix} a_1 & m_1 \\ a_2 & m_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$ ។

បើគេតាង $D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$, $D_x = \begin{vmatrix} m_1 & b_1 \\ m_2 & b_2 \end{vmatrix}$, $D_y = \begin{vmatrix} a_1 & m_1 \\ a_2 & m_2 \end{vmatrix}$ នោះគេបាន $x = \dfrac{D_x}{D}$, $y = \dfrac{D_y}{D}$

បើ $D = 0$ និង $D_x \neq 0$ ឬ $(D_y \neq 0)$ នោះប្រព័ន្ធសមីការគ្មានចម្លើយ ។

បើ $D = 0$ និង $D_x = 0$ (ឬ $D = 0$ និង $D_y = 0$) នោះប្រព័ន្ធសមីការមានចម្លើយច្រើនរាប់មិនអស់ ។

ឧទាហរណ៍ 2 គេមានប្រព័ន្ធសមីការ $\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z = m_1 \\ a_2x+b_2y+c_2z = m_2 \\ a_3x+b_3y+c_3z = m_3 \end{cases}$ ។

គេអាចសរសេរជាសមីការម៉ាទ្រីស $\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{bmatrix}$ ដើម្បីដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការនេះ ។

តាមលំនាំគំរូដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការមានពីរអញ្ញាត គេបាន : ចម្លើយនៃប្រព័ន្ធសមីការមាន 3 អញ្ញាត

$$x = \frac{\begin{vmatrix} m_1 & b_1 & c_1 \\ m_2 & b_2 & c_2 \\ m_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}} , \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & m_1 & c_1 \\ a_2 & m_2 & c_2 \\ a_3 & m_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}} , \quad z = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & m_1 \\ a_2 & b_2 & m_2 \\ a_3 & b_3 & m_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}$$

លំហាត់គំរូ ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ

ក. $\begin{cases} 3x+7y = -6 \\ 4x-2y = 26 \end{cases}$ ខ. $\begin{cases} 4x-5y = 13 \\ -8x+10y = 18 \end{cases}$

គ. $\begin{cases} x+2y+3z = 2 \\ -2x+y+2z = 1 \\ 4x-y = 3 \end{cases}$ ឃ. $\begin{cases} 2x+2y+2z = 0 \\ -2x+5y+2z = 1 \\ 8x+y+4z = -1 \end{cases}$ ។

ចម្លើយ ក. $\begin{cases}3x+7y = -6\\4x-2y = 26\end{cases}$ គេបាន $D = \begin{vmatrix}3 & 7\\4 & -2\end{vmatrix} = -34$, $D_x = \begin{vmatrix}-6 & 7\\26 & -2\end{vmatrix} = -170$,

$D_y = \begin{vmatrix}3 & -6\\4 & 26\end{vmatrix} = 102$, $x = \dfrac{D_x}{D} = \dfrac{-170}{-34} = 5$, $y = \dfrac{D_y}{D} = \dfrac{102}{-34} = -3$ ។

ដូចនេះ $x = 5$, $y = -3$ ជាគូចម្លើយនៃប្រព័ន្ធសមីការ ។

ខ. $\begin{cases}4x-5y = 13\\-8x+10y = 8\end{cases}$ គេបាន $D = \begin{vmatrix}4 & -5\\-8 & 10\end{vmatrix} = 0$, $D_x = \begin{vmatrix}13 & -5\\8 & 10\end{vmatrix} = 170 \neq 0$

$D_y = \begin{vmatrix}4 & 13\\-8 & 8\end{vmatrix} = 32+104 = 136 \neq 0$ ។

ដូចនេះ ប្រព័ន្ធសមីការគ្មានចម្លើយ ។

គេសង្កេតឃើញថា $\dfrac{4}{-8} = \dfrac{-5}{10} \neq \dfrac{13}{18}$ ។

គ. $\begin{cases}x+2y+3z = 2\\-2x+y+2z = 1\\4x-y = 3\end{cases}$ គេបាន $D = \begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\-2 & 1 & 2\\4 & -1 & 0\end{vmatrix} = 12$,

$D_x = \begin{vmatrix}2 & 2 & 3\\1 & 1 & 2\\3 & -1 & 0\end{vmatrix} = 4$, $D_y = \begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\-2 & 1 & 2\\4 & 3 & 0\end{vmatrix} = -20$, $D_z = \begin{vmatrix}1 & 2 & 2\\-2 & 1 & 1\\4 & -1 & 3\end{vmatrix} = 20$ ។

ដូចនេះ $x = \dfrac{4}{12} = \dfrac{1}{3}$, $y = \dfrac{-20}{12} = -\dfrac{5}{3}$, $z = \dfrac{20}{12} = \dfrac{5}{3}$ ជាចម្លើយនៃប្រព័ន្ធសមីការ ។

ឃ. $\begin{cases}2x+2y+2z = 0\\-2x+5y+2z = 1\\8x+y+4z = -1\end{cases}$ គេបាន $D = \begin{vmatrix}2 & 2 & 2\\-2 & 5 & 2\\8 & 1 & 4\end{vmatrix} = 0$, $D_x = \begin{vmatrix}0 & 2 & 2\\1 & 5 & 2\\-1 & 1 & 4\end{vmatrix} = 0$ ។

ប្រព័ន្ធមានចម្លើយច្រើនរាប់មិនអស់ ។ រកចម្លើយរាប់មិនអស់របស់ប្រព័ន្ធសមីការនេះ :

$$\begin{array}{r} 2x+2y+2z = 0\\ + \quad -2x+5y+2z = 1\\ \hline 7y+4z = 1\end{array}$$

បើយក $z = l$ គេបាន $y = \dfrac{1-4l}{7}$, $x = -\dfrac{1+3l}{7}$ ។

ដូចនេះចម្លើយរាប់មិនអស់នៃប្រព័ន្ធសមីការគឺ $x = \dfrac{1+3l}{7}$, $y = \dfrac{1-4l}{7}$, $z = l$ ។

លំហាត់គំរូ 2 គេដឹងថាក្នុងមួយលើករថយន្តរបស់សុខដឹកភ្ញៀវទៅប្រទេសថៃបានថ្លៃដឹក 9700 \$ និងវៀតណាមបាន 6800 \$ រីឯរថយន្តសៅទៅប្រទេសថៃបាន 10200 \$ និងវៀតណាមបាន 8200 \$ ។ រថយន្តរបស់អ្នកទាំងពីរដឹកភ្ញៀវទៅប្រទេសនីមួយៗរាល់លើកដូចគ្នា ដែលនៅពេលដំណាច់ខែ សុខទទួលបានថ្លៃដឹកសរុប 86400 \$ ហើយសៅបាន 98200 \$ ។ តើរថយន្តអ្នកទាំងពីរដឹកភ្ញៀវទៅប្រទេសថៃបានប៉ុន្មានលើកនិងវៀតណាមបានប៉ុន្មានលើក ?

ចម្លើយ តាង x ជាចំនួនដងនៃការដឹកភ្ញៀវទៅប្រទេសថៃ

y ជាចំនួនដងនៃការដឹកភ្ញៀវទៅប្រទេសវៀតណាម

តាមសម្មតិកម្មគេបានប្រព័ន្ធសមីការ : $\begin{cases} 9700x + 6800y = 86400 \\ 10200x + 8200y = 98200 \end{cases}$ ។

តាមវិធីដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ គេបាន :

$$D = \begin{vmatrix} 9700 & 6800 \\ 10200 & 8200 \end{vmatrix} = 10180000 \ , \ D_x = \begin{vmatrix} 86400 & 6800 \\ 98200 & 8200 \end{vmatrix} = 40720000 \ ,$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 9700 & 86400 \\ 10200 & 98200 \end{vmatrix} = 71260000 \text{ ។}$$

ដូចនេះ $x = \dfrac{40720000}{10180000} = 4$ $y = \dfrac{71260000}{10180000} = 7$ ។

រថយន្តសុខនិងសៅដឹកភ្ញៀវទៅប្រទេសថៃបាន 4 ដង និងវៀតណាមបាន 7 ដង ។

ប្រតិបត្តិ 1 គេមានប្រអប់ 2 ដែលប្រអប់នីមួយៗមានតែសន្លឹកក្រដាសប្រាក់ 5 ពាន់រៀល និង 10 ពាន់រៀល ។ គេដឹងថាប្រអប់ទី 1 មានប្រាក់ចំនួន 250 ពាន់រៀល និងប្រអប់ទី 2 មាន 275 ពាន់រៀល ហើយចំនួនសន្លឹក 5 ពាន់ ក្នុងប្រអប់ទី 1 ស្មើនឹងចំនួនសន្លឹក 10 ពាន់ ក្នុងប្រអប់ទី 2 ។ តើក្នុងប្រអប់ទី 1 មានសន្លឹក 5 ពាន់ ប៉ុន្មានសន្លឹក ? 10 ពាន់ ចំនួនប៉ុន្មានសន្លឹក ?

ប្រតិបត្តិ 2 វត្ថុបីធ្វើអំពីប្លាទីនលាយមាសនិងប្រាក់ ។ វត្ថុទី 1 មានម៉ាស $62g$ ដែលក្នុងនេះមានប្លាទីន 1cm^3 មាស 1cm^3 និងប្រាក់ 1cm^3 ។ វត្ថុទី 2 មានម៉ាស $83g$ ដែលមានប្លាទីន 2cm^3 មាស 2cm^3 និងប្រាក់ 1cm^3 ។ វត្ថុទី 3 មានម៉ាស $71g$ ដែលក្នុងនោះមានប្លាទីន 1cm^3 មាស 2cm^3 និងប្រាក់ 1cm^3 ។ កំណត់រកម៉ាសមាឌរបស់លោហធាតុនីមួយៗគិតជាក្រាមក្នុង 1cm^3 ។

លំហាត់

1. គណនាដេទែរមីណង់

ក. $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 4 & 3 & 7 \end{vmatrix}$ ខ. $\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 3 \end{vmatrix}$ គ. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & -5 & -1 \\ 4 & 4 & 1 \end{vmatrix}$ ។

2. គណនាដេទែរមីណង់ ដោយប្រើការពន្លាតតាមមីន័រ

ក. $\begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 0 \\ 3 & 6 & -2 \end{vmatrix}$ ខ. $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & 2 \end{vmatrix}$ គ. $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \\ 5 & -2 & -3 \end{vmatrix}$ ។

3. បរិមាត្រចតុកោណកែងមួយមានប្រវែង 86cm ។ គេដឹងថាប្រវែងទទឹង 2 ដងលើសប្រវែងបណ្ដោយ 2cm ។ រកវិមាត្រនៃចតុកោណកែងដោយប្រើការដោះស្រាយតាមវិធីក្រាម៉េរ ។

4. គេលក់ផ្លែពុទ្រា 50kg ក្នុង 1kg មានតម្លៃ 3500 ៛ ។ ប៉ុន្តែដោយពុទ្រានេះមានផ្លែធំ និងផ្លែតូចនោះផ្លែតូចគេលក់តែ 3000 ៛ ក្នុង 1kg និង ផ្លែធំលក់ថ្លៃ 5000 ៛ ក្នុង 1kg ។ តើផ្លែពុទ្រាធំមានប៉ុន្មានគីឡូក្រាមនិងតូចប៉ុន្មានគីឡូក្រាម ?

5. គេដឹងថាផលបូកនៃបីចំនួនស្មើនឹង 20 ចំនួនទី 1 ស្មើនឹងផលបូកនៃចំនួនទី 2 និងទី 3 ស្មើនឹង 3 ដងចំនួនទី 1 ។ រកចំនួននីមួយៗ

6. បរិមាត្រត្រីកោណមួយមានប្រវែង 18m ។ គេដឹងថាជ្រុងដែលវែងជាងគេស្មើនឹង 2 ដងជ្រុងដែលខ្លីជាងគេ ។ ជ្រុងមួយទៀតជាមធ្យមនព្វន្តនៃជ្រុងដែលវែងជាងគេនិងជ្រុងខ្លីជាងគេ ។ រកប្រវែងជ្រុងនីមួយៗនៃត្រីកោណ ។

7. ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ

ក. $\begin{cases} \frac{3}{4}x - y = 0 \\ \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y = 6 \end{cases}$ ខ. $\begin{cases} x + y = -6 \\ 2x - y = 2 \end{cases}$ គ. $\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 3x - 15 = -6y \end{cases}$ ។

ឃ. $\begin{cases} 2x + 3y + 2z = 14 \\ 4x + 2y - z = 15 \\ x + y + 2z = 8 \end{cases}$ ង. $\begin{cases} x + 2y - 3z = 10 \\ 4x + y - z = -10 \\ 3x - 7y + 2z = 5 \end{cases}$ ច. $\begin{cases} -2x + y + 3z = 2 \\ x - 7y - 3z = -4 \\ 4x - 2y - 6z = 1 \end{cases}$ ។

លំហាត់ជំពូក

1. គេមានម៉ាទ្រីសដូចខាងក្រោម :

ក. $\begin{bmatrix}-3 & 2 & 5\end{bmatrix}$ ខ. $\begin{bmatrix}-3 & 1\\ 2 & 5\\ 7 & -6\end{bmatrix}$ គ. $\begin{bmatrix}-6\\ 7\\ 8\\ 0\end{bmatrix}$ ឃ. $\begin{bmatrix}1 & 2 & -3\\ 5 & 4 & 7\\ 11 & 0 & -13\end{bmatrix}$ ចូរកំណត់លំដាប់នៃម៉ាទ្រីស ។

2. គេមានម៉ាទ្រីស $A = \begin{bmatrix}5 & 6 & 7\\ -2 & x & 9\\ \sqrt{16} & x & 9\end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix}5 & y+7 & 7\\ -2 & -8 & 9\\ 4 & 0 & -8\end{bmatrix}$ ចូរកំណត់តម្លៃ x និង y ដើម្បីឱ្យ $A = B$ ។

3. គេឱ្យម៉ាទ្រីស $A = \begin{bmatrix}2 & 0\\ -1 & 4\end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix}1 & -7\\ 3 & 0\end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix}0 & 0\\ 8 & -2\end{bmatrix}$ ។

គណនា ៖ ក. $3A - B + 2c$ ខ. $2(A - B + 2C) + 3B - C$ ។

4. រកតម្លៃ p, q, a និង b ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ ៖

ក. $\begin{bmatrix}10 & 3\\ -3 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}p\\ q\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}4\\ -1\end{bmatrix}$ ខ. $\begin{bmatrix}4 & -3\\ 2 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\ -1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}15\\ b\end{bmatrix}$ គ. $\begin{bmatrix}-1 & a\\ b & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & -1\\ -1 & 2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 5\\ 3 & 0\end{bmatrix}$ ។

5. គេឱ្យសមីការម៉ាទ្រីស $M\begin{bmatrix}1 & 0\\ 2 & 3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1 & -2\\ 0 & -1\\ 2 & 3\end{bmatrix}$ ។

ចូរកំណត់លំដាប់នៃម៉ាទ្រីស M និងរកម៉ាទ្រីស M ។

6. ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ

ក. $\begin{cases}2x - 3y = -4\\ 5x + 7y = 1\end{cases}$ ខ. $\begin{cases}x + y = 1\\ 2x + y = 3\end{cases}$

គ. $\begin{cases}x - 2y + 3z = 4\\ 2x + y - 4z = 3\\ -3x + 4y - z = -2\end{cases}$ ឃ. $\begin{cases}4x + 2y + 7z = 35\\ 3x + y + 8z = 25\\ 5x + 3y + z = 40\end{cases}$ ។

7. នារីទៅផ្សារទិញសាច់ដើម្បីធ្វើម្ហូបប្រចាំថ្ងៃ ។ លើកទី 1 នារីទិញមាន់ 3kg ត្រី 1kg និងសាច់គោ 2kg ចំណាយអស់ប្រាក់ចំនួន 90 ពាន់រៀល លើកទី 2 នារីទិញមាន់ 2kg ត្រី 1kg និងសាច់គោ 3kg ចំណាយអស់ប្រាក់ចំនួន 94 ពាន់រៀល ហើយលើកទី 3 ទិញមាន់ 3kg ត្រី 2kg និងសាច់គោ 1kg ចំណាយអស់ប្រាក់ចំនួន 84 ពាន់រៀល ។ តើសាច់មាន់ ត្រី និងសាច់គោ 1kg ថ្លៃប៉ុន្មានពាន់រៀល ?

ជំពូក 5

លីមីតនិងដេរីវេ

❶ លីមីតនិងដេរីវេ

❷ អនុវត្តន៍ដេរីវេ

❸ អថិរភាពនិងក្រាបនៃអនុគមន៍

នៅក្នុងជំពូកនេះ គេចាប់ផ្ដើមសិក្សាពីបញ្ញត្តិមូលដ្ឋាននៃលីមីត និងប្រមាណវិធីលើលីមីតដែលជាមធ្យោបាយដ៏សំខាន់សម្រាប់ឈានទៅសិក្សាបញ្ញត្តិនៃដេរីវេនិងប្រមាណវិធីលើដេរីវេនៃអនុគមន៍ ។ បន្ទាប់ពីទទួលបានបញ្ញត្តិលីមីត ដេរីវេ និងបំណិនក្នុងការគណនាលីមីត ដេរីវេ គេនឹងអាចប្រើចំណេះដឹង និងបំណិនទាំងនោះក្នុងការដោះស្រាយចំណោទបន្ទាត់ប៉ះនឹងក្រាបតាងអនុគមន៍ត្រង់ចំណុចមួយ ការសិក្សាអថិរភាព សង់ក្រាបតាងអនុគមន៍សនិទានងាយៗមួយចំនួន ការគណនាតម្លៃអតិបរមា តម្លៃអប្បបរមា ការគណនាល្បឿននៃចលនា ហើយលើសពីនេះទៅទៀត គេឈានទៅប្រើក្រាប តាងអនុគមន៍សម្រាប់ដោះស្រាយសមីការនិងវិសមីការមួយចំនួនទៀត ។

ការអនុវត្តន៍ទាំងអស់នេះ អាចឆ្លុះបញ្ចាំងឱ្យឃើញពីអត្ថន័យពេញលេញ និងសារប្រយោជន៍នៃគណិតវិទ្យាចំពោះវិទ្យាសាស្ត្រនិងការដោះស្រាយចំណោទបញ្ហាខ្លះក្នុងជីវភាពប្រចាំថ្ងៃ ។

មេរៀនទី

1 លីមីតនិងដេរីវេ

1. លីមីត

ក្នុងជំពូកនេះ យើងចាប់ផ្ដើមសិក្សាគណិតវិភាគ សម្រាប់ប្រើក្នុងការដោះស្រាយចំណោទបន្ទាត់ប៉ះ ចំណោទតម្លៃបរមា ចំណោទផ្ទៃក្រឡាជាដើម ។

វត្ថុបំណង

- កំណត់បញ្ញត្តិលីមីតតាមបែបពីជគណិត និងតាមបែបក្រាប
- រកលីមីតនៃផលបូក ផលដក ផលគុណ និងផលចែក
- រកលីមីតនៃពហុធានិងប្រភាគសនិទាន
- រកអត្រាបម្រែបម្រួលមធ្យមនៃអនុគមន៍
- កំណត់បញ្ញត្តិដេរីវេ
- ធ្វើប្រមាណវិធីលើដេរីវេ ។

1.1 សញ្ញាណលីមីត

ឧទាហរណ៍ 1 គេឱ្យអនុគមន៍

$y = f(x) = x^2 + 2x - 3$ និងតារាងតម្លៃលេខ :

	x ខិតជិត 2 ពីខាងឆ្វេង			x ខិតជិត 2 ពីខាងស្ដាំ		
x	1.99	1.999	1.9999	2.0001	2.001	2.01
y	4.9401	4.9994	4.9994	5.0006	5.006	5.0601
	y ខិតជិត 5 ពីខាងឆ្វេង			y ខិតជិត 5 ពីខាងស្ដាំ		

តាមតារាងតម្លៃលេខ បើ x ខិតជិត 2 ពីខាងឆ្វេង និងពីខាងស្ដាំ នោះ y ខិតជិត 5 ។

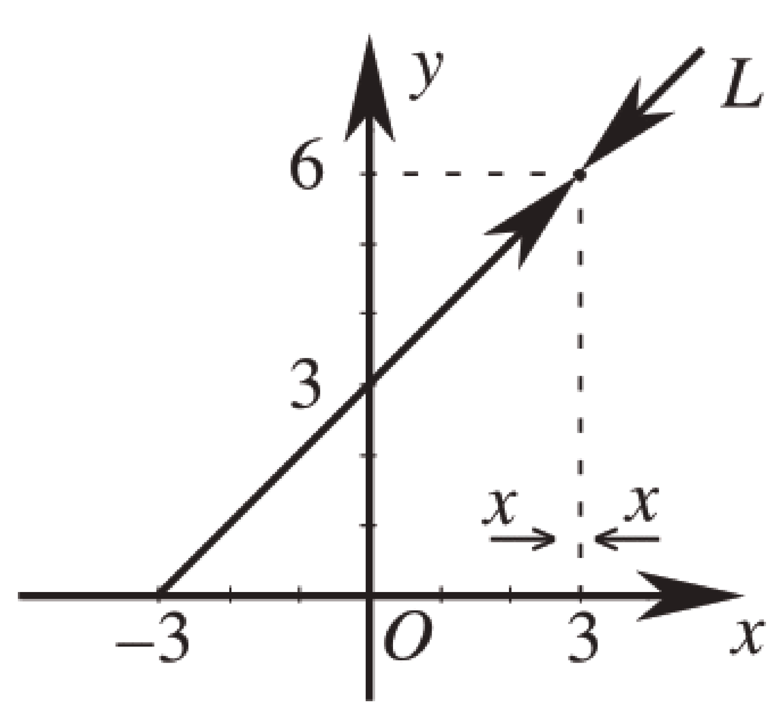
គេថាអនុគមន៍ $y = f(x)$ មានលីមីត 5 កាលណា x ខិតជិត 2 ហើយកំណត់សរសេរ

$\lim_{x \to 2}(x^2 + 2x - 3) = 5$ ។

ឧទាហរណ៍ 2 គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x) = \dfrac{x^2 - 9}{x - 3}$ ចំពោះ $x \neq 3$ ។

ចំពោះ $x \neq 3$ គេបាន $f(x) = x + 3$ និងក្រាប L ។

តាមក្រាបបើ x ខិតជិត 3 តែ $x \neq 3$ នោះអនុគមន៍ $y = f(x)$ ខិតជិត 6 ហើយកំណត់សរសេរ $\lim_{x \to 3} f(x) = \lim_{x \to 3} \dfrac{x^2 - 9}{x - 3} = 6$



ជាទូទៅ បើ x ខិតជិត a ហើយអនុគមន៍ $y = f(x)$ ខិតជិតតម្លៃ b ណាមួយ នោះគេកំណត់សរសេរ $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ ។

លំហាត់គំរូ ក. ចូរបំពេញតារាងតម្លៃលេខខាងក្រោម :

x	0.1	0.01	0.001	0.0001	……
$\frac{1}{x}$					……

x	– 0.1	– 0.01	– 0.001	– 0.0001	……
$\frac{1}{x}$					……

ខ. ទាញរក $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ (x>0)}} \frac{1}{x}$ និង $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ (x<0)}} \frac{1}{x}$

ចម្លើយ ក.

x	0.1	0.01	0.001	0.0001	……
$\frac{1}{x}$	10	100	1000	10000	……

x	– 0.1	– 0.01	– 0.001	– 0.0001	……
$\frac{1}{x}$	– 10	– 100	– 1000	– 10000	……

ខ. តាមតារាងតម្លៃលេខទី 1 គេសង្កេតឃើញថាកាលណា x យកតម្លៃវិជ្ជមាន ហើយកាន់តែតូចទៅៗស្ទើរតែខិតជិតសូន្យ នោះ $\frac{1}{x}$ មានតម្លៃវិជ្ជមាន ហើយកាន់តែធំទៅៗគ្មានទីបញ្ចប់ ។ ដូចនេះ គេបាន $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \frac{1}{x} = +\infty$ ។

តាមតារាងតម្លៃលេខទី 2 គេសង្កេតឃើញថា កាលណា x យកតម្លៃអវិជ្ជមាន កាន់តែធំទៅៗស្ទើរតែខិតជិតសូន្យ នោះ $\frac{1}{x}$ មានតម្លៃអវិជ្ជមានកាន់តែតូចទៅៗគ្មានទីបញ្ចប់ ។ ដូចនេះ $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} \frac{1}{x} = -\infty$ ។

ប្រតិបត្តិ ក. ចូរបំពេញតារាងតម្លៃលេខ ហើយទាញរក $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$

x	1.9	1.99	1.999	2	2.001	2.01	2.1
$f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$							

ខ. សង់ក្រាបតាង $g(x) = x^2 + 2$ ហើយទាញរក $\lim\limits_{x \to 1} g(x)$

1.2 ប្រមាណវិធីលើលីមីត

អនុគមន៍ $y = f(x)$ និង $y = g(x)$ មានលីមីតកាលណា $x \to a$ ។

គេបាន : $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} c = c$ ដែល $f(x) = c$ ជាអនុគមន៍ថេរ

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} x = a$ ដែល $f(x) = x$

$$\lim_{x \to a} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x)$$

$$\lim_{x \to a} [f(x) - g(x)] = \lim_{x - a} f(x) - \lim_{x \to a} g(x)$$

$$\lim_{x \to a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} g(x)$$

$\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x \to a} f(x)}{\lim\limits_{x \to a} g(x)}$ បើ $\lim\limits_{x \to a} g(x) \neq 0$ ។

ឧទាហរណ៍ 1 គណនាលីមីតខាងក្រោម :

ក. $\lim\limits_{x \to 1} (3 + x)$ ខ. $\lim\limits_{x \to 2} (3x^4)$ ។

ចម្លើយ ក. $\lim\limits_{x \to 1} (3 + x) = \lim\limits_{x \to 1} 3 + \lim\limits_{x \to 1} x = 3 + 1 = 4$

ខ. $\lim\limits_{x \to 2} (3x^4) = \lim\limits_{x \to 2} 3 \cdot \lim\limits_{x \to 2} x^4 = 3 \cdot \lim\limits_{x \to 2} (x \cdot x \cdot x \cdot x)$

$= 3 \lim\limits_{x \to 2} x \cdot \lim\limits_{x \to 2} x \cdot \lim\limits_{x \to 2} x \cdot \lim\limits_{x \to 2} x$

$= 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 3 \cdot 2^4 = 48$ ។

ជាទូទៅ $\lim\limits_{x \to x_0} (ax^n) = ax_0^n$ ។

ឧទាហរណ៍ 2 គណនាលីមីត

ក. $\lim\limits_{x \to 1} (x^3 - 3x^2 + x + 1)$ ខ. $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2 - x + 1}{x - 2}$ ។

ចម្លើយ ក. $\lim\limits_{x \to 1} (x^3 - 3x^2 + x + 1) = \lim\limits_{x \to 1} x^3 - \lim\limits_{x \to 1} 3x^2 + \lim\limits_{x \to 1} x + \lim\limits_{x \to 1} 1$

$= 1^3 - 3 \cdot 1^2 + 1 + 1 = 0$ ។

ជាទូទៅ បើ $P(x)$ ជាពហុធានៃ x នោះ $\lim\limits_{x \to x_0} P(x) = P(x_0)$ ។

ខ. $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2 - x + 1}{x - 2} = \dfrac{\lim\limits_{x \to 3} (x^2 - x + 1)}{\lim\limits_{x \to 3} (x - 2)} = \dfrac{1^2 - 1 + 1}{3 - 2} = 1$ ។

ជាទូទៅ បើ $\frac{f(x)}{g(x)}$ ដែល $g(x)\neq 0$ ជាប្រភាគសនិទាន នោះ $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(x_0)}{g(x_0)}$ ។ បើ $g(x_0)\neq 0$

សំគាល់ បើភាគយកនិងភាគបែងមានលីមីតសូន្យនោះ គេត្រូវគណនាតាមជំហានដូចខាងក្រោម :

ជំហានទី 1 : បំបែកតួទាំងពីរនៃប្រភាគជាផលគុណកត្តា

ជំហានទី 2 : សម្រួលកត្តារួមចោល

ជំហានទី 3 : រកលីមីតនៃប្រភាគថ្មី ។

លំហាត់គំរូ គណនាលីមីតខាងក្រោម :

ក. $\lim\limits_{x\to -2}\frac{x^2+5x+6}{x^2-4}$ ខ. $\lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{3x}{x-2}+\frac{6}{2-x}\right)$ ។

ចម្លើយ ក. $\lim\limits_{x\to -2}\frac{x^2+5x+6}{x^2-4}=\frac{\lim\limits_{x\to -2}(x^2+5x+6)}{\lim\limits_{x\to -2}(x^2-4)}$ (មានរាងមិនកំណត់ $\frac{0}{0}$)

ជំហានទី 1 : $\frac{x^2+5x+6}{x^2-4}=\frac{(x+2)(x+3)}{(x+2)(x-2)}$

ជំហានទី 2 : $\frac{x^2+5x+6}{x^2-4}=\frac{x+3}{x-2}$ ដែល $x+2\neq 0$

ជំហានទី 3 : $\lim\limits_{x\to -2}\frac{x^2+5x+6}{x^2-4}=\lim\limits_{x\to -2}\frac{x+3}{x-2}=\frac{-2+3}{-2-2}=-\frac{1}{4}$ ។

ខ. $\lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{3x}{x-2}+\frac{6}{2-x}\right)=\lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{3x}{x-2}-\frac{6}{x-2}\right)$ ដែលមាន $\lim\limits_{x\to 2}(x-2)=0$

ជំហានទី 1 : $\frac{3x}{x-2}-\frac{6}{x-2}=\frac{3x-6}{x-2}=\frac{3(x-2)}{x-2}$

ជំហានទី 2 : $\frac{3x}{x-2}-\frac{6}{x-2}=3$ ដែល $x\neq 2$

ជំហានទី 3 : $\lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{3x}{x-2}+\frac{6}{2-x}\right)=\lim\limits_{x\to 2}3=3$ ។

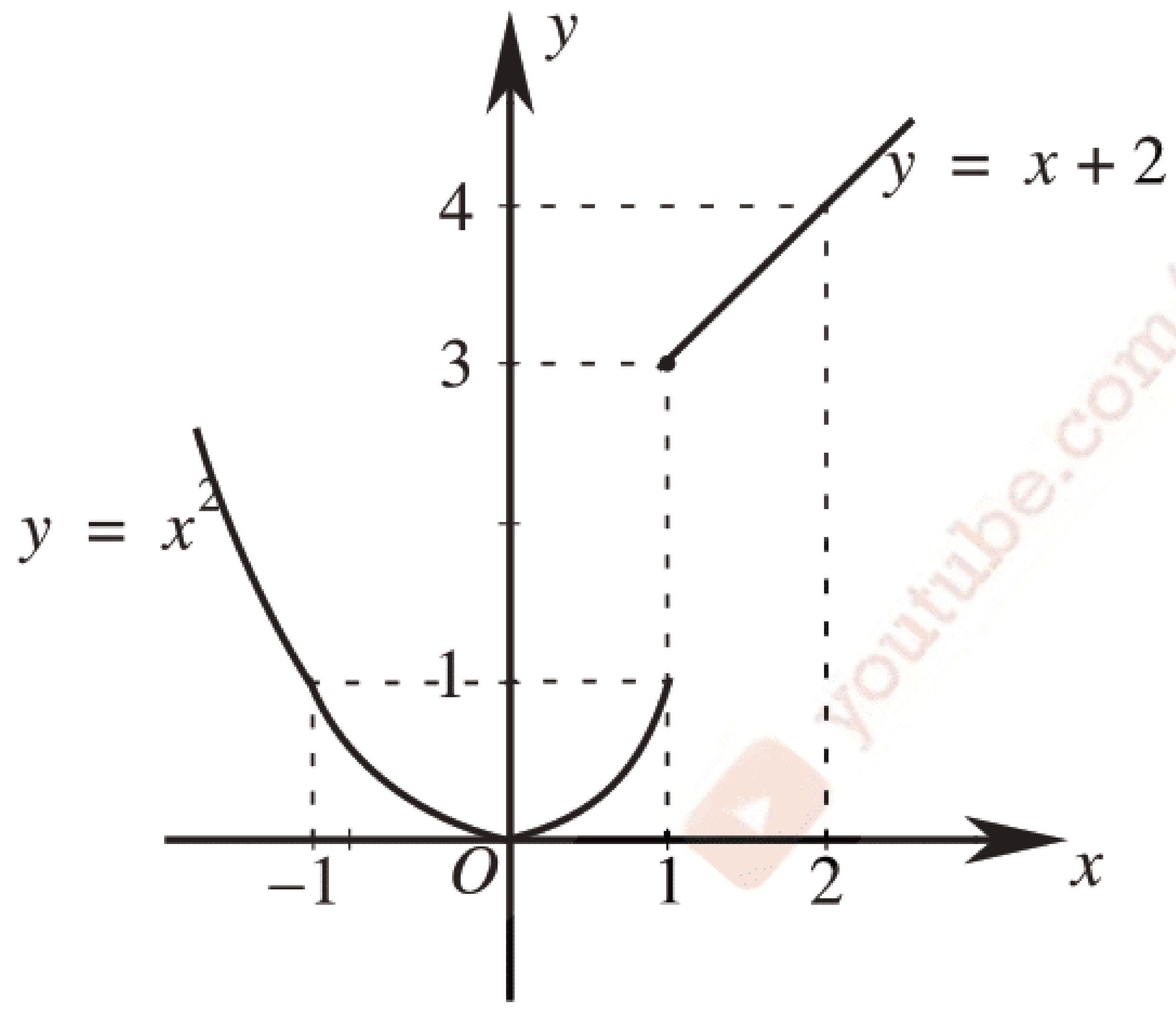
ប្រតិបត្តិ គណនាលីមីតខាងក្រោម :

ក. $\lim\limits_{x\to 1}[(x^2+4x+2)(3-x^2)]$ ខ. $\lim\limits_{x\to -2}\frac{3x^2-x-4}{(2x+5)^2}$ គ. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{2x^2-5x+3}{x^2+x-2}$ ។

1.3 លីមីតខាងឆ្វេងនិងខាងស្ដាំ

ឧទាហរណ៍ គេឱ្យអនុគមន៍ $y = f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{បើ } x \le 1 \\ x+2 & \text{បើ } x > 1 \end{cases}$ ។

តាមក្រាបគេសង្កេតឃើញថា $f(x)$ ខិតជិត 1 កាលណា x ខិតជិត 1 ពីខាងឆ្វេង ។ គេកំណត់សរសេរ $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = 1$ ។



ម្យ៉ាងទៀត $f(x)$ ខិតជិត 3 កាលណា x ខិតជិត 1 ពីខាងស្ដាំ។ គេកំណត់សរសេរ $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = 3$ ។

ជាទូទៅ - បើ $f(x)$ ខិតជិត L កាលណា x ខិតជិត x_0 ពីខាងឆ្វេង នោះ L ជាលីមីតខាងឆ្វេងនៃ $f(x)$ ហើយកំណត់សរសេរ $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = L$ ។

- បើ $f(x)$ ខិតជិត R កាលណា x ខិតជិត x_0 ពីខាងស្ដាំ នោះ R ជាលីមីតខាងស្ដាំនៃ $f(x)$ ហើយកំណត់សរសេរ $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = R$ ។

លំហាត់គំរូ គេឱ្យអនុគមន៍ $y = f(x) = \begin{cases} 2x & \text{បើ } x > 0 \\ x^3 & \text{បើ } x \le 0 \end{cases}$ ។

ក. គណនាលីមីត $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$ និង $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x)$ ។

ខ. ប្រៀបធៀបតម្លៃលីមីតទាំងពីរ ។

ចម្លើយ ក. $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x + 0^+} 2x = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ (x > 0)}} 2x = 2 \cdot 0 = 0$

$\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} x^3 = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ (x < 0)}} x^3 = 0^3 = 0$ ។

ខ. គេមាន $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 0$ និង $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = 0$

ដូចនេះ $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = 0$ ។

ក្នុងករណីនេះ គេថាអនុគមន៍ $y = f(x)$ មានលីមីត 0 ត្រង់ $x = 0$ ។

ជាទូទៅ អនុគមន៍ $y = f(x)$ មានលីមីតត្រង់ x_0 លុះត្រាតែលីមីតខាងឆ្វេងស្មើលីមីតខាងស្តាំ ។

ប្រតិបត្តិ ក. គេឱ្យ $f(x) = \begin{cases} 3x+1 & \text{បើ } x<2 \\ -x+8 & \text{បើ } x \geq 2 \end{cases}$

គណនា $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x)$ និង $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x)$ ។

ខ. គេឱ្យអនុគមន៍ $y = |x|$ ។

គណនា $\lim\limits_{x \to 0} |x|$ ។

តើអនុគមន៍ $y = |x|$ មានលីមីតត្រង់ $x = 0$ ឬទេ ?

1.4 លីមីតអនន្តនៃអនុគមន៍

ក. លីមីតអនន្តនៃអនុគមន៍ស្វ័យគុណងាយ

ឧទាហរណ៍ 1 គេឱ្យអនុគមន៍ $y = x^2$ និងតារាងតម្លៃលេខ :

x	…… -10^4	-10^3	-10^2	-10	0	10	10^2	10^3	10^4	……
$y = x^2$	…… 10^8	10^6	10^4	10^2	0	10^2	10^4	10^6	10^8	……

តាមតារាងតម្លៃលេខខាងលើ បើ x យកតម្លៃវិជ្ជមានកាន់តែធំទៅៗគ្មានទីបញ្ចប់ នោះអនុគមន៍ $y = x^2$ មានតម្លៃវិជ្ជមានកាន់តែធំទៅៗគ្មានទីបញ្ចប់ដែរ ។

គេថាអនុគមន៍ $y = x^2$ មានលីមីត $+\infty$ កាលណា x ខិតជិត $+\infty$ ហើយកំណត់សរសេរ $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$ ។

តាមតារាងតម្លៃលេខខាងលើ បើ x យកតម្លៃអវិជ្ជមាន កាន់តែតូចទៅៗគ្មានទីបញ្ចប់ នោះអនុគមន៍ $y = x^2$ មានតម្លៃវិជ្ជមានកាន់តែធំទៅៗគ្មានទីបញ្ចប់ដែរ ។

គេថាអនុគមន៍ $y = x^2$ មានលីមីត $+\infty$ កាលណា x ខិតជិត $-\infty$ ហើយកំណត់សរសេរ $\lim\limits_{x \to -\infty} x^2 = +\infty$ ។

ជាទូទៅ $\lim\limits_{x \to \pm\infty} ax^2 = \begin{cases} +\infty & \text{បើ } a>0 \\ -\infty & \text{បើ } a<0 \end{cases}$ ។

ឧទាហរណ៍ 2 គេឱ្យអនុគមន៍ $y = \frac{1}{x}$ និងតារាងតម្លៃលេខ :

x	10	10^2	10^3	10^4	10^5	……
$y = \frac{1}{x}$	$0{,}1$	$0{,}01$	$0{,}001$	$0{,}0001$	$0{,}00001$	……

x	-10	-10^2	-10^3	-10^4	-10^5	……
$y = \frac{1}{x}$	$-0{,}1$	$-0{,}01$	$-0{,}001$	$-0{,}0001$	$-0{,}00001$	……

តាមតារាងតម្លៃលេខទី 1 ខាងលើ បើ x យកតម្លៃវិជ្ជមានកាន់តែធំទៅៗគ្មានទីបញ្ចប់ នោះអនុគមន៍ $y = \frac{1}{x}$ មានតម្លៃវិជ្ជមានកាន់តែតូចទៅៗជិតស្មើសូន្យ ។

គេថាអនុគមន៍ $y = \frac{1}{x}$ មានលីមីតសូន្យ កាលណា x ខិតជិត $+\infty$ ហើយកំណត់សរសេរ $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$ ។

តាមតារាងតម្លៃលេខទី 2 ខាងលើ បើ x យកតម្លៃអវិជ្ជមានកាន់តែតូចទៅៗគ្មានទីបញ្ចប់ នោះអនុគមន៍ $y = \frac{1}{x}$ មានតម្លៃដាច់ខាតកាន់តែតូចទៅៗជិតស្មើសូន្យ ។

គេថាអនុគមន៍ $y = \frac{1}{x}$ មានលីមីតសូន្យ កាលណា x ខិតជិត $-\infty$ ហើយកំណត់សរសេរ $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$ ។

ជាទូទៅ $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{a}{x} = 0 \quad (a \in \mathbb{R})$ ។

លំហាត់គំរូ 1 គណនាលីមីត $\lim\limits_{x \to -\infty} x^3$ និង $\lim\limits_{x \to +\infty} (-2x^3)$ ។

ចម្លើយ $\lim\limits_{x \to -\infty} x^3 = (\lim\limits_{x \to -\infty} x)^3 = -\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} (-2x^3) = -2(\lim\limits_{x \to +\infty} x)^3 = -\infty$ ។

លំហាត់គំរូ 2 គណនាលីមីត $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{1}{x^2}$ និង $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{4}{x^3}$ ។

ចម្លើយ $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{1}{x^2} = \frac{1}{(\lim\limits_{x \to \pm\infty} x)^2} = 0$

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{4}{x^3} = \frac{1}{(\lim\limits_{x \to \pm\infty} x)^3} = 0$ ។

ប្រតិបត្តិ គណនាលីមីត

ក. $\lim\limits_{x \to \pm\infty} (4x^2)$ ខ. $\lim\limits_{x \to \pm\infty} (-3x^2)$ គ. $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \left(-\dfrac{2}{x^2}\right)$ ។

ខ. លីមីតមានរាងមិនកំណត់

ឧទាហរណ៍ គណនា $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^2 - x + 1)$ ។

បើ $x \to +\infty$ នោះ $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^2 - x + 1)$ មានរាងមិនកំណត់ $\infty - \infty$ ព្រោះ $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} (-x + 1) = -\infty$ ។

- ***ជំហានទី 1*** : ដាក់តួដែលមានដឺក្រេធំជាងគេជាកត្តារួម : $x^2 - x + 1 = x^2\left(1 - \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2}\right)$
- ***ជំហានទី 2*** : រកលីមីតនៃកន្សោមថ្មី

$$\lim_{x \to +\infty} (x^2 - x + 1) = \lim_{x \to +\infty} \left[x^2\left(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)\right] = \lim_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$$

ព្រោះ $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^2} = 0$ ។

ជាទូទៅ * បើលីមីតនៃពហុធាមានរាងមិនកំណត់ $\infty - \infty$ នៅត្រង់អនន្ត នោះគេត្រូវ :

- ដាក់តួដែលមានដឺក្រេធំជាងគេជាកត្តារួម
- គណនាលីមីតនៃកន្សោមថ្មី ។

* លីមីតនៃពហុធានៅត្រង់អនន្ត គឺជាលីមីតនៃតួដែលមានដឺក្រេធំជាងគេ ។

ប្រតិបត្តិ គណនាលីមីត

ក. $\lim\limits_{x \to \pm\infty} (x^2 - 2x + 3)$

ខ. $\lim\limits_{x \to -\infty} (2x^3 + x^2 - 3x + 1)$ ។

ឧទាហរណ៍ គណនា $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x+1}{x-2}$ និង $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x+1}{x-2}$ ។

បើ x ខិតជិត $+\infty$ នោះ $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x+1}{x-2}$ មានរាងមិនកំណត់ $\dfrac{\infty}{\infty}$ ។

- ***ជំហានទី 1*** : ដាក់តួដែលមានដឺក្រេខ្ពស់ជាងគេនៅភាគយក នៅភាគបែងជាកត្តារួមហើយ

សម្រួលកត្តារួមចេញ $\dfrac{2x+1}{x-2} = \dfrac{x\left(2 + \frac{1}{x}\right)}{x\left(1 - \frac{2}{2}\right)} = \dfrac{2 + \frac{1}{x}}{1 - \frac{2}{x}}$, $x \neq 0$ ។

- ***ជំហានទី 2*** : រកលីមីតនៃប្រភាគថ្មី

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{2x+1}{x-2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2+\frac{1}{x}}{1-\frac{2}{x}} = \frac{2}{1} = 2$$

ព្រោះ $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$, $\lim_{x \to +\infty} \frac{2}{x} = 0$ ។

តាមរបៀបដូចគ្នា គេបាន $\lim_{x \to -\infty} \frac{2x+1}{x-2} = 2$ ។

ជាទូទៅ * បើលីមីតនៃប្រភាគសនិទានមានរាងមិនកំណត់ $\frac{\infty}{\infty}$ នៅត្រង់អនន្ត នោះគេត្រូវៈ

- ដាក់តួដែលមានដឺក្រេធំជាងគេនៅភាគយក នៅភាគបែង ជាកត្តារួម ហើយសម្រួលចោល
- គណនាលីមីតនៃប្រភាគថ្មី ។

* លីមីតនៃប្រភាគសនិទាននៅត្រង់អនន្ត គឺជាផលធៀបរវាងលីមីតនៃតួដែលមានដឺក្រេធំជាងគេនៅភាគយកនិងលីមីតនៃតួដែលមានដឺក្រេធំជាងគេនៅភាគបែង ។

ប្រតិបត្តិ គណនាលីមីត :

ក. $\lim_{x \to +\infty} \frac{4-x}{2x-1}$

ខ. $\lim_{x \to -\infty} \frac{2x-1}{x^2+2} = 0$

គ. $\lim_{x \to -\infty} \frac{x^2-2}{x-1}$

ឃ. $\lim_{x \to +\infty} \frac{5-2x}{x^2+3}$ ។

2. ដេរីវេ

2.1 អត្រាបម្រែបម្រួលមធ្យម

ឧទាហរណ៍ ក្នុងទន្លាក់សេរីនៃវត្ថុមួយ គេបានចម្ងាយចរ $S(t) = 4.9t^2$ ម៉ែត្រ បន្ទាប់ពី t វិនាទីក្រោយមក ។ ល្បឿនមធ្យមនៃទន្លាក់នោះ ក្នុងចន្លោះខណៈ $t_1 = 1s$ និង $t_2 = 3s$ កំណត់ដោយផលធៀប $\frac{\Delta S}{\Delta t}$ ដូចខាងក្រោម :

$$\frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{S(3)-S(1)}{3-1} = \frac{4.9\times 3^2-(4.9\times 1^2)}{2} = 19.6 \quad m/s$$ ។

ល្បឿនមធ្យម $\frac{\Delta S}{\Delta t}$ ហៅថាអត្រាបម្រែបម្រួលមធ្យមនៃចម្ងាយចរ $S(t)$ ពីខណៈ t_1 ទៅខណៈ t_2 ។

ជាទូទៅ បើអថេរ x ប្រែប្រួលពី a ទៅ b ហើយអនុគមន៍ $y = f(x)$ ប្រែប្រួលពី $f(a)$ ទៅ $f(b)$ នោះផលធៀប $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ ហៅថាអត្រាបម្រែបម្រួលមធ្យមនៃ $y = f(x)$ កាលណា x ប្រែប្រួលពី a ទៅ b ។

លំហាត់គំរូ រកអត្រាបម្រែបម្រួលមធ្យមនៃប្រាក់ចំណូល $R(x) = x^2+5x$ គិតជាពាន់រៀលនៃការលក់ស្រូវ x តោន កាលណា x ប្រែប្រួលពី 10 តោនទៅ 13 តោន ។

ចម្លើយ គេបានអត្រាបម្រែបម្រួលមធ្យមនៃប្រាក់ចំណូល

$$\frac{\Delta R}{\Delta x} = \frac{R(13)-R(10)}{13-10} = \frac{(13^2+5\times 13)-(10^2+5\times 10)}{3}$$

$$\frac{\Delta R}{\Delta x} = \frac{84}{3} = 28$$ ពាន់រៀលក្នុង 1 តោន ។

ប្រតិបត្តិ ក. ក្នុងការឃោសនាពាណិជ្ជកម្ម x ថ្ងៃ គេលក់ដាច់ទស្សនាវដ្ដីបានចំនួន

$S(x) = x^2+20x+200$ ក្បាល ។

រកអត្រាបម្រែបម្រួលមធ្យមនៃ $S(x)$ ក្នុងរយៈពេលពី $x = 5$ ទៅ $x = 10$ ថ្ងៃ ។

ខ. រកអត្រាបម្រែបម្រួលមធ្យមនៃអនុគមន៍ $f(x) = x^3-1$ កាលណា x ប្រែប្រួលពី a ទៅ $a+h$ ។

2.2 ដេរីវេត្រង់ចំណុចមួយ

ឧទាហរណ៍ គេប៉ាន់ស្មានថាក្នុង x ឆ្នាំទៀត ប្រជាជននៅក្នុងតំបន់មួយនិងមានចំនួន $P(x) = x^2 + 20x + 80000$ នាក់ ។

បើ x បម្រែបម្រួលពី $x_1 = 1$ ឆ្នាំ ទៅ $x_2 = a$ ឆ្នាំ នោះគេបានអត្រាបម្រែបម្រួលមធ្យម

$$\frac{\Delta P}{\Delta x} = \frac{P(x_2) - P(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{P(a) - P(1)}{a - 1} = \frac{(a^2 + 20a + 8000) - (1^2 + 20 \times 1 + 8000)}{a - 1}$$

$$= \frac{(a-1)(a+1) + 20(a-1)}{a-1} = a + 21 \text{ ។}$$

បើចន្លោះឆ្នាំ Δx កាន់តែតូច (គឺ $\Delta x \to 0$) នោះអត្រាបម្រែបម្រួលមធ្យម $\frac{\Delta P}{\Delta x}$ ខិតជិតតម្លៃមួយ ដែលហៅថាអត្រាបម្រែបម្រួលខណៈ ហើយកំណត់ដោយ

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta P}{\Delta x} = \lim_{a \to 1} \frac{P(a) - P(1)}{a - 1} = \lim_{a \to 1} (a + 21) = 22 \text{ ។}$$

អត្រាបម្រែបម្រួលខណៈ $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta P}{\Delta x} = 22$ ហៅថាដេរីវេនៃអនុគមន៍ $P(x)$ ត្រង់ $x = 1$ ហើយកំណត់សរសេរ $P'(1) = 22$ ។

ជាទូទៅ ដេរីវេ $f'(a)$ នៃអនុគមន៍ $y = f(x)$ នៅត្រង់ $x = a$ កំណត់ដោយ

$$f'(a) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

ឬ $f'(a) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ ដែល $x = a + h$ ឬ $h = x - a$ ។

លំហាត់គំរូ រកដេរីវេនៃអនុគមន៍ $f(x) = x^3$ នៅត្រង់ $x = 1$ ។

ចម្លើយ ***ជំហានទី 1*** : រក $f(1) = 1^3 = 1$

ជំហានទី 2 : រក $\frac{f(1+h) - f(1)}{h}$

$$\frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \frac{(1+h)^3 - 1^3}{h}$$

$$= \frac{(1+h-1)[(1+h)^2 + (1+h) + 1]}{h}$$

$$= (1+h)^2 + h + 2 \text{ ។}$$

ជំហានទី 3 : រក $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} [(1+h)^2 + h + 2]$

$$= (1+0)^2 + 0 + 2 = 3 \text{ ។}$$

ដូចនេះ $f'(1) = 3$ ។

ប្រតិបត្តិ រកដេរីវេនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម :

ក. $f(x) = -x^2 + 4x$ នៅត្រង់ $x = -1$

ខ. $g(x) = x^2 - 4x + 5$ នៅត្រង់ $x = 2$

គ. $y = x^3 - 2$ នៅត្រង់ $x = 0$ ។

2.3 ដេរីវេ

ឧទាហរណ៍ គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x) = x^3$ ។

គេបាន $f(a+h) - f(a) = (a+h)^3 - a^3 = (a+h-a)[(a+h^2) + (a+h)a + a^2]$

$$= h[(a+h)^2 + a(a+h) + a^2]$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h[(a+h)^2 + a(a+h) + a^2]}{h}$$

ឬ $f'(a) = \lim_{h\to 0}[(a+h)^2 + a(a+h) + a^2] = 3a^2$ ។

ដោយ $f'(a) = 3a^2$ ចំពោះចំនួនពិត a ណាមួយ នោះគេអាចជំនួស a ដោយចំនួនពិត x ហើយកំណត់សរសេរ $f'(x) = 3x^2$ ។

$f'(x) = 3x^2$ ជាអនុគមន៍ថ្មីមួយទៀត ហើយហៅថាដេរីវេនៃអនុគមន៍ $f(x) = x^3$ ។

និយមន័យ ដេរីវេ $f'(x)$ នៃអនុគមន៍ $f(x)$ គឺជាអនុគមន៍ដែលកំណត់ដោយ

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

គេអាចប្រើនិមិត្តសញ្ញា y' , $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d}{dx}f(x)$ សម្រាប់តាងដេរីវេនៃ $y = f(x)$ ។

លំហាត់គំរូ គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x) = x^2 + 3x$ ។

ក. រកដេរីវេ $f'(x)$ ។

ខ. រក $f'(0)$ និង $f'(-1)$ ។

ចម្លើយ ក. រក $f'(x)$:

ជំហានទី 1 : $f(x+h) - f(x) = [(x+h)^2 + 3(x+h)] - (x^2 + 3x)$

$$= 2xh + 3h + h^2 \text{ ។}$$

ជំហានទី 2 : $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\frac{2xh+3h+h^2}{h}$

$= \lim\limits_{h\to 0}(2x+3+h) = 2x+3$ ។

ដូចនេះ $f'(x) = 2x+3$ ។

ខ. រក $f'(0) = 2\times 0+3$ $\qquad f'(-1) = 2(-1)+3 = 1$ ។

ប្រតិបត្តិ ក. រកដេរីវេ $f'(x)$ នៃអនុគមន៍ $f(x) = 3x^2$ ហើយទាញរក $f'(1)$ និង $f'(-2)$ ។

ខ. រកដេរីវេ$g'(x)$ នៃ $g(x) = 2x^3-1$ ហើយទាញរកដេរីវេត្រង់ $x = 0$ និង $x = -1$ ។

2.4 រូបមន្តដេរីវេ

ក. ដេរីវេនៃអនុគមន៍ថេរ អនុគមន៍ស្វ័យគុណងាយ និងដេរីវេនៃផលគុណចំនួនថេរនឹងអនុគមន៍ :

- ចំពោះអនុគមន៍ថេរ $f(x) = c$ គេបាន :

$f'(x) = \lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\frac{c-c}{h} = \lim\limits_{h\to 0} 0 = 0$ ។

ដូចនេះ $\boxed{\text{បើ } f(x) = c \text{ នោះ } f'(x) = 0}$ ។

- ចំពោះអនុគមន៍ស្វ័យគុណងាយ $f(x) = x^n$ ដែល $n\in\mathbb{N}$ គេបាន :

$f(x+h)-f(x) = (x+h)^n - x^n$

តាង $u = x+h$ ហើយ $h = u-x$ បើ $h\to 0$ នោះ $u\to x$

គេបាន : $f(x+h)-f(x) = u^n - x^n = (u-x)(u^{n-1}+u^{n-2}x+\ldots+x^{n-1})$

$= h(u^{n-1}+u^{n-2}x+\ldots+x^{n-1})$ ។

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{u\to x}(u^{n-1}+u^{n-2}x+\ldots+x^{n-1}) = \underbrace{x^{n-1}+x^{n-1}+\ldots x^{n-1}}_{n \text{ តួ}} = nx^{n-1}$$ ។

ដូចនេះ $\boxed{\text{បើ } f(x) = x^n \text{ នោះ } f'(x) = nx^{n-1}}$ ។

- ចំពោះអនុគមន៍ផលគុណចំនួនថេរនឹងអនុគមន៍ : $y = kf(x)$

គេបាន $y' = \lim\limits_{h\to 0}\frac{kf(x+h)-kf(x)}{h} = k\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = kf'(x)$ ។

ដូចនេះ $\boxed{\text{បើ } y = kf(x) \text{ នោះ } y' = kf'(x)}$ ។

លំហាត់គំរូ គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ :

ក. $y = 8$ ខ. $y = x^3$ គ. $y = -2x^4$ ។

ចម្លើយ ក. $y = 8$ នោះ $y' = (8) = 0$ ។

ខ. $y = x^3$ នោះ $y' = (x^3) = 3x^{3-1} = 3x^2$ ។

គ. $y = -2x^4$ នោះ $y' = (-2x^4)' = (-2)(4)x^{4-1} = -8x^3$ ។

ប្រតិបត្តិ គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍

ក. $y = -\dfrac{2007}{2008}$ ខ. $y = -x^2$ គ. $y = \dfrac{3}{5}x^5$ ។

ខ. ដេរីវេនៃផលបូកនិងផលដកអនុគមន៍ :

- ចំពោះផលបូកនៃអនុគមន៍ : $y = f(x) + g(x)$

គេតាង $F(x) = f(x) + g(x)$

គេបាន $F(x+h) - F(x) = [f(x+h) + g(x+h)] - [f(x) + g(x)]$

$$= [f(x+h) - f(x)] + [g(x+h) - g(x)]$$

$$y' = \lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h}$$

$y' = f'(x) + g'(x)$ ។

ដូចនេះ $\boxed{\text{បើ } y = f(x) + g(x) \text{ នោះ } y' = f'(x) + g'(x)}$ ។

- ចំពោះផលដកនៃអនុគមន៍ : $y = f(x) - g(x)$

គេបាន $y = f(x) + (-1)g(x)$ នោះ $y' = f'(x) + [(-1)g(x)]'$

$y' = f'(x) + (-1)g'(x) = f'(x) - g'(x)$ ។

ដូចនេះ $\boxed{\text{បើ } y = f(x) - g(x) \text{ នោះ } y' = f'(x) - g'(x)}$ ។

លំហាត់គំរូ គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍

ក. $y = x^2 + 4x$ ហើយទាញរក $y'(0)$ និង $y'(-2)$ ។

ខ. $y = x^3 - 3x^2$ ហើយទាញរកដេរីវេត្រង់ $x = 1$ និង $x = -1$ ។

គ. $y = x^4 - 2x^2 + 3x - 2$ ហើយទាញរក $y'(0)$ ។

ចម្លើយ ក. $y' = (x^2)' + (4x)' = 2x+4$, $y'(0) = 2\times 0+4 = 4$

$y'(-2) = 2(-2)+4 = 4-4 = 0$ ។

ខ. $y' = (x^3)' - (3x^2)' = 3x^2 - 6x$, $y'(1) = 3\times 1^2 - 6\times 1 = -3$

$y'(-1) = 3(-1)^2 - 6(-1) = 9$ ។

គ. $y' = (x^4)' - (2x^2)' + (3x)' - (2)' = 4x^3 - 4x + 3$

$y'(0) = 4\times 0^3 - 4\times 0 + 3 = 3$ ។

ប្រតិបត្តិ ក. គណនា $f'(x)$ និង $f'(1)$ នៃអនុគមន៍ $y = f(x) = \frac{x^4}{2} + 2x$ ។

ខ. គណនាដេរីវេ y' ; $y'(0)$ និង $y'(1)$ នៃ $y = \frac{1}{3}x^3 - x^2$ ។

គ. គណនាដេរីវេ $\frac{dy}{dx}$ និង $\frac{dy}{dx}\left(\frac{1}{2}\right)$ នៃ $y = x^5 - x^4 + 4x^2 - 3x + 2$ ។

គ. ដេរីវេនៃផលគុណនិងផលចែកនៃអនុគមន៍

- ចំពោះផលគុណនៃអនុគមន៍ : $y = f(x)\cdot g(x)$

គេតាង $F(x) = f(x)\cdot g(x)$

គេបាន $F(x+h) - F(x) = f(x+h)\cdot g(x+h) - f(x)\cdot g(x)$

$$= f(x+h)\cdot g(x+h) - g(x+h)\cdot f(x) + g(x+h)\cdot f(x) - f(x)\cdot g(x)$$

$$= [f(x+h) - f(x)]g(x+h) + f(x)[g(x+h) - g(x)]$$

$$y' = F'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{F(x+h) - F(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h) - f(x)}{h}\cdot g(x+h) + \lim_{h\to 0} f(x)\cdot\frac{g(x+h) - g(x)}{h}$$

$$= f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x) \text{ ។}$$

ដូចនេះ $\boxed{\text{បើ } y = f(x)\cdot g(x) \quad \text{នោះ } y' = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)}$ ។

លំហាត់គំរូ ក. គណនាដេរីវេ y' និង $y'(-1)$ នៃអនុគមន៍ $y = x(x-1)$ ។

ខ. គណនាដេរីវេ y' និង $y'(0)$ នៃអនុគមន៍ $y = (x^2 - 2)(3x^2 + x)$ ។

ចម្លើយ ក. $y' = (x)'(x-1) + x(x-1)' = (1)(x-1) + x(1) = 2x - 1$

$y'(-1) = 2(-1) - 1 = -3$ ។

ខ. $y' = (x^2-2)'(3x^2+x)+(x^2-2)(3x^2+x)'$

$= 2x(3x^2+x)+(x^2-2)(6x+1)$

$= 6x^3+2x^2+6x^3+x^2-12x-2$

$y' = 12x^3+3x^2-12x-2$

$y'(0) = 12\times 0^3+3\times 0^2-12\times 0-2 = -2$ ។

ប្រតិបត្តិ ក. គណនា y' និង $y'\left(\frac{1}{3}\right)$ នៃអនុគមន៍ $y = 2x(x^2+1)$ ។

ខ. គណនា y' និង $y(1)$ នៃអនុគមន៍ $y = (x^2-x+1)(x^3-1)$ ។

- ចំពោះផលចែកនៃអនុគមន៍ : $y = \dfrac{f(x)}{g(x)}$

គេតាង $F(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$

គេបាន $F(x+h)-F(x) = \dfrac{f(x+h)}{g(x+h)}-\dfrac{f(x)}{g(x)}$

$$= \frac{f(x+h)\cdot g(x)-f(x)\cdot g(x+h)}{g(x+h)\cdot g(x)}$$

$$= \frac{f(x+h)\cdot g(x)-f(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g(x)-f(x)g(x+h)}{g(x+h)\cdot g(x)}$$

$$= \frac{[f(x+h)-f(x)]g(x)-[g(x+h)-g(x)]f(x)}{g(x+h)\cdot g(x)}$$

$$y' = \lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}$$

$$= \frac{\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}\cdot g(x)-\lim\limits_{h\to 0}f(x)\cdot\dfrac{g(x+h)-g(x)}{h}}{\lim\limits_{h\to 0}g(x+h)\cdot g(x)}$$

$y' = \dfrac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{(g(x))^2}$ បើ $g(x)\neq 0$ ។

ដូចនេះ $\boxed{\text{បើ } y = \dfrac{f(x)}{g(x)} \text{ នោះ } y' = \dfrac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{(g(x))^2} \text{ បើ } g(x)\neq 0}$ ។

លំហាត់គំរូ គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម :

ក. $y = \dfrac{1}{x}$ ហើយទាញរក $y'(-4)$ ។

ខ. $y = \dfrac{x^2+1}{x-3}$ ហើយទាញរក $y'(1)$ ។

គ. $y = \dfrac{(1-x)(2x+1)}{3x-2}$ ហើយទាញរក $y'(0)$ ។

ចម្លើយ ក. $y' = \dfrac{(1)'x-(1)(x)'}{x^2} = -\dfrac{1}{x^2}$, $y'(-4) = -\dfrac{1}{(-4)^2} = -\dfrac{1}{16}$ ។

ខ. $y' = \dfrac{(x^2+1)'(x-3)-(x^2+1)(x-3)'}{(x-3)^2}$

$= \dfrac{2x(x-3)-(x^2+1)(1)}{(x-3)^2}$

$= \dfrac{2x^2-6x-x^2-1}{(x-3)^2}$

$y' = \dfrac{x^2-6x-1}{(x-3)^2}$

$y'(1) = \dfrac{1^2-6\times 1-1}{(1-3)^2} = -\dfrac{6}{4} = -\dfrac{3}{2}$ ។

គ. $y' = \dfrac{[(1-x)(2x+1)]'(3x-2)-[(1-x)(2x+1)](3x-2)'}{(3x-2)^2}$

$= \dfrac{[(1-x)'(2x+1)+(1-x)(2x+1)'](3x-2)-(1-x)(2x+1)(3)}{(3x-2)^2}$

$= \dfrac{[(-1)(2x+1)+(1-x)(2)](3x-2)-3(1-x)(2x+1)}{(3x-2)^2}$

$= \dfrac{(-4x+1)(3x-2)-(6x+3-6x^2-3x)}{(3x-2)^2}$

$= \dfrac{-12x^2+11x-2-3x+6x^2-3}{(3x-2)^2}$

$= \dfrac{-6x^2+8x-5}{(3x-2)^2}$

$y'(0) = \dfrac{-6\cdot 0^2+8\cdot 0-5}{(3\cdot 0-2)^2} = -\dfrac{5}{4}$ ។

ប្រតិបត្តិ ក. គណនាដេរីវេ y' និង $y'(-1)$ នៃអនុគមន៍ $y = \dfrac{x}{x-1}$ ។

ខ. គណនាដេរីវេ y' និង $y'(1)$ នៃអនុគមន៍ $y = \dfrac{x+1}{x^2}$ ។

គ. គណនាដេរីវេ y' និង $y'(0)$ នៃអនុគមន៍ $y = \dfrac{(x+1)(2-x)}{2x-1}$ ។

2.5 ដេរីវេទី 2

ឧទាហរណ៍ អនុគមន៍ $f(x) = 6x^3-x^2+3x-4$ មានដេរីវេ $f'(x) = 18x^2-2x+3$ ។ អនុគមន៍ $f'(x)$ មានដេរីវេ $[f'(x)]'$ ។ អនុគមន៍ $[f'(x)]' = (18x^2-2x+3)' = 36x-2$ ហៅថាដេរីវេទី 2 នៃ $f(x)$ ។

គេកំណត់សរសេរ $f''(x) = 36x-2$ ។

ជាទូទៅ បើអនុគមន៍ $y = f(x)$ មានដេរីវេទី 1 តាងដោយ $f'(x)$ ហើយ $f'(x)$ មានដេរីវេម្តងទៀត នោះដេរីវេនៃ $f'(x)$ នេះ ហៅថាដេរីវេទី 2 នៃអនុគមន៍ $f(x)$ ដែលតាងដោយ $f''(x)$ ឬ y'' ។

លំហាត់គំរូ គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x) = 4x^3 - 12x^2 + 3$ ។

ក. រកតម្លៃ x ដើម្បីឱ្យ $f'(x) = 0$ ។

ខ. រកតម្លៃ x ដើម្បីឱ្យ $f''(x) = 0$ ។

ចម្លើយ ក. គេមាន $f'(x) = 12x^2 - 24x = 12x(x-2)$

$f'(x) = 12x(x-2) = 0$ លុះត្រាតែ $12x = 0$, $x - 2 = 0$

ដូចនេះ $f'(x) = 0$ លុះត្រាតែ $x = 0$, $x = 2$ ។

ខ. $f'(x) = 12x^2 - 24x$ នោះ $f''(x) = 24x - 24$

$f''(x) = 24x - 24 = 0$ នោះ $x = 1$ ។

ដូចនេះ $f''(x) = 0$ លុះត្រាតែ $x = 1$ ។

ប្រតិបត្តិ $y = -x^3 + 3x^2 - 2x + 2$

ក. រកតម្លៃ x ដើម្បីឱ្យ $y' = 1$ ។

ខ. រកតម្លៃ x ដើម្បីឱ្យ $y'' = 0$ ។

លំហាត់

1. ចូរបំពេញតារាងនីមួយៗ ហើយទាញរកលីមីត

ក.

x	-0.1	-0.01	-0.001	0.001	0.01	0.1
$f(x) = x^2+2$						

$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \dots\dots\dots$

ខ.

x	-1.1	-1.01	-1.001	-0.999	-0.99	-0.9
$f(x) = x^2-2$						

$\lim\limits_{x\to -1} f(x) = \dots\dots\dots$

2. គណនាលីមីតខាងក្រោម ៖

ក. $\lim\limits_{x\to 0} 2009$ ខ. $\lim\limits_{x\to 1}\left(-\dfrac{2008}{2007}\right)$ គ. $\lim\limits_{x\to -1} x$ ឃ. $\lim\limits_{x\to -2}(3x+4)$

ង. $\lim\limits_{x\to 2}(x^2-x)$ ច. $\lim\limits_{x\to 1}(5x^4-3x^3+2x^2-x+2)$ ឆ. $\lim\limits_{x\to 1}(x^2+x)(3x-4)$ ។

3. គណនាលីមីតខាងក្រោម ៖

ក. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x}{x^2+1}$ ខ. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x-2}$ គ. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-1}{x+1}$

ឃ. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^3-27}{x-3}$ ង. $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{x^3+64}{x+4}$ ច. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\frac{1}{x^2}-\frac{1}{4}}{x-2}$ ។

4. គណនាលីមីតខាងក្រោម ៖

ក. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-3x^2+3x-1}{x^3-x}$ ខ. $\lim\limits_{x\to 3}\left[\dfrac{3}{x-3}-\dfrac{x}{x-3}\right]$ គ. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2+3x+2}{x^2-2x-3}$

ឃ. $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}}\dfrac{2x^2-x}{2x^2-3x+1}$ ង. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2+3x+2}{x^2-2x-3}$ ច. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^n-a^n}{x-a}$ $(n\geq 1)$ ។

5. ក. គេឱ្យ $f(x)=x^2$ ។ ចូររក $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$

ខ. f ជាអនុគមន៍កំណត់ដោយ $f(x)=3x^2+x$ ។ រក $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}$

គ. $f(x)=\begin{cases}2x^2+3x & \text{បើ } x\neq 1\\ 5 & \text{បើ } x\neq 1\end{cases}$ ។ រក $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ និង $f(1)$ ។

6. ក. រកចំនួនពិត a និង b ដើម្បីឱ្យ $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+ax+b}{x-1}=5$

ខ. រកចំនួនពិត p និង q ដើម្បីឱ្យ $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2+px-6}{2x^2+3x-2}=q$

គ. រកចំនួនពិត m និង n ដើម្បីឱ្យ $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-mx+8}{x^2-(n+2)x+2n}=\dfrac{1}{5}$ ។

7. ក. អនុគមន៍ $f(x) = \begin{cases} 3x-1 & \text{បើ } x<1 \\ 2x & \text{បើ } x \geq 1 \end{cases}$ ។

រក $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$ $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$ និង $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$

ខ. អនុគមន៍ $g(x) = \begin{cases} x^2 & \text{បើ } x \leq 0 \\ 2x & \text{បើ } x > 0 \end{cases}$

រក $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x)$ $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$ និង $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ ។

8. គណនាលីមីត

ក. $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^2 - 3x + 1)$ ខ. $\lim\limits_{x \to -\infty} (1 + 3x^2 + x^3)$ គ. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x-2}{2x+3}$

ឃ. $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{4-x}{x+2}$ ង. $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{-2}{3x+4}$ ច. $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{x^2-1}{x^2+1}$ ឆ. $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2-x^2}{1-x}$

ជ. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-x^2+x+1}{2x+1}$ ឈ. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x-3}{x^2+1}$ ញ. $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1-2x}{x^2+x+1}$ ។

9. គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម ៖

ក. $y = (2x+1)(4x-3)$ ខ. $y = (3x^2-1)(4x+1)$ គ. $f(x) = \dfrac{x}{x-4}$

ឃ. $f(t) = (t^2-3)(-t^2+t+1)$ ង. $f(x) = \dfrac{3x+4}{2x-1}$ ច. $f(x) = \dfrac{(1-x)(x^2+2)}{x^2-3}$ ។

10. ក. គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x) = 10 + \dfrac{40}{x}$ ។

រកអត្រាបម្រែបម្រួលមធ្យមនៃ f កាលណា x ប្រែប្រួលពី 1 ទៅ 10 ។

ខ. តម្លៃ v នៃរថយន្តមួយ បន្ទាប់ពី t ឆ្នាំក្រោយមកកំណត់ដោយ $v(t) = \dfrac{10000}{t} + 6000$ ។ ដោយ $v(t) = \dfrac{10000}{t} + 6000$ ។ រកអត្រាបម្រែបម្រួលមធ្យមនៃតម្លៃរថយន្ត កាលណា t ប្រែប្រួលពី 2 ឆ្នាំ ទៅ 5 ឆ្នាំ ។

11. អនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x) = -4x^3 + x^2 + 14x - 1$

ក. រកតម្លៃ x ដើម្បីឱ្យ $f'(x) = 0$ ហើយសិក្សាសញ្ញានៃ $f'(x)$ ។

ខ. រកតម្លៃ x ដើម្បីឱ្យ $f''(x) = 0$ ហើយសិក្សាសញ្ញានៃ $f''(x)$ ។

12. អនុគមន៍ប៊ីការេ $g(x) = 3x^4 - 2x^2 + 4$ ។

ក. រកដេរីវេទី 1 និងទី 2 នៃអនុគមន៍ g

ខ. សិក្សាសញ្ញានៃដេរីវេទី 1 និងសញ្ញានៃដេរីវេទី 2 ។

មេរៀនទី

2 អនុវត្តន៍នៃដេរីវេ

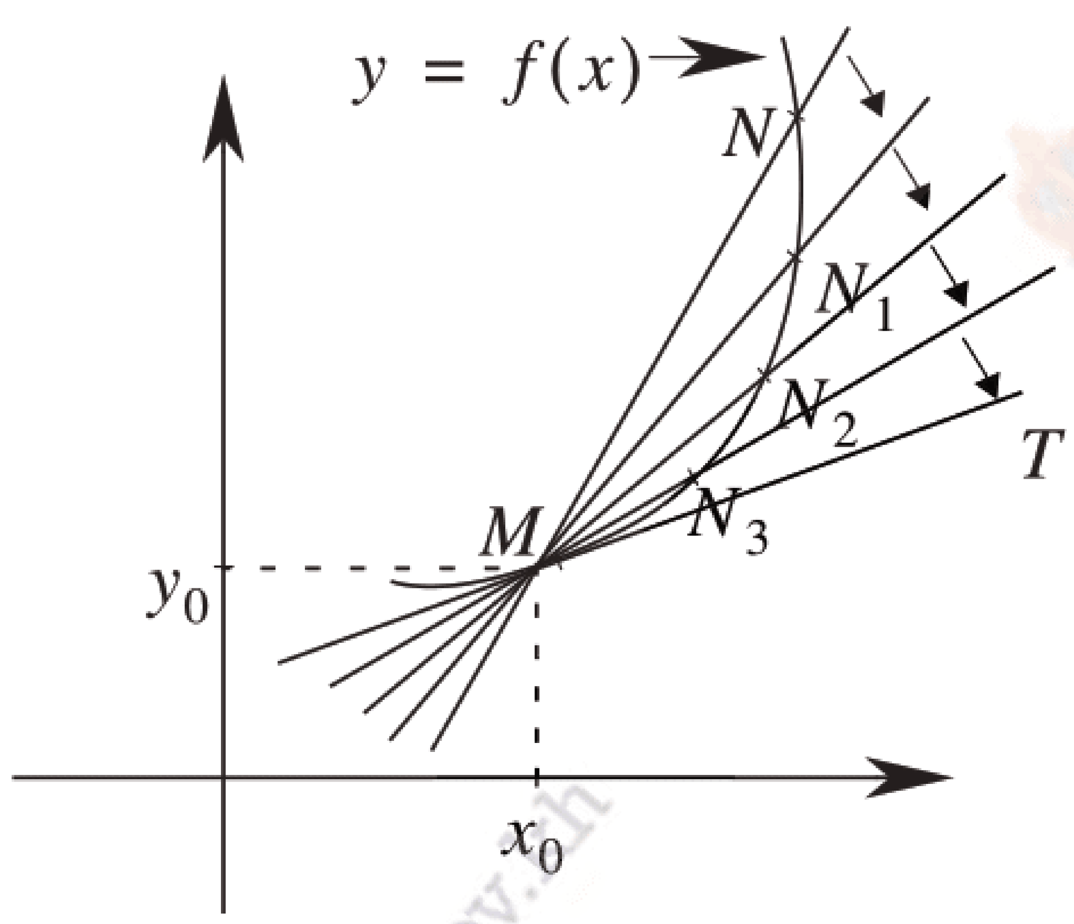
គេបានសិក្សារួចហើយ អំពីនិយមន័យនៃដេរីវេ និងរូបមន្តសម្រាប់គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ ។

ក្នុងមេរៀននេះ គេនឹងសិក្សាពីការអនុវត្តន៍នៃដេរីវេចំពោះការដោះស្រាយចំណោទបន្ទាត់ប៉ះនឹងក្រាបតាងអនុគមន៍នៅត្រង់ចំណុចមួយ ការសិក្សាអថេរភាពនៃអនុគមន៍ ការគណនាតម្លៃអតិបរមា តម្លៃអប្បបរមា ការរកចំណុចរបត់នៃខ្សែកោង និងការរកល្បឿននៃចលនាមួយ ។

វត្ថុបំណង

- រកសមីការនៃបន្ទាត់ប៉ះនឹងក្រាបតាងអនុគមន៍នៅត្រង់ចំណុចមួយ ។
- សិក្សាអថេរភាពនៃអនុគមន៍ទៅតាមសញ្ញានៃដេរីវេ ។
- រកតម្លៃអតិបរមានិងអប្បបរមាធៀបនៃអនុគមន៍ ។
- ដោះស្រាយចំណោទតម្លៃអតិបរមានិងអប្បបរមា ។
- រកចំណុចរបត់នៃក្រាបតាងអនុគមន៍ពហុធាដឺក្រេទី 3
- រកល្បឿននៃចលនាដោយប្រើដេរីវេនៃអនុគមន៍ចម្ងាយចរ ។

1. បន្ទាត់ប៉ះនឹងក្រាបតាងអនុគមន៍



គេមានចំណុច $M(x_0, f(x_0))$ និង $N(x, f(x))$ នៅលើក្រាបតាងអនុគមន៍ f ។

ខ្នាត់ MN មានមេគុណប្រាប់ទិស $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ ។

បើចំណុច N ផ្លាស់ទីលើក្រាប ហើយខិតជិត M នោះខ្នាត់ MN ងាកទៅរកទីតាំងលីមីត MT ដែលហៅថាបន្ទាត់ប៉ះនឹងក្រាបតាងអនុគមន៍ f ត្រង់ចំណុច $M(x_0, f(x_0))$ ។ ក្នុងករណីនេះ មេគុណប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់ប៉ះ MT គឺជាលីមីតនៃមេគុណប្រាប់ទិសរបស់ខ្នាត់ MN កាលណា x ខិតជិត x_0 :

$$m = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \quad \text{ឬ } m = f'(x_0) \text{ ។}$$

ជាទូទៅ មេគុណប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់ប៉ះនឹងក្រាបតាងអនុគមន៍ f នៅត្រង់ x_0 ជាដេរីវេនៃ f នៅត្រង់ x_0 គឺ $m = f'(x_0)$ ។

ដោយបន្ទាត់ប៉ះ MT កាត់តាមចំណុច $M(x_0, y_0)$ និងមានមេគុណប្រាប់ទិស $f'(x_0)$ នោះ λ បន្ទាត់ប៉ះ MT មានសមីការ

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$$

ឬ $$y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0$$ ។

លំហាត់គំរូ អនុគមន៍ $f(x) = x^3 - x^2 + 2$ មានក្រាប C ។

ក. រកសមីការបន្ទាត់ប៉ះនឹងក្រាប C ត្រង់ចំណុច $A(1, 2)$ ។

ខ. បន្ទាត់ L មានមេគុណប្រាប់ទិសស្មើ 5 ហើយប៉ះនឹងក្រាប C ។

រកកូអរដោនេនៃចំណុចប៉ះរវាង L និង C ហើយរកសមីការបន្ទាត់ប៉ះត្រង់នោះ ។

ចម្លើយ ក. គេមាន $x_0 = 1$, $y_0 = 2$

$f'(x) = 3x^2 - 2x$

$f'(x_0) = f'(1) = 3 \times 1^2 - 2 \times 1 = 1$

បន្ទាត់ប៉ះនឹងក្រាប C ត្រង់ $A(1, 2)$ មានសមីការ :

$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$

$y - 2 = 1(x - 1)$

$y = x + 1$ ។

ខ. តាង (a, b) ជាកូអរដោនេនៃចំណុចប៉ះ

បន្ទាត់ប៉ះ L មានមេគុណប្រាប់ទិស $f'(a) = 5$

គេបាន $3a^2 - 2a = 5$

$3a^2 - 2a - 5 = 0$ មានឫស $a_1 = -1$, $a_2 = \frac{5}{3}$ ។

- ចំពោះ $a = -1$ នោះ $b = (-1)^3 - (-1)^2 + 2 = 0$
- ចំពោះ $a = \frac{5}{3}$ នោះ $b = \left(\frac{5}{3}\right)^3 - \left(\frac{5}{3}\right)^2 + 2 = \frac{104}{27}$ ។

ដូចនេះមានចំណុចប៉ះពីរ : $(-1, 0)$ និង $\left(\frac{5}{3}, \frac{104}{27}\right)$ ។

- បន្ទាត់ប៉ះត្រង់ចំណុច $(-1,\ 0)$ មានសមីការ ៖

$L_1 :\ y-0 = 5(x-(-1))$ ឬ $y = 5x+5$ ។

- បន្ទាត់ប៉ះត្រង់ចំណុច $\left(\frac{5}{3},\ \frac{104}{27}\right)$ មានសមីការ ៖

$L_2 :\ y-\frac{104}{27} = 5\left(x-\frac{5}{3}\right)$ ឬ $y = 5x+\frac{121}{27}$ ។

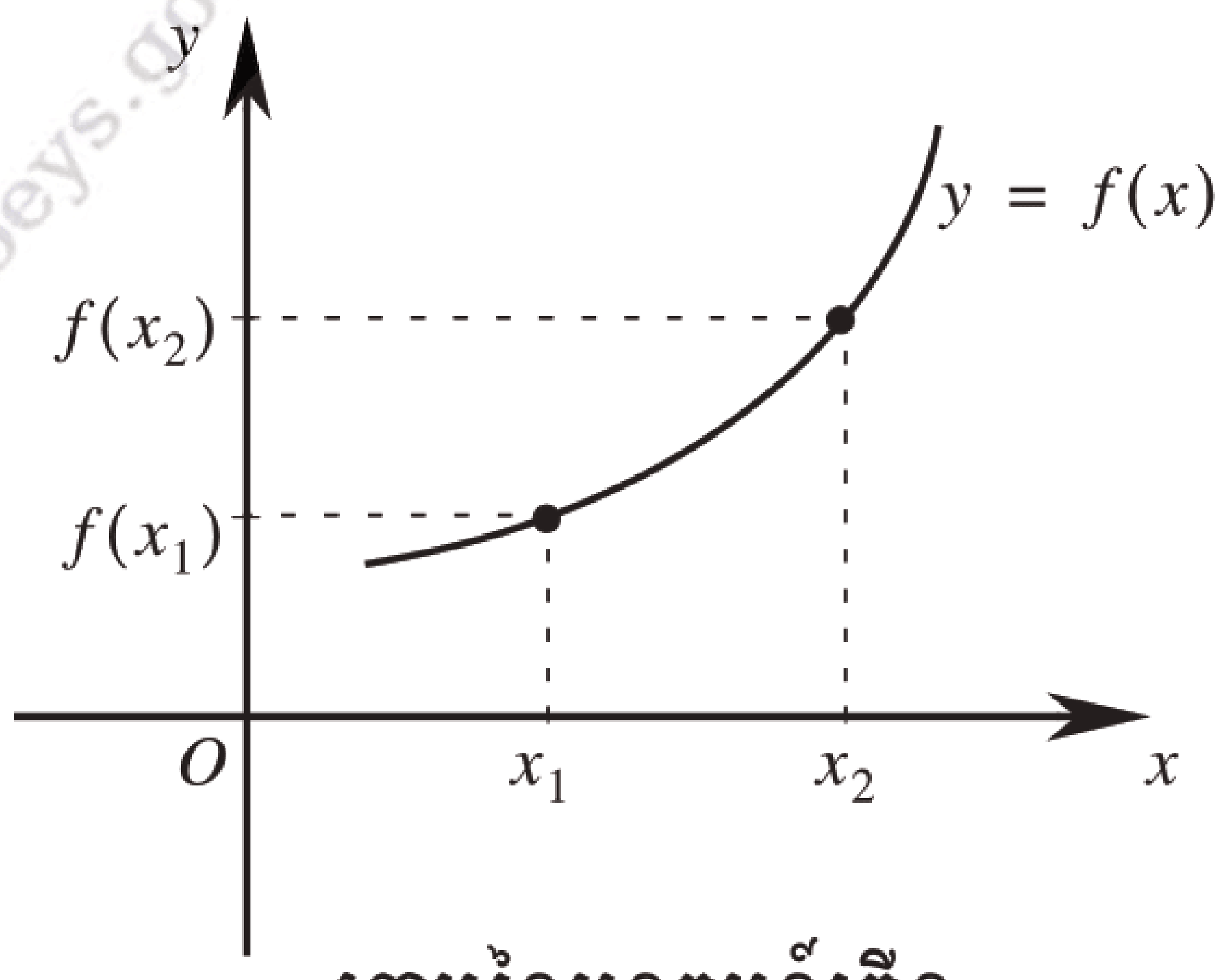
ប្រតិបត្តិ ក. រកសមីការបន្ទាត់ប៉ះនឹងក្រាបតាង $y = -x^2+x+3$ ត្រង់ $x = 2$ ។

ខ. រកសមីការបន្ទាត់ប៉ះនឹងក្រាបតាង $y = -x^3+3x+4$ ហើយស្របនឹងបន្ទាត់មានសមីការ $y = 3x$ ។

គ. រកសមីការបន្ទាត់ D ដែលប៉ះនឹងក្រាប $C : y = x^3-4x$ ត្រង់ចំណុច $A(1,\ -3)$ ។ ទាញរកកូអរដោនេនៃចំណុចប្រសព្វមួយទៀតរវាងបន្ទាត់ D និងក្រាប C ។

2. ទិសដៅអថេរភាពនៃអនុគមន៍

ក្នុងផ្នែកនេះ យើងនឹងលើកយកមកសិក្សាពីវិធីងាយៗ សម្រាប់បញ្ជាក់ថា អនុគមន៍មួយកើនឬចុះនៅក្នុងចន្លោះណាខ្លះ ។

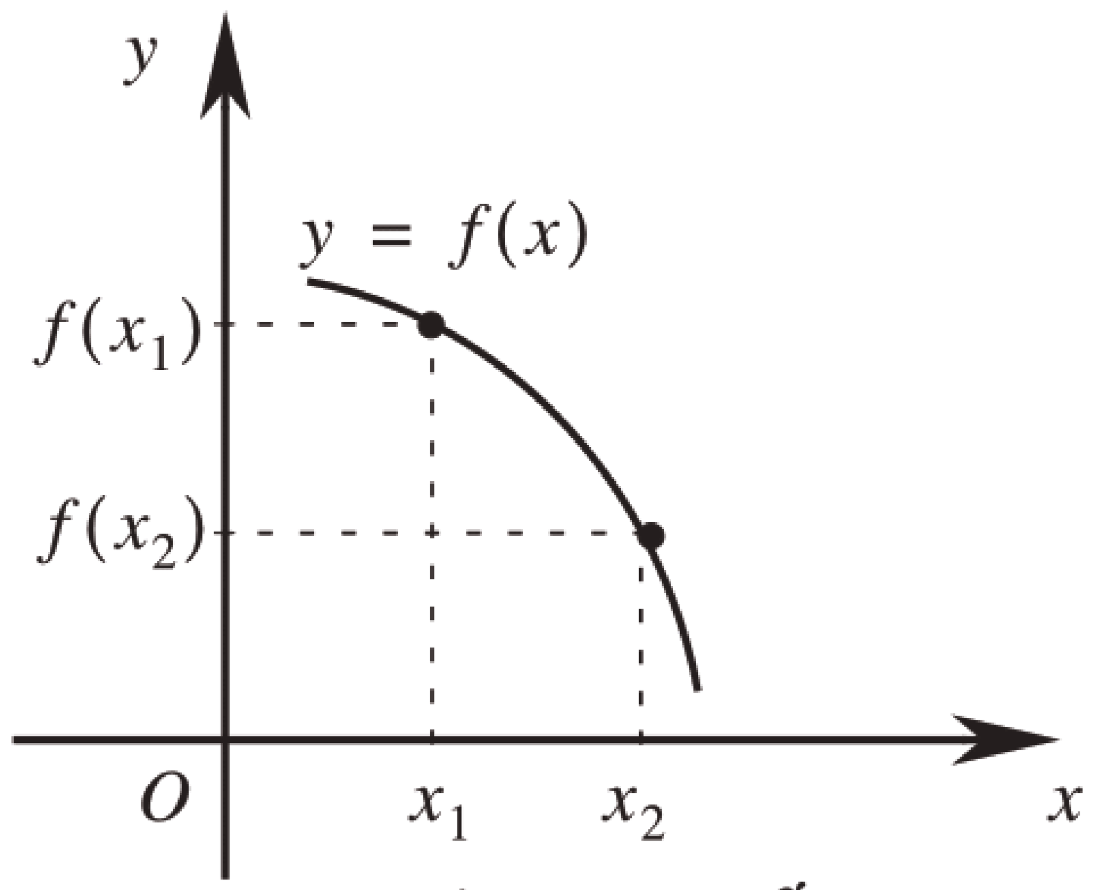


ក្រាបនៃអនុគមន៍កើន

2.1 អនុគមន៍កើន - អនុគមន៍ចុះ

f ជាអនុគមន៍កើននៅលើចន្លោះ I មួយកាលណា $\forall x_1\ ,\ x_2 \in I\ ,\ x_1 < x_2$ នាំឱ្យ $f(x_1) < f(x_2)$ ។

f ជាអនុគមន៍ចុះនៅលើចន្លោះ I មួយកាលណា $\forall x_1\ ,\ x_2 \in I\ ,\ x_1 < x_2$ នាំឱ្យ $f(x_1) > f(x_2)$ ។



ក្រាបនៃអនុគមន៍ចុះ

លំហាត់គំរូ បង្ហាញថា អនុគមន៍ $f(x) = x^2$ កើនចំពោះ $x>0$ ហើយចុះចំពោះ $x<0$ ។

ចម្លើយ - ចំពោះ $0<x_1<x_2$ គេបាន

$$f(x_2)-f(x_1) = x_2^2-x_1^2$$
$$= (x_2+x_1)(x_2-x_1)>0$$

$f(x_2)-f(x_1)>0$ នាំឱ្យ $f(x_1)<f(x_2)$ ។

ដូចនេះ f ជាអនុគមន៍កើនចំពោះ $x>0$ ។

- ចំពោះ $x_1 < x_2 < 0$ គេបាន $f(x_2) - f(x_1) = (x_2 + x_1)(x_2 - x_1) < 0$

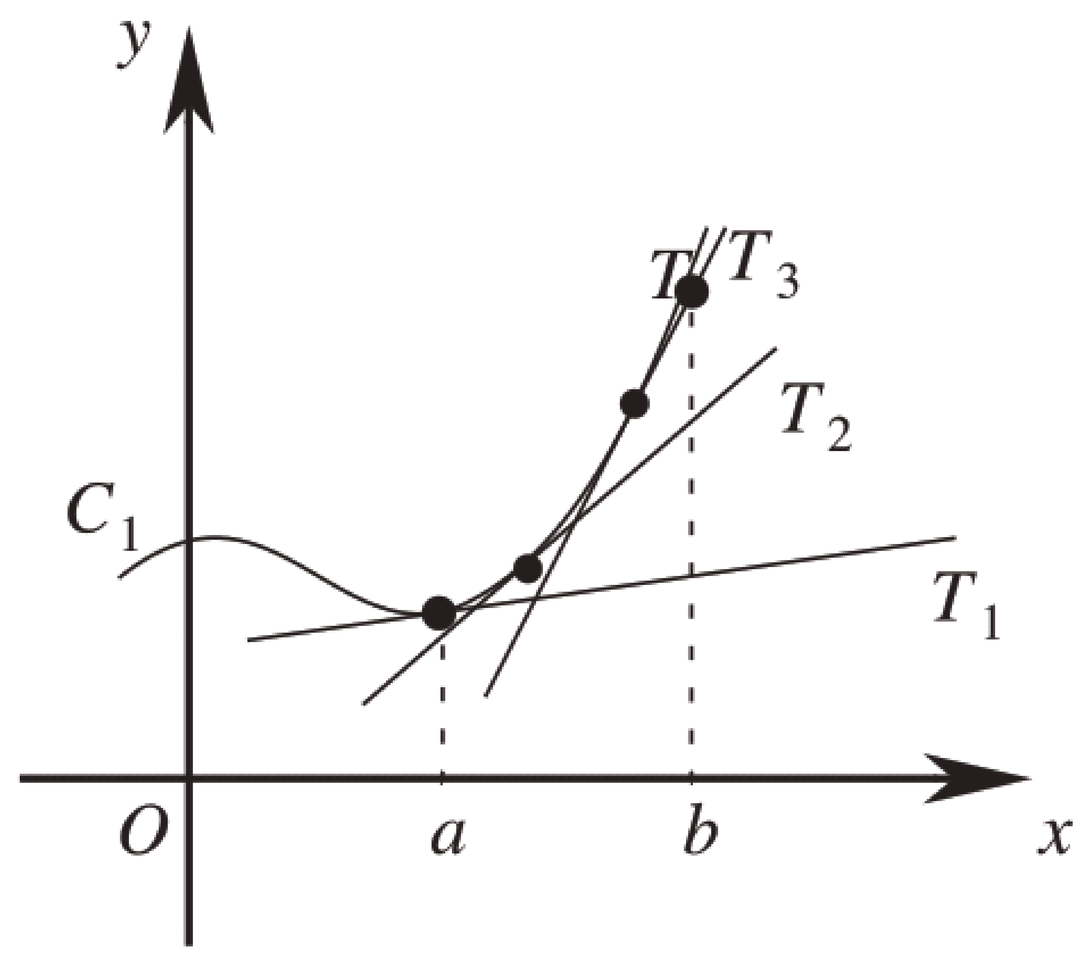
$f(x_2) - f(x_1) < 0$ នាំឱ្យ $f(x_1) > f(x_2)$ ។

ដូចនេះ f ជាអនុគមន៍ចុះ ចំពោះ $x < 0$ ។

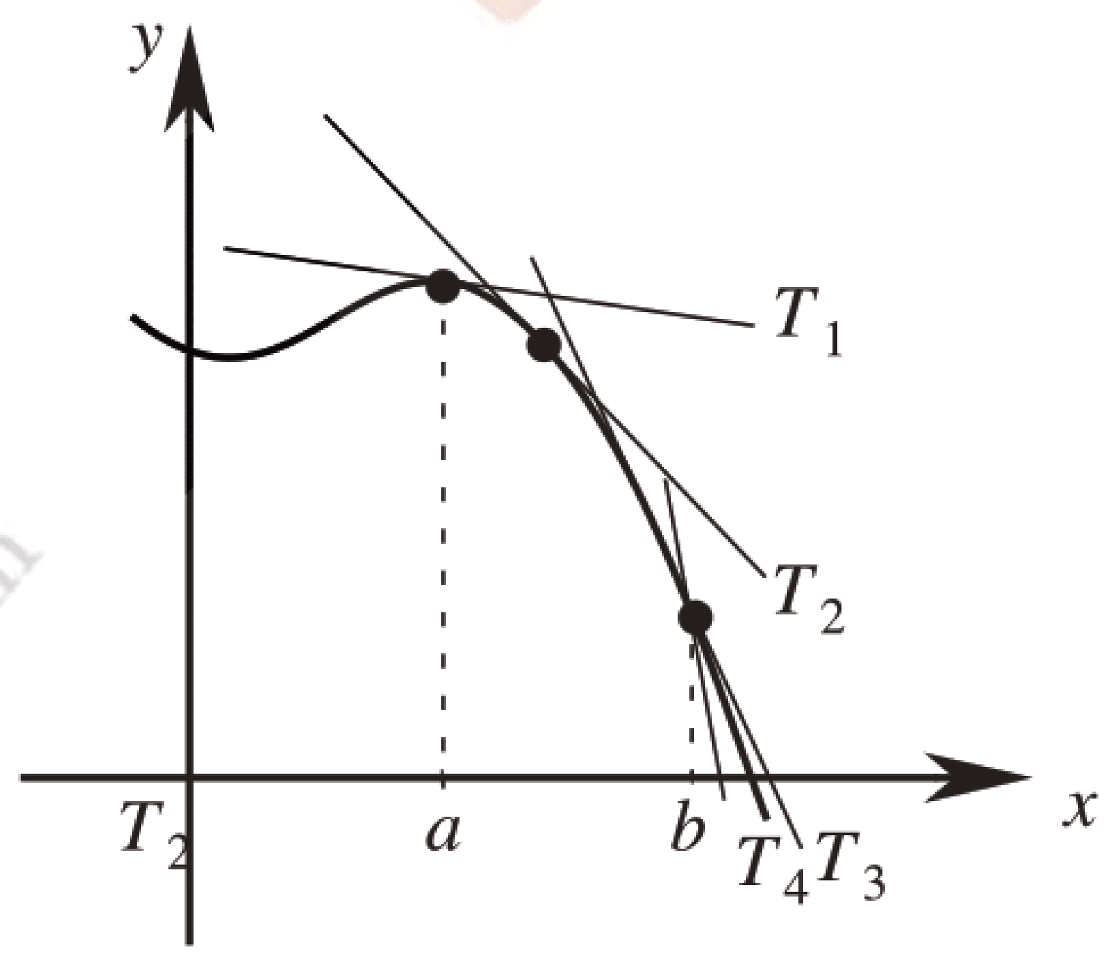
ប្រតិបត្តិ ក. បង្ហាញថា $y = x^3$ ជាអនុគមន៍កើនជានិច្ច ។

ខ. តើអនុគមន៍ $y = 1 - x^2$ ជាអនុគមន៍កើន ឬចុះ ចំពោះ $x > 0$ ។

2.2 ដេរីវេនិងទិសដៅអថេរភាពនៃអនុគមន៍



បន្ទាត់ប៉ះមានមេគុណប្រាប់ទិសវិជ្ជមាន



បន្ទាត់ប៉ះមានមេគុណប្រាប់ទិសអវិជ្ជមាន

បើគេពិនិត្យមើលក្រាប C_1 តាងអនុគមន៍ f ដែលកើននៅលើចន្លោះ (a, b) នោះគេសង្កេតឃើញថា បន្ទាត់ប៉ះទាំងអស់នឹងក្រាបមានមេគុណប្រាប់ទិសវិជ្ជមាន គឺបានន័យថា $f'(x) > 0$ ចំពោះគ្រប់ $x \in (a, b)$ ។

តាមរបៀបដូចគ្នាដែរ បន្ទាត់ប៉ះនឹងក្រាប C_2 តាងអនុគមន៍ចុះមានមេគុណប្រាប់ទិសអវិជ្ជមាន គឺបានន័យថា $f'(x) < 0$ ចំពោះគ្រប់ $x \in (a, b)$ ។

ជាទូទៅ f ជាអនុគមន៍កើននៅលើចន្លោះ(a, b) លុះត្រាតែ$f'(x) > 0$ គ្រប់ $x \in (a, b)$ ។

f ជាអនុគមន៍ចុះនៅលើចន្លោះ(a, b) លុះត្រាតែ$f'(x) < 0$ គ្រប់ $x \in (a, b)$ ។

f ជាអនុគមន៍ថេរនៅលើចន្លោះ(a, b) លុះត្រាតែ$f'(x) = 0$ គ្រប់ $x \in (a, b)$ ។

លំហាត់គំរូ 1 កំណត់ចន្លោះដែលអនុគមន៍ $f(x) = 4x^3 + 5x - 9$ ជាអនុគមន៍កើន ។

ចម្លើយ ***ជំហានទី 1*** : រកដេរីវេ $f'(x)$

ជំហានទី 2 : សិក្សាសញ្ញានៃ $f'(x)$

ដោយ $12x^2 \geq 0$ ចំពោះគ្រប់ $x \in \mathbb{R}$

នោះគេបាន $f'(x) = 12x^2 + 5 > 0$ គ្រប់ $x \in \mathbb{R}$ ។

ដូចនេះ f ជាអនុគមន៍កើននៅលើ $\mathbb{R}$ ។

លំហាត់គំរូ 2 កំណត់តម្លៃ m ដើម្បីឱ្យ $f(x) = (m-1)x^2 + m^2 + m + 1$ ជាអនុគមន៍ចុះចំពោះ $x > 0$ ។

ចម្លើយ $f'(x) = 2(m-1)x$

ដើម្បីឱ្យ f ជាអនុគមន៍ចុះ ចំពោះ $x > 0$ លុះត្រាតែ $2(m-1)x < 0$ ចំពោះ $x > 0$ ។

គេបាន $m - 1 < 0$ ហើយ $m < 1$ ព្រោះ $x > 0$ ។

ប្រតិបត្តិ ក. កំណត់ចន្លោះដែល $f(x) = -x^3 + x^2 + 5x - 6$ ជាអនុគមន៍កើន ឬចុះ ។

ខ. រកតម្លៃ a ដើម្បីឱ្យ $g(x) = x^3 + ax^2 + \frac{1}{3}x - 4$ ជាអនុគមន៍កើនជានិច្ច ។

3. អតិបរមាធៀបនិងអប្បបរមាធៀបនៃអនុគមន៍

3.1 អតិបរមាធៀប អប្បបរមាធៀប និងដេរីវេទី 1

ឧទាហរណ៍ គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 2$ ។

គេបាន $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$

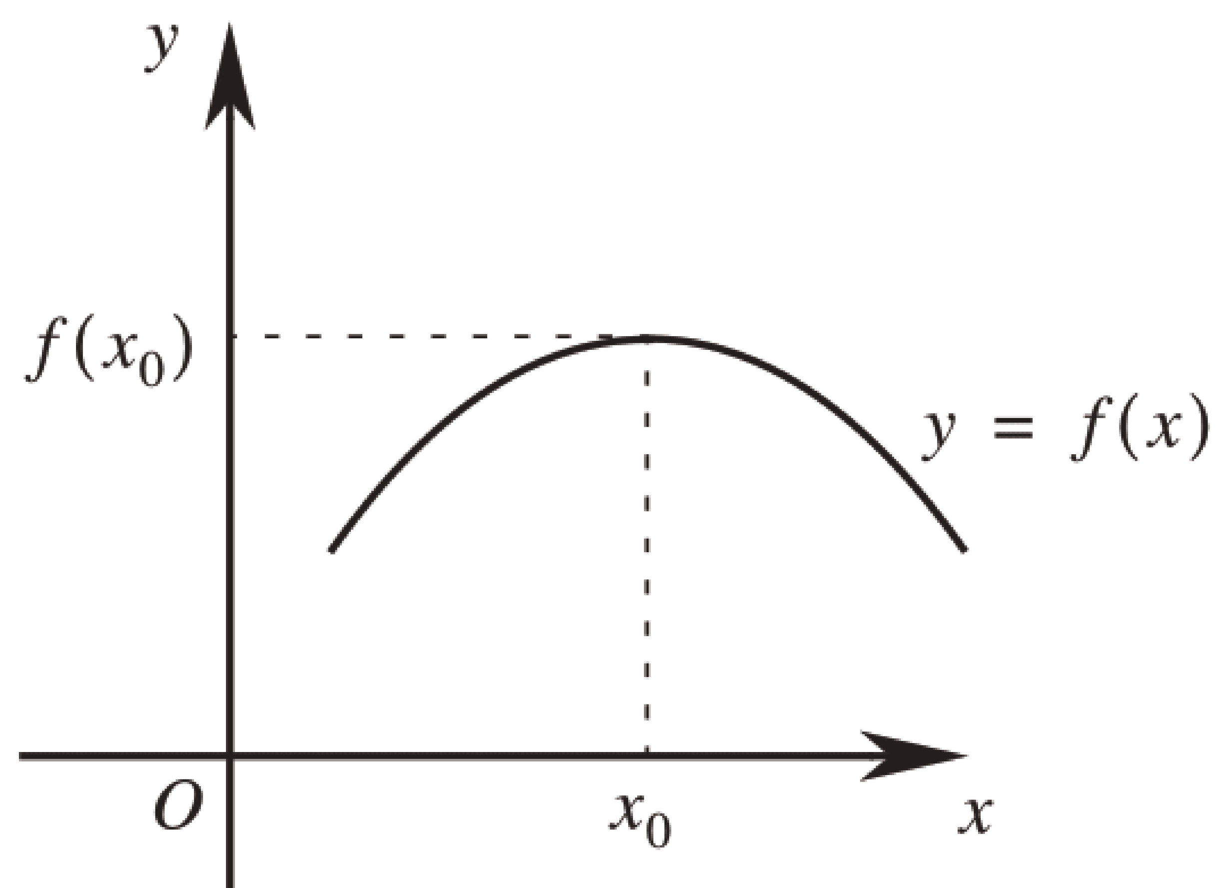
បើ $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 0$ នោះ $x = 1$, $x = 3$ ។

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	

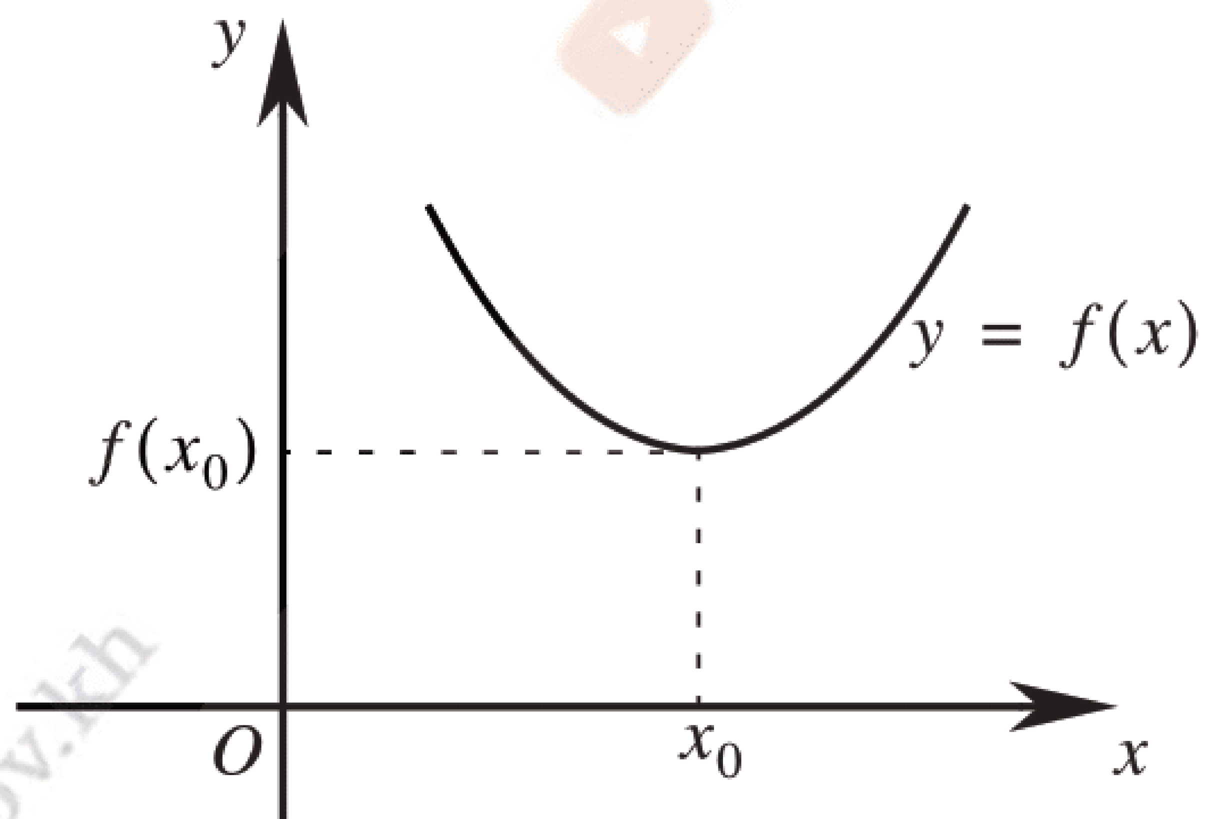
តាមតារាងខាងលើ គេបាន $f(1) = 2$ ជាតម្លៃអតិបរមាធៀបនៃ f ត្រង់ $x = 1$ ហើយ $f(3) = -2$ ជាតម្លៃអប្បបរមាធៀបនៃ f ត្រង់ $x = 3$ ។

ជាទូទៅ f មានអតិបរមាធៀបត្រង់ x_0 កាលណា $\begin{cases} f'(x) > 0 & \text{ចំពោះ } x < x_0 \\ f'(x) = 0 & \text{ចំពោះ } x = x_0 \\ f'(x) < 0 & \text{ចំពោះ } x > x_0 \end{cases}$

f មានអប្បបរមាធៀបត្រង់ x_0 កាលណា $\begin{cases} f'(x) < 0 & \text{ចំពោះ } x < x_0 \\ f'(x) = 0 & \text{ចំពោះ } x = x_0 \\ f'(x) > 0 & \text{ចំពោះ } x > x_0 \end{cases}$ ។



$f(x_0)$ ជាតម្លៃអតិបរមាធៀប



$f(x_0)$ ជាតម្លៃអប្បបរមាធៀប

លំហាត់គំរូ 1 បង្ហាញថាអនុគមន៍ $f(x) = -x^3 + 3x^2 + 1$ មានអតិបរមានិងអប្បបរមាធៀប ហើយគណនាតម្លៃទាំងពីរនោះ ។

ចម្លើយ ***ជំហានទី 1*** : រកដេរីវេ

$f'(x) = -3x^2 + 6x$ ។

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	ϕ	$+$	ϕ	$-$	

ជំហានទី 2 : សិក្សាសញ្ញានៃ $f'(x)$

បើ $f'(x) = -3x^2 + 6x = 0$ ឬ $3x(-x+2) = 0$ នោះ $x = 0$, $x = 2$ ។

ជំហានទី 3 : បកស្រាយពីការប្តូរសញ្ញានៃ $f'(x)$ និងគណនាតម្លៃបរមា :

តាមតារាងសញ្ញា $f'(x) = 0$ ត្រង់ $x = 0$ ហើយ $f'(x)$ ដូរសញ្ញាពី $-$ ទៅ $+$ ។

ដូចនេះ f មានអប្បបរមាធៀបត្រង់ $x = 0$ ហើយមានតម្លៃអប្បបរមាធៀប $f(0) = 1$ ។

ម្យ៉ាងទៀត $f'(x) = 0$ ត្រង់ $x = 2$ ហើយ $f'(x)$ ដូរសញ្ញាពី $+$ ទៅ $-$ ។

ដូចនេះ f មានអតិបរមាធៀបត្រង់ $x = 2$ ហើយតម្លៃអតិបរមាធៀប $f(2) = 5$ ។

លំហាត់គំរូ 2 រកតម្លៃ m ដើម្បីឱ្យ $y = x^3 + 3mx^2 - mx + 1$ មានអតិបរមានិងអប្បបរមាធៀប ។

ចម្លើយ ***ជំហានទី 1*** : រកដេរីវេ $y' = 3x^2 + 6mx - m$

ជំហានទី 2 : ដាក់លក្ខខណ្ឌដើម្បីឱ្យអនុគមន៍មានអតិបរមា និងអប្បបរមាធៀប

អនុគមន៍មានអតិបរមានិងអប្បបរមាលុះត្រាតែសមីការ $y' = 0$ មានឫសពីរផ្សេងគ្នាជាចំនួនពិត ។ សមីការ $3x^2 + 6mx - m = 0$ មានឫសពីរផ្សេងគ្នាជាចំនួនពិត លុះត្រាតែ $\Delta' = 3m(3m+1) > 0$ ។ បើ $3m(3m+1) = 0$ នោះ $m = 0$, $m = -\frac{1}{3}$ ។

ដូចនេះ

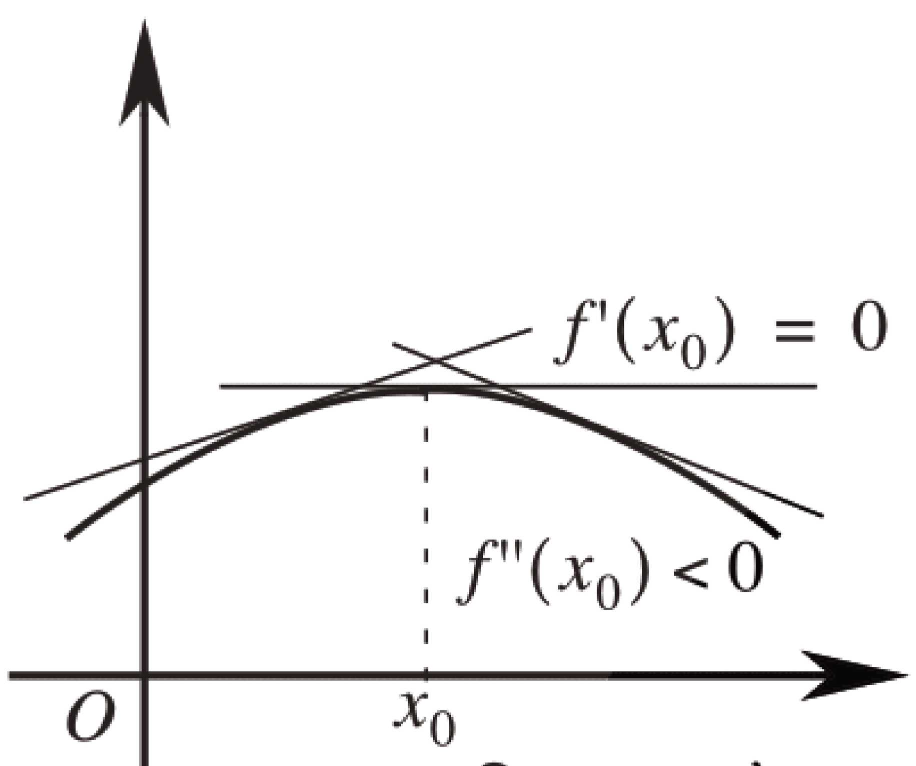
$m \in \left(-\infty,\ -\frac{1}{3}\right) \cup (0,\ +\infty)$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{3}$		0		$+\infty$
Δ'		$+$	ϕ	$-$	ϕ	$+$	

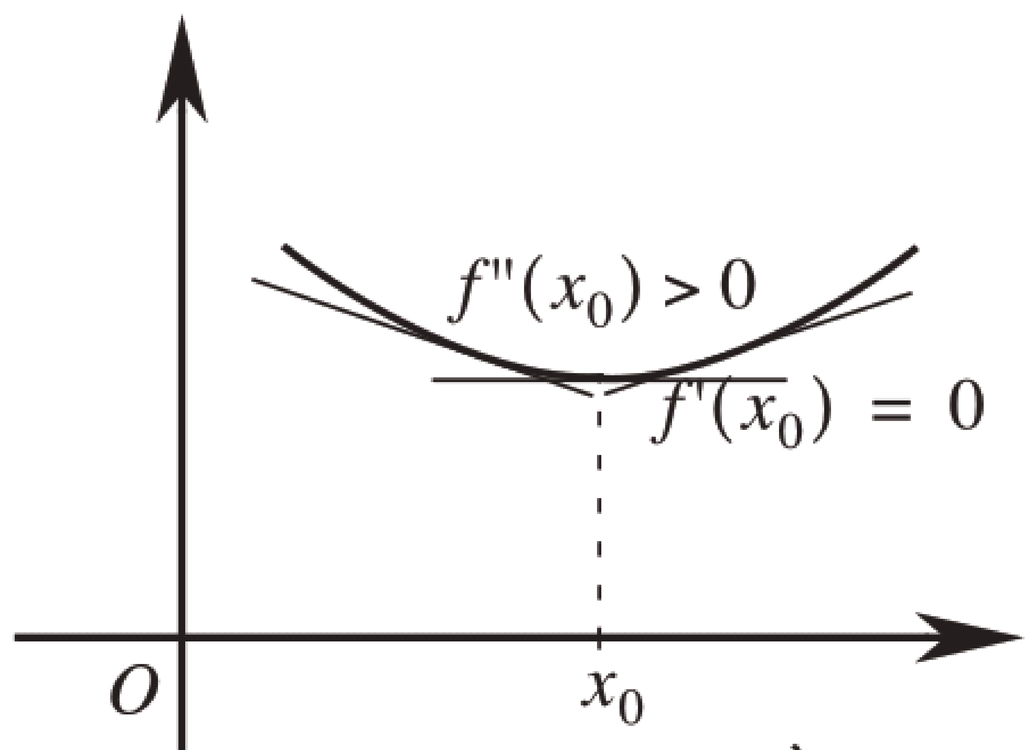
ប្រតិបត្តិ រកតម្លៃ k ដើម្បីឱ្យអនុគមន៍ $y = \frac{1}{3}x^3 + kx^2 + (2k+3)x$ គ្មានបរមាធៀប ។

3.2 អតិបរមាធៀប អប្បបរមាធៀបនិងដេរីវេទី 2

ឧទាហរណ៍ គេឱ្យក្រាបតាងអនុគមន៍តាមពីរករណីផ្សេងគ្នាដូចក្នុងរូបខាងក្រោម :



f មានអតិបរមាធៀប



f មានអប្បបរមាធៀប

តាមក្រាបទី 1 អនុគមន៍ f មានអតិបរមាធៀបនៅត្រង់ចំណុចដែលក្រាបមានបន្ទាត់ប៉ះជាបន្ទាត់ដេក ហើយបន្ទាត់ប៉ះត្រង់ចំណុចផ្សេងទៀតនៃក្រាបដែលនៅជិតនោះ មានមេគុណប្រាប់ទិសថយចុះ គឺបានន័យថា $f'(x)$ ជាអនុគមន៍ចុះ ហើយ $f''(x) < 0$ ។

តាមក្រាបទី 2 អនុគមន៍ f មានអប្បបរមាធៀបនៅត្រង់ចំណុចដែលក្រាបមានបន្ទាត់ប៉ះជាបន្ទាត់ដេក ហើយបន្ទាត់ប៉ះត្រង់ចំណុចផ្សេងទៀតនៃក្រាបដែលនៅជិតនោះ មានមេគុណប្រាប់ទិសកើនឡើង គឺបានន័យថា $f'(x)$ ជាអនុគមន៍កើន ហើយ $f''(x) > 0$ ។

ជាទូទៅ អនុគមន៍ $y = f(x)$ មានដេរីវេពីរដងលើចន្លោះមួយដែលមាន x_0 ។

f មានអតិបរមាធៀបត្រង់ x_0 កាលណា $\begin{cases} f'(x_0) = 0 \\ f''(x_0) < 0 \end{cases}$

f មានអប្បបរមាធៀបត្រង់ x_0 កាលណា $\begin{cases} f'(x_0) = 0 \\ f''(x_0) > 0 \end{cases}$ ។

សំគាល់ បើ $f''(x_0) = 0$ នោះគេត្រូវត្រឡប់ទៅសិក្សាសញ្ញានៃដេរីវេទី 1 វិញ ដើម្បីឈានទៅរកតម្លៃអតិបរមានិងអប្បបរមាធៀប ។

លំហាត់គំរូ រកតម្លៃអតិបរមាធៀបនិងអប្បបរមាធៀបនៃ $f(x) = x^3 - 12x^2$ ។

ចម្លើយ ***ជំហានទី 1*** : រកដេរីវេ y'

$f'(x) = 3x^2 - 24x$ ។

ជំហានទី 2 : រកឫសនៃសមីការ $f'(x) = 0$

$f'(x) = 3x^2 - 24x = 0$

$3x(x-8) = 0$ នោះ $x = 0$, $x = 8$ ។

ជំហានទី 3 : រកដេរីវេ $f''(x)$ ចំពោះឫសនីមួយៗនៃសមីការ $f'(x) = 0$

$f''(x) = 6x - 24$ ។

- ចំពោះ $x = 0$ គេបាន $f''(0) = -24 < 0$ ហើយ $y = f(0) = 0$ ។

  ដូចនេះ f មានអតិបរមាធៀបត្រង់ $x = 0$ ហើយតម្លៃអតិបរមាធៀប $f(0) = 0$ ។

- ចំពោះ $x = 8$ គេបាន $f''(8) = 24 > 0$ ហើយ $y = f(8) = -256$ ។

  ដូចនេះ f មានអប្បបរមាធៀបត្រង់ $x = 8$ ហើយតម្លៃអប្បបរមាធៀប $f(x) = -256$ ។

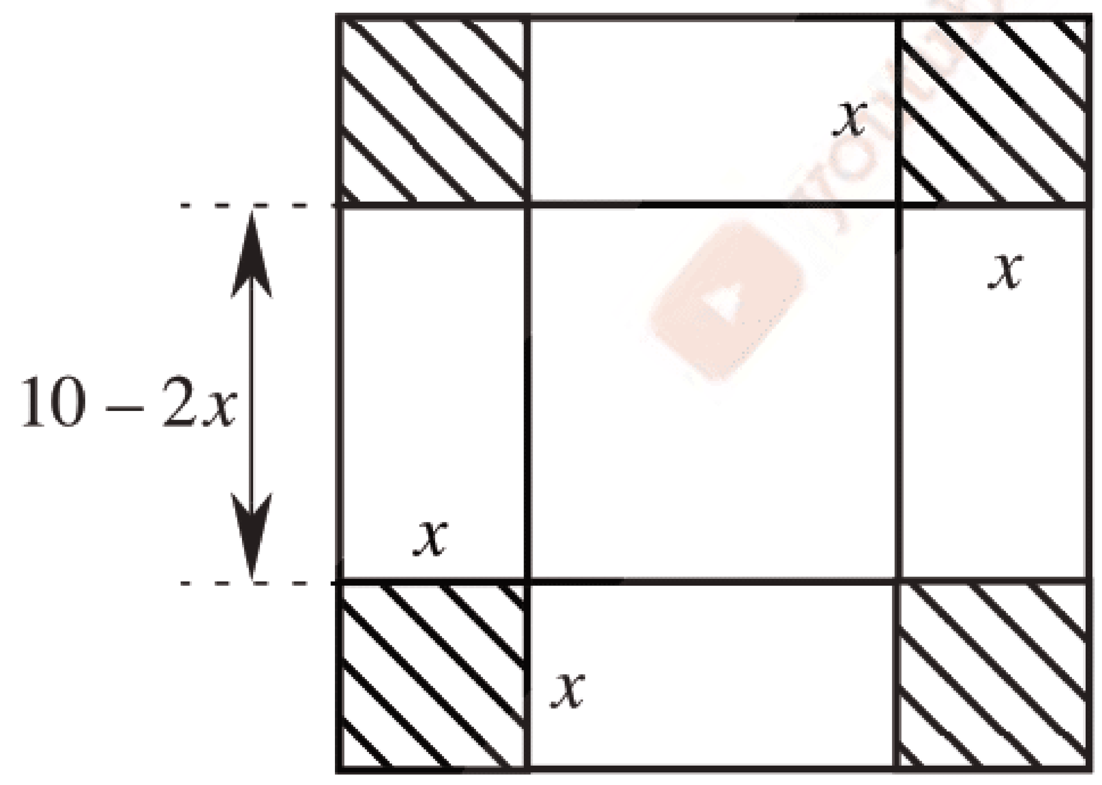
ប្រតិបត្តិ រកតម្លៃអតិបរមានិងអប្បបរមាធៀបនៃ $f(x) = x^4 - 4x^3 + 2$ ។

3.3 តម្លៃអតិបរមានិងអប្បបរមា

វិធីរកអតិបរមា និងអប្បបរមានៃអនុគមន៍អាចអនុវត្តក្នុងការដោះស្រាយចំណោទបញ្ហាក្នុងជីវភាពប្រចាំថ្ងៃ ដែលទាក់ទងនឹងតម្លៃអតិបរមានិងអប្បបរមា ។

លំហាត់គំរូ គេយកក្រដាសក្រាស់មួយផ្ទាំងរាងជាការេ ដែលមានប្រវែងជ្រុងស្មើ 10cm មកធ្វើជាប្រអប់មួយដែលគ្មានគម្រប ។ គេកាត់យកចេញនូវការេតូចៗបួនដែលមានប្រវែងជ្រុង $x(cm)$ ដូចគ្នាពីផ្នែកកំពូលទាំងបួននៃផ្ទាំងក្រដាស ហើយបត់ផ្នែកដែលនៅសល់ឱ្យបានជាប្រអប់មួយ មានរាងជាប្រលេពីប៉ែតកែង ដែលមានបាតជាការេ ។ រកប្រវែងជ្រុង x នៃការេដែលត្រូវកាត់យកចេញ ដើម្បីឱ្យប្រអប់មានមាឌធំបំផុត ។ រកមាឌធំបំផុតនោះ ។

ចម្លើយ មាឌនៃប្រអប់ = ក្រឡាផ្ទៃបាត × កំពស់



$f(x) = (10-2x)^2 \times x$

$= 4x^3 - 40x^2 + 100x$

ដែល $0 < x < 5$ ។

$f'(x) = 12x^2 - 80x + 100$

$f'(x) = 0$ លុះត្រាតែ $12x^2 - 80x + 100 = 0$

$3x^2 - 20x + 25 = 0$ ។

$\Delta = 20^2 - 4(3)(25) = 100 = 10^2$

$x_1 = \frac{20-10}{6} = \frac{5}{3}$, $x_2 = \frac{20+10}{6} = 5$ ។

x	0		$\frac{5}{3}$		5	
$f'(x)$		+	0	−	0	+
$f(x)$		↗	អតិបរមា	↘		

f មានអតិបរមាត្រង់ $x = \frac{5}{3}$ ហើយ

$f\left(\frac{5}{3}\right) = \left(10 - 2 \times \frac{5}{3}\right)^2 \times \frac{5}{3} = \frac{2000}{27}$ ។

ដូចនេះ ប្រអប់មានមាឌធំបំផុត កាលណាគេយក $x = \frac{5}{3}$cm ។

ប្រអប់មានមាឌធំបំផុត $\frac{2000}{27}\text{cm}^3$

ប្រតិបត្តិ ស៊ីឡាំងមួយចារឹកក្នុងស្វ៊ែកាំ R ។

ក. រកកម្ពស់នៃស៊ីឡាំងដើម្បីឱ្យស៊ីឡាំងមានមាឌធំបំផុត ។

ខ. រកមាឌធំបំផុតនៃស៊ីឡាំង ។

4. ចំណុចរបត់នៃខ្សែកោង

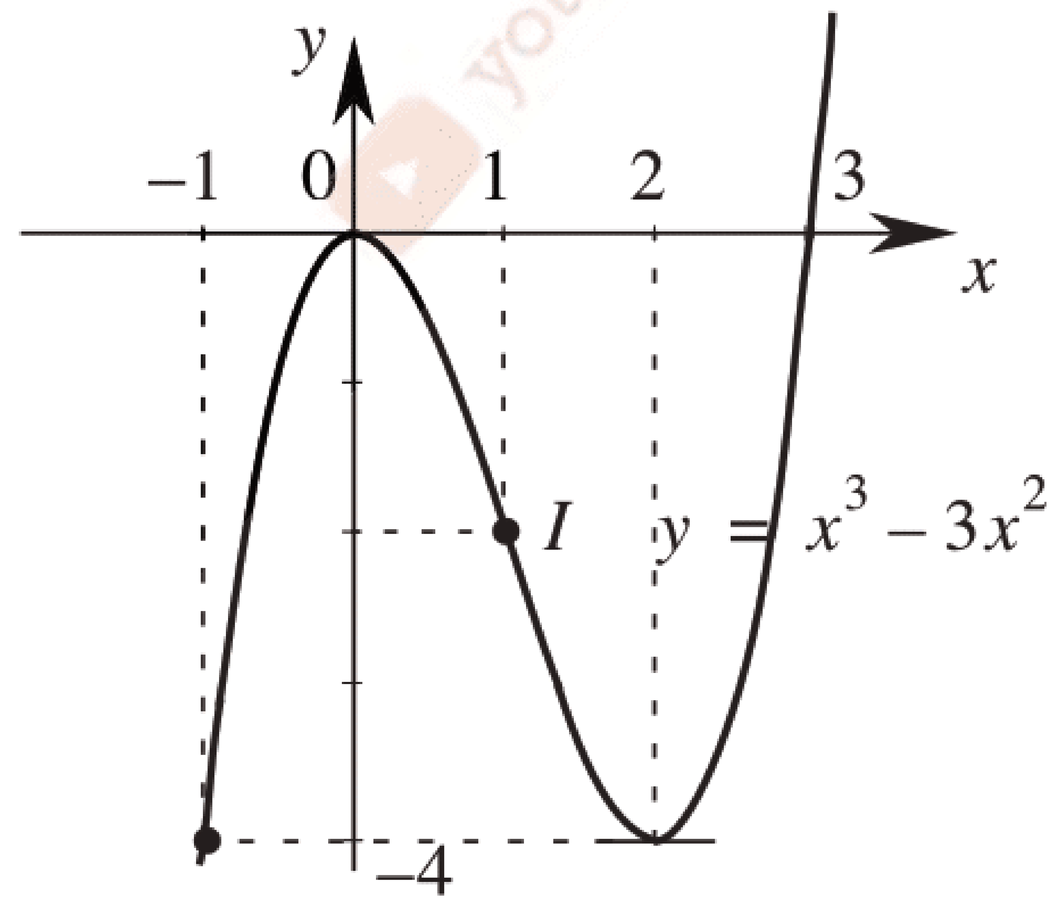
ឧទាហរណ៍ គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x) = x^3 - 3x^2$ ។

$f'(x) = 3x^2 - 6x$

បើ $f'(x) = 0$ នោះ $3x(x-2) = 0$ ហើយ $x = 0$, $x = 2$ ។

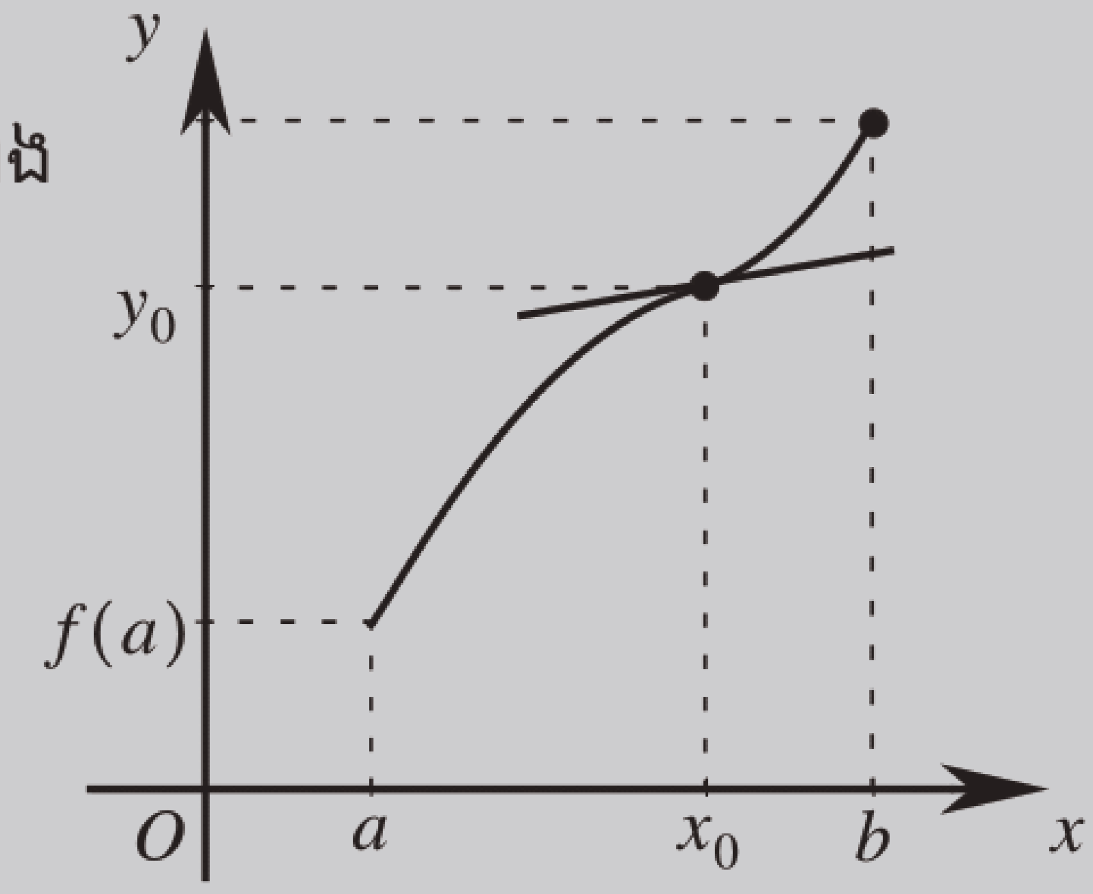
ចំពោះ $x = 0 \Rightarrow f(0) = 0$ ។ ចំពោះ $x = 2 \Rightarrow f(2) = -4$ ។

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	0	$\searrow$	-4	$\nearrow$	



តាមក្រាប គេសង្កេតឃើញថាខ្សែកោងប្តូរពីប៉ោងទៅផតត្រង់ចំណុច $I(1, -2)$ ដែលហៅថាចំណុចរបត់នៃខ្សែកោងតាងអនុគមន៍ f ។

ជាទូទៅ ចំណុច $I(x_0, y_0)$ ជាចំណុចរបត់នៃខ្សែកោង តាងអនុគមន៍ f កាលណាខ្សែកោងប៉ោង (ឬផត) នៅលើ $[a, x_0]$ ហើយផត (ឬប៉ោង) លើ $[x_0, b]$ ។



របៀបរកចំណុចរបត់ខ្សែនៃកោងតាងអនុគមន៍ f :

ជំហានទី 1 : រក $f''(x)$ ។

ជំហានទី 2 : ដោះស្រាយសមីការ $f''(x) = 0$ ។

ជំហានទី 3 : សិក្សាសញ្ញានៃ $f''(x)$ ។

- បើ $f''(x)$ ដូរសញ្ញានៅសងខាង x_0 នោះខ្សែកោងមានចំណុចរបត់ $I(x_0, f(x_0))$
- បើ $f''(x)$ មិនដូរសញ្ញា នោះខ្សែកោងគ្មានចំណុចរបត់ទេ ។

លំហាត់គំរូ រកចំណុចរបត់នៃខ្សែកោងតាង $y = x^3 - 3x + 1$ ។

ចម្លើយ ***ជំហានទី 1*** : $y' = 3x^2 - 3$, $y'' = 6x$ ។

ជំហានទី 2 : $y'' = 6x = 0$ នោះ $x = 0$ ។

ជំហានទី 3 : សិក្សាសញ្ញានៃ $y'' = 6x$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
		$-$	0	$+$	

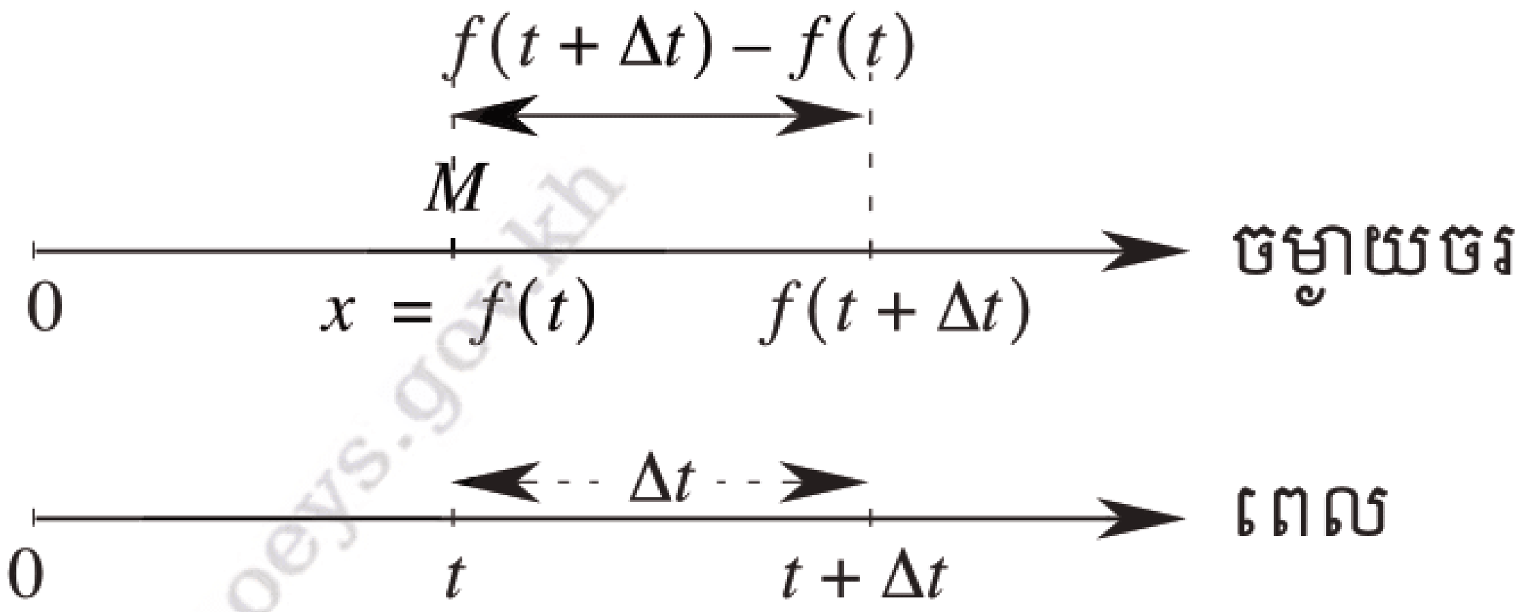
y'' ប្តូរសញ្ញានៅសងខាង $x = 0$ ។ ចំពោះ $x = 0$, $y = y(0) = 1$ ។

ដូចនេះ ចំណុច $I(0,\ 1)$ ជាចំណុចរបត់នៃខ្សែកោងតាងអនុគមន៍ ។

ប្រតិបត្តិ ក. រកចំណុចរបត់នៃខ្សែកោងតាង $y = x^4 - 6x^2$ ។

ខ. តើក្រាបតាង $y = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 1$ មានចំណុចរបត់ឬទេ ?

5. ល្បឿននៃចលនាត្រង់



ចំណុច M មួយផ្លាស់ទីនៅលើបន្ទាត់ L មួយ ។ បើគេយក x ជាចម្ងាយចរនៃ M បន្ទាប់ពី t វិនាទីក្រោយមក នោះគេបាន x ជាអនុគមន៍នៃ t ហើយតាងដោយ

$x = f(t)$

ល្បឿនមធ្យមនៃ M ពីខណៈ t ទៅ $t + \Delta t$ កំណត់ដោយ

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t}$$

បើ $\Delta t \to 0$ នោះគេតាង $V = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t}$

គេបាន $\boxed{V = \frac{dx}{dt} = f'(t) \quad \text{ហៅថាល្បឿននៃ } M \text{ នៅខណៈ } t}$ ។

លំហាត់គំរូ ចំណុច M មួយផ្លាស់ទីនៅលើបន្ទាត់ចំនួនចេញពីគល់អ័ក្ស ។ ចំណុច M មានចម្ងាយចរ $x = t^3 - 6t^2 + 9t + 10$ នៅខណៈ t វិនាទីក្រោយមក ។

ក. រកល្បឿននៃចំណុច M នៅខណៈ $\frac{1}{2}$ វិនាទី និងនៅខណៈ 2 វិនាទីក្រោយមក ។

ខ. តើនៅខណៈណាដែលចំណុច M ប្តូរទិសដៅលើកដំបូងគេ ។

ចម្លើយ ក. តាង V ជាល្បឿននៃ M បន្ទាប់ពី $t(s)$ ក្រោយមក ។

គេបាន $V = \dfrac{dx}{dt} = (t^3 - 6t^2 + 9t + 10)' = 3t^2 - 12t + 9$

- នៅខណៈ $t = \frac{1}{2}s$ គេបាន $V\left(\frac{1}{2}\right) = 3\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 12\left(\frac{1}{2}\right) + 9 = \frac{15}{4}$
- នៅខណៈ $t = 2s$ គេបាន $V = (2) = 3 \times 2^2 - 12 \times 2 + 9 = -3$ ។

ខ. ចំណុច M ប្តូរទិសដៅ កាលណាល្បឿន V ប្តូរសញ្ញា ។

ដើម្បីឱ្យដឹងថា M ប្តូរទិសដៅនៅខណៈណាគេត្រូវសិក្សាសញ្ញានៃ V ។

បើ $V = 3t^2 - 12t + 9 = 0$

នោះ $t = 1$, $t = 3$ ។

t	0		1		3		$+\infty$
V		$+$	0	$-$	0	$+$	

តាមតារាងសញ្ញា ល្បឿន V ប្តូរសញ្ញាលើកទី 1 ត្រង់ខណៈ $t = 1s$ ។

ដូចនេះ ចំណុច M ប្តូរទិសដៅលើកដំបូងគេត្រង់ខណៈ $t = 1s$ ។

ប្រតិបត្តិ គេបោះបាល់មួយពីផ្ទៃដីឡើងទៅលើតាមទិសឈរដោយមានល្បឿនដើម $v_0 = 19.(6)m/s$ ។ ក្នុងរយៈពេល t វិនាទីក្រោយមក បាល់ស្ថិតនៅកំពស់ $S = -4.9t^2 + 19.6t$ ពីផ្ទៃដី ។

ក. រកល្បឿននៃបាល់ បន្ទាប់ពី 1 វិនាទីក្រោយពីការបោះ ។

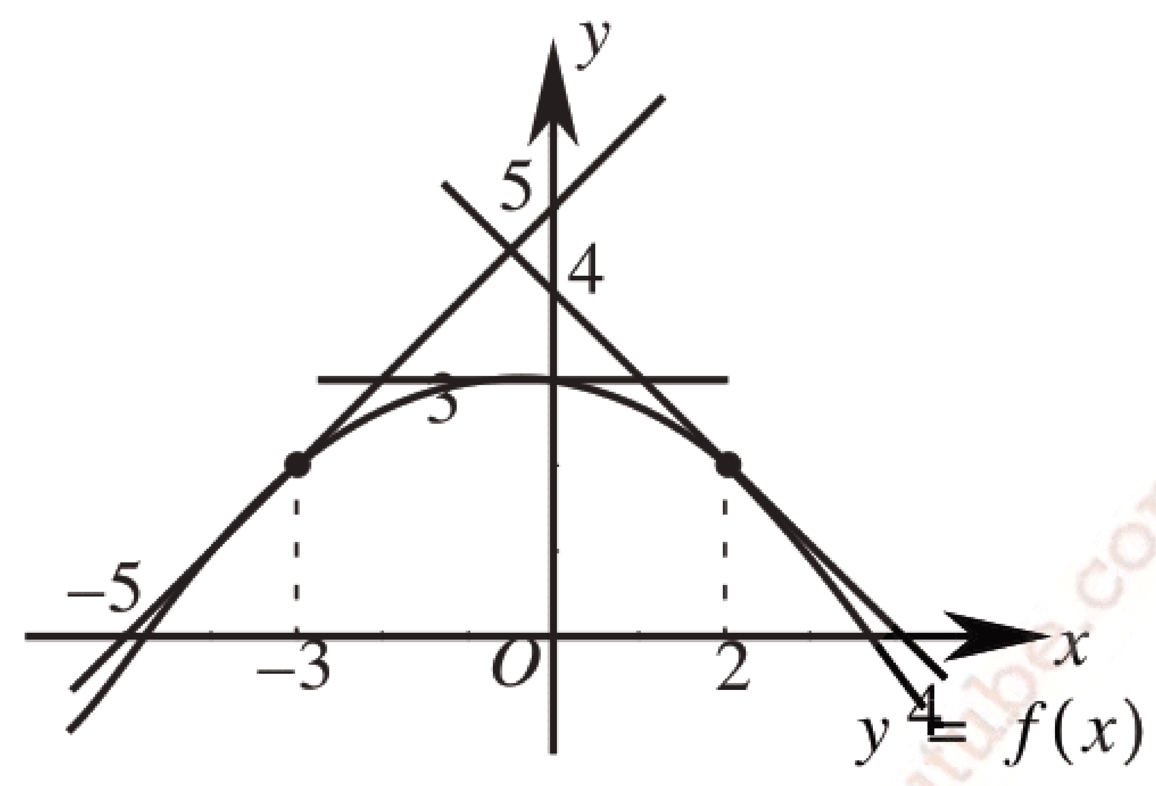
ខ. រករយៈពេលដែលបាល់ស្ថិតនៅកម្ពស់ខ្ពស់បំផុត ហើយរកកម្ពស់នោះ ។

គ. រករយៈពេលដែលបាល់ស្ថិតនៅក្នុងលំហអាកាស ។

ឃ. រកចម្ងាយចរសរុបដែលបាល់បានផ្លាស់ទី ។

លំហាត់

1. រកតម្លៃ $f'(-3)$ $f'(0)$ និង $f'(2)$ ដោយប្រើក្រាបតាងអនុគមន៍ f ។



2. អនុគមន៍ $f(x) = 2x^3 - 16x + 11$ មានក្រាប C ។

ក. រកសមីការបន្ទាត់ L ដែលប៉ះក្រាប C ត្រង់ចំណុច $A(2, -5)$ ។

ខ. រកសមីការបន្ទាត់ដែលមានមេគុណប្រាប់ទិសស្មើ -10 ហើយប៉ះនឹងក្រាប C ។

3. អនុគមន៍ $f(x) = 4x^3 + 9x^2 - 30x + 1$ មានក្រាប C ។

ក. រកកូអរដោនេនៃគ្រប់ចំណុចប៉ះនៃក្រាប C ដែលមានបន្ទាត់ប៉ះជាបន្ទាត់ដេក ។

ខ. រកសមីការនៃបន្ទាត់ប៉ះទាំងនោះ ។

4. អនុគមន៍ $y = 3x^2 - 4x + 1$ កំណត់នៅលើ $\mathbb{R}$ និងមានក្រាប C ។

ក. រកសមីការបន្ទាត់ប៉ះនឹង C ហើយកែងនឹងបន្ទាត់ $y = -\frac{x}{5} + 2$ ។

ខ. រកសមីការបន្ទាត់ប៉ះនឹង C ហើយស្របនឹងបន្ទាត់ $y = x + 5$ ។

5. អនុគមន៍ $f(x) = x^3 - 3x$ កំណត់នៅលើ $\mathbb{R}$ និងមានក្រាប C ។

ក. រកសមីការបន្ទាត់ប៉ះនឹងក្រាប C ត្រង់ចំណុច A ដែលមានអាប់ស៊ីស a ។

ខ. បន្ទាត់ប៉ះត្រង់ A កាត់ក្រាប C ម្តងទៀតត្រង់ B ។ រកអាប់ស៊ីសនៃ B ។

6. សិក្សាទិសដៅអថេរភាព រកអតិបរមា និងអប្បបរមា ហើយសង់តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍នីមួយៗដូចខាងក្រោម ៖

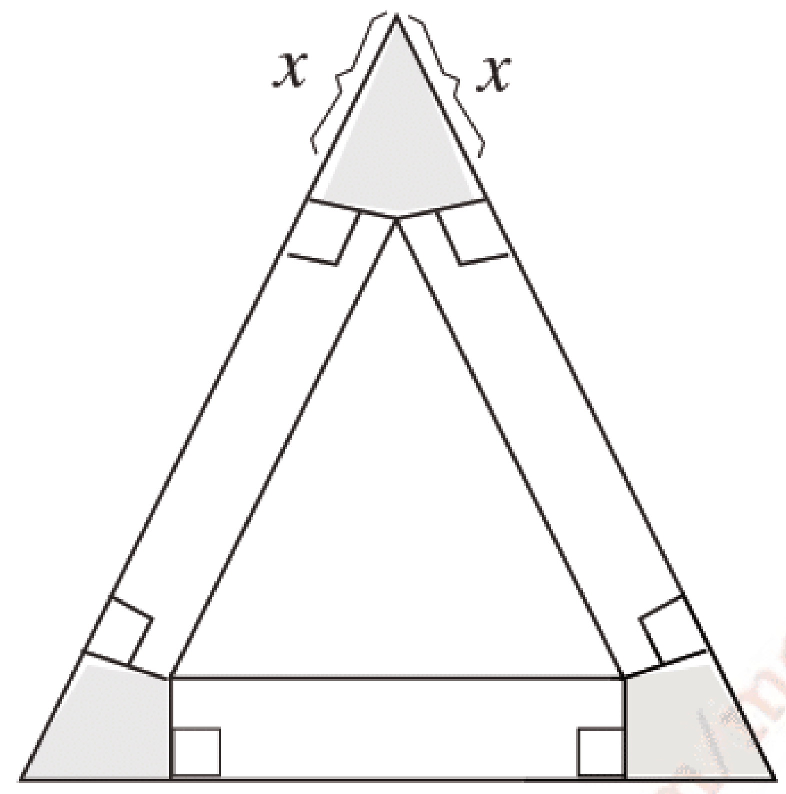
ក. $y = -x^3 + 3x^2 + 4$ ខ. $y = x(x-3)^2$ គ. $y = -x^2(x-1)^2$ ។

7. អនុគមន៍ $f(x) = x^3 + 3ax^2 + 3bx + 2$ មានអតិបរមាធៀបត្រង់ $x = 1$ និងមានអប្បបរមាធៀបត្រង់ $x = 2$ ។

ក. រកតម្លៃនៃចំនួនពិត a និង b ។

ខ. រកផលដករវាងតម្លៃអតិបរមា និងអប្បបរមាធៀបនៃ f ។

8. អនុគមន៍ $f(x) = x^4 + 29$ និង $g(x) = 4x^3$ មានក្រាប C_1 និង C_2 ។ បន្ទាត់ D ស្របអ័ក្សអរដោនេ កាត់ក្រាប C_1 និង C_2 រៀងគ្នាត្រង់ A និង B ។ រកប្រវែងអប្បបរមានៃអង្កត់ $[AB]$ ។



9. បន្ទះស័ង្កសីរាងត្រីកោណសម័ង្សមួយមានជ្រុងប្រវែង a ។ គេកាត់យកចេញពីផ្នែកត្រង់កំពូលទាំងបីនូវចតុកោណប៉ុនៗគ្នា ។ គេបត់ផ្នែកនៅសល់ឱ្យបានជាប្រអប់មួយដែលមានរាងជាព្រីសត្រីមុខនិយ័ត ហើយគ្មានគម្រប ។ រកតម្លៃ x ដើម្បីឱ្យប្រអប់មានមាឌធំបំផុត ។

10. ថ្មមួយដុំបានធ្លាក់ពីកម្ពស់ 88.2 ម៉ែត្រតាមទិសឈរសំដៅមកផ្ទៃដី ។ ក្នុងរយៈពេល t វិនាទីក្រោយមក ដុំថ្មនោះធ្លាក់បានចម្ងាយ $9.8t^2$ ម៉ែត្រ ។

   ក. តើក្នុងរយៈពេលប៉ុន្មានវិនាទីក្រោយមកទើបដុំថ្មធ្លាក់ប៉ះផ្ទៃដី ។

   ខ. រកល្បឿនធ្លាក់នៃដុំថ្មនៅខណៈ 2 វិនាទីដំបូង ។

   គ. រកល្បឿនធ្លាក់នៃដុំថ្មនៅពេលធ្លាក់ប៉ះផ្ទៃដី ។

11. គេបាញ់វត្ថុមួយតាមទិសឈរពីផ្ទៃដីសំដៅទៅលើអាកាស ដោយមានល្បឿនដើម $V_0 = 39.2m \cdot s^{-1}$ ហើយមានចម្ងាយចរ $S = -4.9t^2 + 39.2t$ គិតជាម៉ែត្រពីផ្ទៃដីបន្ទាប់ពី t វិនាទីក្រោយមក ។

   ក. រកល្បឿននៃវត្ថុនៅខណៈ t បន្ទាប់ពីការបាញ់ ។

   ខ. តើនៅពេលណាដែលវត្ថុស្ថិតនៅកម្ពស់ខ្ពស់បំផុត ។ រកកម្ពស់នោះ ។

   គ. រករយៈពេលដែលវត្ថុស្ថិតក្នុងលំហអាកាស ។

   ឃ. រកចម្ងាយចរសរុបនៃវត្ថុ ។

មេរៀនទី

3 អថិរភាពនិងក្រាបនៃអនុគមន៍

1. អនុគមន៍ពហុធាដឺក្រេទីបី

វត្ថុបំណង

- សិក្សាអថិរភាព និងសង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ពហុធាដឺក្រេទីបី
- សិក្សាអថិរភាពនិងសង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ប៊ីការេ
- រកអាស៊ីមតូតឈរនិងអាស៊ីមតូតដេកនៃក្រាបតាងអនុគមន៍ប្រភាគសនិទាន
- សិក្សាអថិរភាពនិងសង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ប្រភាគសនិទានងាយៗ ។

1.1 អថេរភាពនិងក្រាបនៃអនុគមន៍ពហុធាដឺក្រេទីបី

ឧទាហរណ៍ 1 សិក្សាអថេរភាពនិងសង់ក្រាបនៃ $f(x) = -x^3 - 3x^2 + 4$ ។

- **ដែនកំណត់ :** អនុគមន៍ f មានន័យចំពោះគ្រប់ $x \in \mathbb{R}$ គឺ $D = \mathbb{R}$ ។
- **ទិសដៅអថេរភាព :**
  - ដេរីវេ :

$y' = f'(x) = -3x^2 - 6x = 3x(-x-2)$

$f'(x) = 0$ សមមូល $x = 0$, $x = -2$ ។

  - សញ្ញានៃ $f'(x)$:

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

  - **តម្លៃបរមាធៀប :**

f មានអប្បបរមាធៀបត្រង់ $x = -2$ ហើយ $f(-2) = 0$

f មានអតិបរមាធៀបត្រង់ $x = 0$ ហើយ $f(0) = 4$ ។

- **លីមីត**

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty}\left[x^3\left(-1 - \frac{3}{x} + \frac{4}{x^3}\right)\right] = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty}\left[x^3\left(-1 - \frac{3}{x} + \frac{4}{x^3}\right)\right] = -\infty \text{ ។}$$

- **តារាងអថិរភាព**

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	4	↘	$-\infty$

- **ភាពប៉ោង ផត និងចំណុចរបត់ :**

$f''(x) = -6x-6$

$f''(x) = 0$ សមមូល $x = -1$

ហើយ $y = f(-1) = 2$ ។

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	
ក្រាប		ផត	ចំណុចរបត់ $(-1,\ 2)$	ប៉ោង	

- **ក្រាប :**

• ចំណុចប្រសព្វរវាងក្រាបនឹងអ័ក្ស : បើ $x = 0$ គេបាន $y = 4$ ។

បើ $y = 0$ គេបាន $-x^3-3x^2+4 = 0$

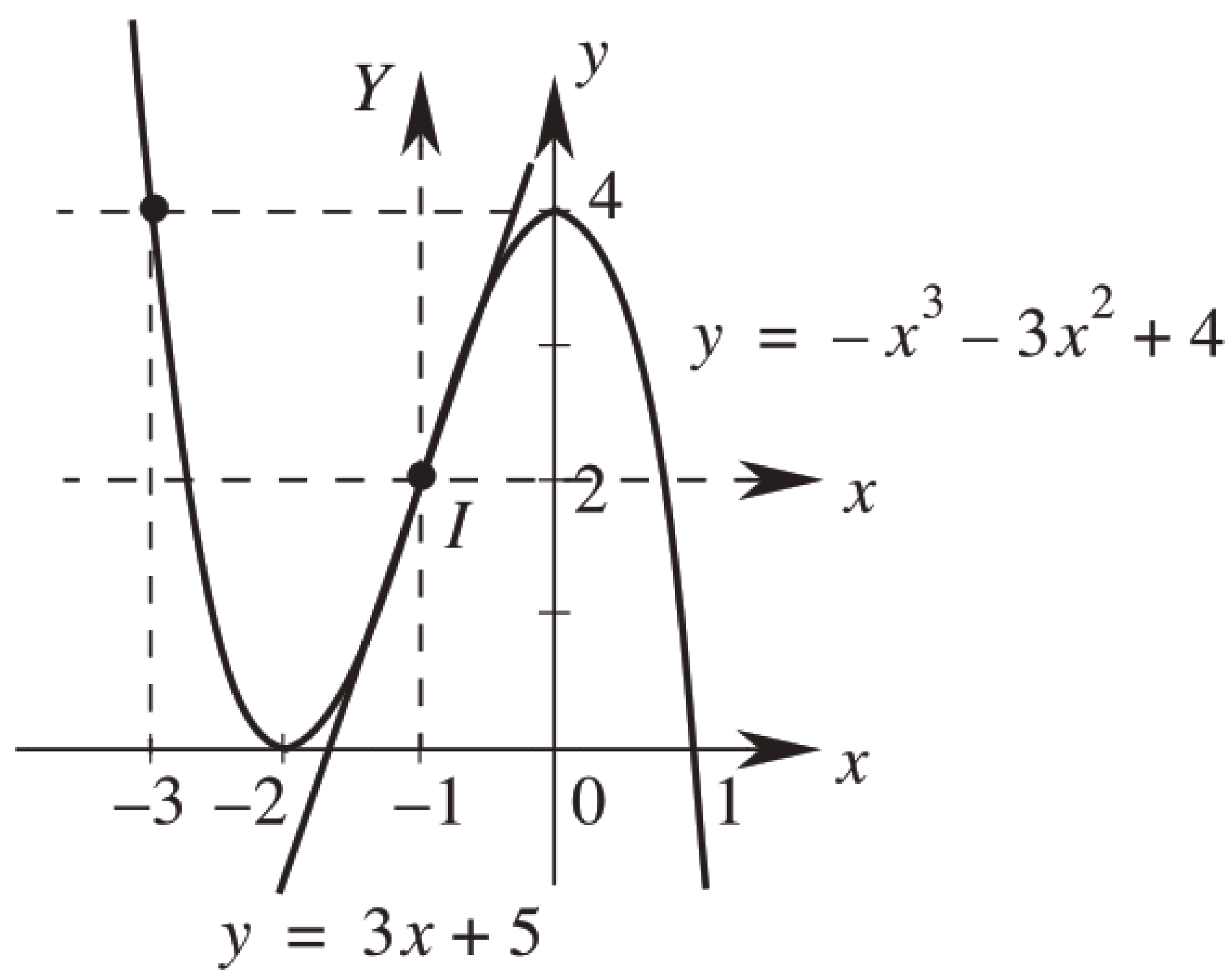
$$-x^3+x^2-4x^2+4 = 0$$

$$-x^2(x-1)-4(x^2-1) = 0$$

$$(x-1)(x+2)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1\ ,\ x = -2$$ ។

• បន្ទាត់ប៉ះត្រង់ចំណុចរបត់ $I(-1,\ 2)$ មានមេគុណប្រាប់ទិស $f'(-1) = 3$ ។

• ផ្ចិតឆ្លុះ : តាមបំលែងកិលនៃ $\overrightarrow{OI}$ គេបាន រូបមន្តប្តូរតម្រុយ $\begin{cases} x = X-1 \\ y = Y+2 \end{cases}$ ។



សមីការបង្រួម : គេមាន $y = -x^3-3x^2+4$

$$Y+2 = -(X-1)^3-3(X-1)^2+4$$

$Y = -X^3+3X$ ជាអនុគមន៍សេសនៃ X ។

ដូចនេះ ចំណុច $I(-1,\ 2)$ ជាផ្ចិតឆ្លុះនៃក្រាបតាង f ។

ឧទាហរណ៍ 2 សិក្សាអថិរភាពនិងសង់ក្រាបនៃ $y = x^3-3x^2+4x-2$ ។

- **ដែនកំណត់ :** $D = \mathbb{R}$ ។

- **ទិសដៅអថិរភាព :**

x	$-\infty$		$+\infty$
y'		$+$	

- ដេរីវេ : $y' = 3x^2 - 6x + 4$
- សញ្ញានៃ y' : មាន $\Delta = -12 < 0$ នាំឱ្យ $\forall x \in \mathbb{R}$, $y' > 0$ ។

  ដូចនេះ អនុគមន៍កើនលើ $\mathbb{R}$ ។

- **លីមីត :** $\lim\limits_{x \to -\infty} (x^3 - 3x^2 + 4x - 2) = \lim\limits_{x \to -\infty} \left[x^3 \left(1 - \frac{3}{x} + \frac{4}{x^2} - \frac{2}{x^3} \right) \right] = -\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} (x^3 - 3x^2 + 4x - 2) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left[x^3 \left(1 - \frac{3}{x} + \frac{4}{x^2} - \frac{2}{x^3} \right) \right] = +\infty$ ។

- **តារាងអថេរភាព**

- **ភាពប៉ោង ផតនិងចំណុចរបត់ :**

$y'' = 6x - 6$, $y'' = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ហើយ $y = y(1) = 0$ ។

x	$-\infty$		$+\infty$
y'		$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y''		$-$	0	$+$	
ក្រាប		ប៉ោង	ចំណុចរបត់ $(1, 0)$	ផត	

- **ក្រាប**

- ចំណុចប្រសព្វរវាងក្រាបនឹងអ័ក្ស : បើ $x = 0$ គេបាន $y = -2$

  បើ $y = 0$ គេបាន $x^3 - 3x^2 + 4x - 2 = 0$ ។

  ចំពោះ $x = 1$ គេបាន $1^3 - 3 \cdot 1^2 + 4 \cdot 1 - 2 = 0$ ។

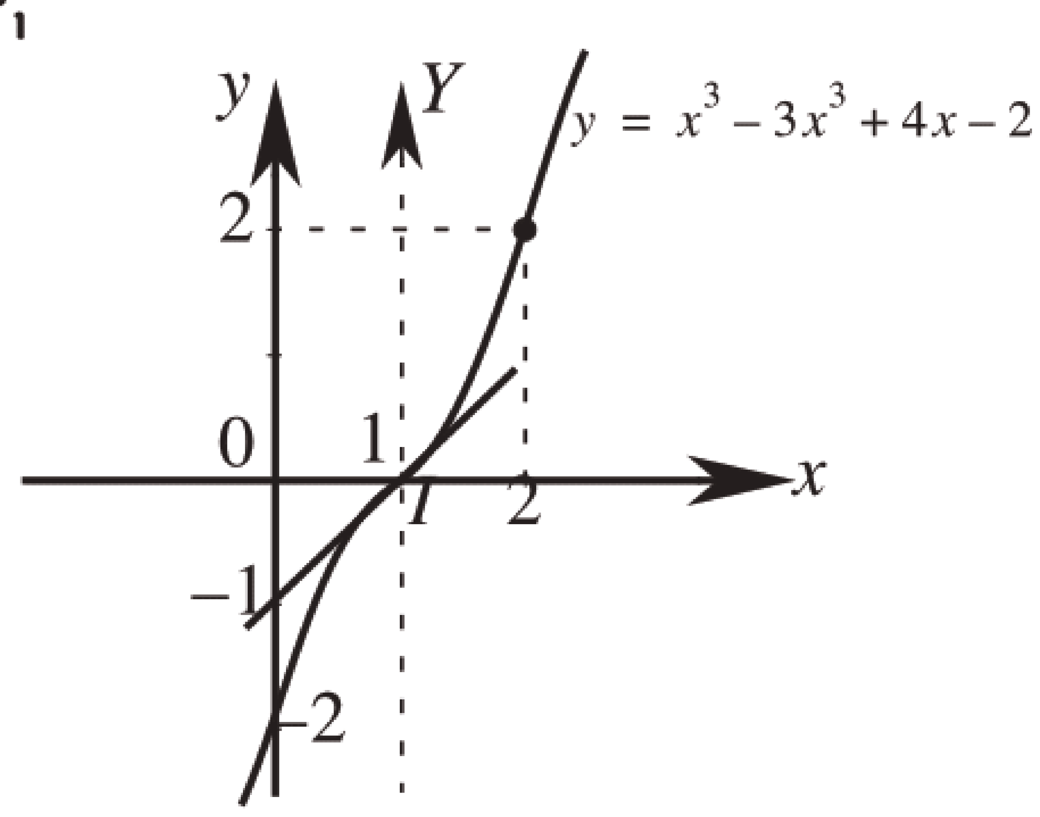
  គេអាចសរសេរ : $(x^3 - 3x^2 + 4x - 2) - (1^3 - 3 \cdot 1^2 + 4 \cdot 1 - 2) = 0$

  $(x^3 - 1^3) - 3(x^2 - 1^2) + 4(x - 1) = 0$

  $(x - 1)(x^2 - 2x + 2) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ព្រោះ $x^2 - 2x + 2 = 0$ គ្មានឫសជាចំនួនពិត ។

- បន្ទាត់ប៉ះនឹងក្រាបត្រង់ចំណុចរបត់ $I(1, 0)$ មានមេគុណប្រាប់ទិស $y'(1) = 1$ ។
- សមីការបន្ទាត់ប៉ះ $y = y'_0(x - x_0) + y_0 = 1(x - 1) + 0 = x - 1$ ។
- ផ្ចិតឆ្លុះ: តាមបំលែងកិលនៃ $\overrightarrow{OI}$ គេបានរូបមន្តប្តូរតម្រុយ :

$\begin{cases} x = X + 1 \\ y = Y \end{cases}$



សមីការបង្រួម : $y = x^3 - 3x^2 + 4x - 2$

$Y = (X + 1)^3 - 3(X + 1)^2 + 4(X + 1) - 2$

$Y = X^3 + X$ ជាអនុគមន៍សេសនៃ X ។

ដូចនេះ $I(1, 0)$ ជាផ្ចិតឆ្លុះនៃក្រាប ។

1.2 អថេរភាពនិងក្រាបនៃអនុគមន៍ $y = ax^3 + bx^2 + cx + d \quad (a \neq 0)$

- ដែនកំណត់ : $D = \mathbb{R}$ ។
- ទិសដៅអថេរភាព

$y' = 3ax^2 + 2bx + c$

បើ $y' = 0$ មានឫសពីរផ្សេងគ្នាជាចំនួនពិត នោះអនុគមន៍មានអតិបរមាធៀបមួយនិង អប្បបរមាធៀបមួយ ។

បើ $y' = 0$ មានឫសឌុប ឬគ្មានឫសជាចំនួនពិត នោះអនុគមន៍គ្មានបរមាធៀបទេ ។

- លីមីត $\lim\limits_{x \to -\infty} (ax^3 + bx^2 + cx + d) = \lim\limits_{x \to -\infty} ax^3\left(1 + \frac{b}{ax} + \frac{c}{ax^2} + \frac{d}{ax^3}\right)$

$$= \begin{cases} -\infty & \text{បើ } a > 0 \\ +\infty & \text{បើ } a < 0 \end{cases} \text{ ។}$$

$$\lim_{x \to +\infty} (ax^3 + bx^2 + cx + d) = \begin{cases} +\infty & \text{បើ } a > 0 \\ -\infty & \text{បើ } a < 0 \end{cases} \text{ ។}$$

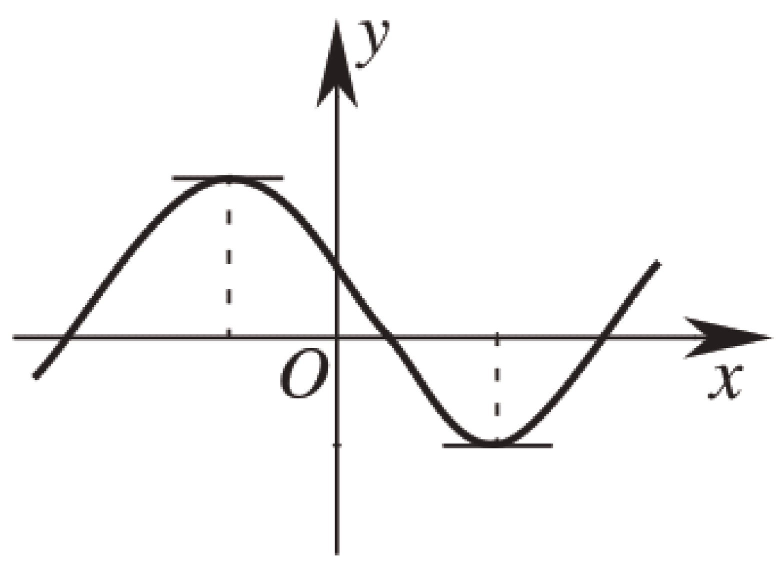
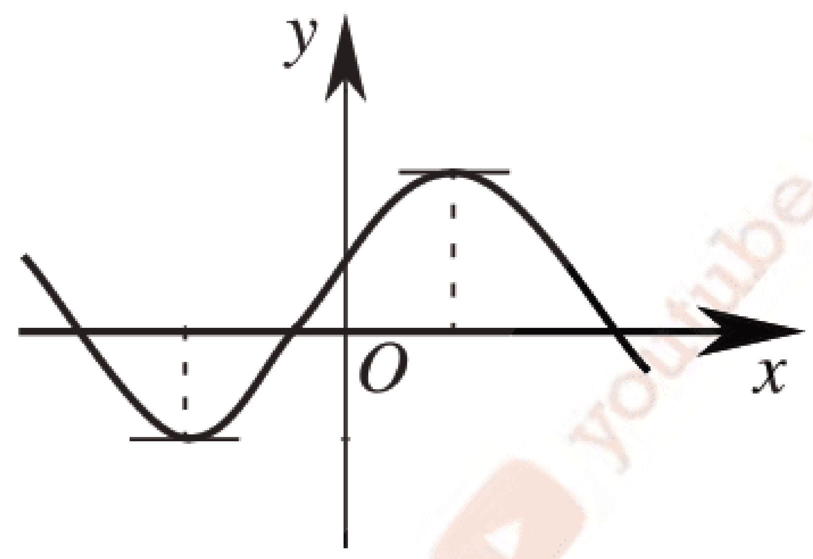
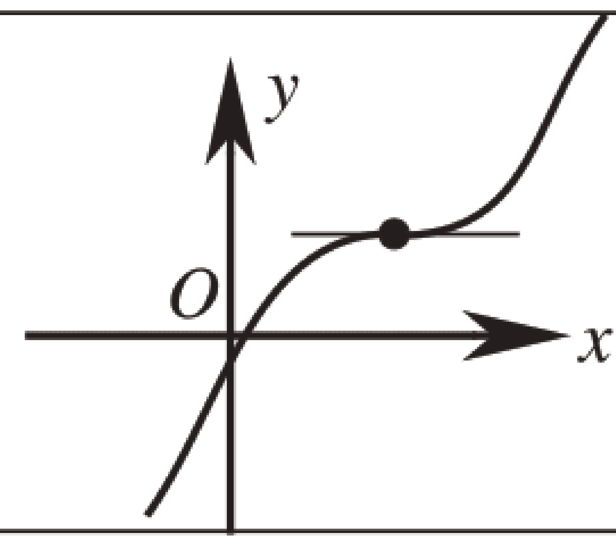
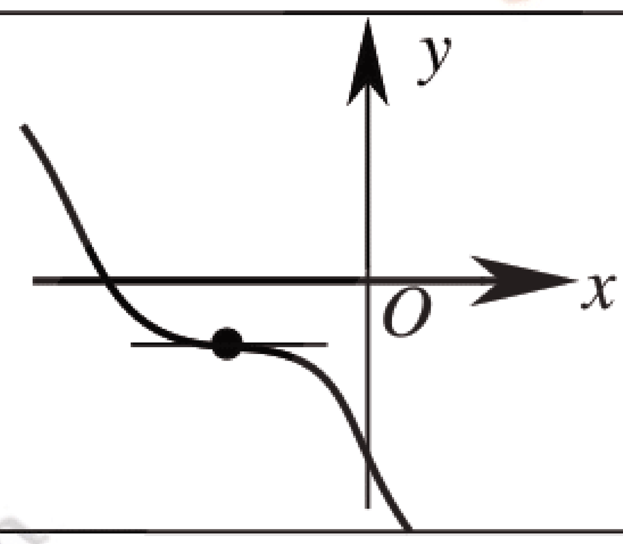
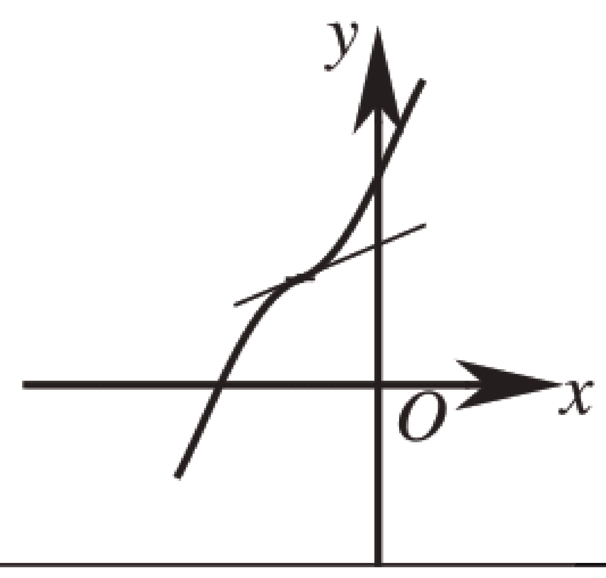
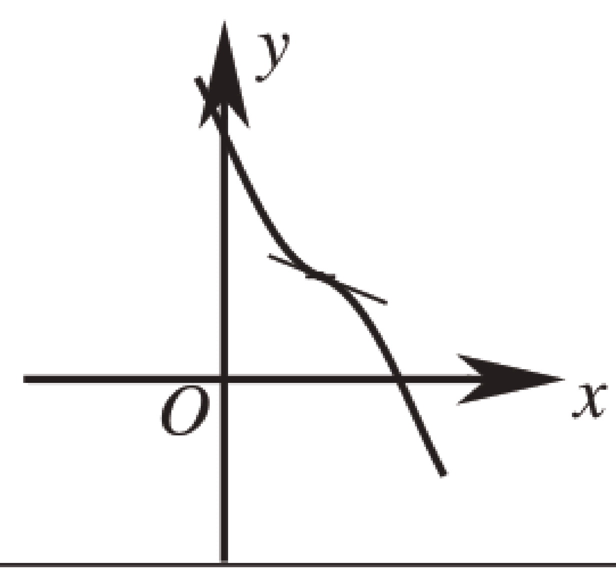
- តារាងអថេរភាព

	$a > 0$	$a < 0$
$y' = 0$ មានឫសពីរផ្សេងគ្នាជាចំនួនពិត x_1, x_2	x: $-\infty$ x_1 x_2 $+\infty$ y': $+$ 0 $-$ 0 $+$ y: $-\infty$ ↗ y_1 ↘ y_2 ↗ $+\infty$	x: $-\infty$ x_1 x_2 $+\infty$ y': $-$ 0 $+$ 0 $-$ y: $+\infty$ ↘ y_1 ↗ y_2 ↘ $-\infty$
$y' = 0$ មានឫសឌុបជាចំនួនពិត x_0	x: $-\infty$ x_0 $+\infty$ y': $+$ 0 $+$ y: $-\infty$ ↗ y_0 ↗ $+\infty$	x: $-\infty$ x_0 $+\infty$ y': $-$ 0 $-$ y: $+\infty$ ↘ y_0 ↘ $-\infty$
$y' = 0$ គ្មានឫសជាចំនួនពិត	x: $-\infty$ $+\infty$ y': $+$ y: $-\infty$ ↗ $+\infty$	x: $-\infty$ $+\infty$ y': $-$ y: $+\infty$ ↘ $-\infty$

- ចំណុចរបត់ : $y'' = 6ax + 2b$

  ក្រាបតាងអនុគមន៍មានចំណុចរបត់ $I\left(-\frac{b}{3a},\ y\left(-\frac{b}{3a}\right)\right)$ ហើយដែលជាផ្ចិតឆ្លុះនៃក្រាប ។

- ក្រាប

	$a > 0$	$a < 0$
$y' = 0$ មានឫសពីរផ្សេងគ្នាជាចំនួនពិត		
$y' = 0$ មានឫសឌុប		
$y' = 0$ គ្មានឫសជាចំនួនពិត		

ប្រតិបត្តិ សិក្សាអថេរភាពនិងសង់ក្រាបតាងអនុគមន៍ខាងក្រោម :

ក. $y = -x^3 + x^2 - x - 1$ ។

ខ. $y = 2x^3 - 3x^2 + 1$ ។

2. អនុគមន៍ប៊ីការេ

2.1 អថេរភាពនិងក្រាបនៃអនុគមន៍ប៊ីការេ

ឧទាហរណ៍ សិក្សាអថេរភាពនិងសង់ក្រាបនៃ $y = -x^4 + 2x^2 - 2$ ។

- ដែនកំណត់ : $D = \mathbb{R}$ ។
- ទិសដៅអថេរភាព :
  - ដេរីវេ : $y' = -4x^3 + 4x = -4x(x^2 - 1)$
  - សញ្ញានៃ y' : $y' = 0$, $x = 0$, $x = -1$, $x = 1$

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$-4x$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	
x^2-1		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

• តម្លៃបរមាធៀប ៖ អនុគមន៍មាន ៖

អតិបរមាធៀបពីរត្រង់ $x=-1$, $x=1$ ហើយ $y(-1)=y(1)=-1$ ។

អប្បបរមាធៀបមួយត្រង់ $x=0$ ហើយ $y(0)=-2$ ។

- លីមីត ៖ $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y = \lim\limits_{x\to\pm\infty} x^4\left(-1+\frac{2}{x^2}-\frac{2}{x^4}\right) = -\infty$ ។

- តារាងអថេរភាព

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	-1	$\searrow$	-2	$\nearrow$	-1	$\searrow$	$-\infty$

- ភាពប៉ោង ផត និងចំណុចរបត់

$y'' = -12x^2+4$

$y''=0$, $x=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$ ។

ហើយ $y\left(\pm\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = -\frac{13}{9}$ ។

x	$-\infty$		$-\frac{\sqrt{3}}{3}$		$\frac{\sqrt{3}}{3}$		$+\infty$
y''		$-$	0	$+$	0	$-$	
ក្រាប		ប៉ោង	ចំណុចរបត់ $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3},-\frac{13}{9}\right)$	ផត	ចំណុចរបត់ $\left(\frac{\sqrt{3}}{3},-\frac{13}{9}\right)$	ប៉ោង	

ក្រាប ៖

• ចំណុចប្រសព្វរវាងក្រាបនឹងអ័ក្ស ៖ $x=0$ គេបាន $y=-2$

$y=0$ គេបាន $-x^4+2x^2-2=0$ ។

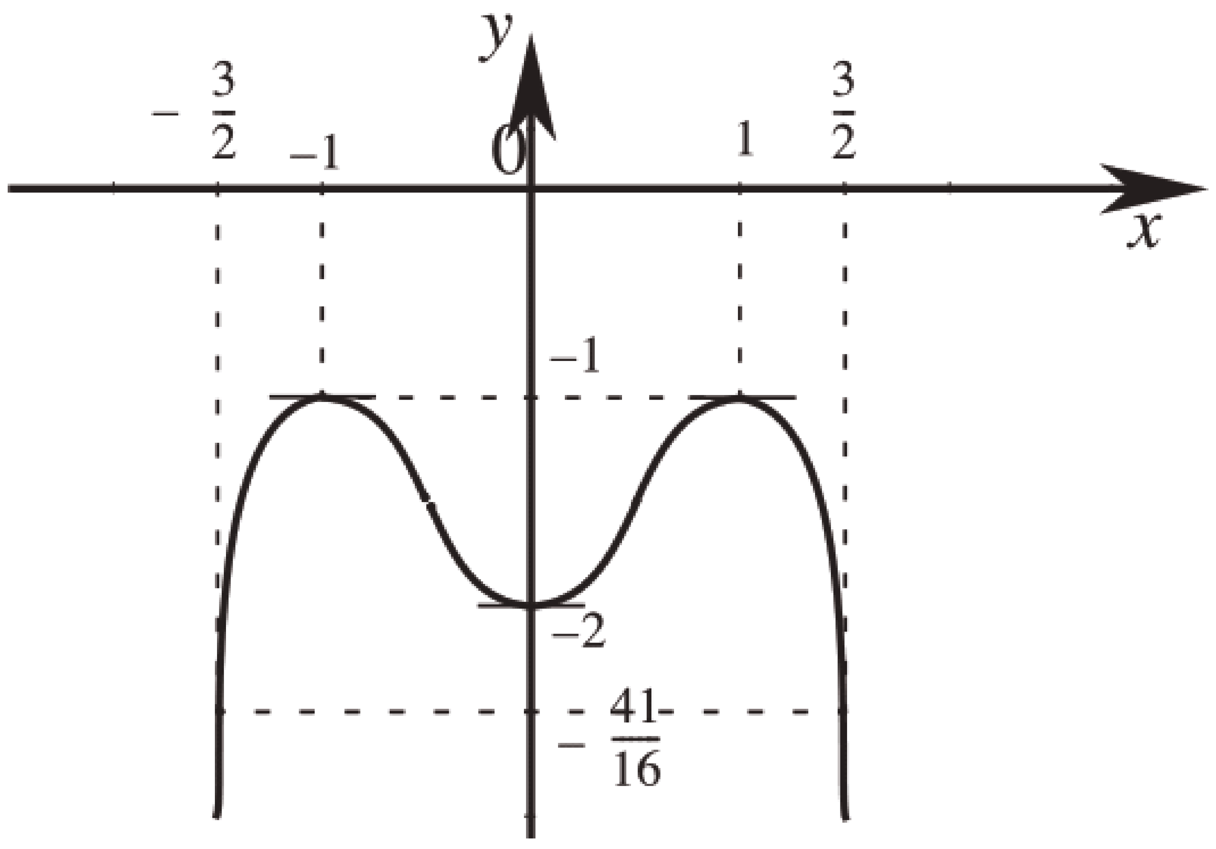
តាង $t=x^2$ $(t\ge 0)$ គេបាន $-t^2+2t-2=0$, $\Delta=-4$

សមីការគ្មានឫសជាចំនួនពិត ហើយក្រាបមិនជួបអ័ក្ស $x'ox$ ទេ ។

• អ័ក្សឆ្លុះ ៖ y ជាអនុគមន៍គូ នោះអ័ក្សអរដោនេ $y'oy$ ជាអ័ក្សឆ្លុះនៃក្រាប ។

- តារាងតម្លៃលេខ :

x	$-\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$
y	$-\frac{41}{16}$	$-\frac{41}{16} \approx -2.5$



2.2 អថេរភាពនិងក្រាបនៃ $y = ax^4 + bx^2 + c \quad (a \neq 0)$

- ដែនកំណត់ : $D = \mathbb{R}$ ។
- ទិសដៅអថេរភាព : $y' = 4ax^3 + 2bx = 2x(4ax^2 + 2b)$

  $y' = 0$ មានឫសតែមួយគត់ជាចំនួនពិត បើ $\frac{b}{a} \geq 0$

  $y' = 0$ មានឫសបីផ្សេងគ្នាជាចំនួនពិត បើ $\frac{b}{a} < 0$ ។

- លីមីត $\lim\limits_{x \to \pm\infty} y = \lim\limits_{x \to \pm\infty} ax^4\left(1 + \frac{b}{ax^2} + \frac{c}{ax^4}\right) = \begin{cases} +\infty & \text{បើ } a > 0 \\ -\infty & \text{បើ } a < 0 \end{cases}$ ។
- ចំណុចរបត់ $y'' = 12ax^2 + 2b$

  $y'' = 0$ គ្មានឫស ឬមានឫសឌុបជាចំនួនពិត បើ $\frac{b}{a} \geq 0$ ហើយក្រាបគ្មានចំណុចរបត់ ។

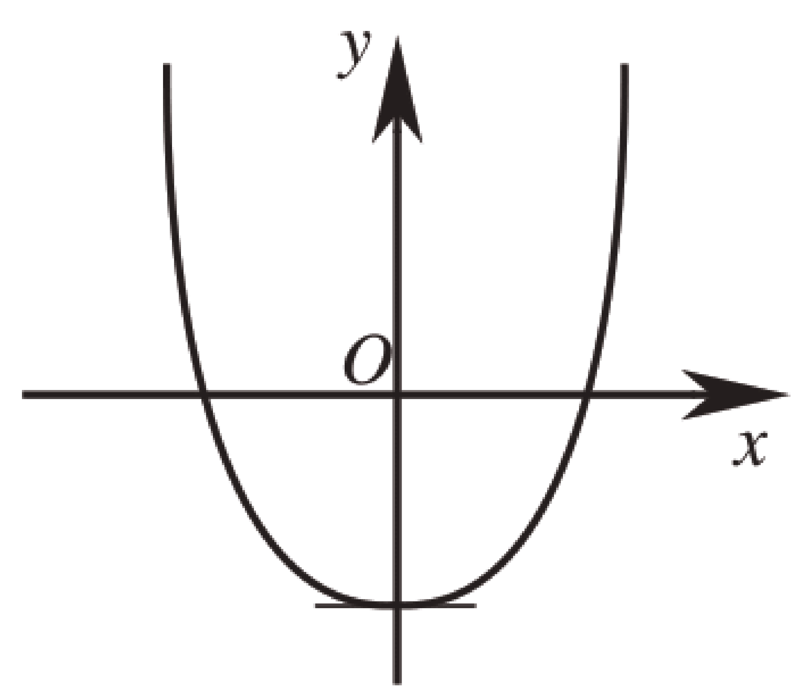
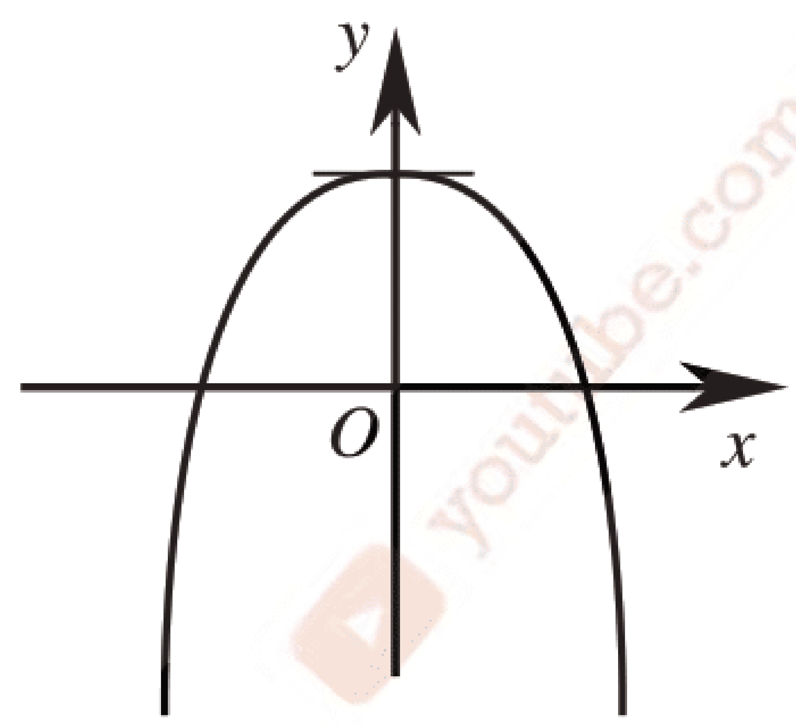
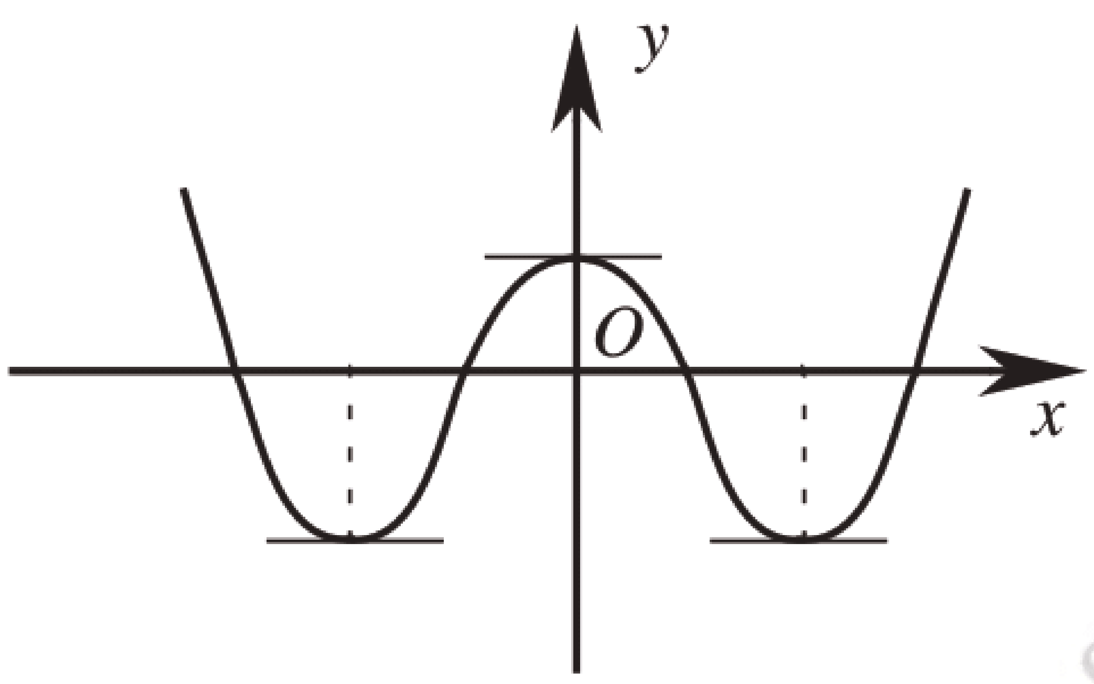
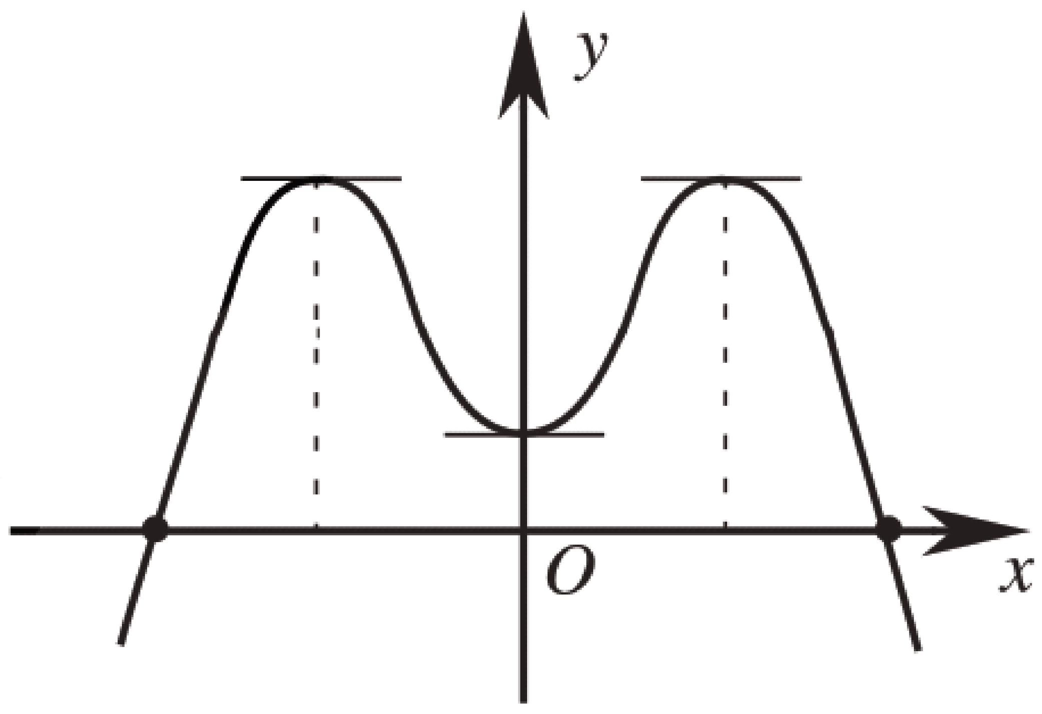
  $y'' = 0$ មានឫសពីរផ្សេងគ្នាជាចំនួនពិត បើ $\frac{b}{a} < 0$ ហើយក្រាបមានចំណុចរបត់ពីរ ។

- តារាងអថេរភាព

	$a > 0$	$a < 0$
$y' = 0$ មានឫសតែមួយគត់ជាចំនួនពិត	$\begin{array}{c\|ccccc} x & -\infty & & 0 & & +\infty \\ \hline y' & & - & 0 & + & \\ \hline y & +\infty & \searrow & c & \nearrow & +\infty \end{array}$	$\begin{array}{c\|ccccc} x & -\infty & & 0 & & +\infty \\ \hline y' & & + & 0 & - & \\ \hline y & -\infty & \nearrow & c & \searrow & -\infty \end{array}$
$y' = 0$ មានឫសបីផ្សេងគ្នាជាចំនួនពិត	$\begin{array}{c\|ccccccccc} x & -\infty & & x_1 & & x_2 & & x_3 & & +\infty \\ \hline y' & & - & 0 & + & 0 & - & 0 & + & \\ \hline y & +\infty & \searrow & y_1 & \nearrow & y_2 & \searrow & y_3 & \nearrow & +\infty \end{array}$	$\begin{array}{c\|ccccccccc} x & -\infty & & x_1 & & x_2 & & x_3 & & +\infty \\ \hline y' & & + & 0 & - & 0 & + & 0 & - & \\ \hline y & -\infty & \nearrow & y_1 & \searrow & y_2 & \nearrow & y_3 & \searrow & -\infty \end{array}$

- ក្រាប

  • អ័ក្សអរដោនេ ជាអ័ក្សឆ្លុះនៃក្រាប

	$a>0$	$a<0$
$y'=0$ មានឫសតែមួយគត់ ជាចំនួនពិត $\left(\frac{b}{a}\geq 0\right)$		
$y'=0$ មានឫសបីផ្សេងគ្នា ជាចំនួនពិត $\left(\frac{b}{a}<0\right)$		

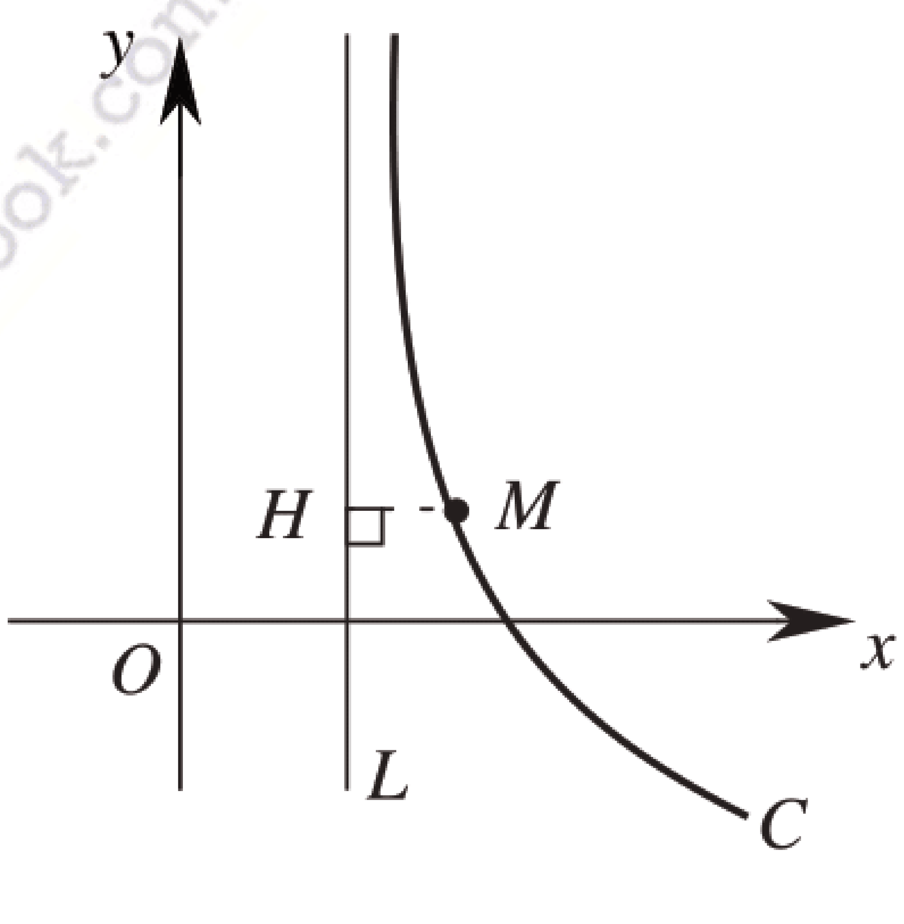
ប្រតិបត្តិ សិក្សាអថេរភាពនិងសង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម :

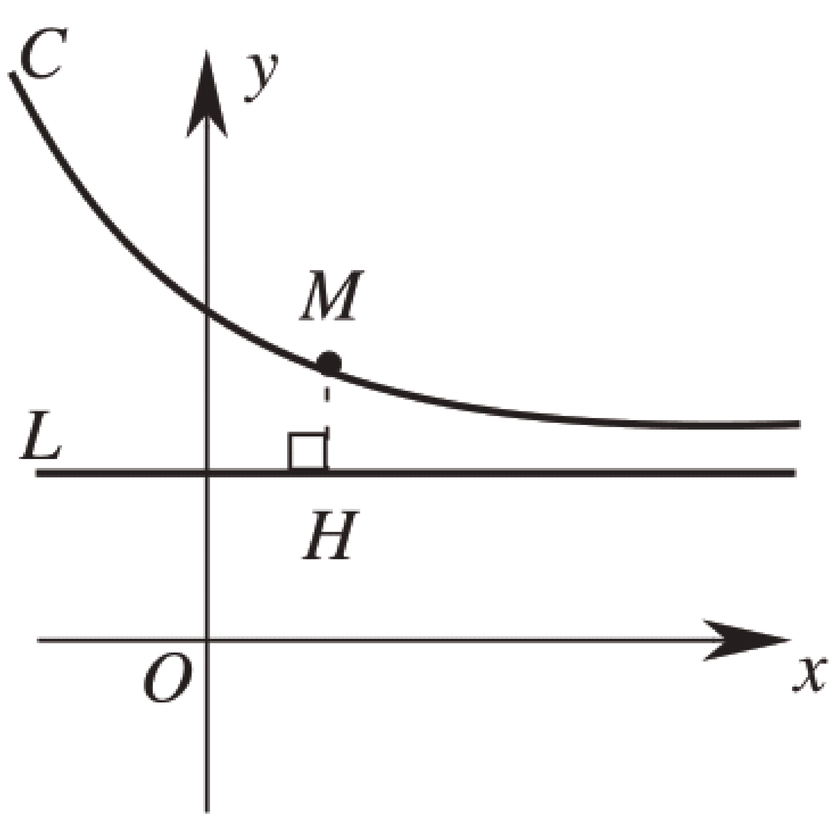
ក. $y=-x^4-x^2+2$ ខ. $y=x^4-2x^2+1$ ។

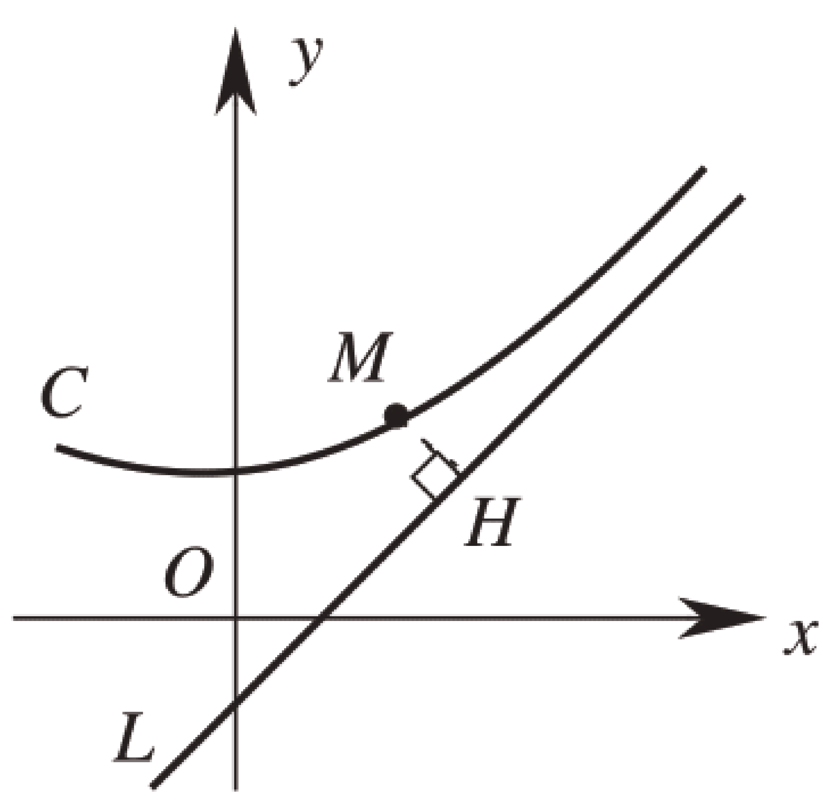
3. អនុគមន៍ប្រភាគសនិទាន $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ $(c\neq 0,\ ad-bc\neq 0)$

3.1 អាស៊ីមតូតនៃក្រាប

ក. **និយមន័យ** បន្ទាត់ L ជាអាស៊ីមតូតនៃក្រាប C តាងអនុគមន៍ $y=f(x)$ កាលណាចម្ងាយ MH ពីចំណុច M នៃ C ទៅបន្ទាត់ L ខិតជិតសូន្យ នៅពេលចំណុច M រត់លើក្រាប C ខិតទៅជិតអនន្ត ។







ខ. អាស៊ីមតូតឈរ

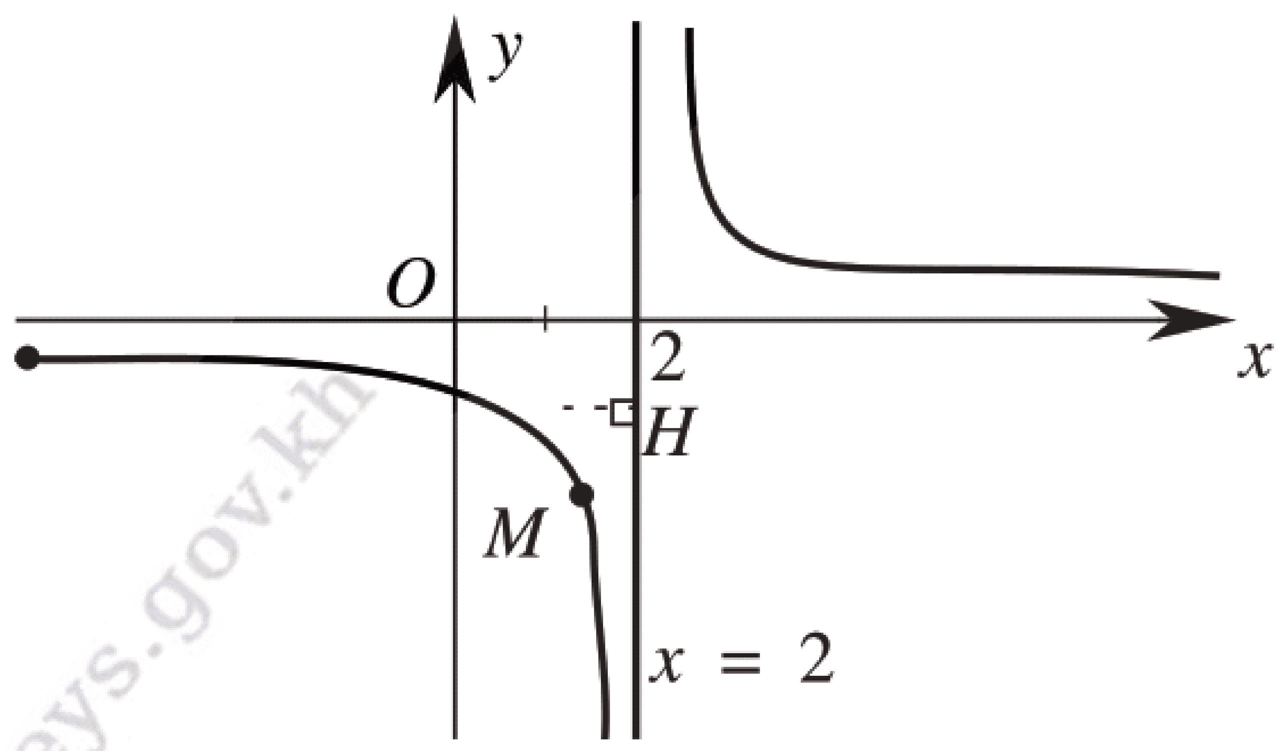
ឧទាហរណ៍ គេឱ្យអនុគមន៍ $y = \frac{1}{x-2}$ និងតារាងតម្លៃលេខ ៖

x	1.99	1.999	1.9999	2	2.0001	2.001	2.01
$y = \frac{1}{x-2}$	-10^2	-10^3	-10^4	‖	10^4	10^3	10^2

តាមតារាងតម្លៃលេខខាងលើ បើ x យកតម្លៃកាន់តែជិត 2 ពីខាងឆ្វេង នោះអនុគមន៍មានតម្លៃអវិជ្ជមានហើយកាន់តែតូចទៅៗគ្មានទីបញ្ចប់ ។

គេបាន $\lim\limits_{x \to 2^-} y = -\infty$ ។

ម្យ៉ាងទៀតបើ x យកតម្លៃកាន់តែជិត 2 ពីខាងស្តាំ នោះអនុគមន៍មានតម្លៃវិជ្ជមានកាន់តែធំទៅៗគ្មានទីបញ្ចប់ ។



គេបាន $\lim\limits_{x \to 2^+} y = +\infty$

ក្នុងករណីទាំងពីរនេះ ចម្ងាយ MH ពីចំណុច M ទៅបន្ទាត់មានសមីការ $x = 2$ ខិតជិតសូន្យ កាលណាចំណុច M រត់លើក្រាបខិតទៅជិតអនន្ត ។

គេថាបន្ទាត់មានសមីការ $x = 2$ ជាអាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាបតាងអនុគមន៍ ។

ជាទូទៅ បន្ទាត់ L មានសមីការ $x = x_0$ ជាអាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាបតាងអនុគមន៍ $y = f(x)$ កាលណា $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty$ ។

លំហាត់គំរូ រកសមីការអាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាបតាង $y = \frac{2x-1}{x+1}$ ។

ចម្លើយ - ***ជំហានទី 1*** ៖ រកតម្លៃឫសនៃភាគបែង ៖ $x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$ ។

- ***ជំហានទី 2*** ៖ រកលីមីតខាងស្តាំនិងខាងឆ្វេងត្រង់ $x = -1$ ។

គេបាន ៖ $\lim\limits_{x \to -1^+} \frac{2x-1}{x+1} = -\infty$ ព្រោះ $\lim\limits_{x \to -1^+} (2x-1) = -3$

$\lim\limits_{x \to -1^+} (x+1) = 0^+$ ។

$$\lim_{x \to -1^-} y = \lim_{x \to -1^-} \frac{2x-1}{x+1} = +\infty$$ ព្រោះ $\lim_{x \to -1^-} (2x-1) = -3$

$\lim_{x \to -1^-} (x+1) = 0^-$ ។

ដូចនេះ បន្ទាត់ $L : x = -1$ ជាអាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាប ។

សម្គាល់ បើភាគបែងនៃអនុគមន៍ប្រភាគសនិទានមានឫស x_0 នោះបន្ទាត់មានសមីការ $x = x_0$ ជាអាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាប ។

ប្រតិបត្តិ រកអាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាបតាងអនុគមន៍ខាងក្រោមនេះ :

ក. $y = \dfrac{2(x+1)}{x-1}$

ខ. $y = \dfrac{x^2}{x+2}$ ។

គ. អាស៊ីមតូតដេក

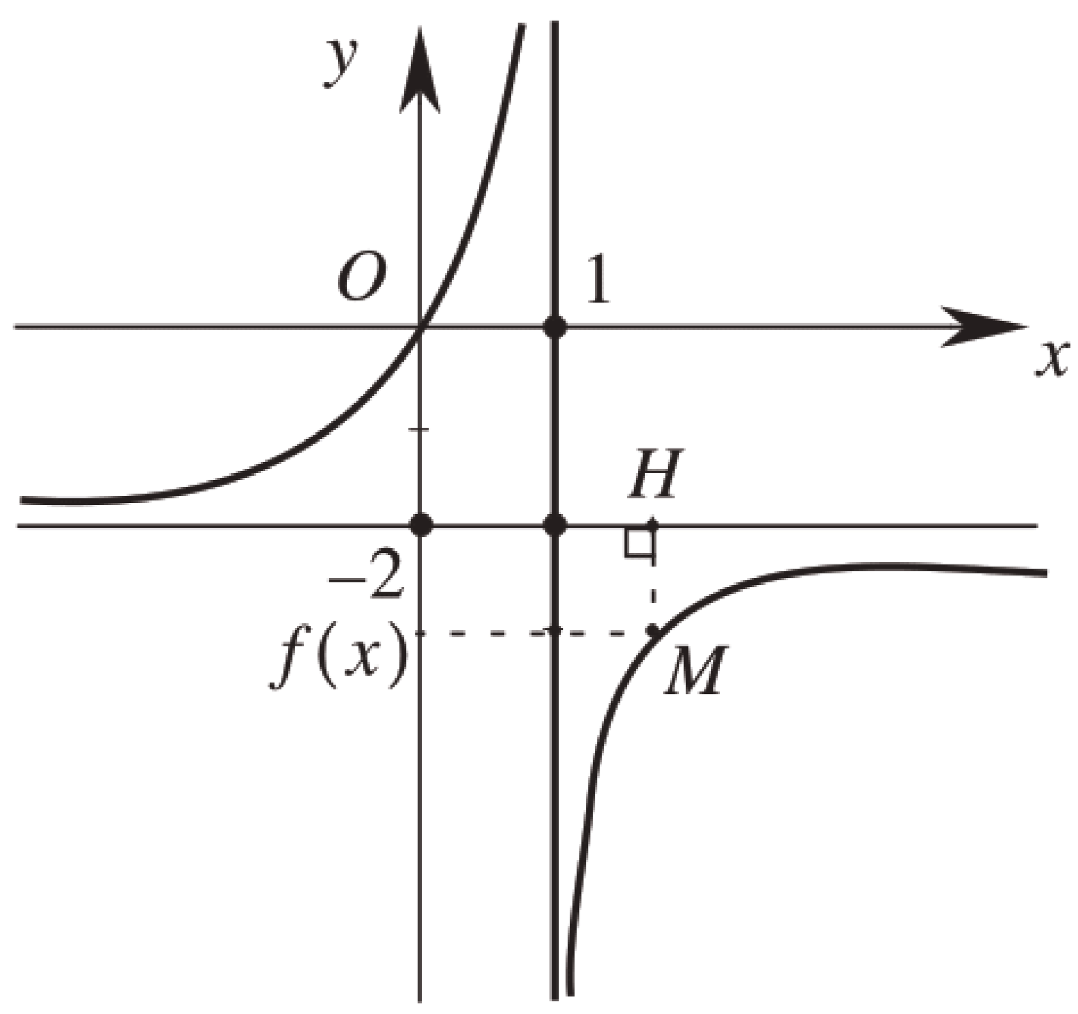
ឧទាហរណ៍ គេឱ្យអនុគមន៍ $y = f(x) = \dfrac{-2x}{x-1}$ ។

គេអាចសរសេរ $f(x) = \dfrac{-2x}{x\left(1-\frac{1}{x}\right)} = \dfrac{-2}{1-\frac{1}{x}}$ បើ $x \neq 0$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -2$ ព្រោះ $\lim_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x} = 0$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -2$ ព្រោះ $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ ។

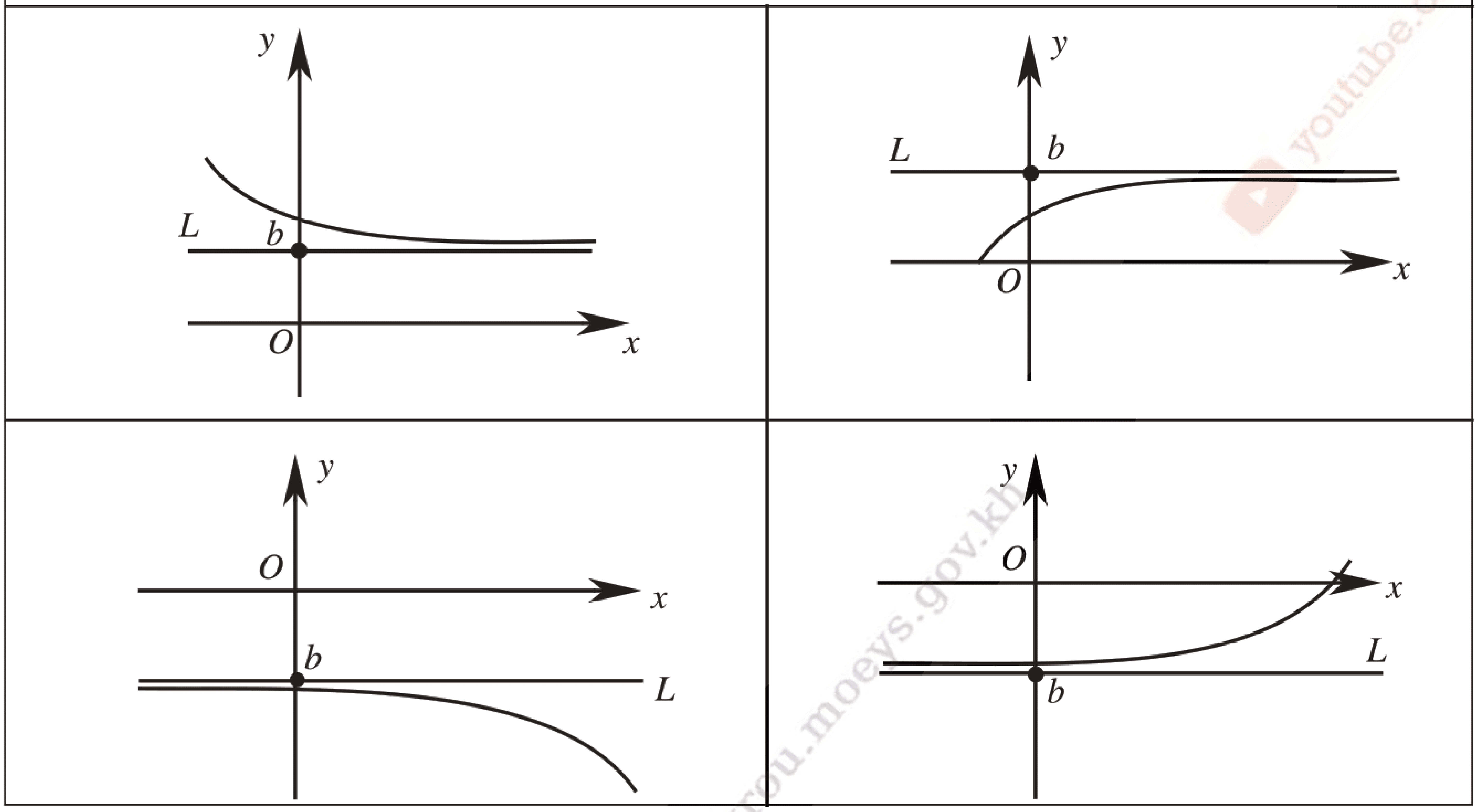
ក្នុងករណីនេះ ចម្ងាយ MH ពីចំណុច M ទៅបន្ទាត់ $L : y = -2$ ខិតជិតសូន្យ កាលណាចំណុច M រត់លើក្រាបនៃ f ទៅឆ្ងាយអនន្ត ។



គេថាបន្ទាត់ $L : y = -2$ ជាអាស៊ីមតូតដេកនៃក្រាបតាង f ។

ជាទូទៅ បន្ទាត់ L មានសមីការ $y = b$ ជាអាស៊ីមតូតដេកនៃក្រាបតាងអនុគមន៍ $y = f(x)$ កាលណា $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = b$ ឬ $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = b$ ។

ករណី $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = b$



លំហាត់គំរូ រកអាស៊ីមតូតដេកនៃក្រាបតាង $y = \dfrac{2x+3}{x-1}$ ។

ចម្លើយ - ***ជំហានទី 1*** : ពិនិត្យដឺក្រេនៃភាគយកនិងភាគបែង :

ដឺក្រេភាគយក ស្មើដឺក្រេភាគបែង ។

ដូចនេះក្រាបតាងអនុគមន៍មានអាស៊ីមតូតដេក ។

- ***ជំហានទី 2*** : រកលីមីតនៃអនុគមន៍នៅត្រង់អនន្ត

$$\frac{2x+3}{x-1} = \frac{x\left(2+\frac{3}{x}\right)}{x\left(1-\frac{1}{x}\right)} = \frac{2+\frac{3}{x}}{1-\frac{1}{x}} \quad \text{បើ} \quad x \neq 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} y = \lim_{x \to +\infty} \frac{2+\frac{3}{x}}{1-\frac{1}{x}} = 2 \quad \text{ព្រោះ} \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0 \text{ ។}$$

ដូចនេះ បន្ទាត់មានសមីការ $y = 2$ ជាអាស៊ីមតូតដេកនៃក្រាប ។

សម្គាល់ បើដឺក្រេភាគយកតូចជាង ឬស្មើដឺក្រេភាគបែង នោះក្រាបនៃអនុគមន៍ប្រភាគសនិទានមានអាស៊ីមតូតដេក ហើយក្រៅពីនេះក្រាបគ្មានអាស៊ីមតូតដេកទេ ។

ប្រតិបត្តិ រកអាស៊ីមតូតដេកនៃក្រាបតាងអនុគមន៍ខាងក្រោម :

ក. $y = \dfrac{x+2}{1-2x}$

ខ. $y = \dfrac{x-1}{x^2+1}$ ។

3.2 អថិរភាពនិងក្រាបនៃអនុគមន៍ $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ $(a \neq 0,\ ad-bc \neq 0)$

ឧទាហរណ៍ សិក្សាអថិរភាពនិងសង់ក្រាបនៃ $f(x) = \dfrac{2x-1}{x+1}$ $(ad-bc>0)$ ។

ចម្លើយ - ដែនកំណត់ : អនុគមន៍ f មានន័យចំពោះ $x \neq -1$: $D = \mathbb{R} - \{-1\}$ ។

- ទិសដៅអថិរភាព

• ដេរីវេ : $f'(x) = \dfrac{(2x-1)'(x+1)-(2x-1)(x+1)'}{(x+1)^2} = \dfrac{3}{(x+1)^2}$

• សញ្ញានៃ $f'(x)$: ដោយ $(x+1)^2 > 0$ ចំពោះ $x \neq -1$ នោះ $f'(x) > 0$ ចំពោះ $x \neq -1$ ។

• តម្លៃបរមាធៀប : f ជាអនុគមន៍កើនជានិច្ចលើ D ហើយគ្មានបរមាទេ ។

- លីមីតនិងអាស៊ីមតូត

$$\lim_{x \to (-1)^-} f(x) = \lim_{x \to (-1)^-} \frac{2x-1}{x+1} = +\infty \quad \text{ព្រោះ} \quad \lim_{x \to (-1)^-} (2x-1) = -3$$

$$\lim_{x \to (-1)^-} (x+1) = 0^- \ \text{។}$$

$$\lim_{x \to (-1)^+} f(x) = \lim_{x \to (-1)^+} \frac{2x-1}{x+1} = +\infty \quad \text{ព្រោះ} \quad \lim_{x \to (-1)^+} 2x-1 = -3 \ \text{។}$$

ដូចនេះ បន្ទាត់មានសមីការ $x = -1$ ជាអាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាប ។

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm} \frac{x\left(2-\frac{1}{x}\right)}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{2-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}} = 2 \quad \text{ព្រោះ} \quad \lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{x} = 0 \ \text{។}$$

ដូចនេះ បន្ទាត់មានសមីការ $y = 2$ ជាអាស៊ីមតូតដេកនៃក្រាប ។

- តារាងអថេរភាព

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$+$	
$f(x)$	2 ↗	$+\infty$	‖	$-\infty$ ↗	2

- ក្រាប

• ចំណុចប្រសព្វរវាងក្រាបនឹងអ័ក្ស ៖ $x = 0$ គេបាន $y = -1$

$y = 0$ គេបាន $2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{2}$ ។

• ផ្ចិតឆ្លុះនៃក្រាប ៖ អាស៊ីមតូតទាំងពីរកាត់គ្នាត្រង់ចំណុច $S(-1,\ 2)$ ។

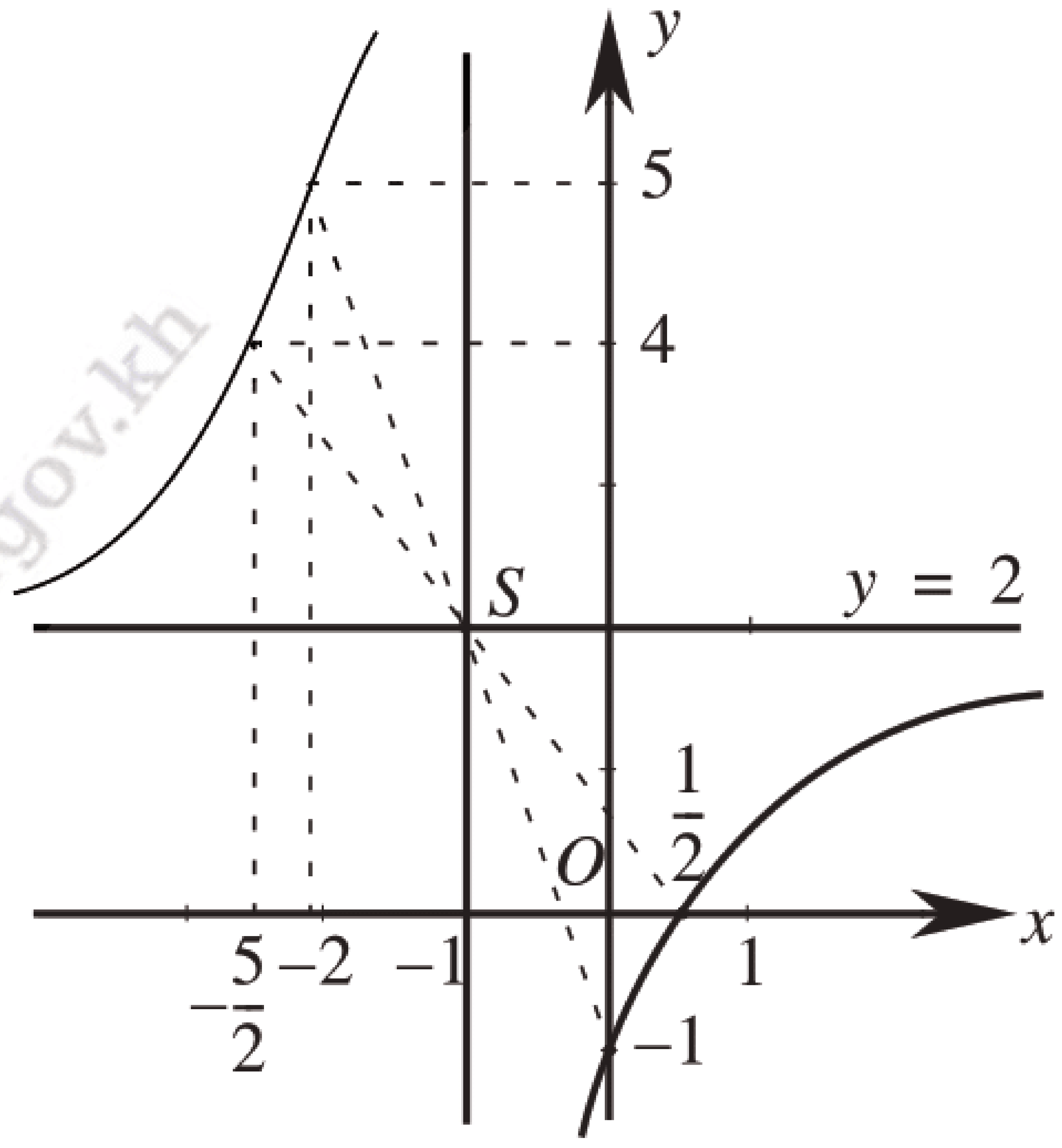
តាមបំលែងកិលវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{OS}$ គេបានរូបមន្តប្តូរតម្រុយ $\begin{cases} x = X - 1 \\ y = Y + 2 \end{cases}$

សមីការបង្រួម ៖ $y = \dfrac{2x-1}{x+1}$

$Y + 2 = \dfrac{2(X-1)-1}{X-1+1} = \dfrac{2X-3}{X} = 2 - \dfrac{3}{X}$

$Y = -\dfrac{3}{x}$ ជាអនុគមន៍សេសនៃ X ។

ដូចនេះ $S(-1,\ 2)$ ជាផ្ចិតឆ្លុះនៃក្រាបតាងអនុគមន៍ ។



ករណីទូទៅ ៖ សិក្សាអថេរភាពនិងក្រាបនៃ $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ ដែល $c \neq 0$ និង $ad - bc \neq 0$

- ដែនកំណត់ ៖ $D = \mathbb{R} - \left\{-\dfrac{d}{c}\right\}$ ។

- ទិសដៅអថេរភាព

• ដេរីវេ $y' = \dfrac{ad-bc}{(cx+d)^2}$

• សញ្ញានៃ y' ៖បើ $ad - bc > 0$ នោះ $y' > 0$ ហើយអនុគមន៍កើនលើ D និងគ្មានបរមា ។

បើ $ad - bc < 0$ នោះ $y' < 0$ ហើយអនុគមន៍ចុះលើ D និងគ្មានបរមា ។

- លីមីត និងអាស៊ីមតូត ៖

$\lim\limits_{x \to \left(-\frac{d}{c}\right)^{\pm}} f(x) = \pm\infty$ នោះបន្ទាត់មានសមីការ $x = -\dfrac{d}{c}$ ជាអាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាបតាងអនុគមន៍ ។

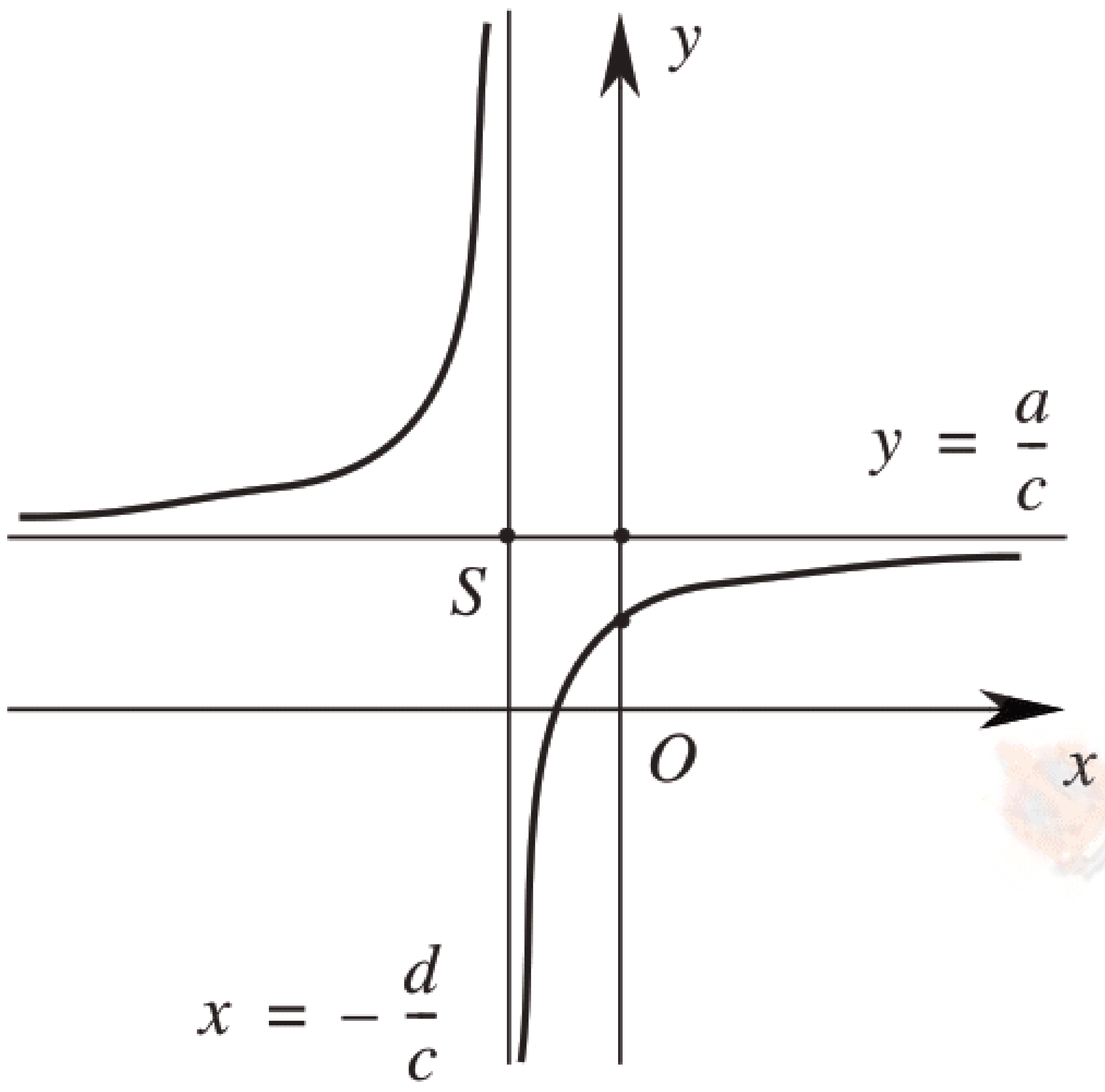
$\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \dfrac{a}{c}$ នោះបន្ទាត់មានសមីការ $y = \dfrac{a}{c}$ ជាអាស៊ីមតូតដេកនៃក្រាបតាងអនុគម៍ ។

- តារាងអថេរភាព

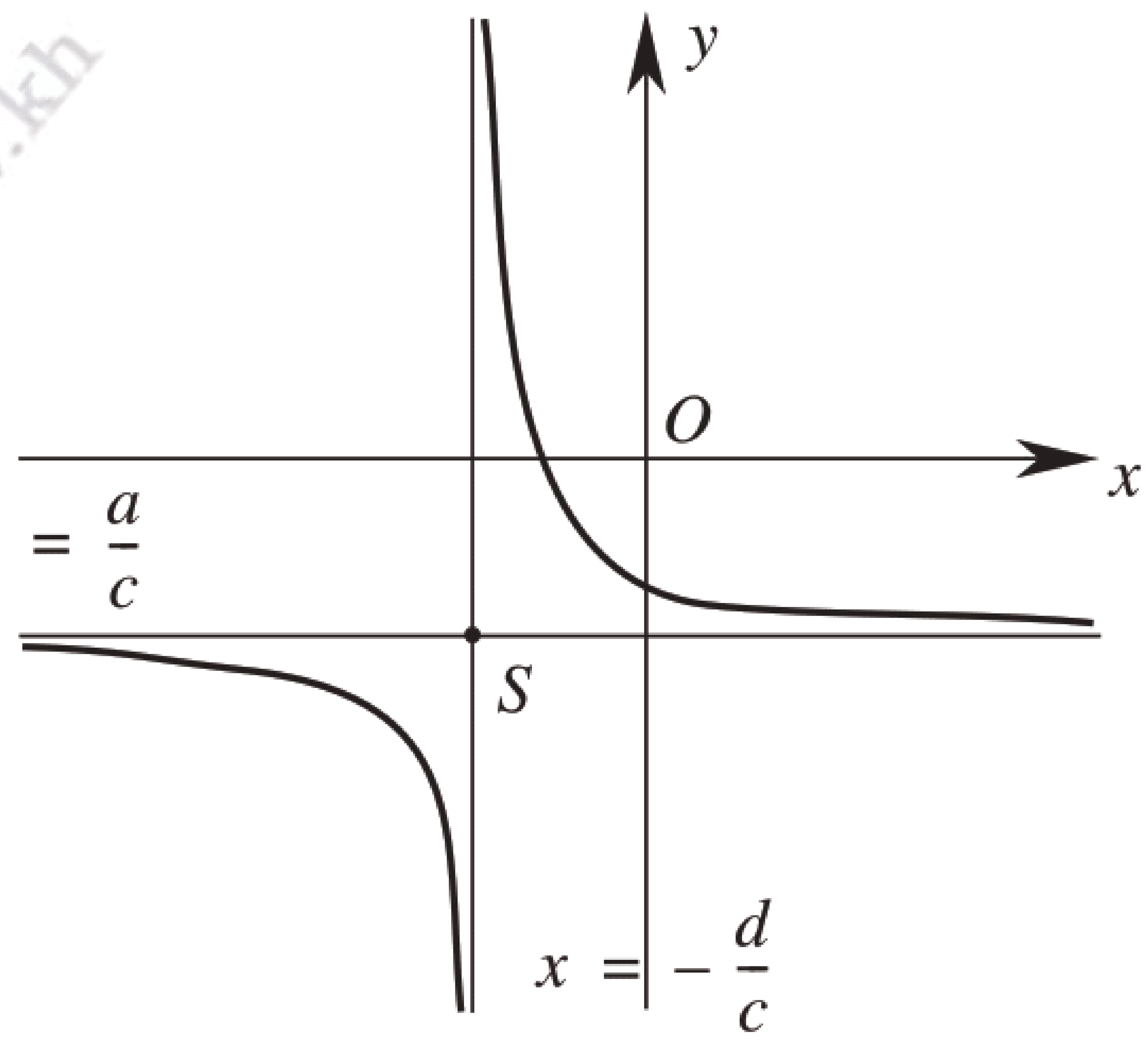
$ad - bc > 0$					$ad - bc < 0$				
x	$-\infty$	$-\frac{d}{c}$		$+\infty$	x	$-\infty$	$-\frac{d}{c}$		$+\infty$
y'	$+$	‖	$+$		y'	$-\infty$	‖	$-\infty$	
y	$\frac{a}{c} \nearrow +\infty$	‖	$-\infty \nearrow \frac{a}{c}$		y	$\frac{a}{c} \searrow -\infty$	‖	$+\infty \searrow \frac{a}{c}$	

- ក្រាប ៖ អាស៊ីមតូតឈរ $x = -\frac{d}{c}$ ជួបអាស៊ីមតូតដេក $y = \frac{a}{c}$ ត្រង់ចំណុច $S\left(-\frac{d}{c}, \frac{a}{c}\right)$ ដែលជាផ្ចិតឆ្លុះនៃក្រាបតាងអនុគមន៍ ។

- ករណី $ad - bc > 0$



- ករណី $(ad - bc) < 0$



ប្រតិបត្តិ សិក្សាអថេរភាពនិងសង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម ៖

ក. $y = \frac{x-1}{x+2}$

ខ. $y = \frac{2-x}{2x+1}$ ។

មេរៀនសង្ខេប

- បើ $x \to a$ ហើយ $f(x) \to b$ នោះគេបាន $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$
- $\lim\limits_{x \to a} c = c$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនថេរ c
- $\lim\limits_{x \to a} x = a$
- $\lim\limits_{x \to a} [f(x) \pm g(x)] = \lim\limits_{x \to a} f(x) \pm \lim\limits_{x \to a} g(x)$
- $\lim\limits_{x \to a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim\limits_{x \to a} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to a} g(x)$
- $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x \to a} f(x)}{\lim\limits_{x \to a} g(x)}$ បើ $\lim\limits_{x \to a} g(x) \neq 0$ ។
- បើ $\lim\limits_{x \to x_o^-} f(x) = L$ នោះ L ជាលីមីតខាងឆ្វេងនៃ $y = f(x)$
- បើ $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = R$ នោះ R ជាលីមីតខាងស្តាំនៃ $y = f(x)$
- f មានលីមីតត្រង់ x_0 លុះត្រាតែ $L = R$ ។
- លីមីតនៃពហុធានៅត្រង់អនន្ត គឺជាលីមីតនៃតួដែលមានដឺក្រេធំជាងគេ
- លីមីតនៃប្រភាគសនិទាននៅត្រង់អនន្ត គឺជាផលធៀបរវាងលីមីតនៃតួ ដែលមានដឺក្រេធំជាងគេនៅភាគយកនិងលីមីតនៃតួ ដែលមានដឺក្រេធំជាងគេនៅភាគបែង ។
- ផលធៀប $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ ជាអត្រាបម្រែបម្រួលមធ្យមនៃ $y = f(x)$ កាលណា x បម្រែបម្រួលពី a ទៅ b ។
- $f'(a) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$ ជាដេរីវេនៃអនុគមន៍ $y = f(x)$ នៅត្រង់ $x = a$ ។
- $(c)' = 0$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនថេរ c
- $(x^n)' = nx^{n-1}$ ចំពោះ $n \in \mathbb{N}$
- $[kf(x)]' = kf'(x)$ ដែល K ជាមេគុណថេរ
- $[f(x) \pm g(x)]' = f'x \pm g'(x)$
- $[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
- $\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]' = \dfrac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2}$ បើ $g(x) \neq 0$ ។

$f''(x)$ ជាដេរីវេទី 1 នៃ $f'(x)$ ហើយ $f''(x)$ ជាដេរីវេទី 2 នៃអនុគមន៍ $y = f(x)$ ។

- មេគុណប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់ប៉ះនឹងក្រាបតាង f ត្រង់ (x_0, y_0) :

$$m = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x0)}{x - x_0} = \frac{dy}{dx}(x_0) = f'(x_0)$$ ។

- សមីការបន្ទាត់ប៉ះនឹងក្រាបតាង f ត្រង់ (x_0, y_0) :

$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$ ឬ $y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0$ ។

- ទិសដៅអថិរភាពនៃអនុគមន៍ :

f ជាអនុគមន៍កើននៅលើចន្លោះ (a, b) លុះត្រាតែ$f'(x) > 0$ គ្រប់ $x \in (a, b)$

f ជាអនុគមន៍ចុះនៅលើចន្លោះ (a, b) លុះត្រាតែ $f'(x) < 0$ គ្រប់ $x \in (a, b)$

f ជាអនុគមន៍ថេរលើចន្លោះ (a, b) លុះត្រាតែ$f'(x) = 0$ គ្រប់ $x \in (a, b)$ ។

- អតិបរមាធៀបនិងអប្បរមាធៀបនៃអនុគមន៍និងដេរីវេទី 1 :

f មានអតិបរមាធៀបត្រង់ x_0 កាលណា $\begin{cases} f'(x) > 0 & \text{ចំពោះ } x < x_0 \\ f'(x) = 0 & \text{ចំពោះ } x = 0 \\ f'(x) < 0 & \text{ចំពោះ } x > x_0 \end{cases}$ ។

f មានអប្បបរមាធៀបត្រង់ x_0 កាលណា $\begin{cases} f'(x) < 0 & \text{ចំពោះ } x < x_0 \\ f'(x) = 0 & \text{ចំពោះ } x = 0 \\ f'(x) > 0 & \text{ចំពោះ } x > x_0 \end{cases}$ ។

- អតិបរមាធៀបនិងអប្បបរមាធៀបនៃអនុគមន៍ និងដេរីវេទី 2

f មានអតិបរមាធៀបត្រង់ x_0 កាលណា $\begin{cases} f'(x_0) = 0 \\ f''(x_0) < 0 \end{cases}$ ។

f មានអតិបរមាធៀបត្រង់ x_0 កាលណា $\begin{cases} f'(x_0) = 0 \\ f''(x_0) > 0 \end{cases}$ ។

- ចំណុច $I(x_0, y_0)$ ជាចំណុចរបត់នៃខ្សែកោងតាង f កាលណាខ្សែកោងប៉ោង (ឬផត) លើ $[a, x_0]$ ហើយផត (ឬប៉ោង) លើ $[x_0, b]$ ។

- របៀបរកចំណុចរបត់នៃខ្សែកោងតាង f

ជំហានទី1 : រក $f''(x)$

ជំហានទី2 : ដោះស្រាយសមីការ $f''(x) = 0$

ជំហានទី3 : សិក្សាសញ្ញានៃ $f''(x)$ ។

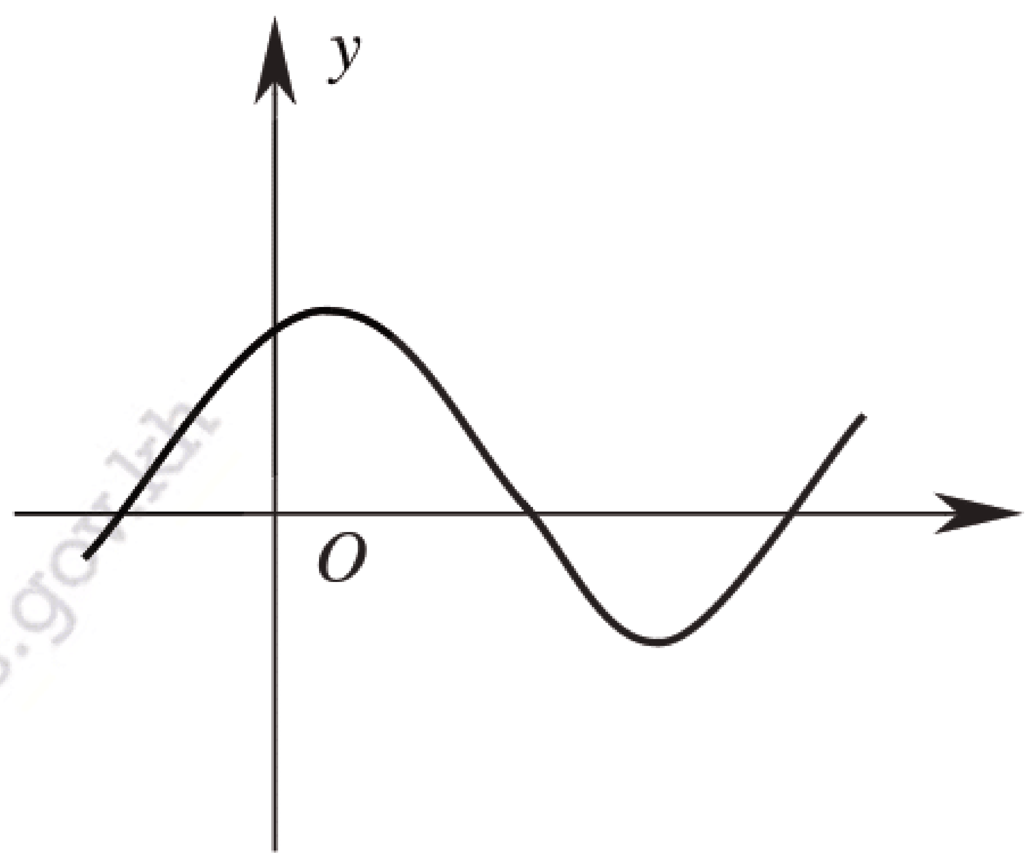
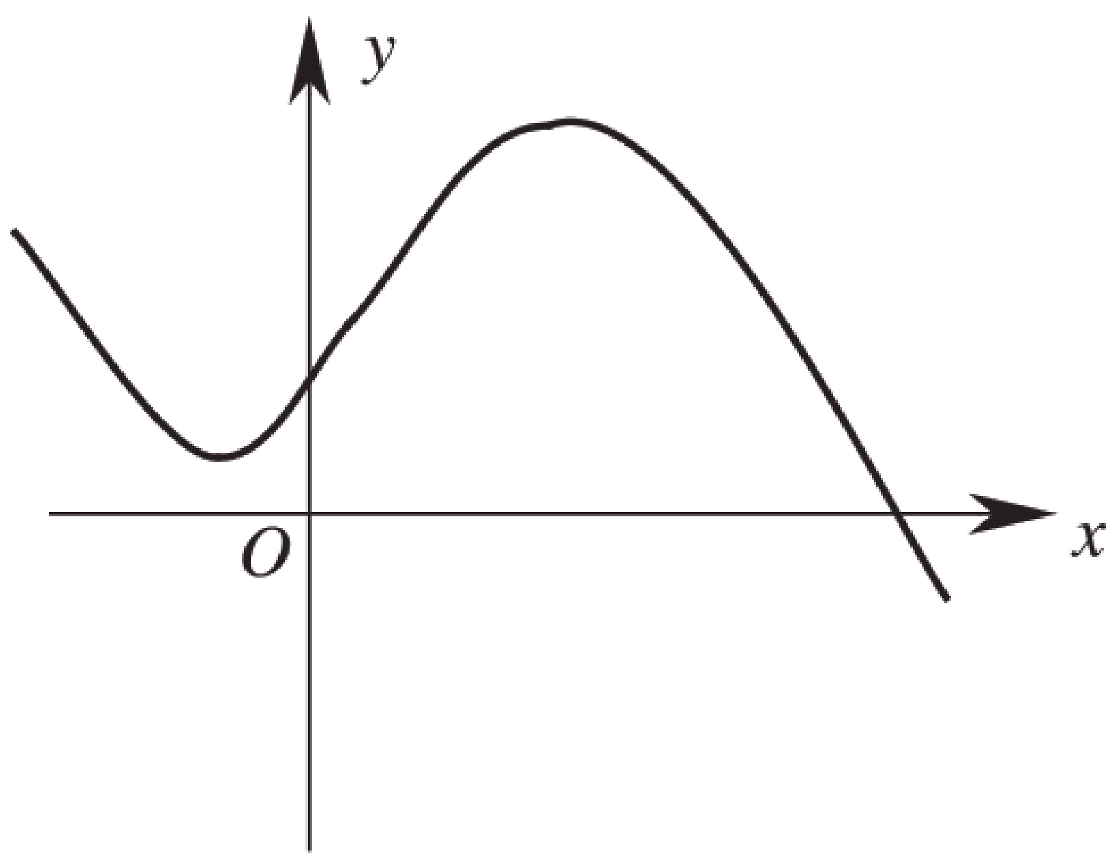
ល្បឿននៃចលនា : ចំណុច $M(x = f(t))$ មានល្បឿន $V = \frac{dx}{dt} = f'(t)$ ។

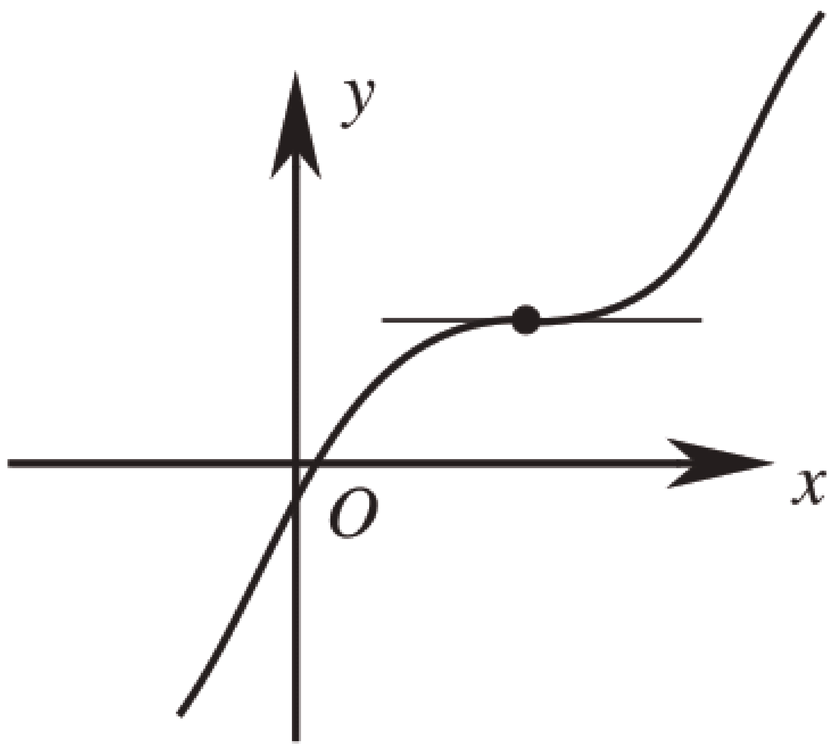
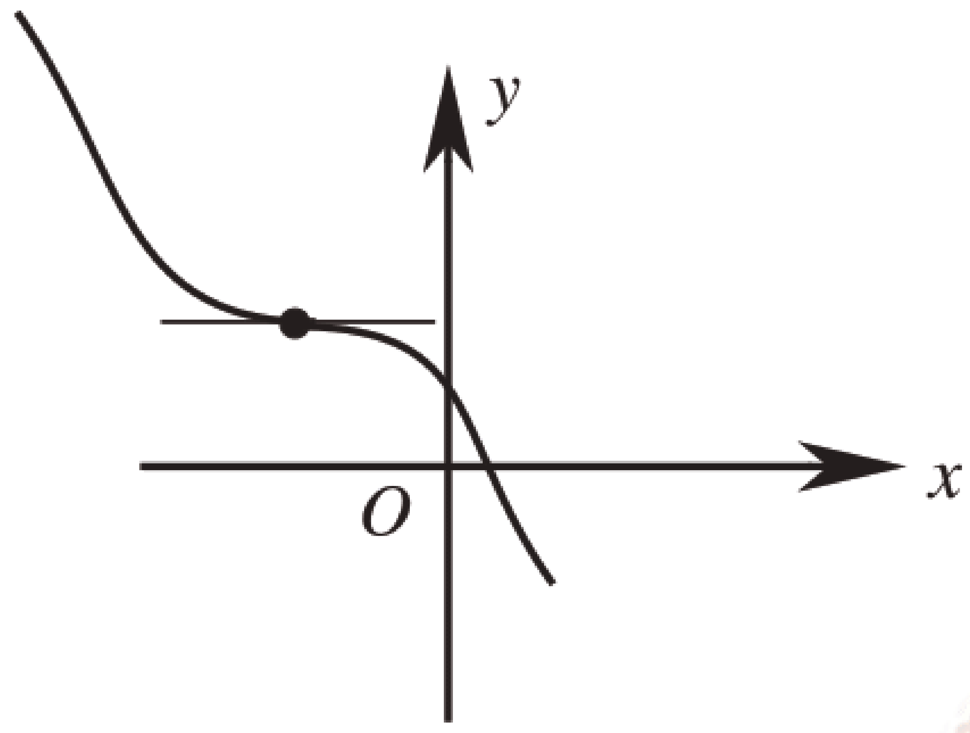
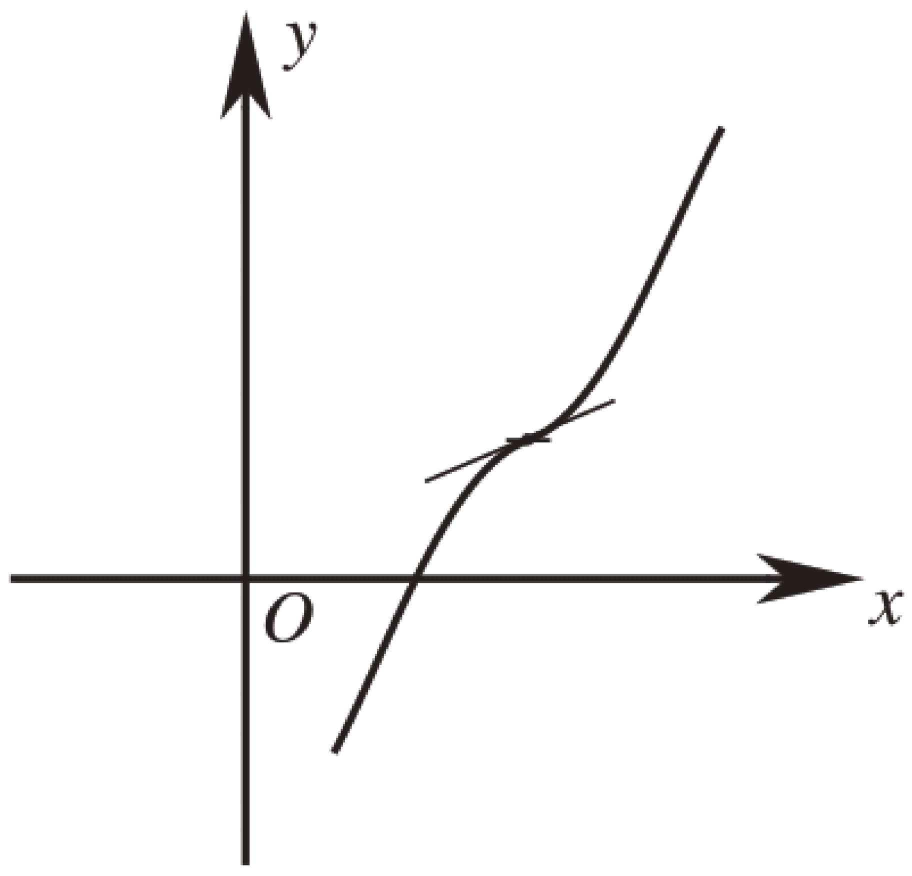
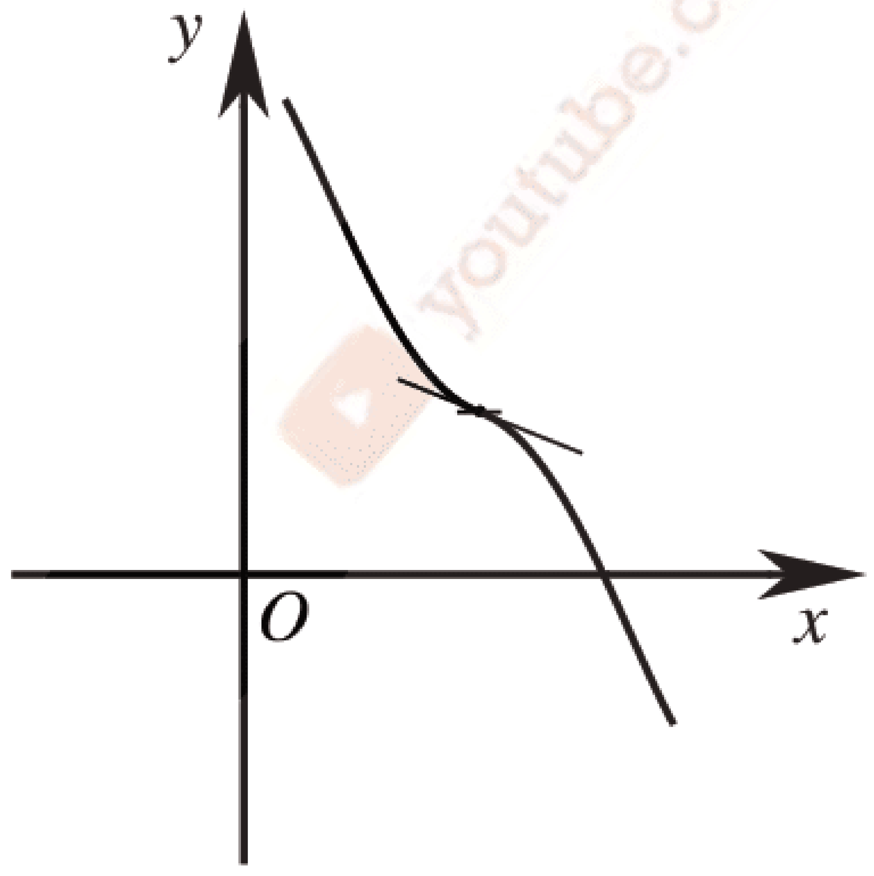
- អថិរភាពនិងក្រាបនៃអនុគមន៍ $y = ax^3 + bx^2 + cx + d \quad (a \neq 0)$

• តារាងអថេរភាព

	$a > 0$	$a < 0$
$y' = 0$ មានឫសពីរផ្សេងគ្នាជាចំនួនពិត	$\begin{array}{c\|ccccccc} x & -\infty & & x_1 & & x_2 & & +\infty \\ \hline y' & & + & 0 & - & 0 & + & \\ \hline y & & & y_1 & & & & +\infty \\ & & \nearrow & & \searrow & & \nearrow & \\ & -\infty & & & & y_2 & & \end{array}$	$\begin{array}{c\|ccccccc} x & -\infty & & x_1 & & x_2 & & +\infty \\ \hline y' & & - & 0 & + & 0 & - & \\ \hline y & +\infty & & & & y_2 & & \\ & & \searrow & & \nearrow & & \searrow & \\ & & & y_1 & & & & -\infty \end{array}$
$y' = 0$ មានឫសឌុបជាចំនួនពិត	$\begin{array}{c\|ccccc} x & -\infty & & x_0 & & +\infty \\ \hline y' & & + & 0 & + & \\ \hline y & & & & & +\infty \\ & & \nearrow & y_0 & \nearrow & \\ & -\infty & & & & \end{array}$	$\begin{array}{c\|ccccc} x & -\infty & & x_0 & & +\infty \\ \hline y' & & - & 0 & - & \\ \hline y & +\infty & & & & \\ & & \searrow & y_0 & \searrow & \\ & & & & & -\infty \end{array}$
$y' = 0$ គ្មានឫសជាចំនួនពិត	$\begin{array}{c\|ccc} x & -\infty & & +\infty \\ \hline y' & & + & \\ \hline y & & & +\infty \\ & & \nearrow & \\ & -\infty & & \end{array}$	$\begin{array}{c\|ccc} x & & & \\ \hline y' & & - & \\ \hline y & +\infty & & \\ & & \searrow & \\ & & & -\infty \end{array}$

• ក្រាប

	$a > 0$	$a < 0$
$y' = 0$ មានឫសពីរផ្សេងគ្នាជាចំនួនពិត		

$y' = 0$ មានឫសឌុប ជាចំនួនពិត		
$y' = 0$ គ្មានឫស ជាចំនួនពិត		

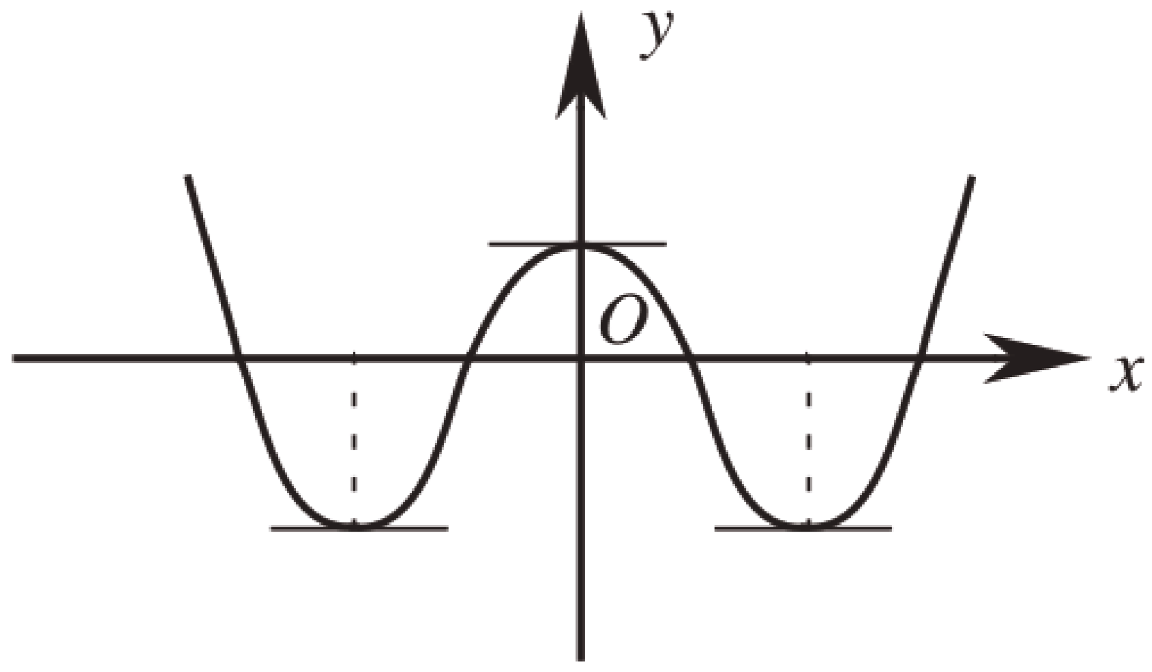
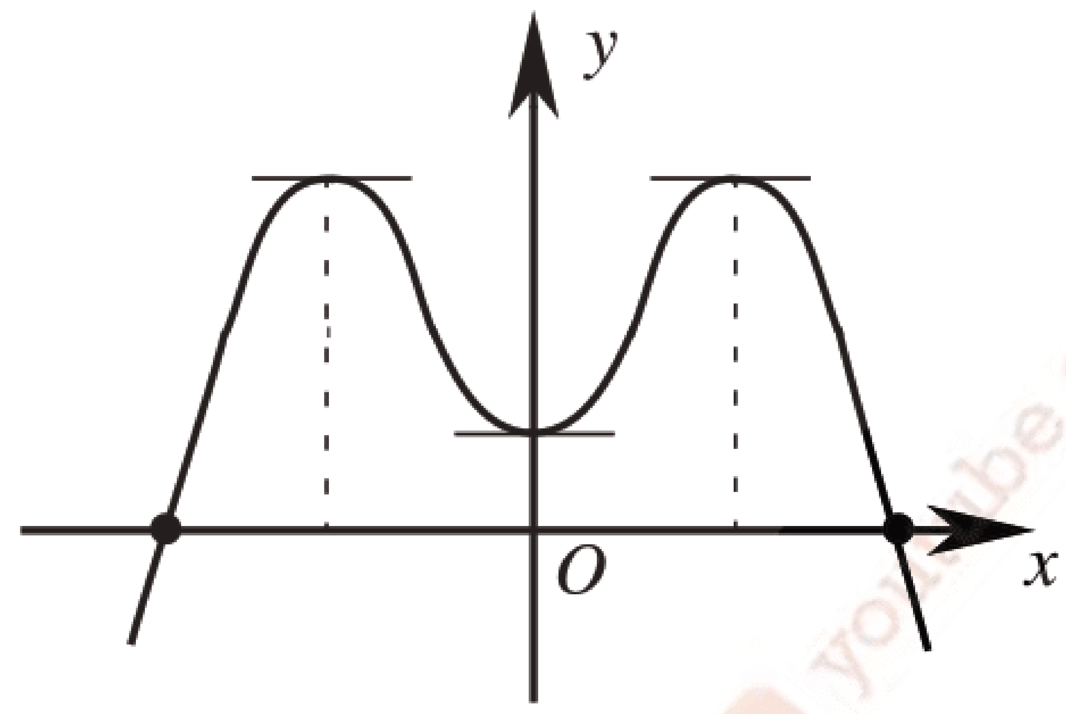
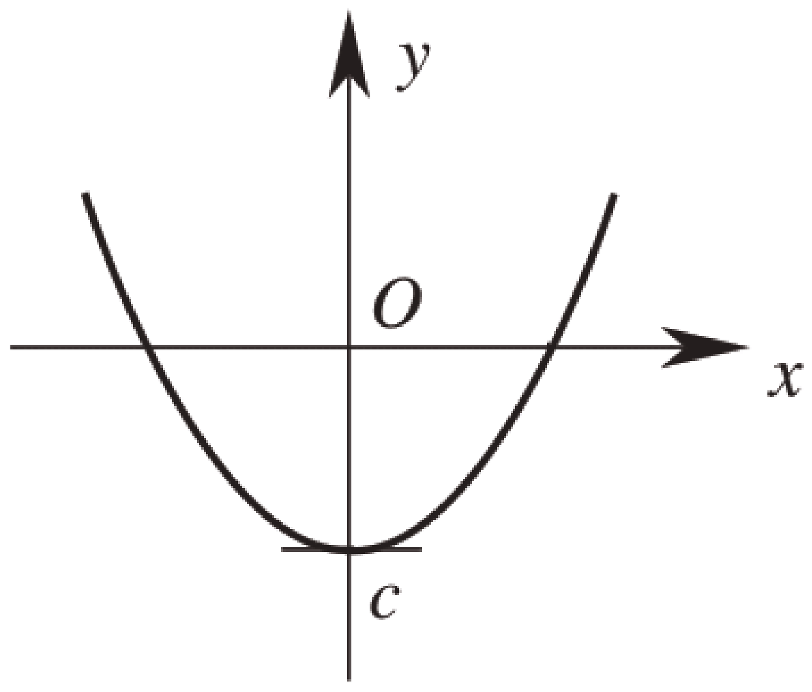
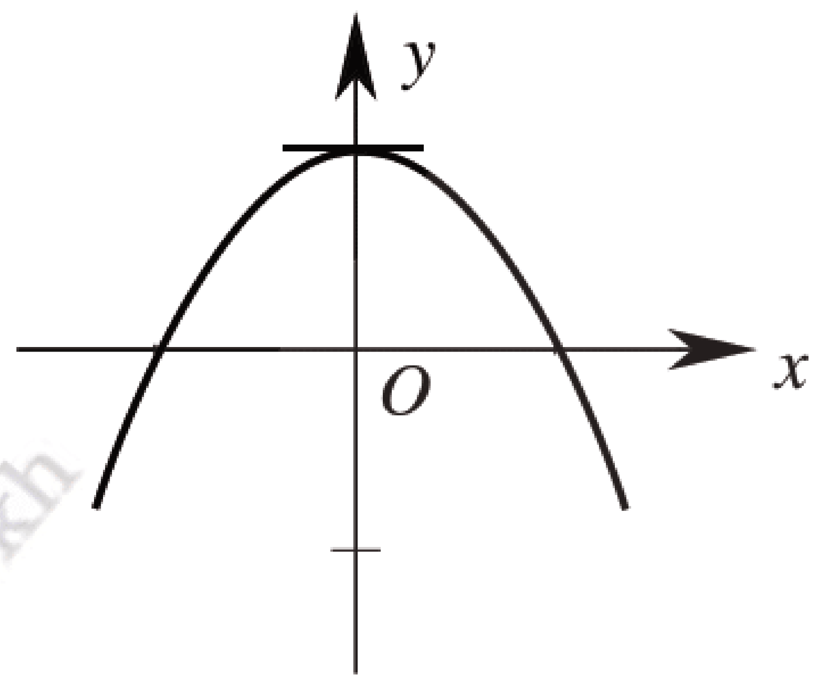
- ចំណុចរបត់ជាផ្ចិតឆ្លុះនៃក្រាប ។

- អថេរភាពនិងក្រាបនៃអនុគមន៍ $y = ax^4 + bx^2 + c \quad (a \neq 0)$

- តារាងអថេរភាព

	$a > 0$	$a < 0$
$y' = 0$ មានឫសបី ផ្សេងគ្នា ជាចំនួនពិត	$\begin{array}{c\|ccccccccc} x & -\infty & & x_1 & & x_2 & & x_3 & & +\infty \\ \hline y' & & - & 0 & + & 0 & - & 0 & + & \\ \hline y & +\infty & \searrow & y_1 & \nearrow & c & \searrow & y_3 & \nearrow & +\infty \end{array}$	$\begin{array}{c\|ccccccccc} x & -\infty & & x_1 & & x_2 & & x_3 & & +\infty \\ \hline y' & & + & 0 & - & 0 & + & 0 & - & \\ \hline y & -\infty & \nearrow & y_1 & \searrow & c & \nearrow & y_3 & \searrow & -\infty \end{array}$
$y' = 0$ មានឫសតែ មួយគត់ ជាចំនួនពិត	$\begin{array}{c\|ccccc} x & -\infty & & 0 & & +\infty \\ \hline y' & & - & 0 & + & \\ \hline y & +\infty & \searrow & c & \nearrow & +\infty \end{array}$	$\begin{array}{c\|ccccc} x & -\infty & & 0 & & +\infty \\ \hline y' & & + & 0 & - & \\ \hline y & -\infty & \nearrow & c & \searrow & -\infty \end{array}$

- ក្រាប

	$a > 0$	$a < 0$
$y' = 0$ មានឫសបី ផ្សេងគ្នា ជាចំនួនពិត		
$y' = 0$ មានឫស មួយគត់ ជាចំនួនពិត		

- អាស៊ីមតូត :
  - បន្ទាត់ $L : x = x_0$ ជាអាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាបតាង $y = f(x)$

    កាលណា $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty$
  - បន្ទាត់ $L : y = b$ ជាអាស៊ីមតូតដេកនៃក្រាបតាង $y = f(x)$

    កាលណា $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = b$
- អថេរភាពនិងក្រាបនៃអនុគមន៍ $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ $\quad (c \neq 0,\ ad - bc \neq 0)$
  - តារាងអថេរភាព

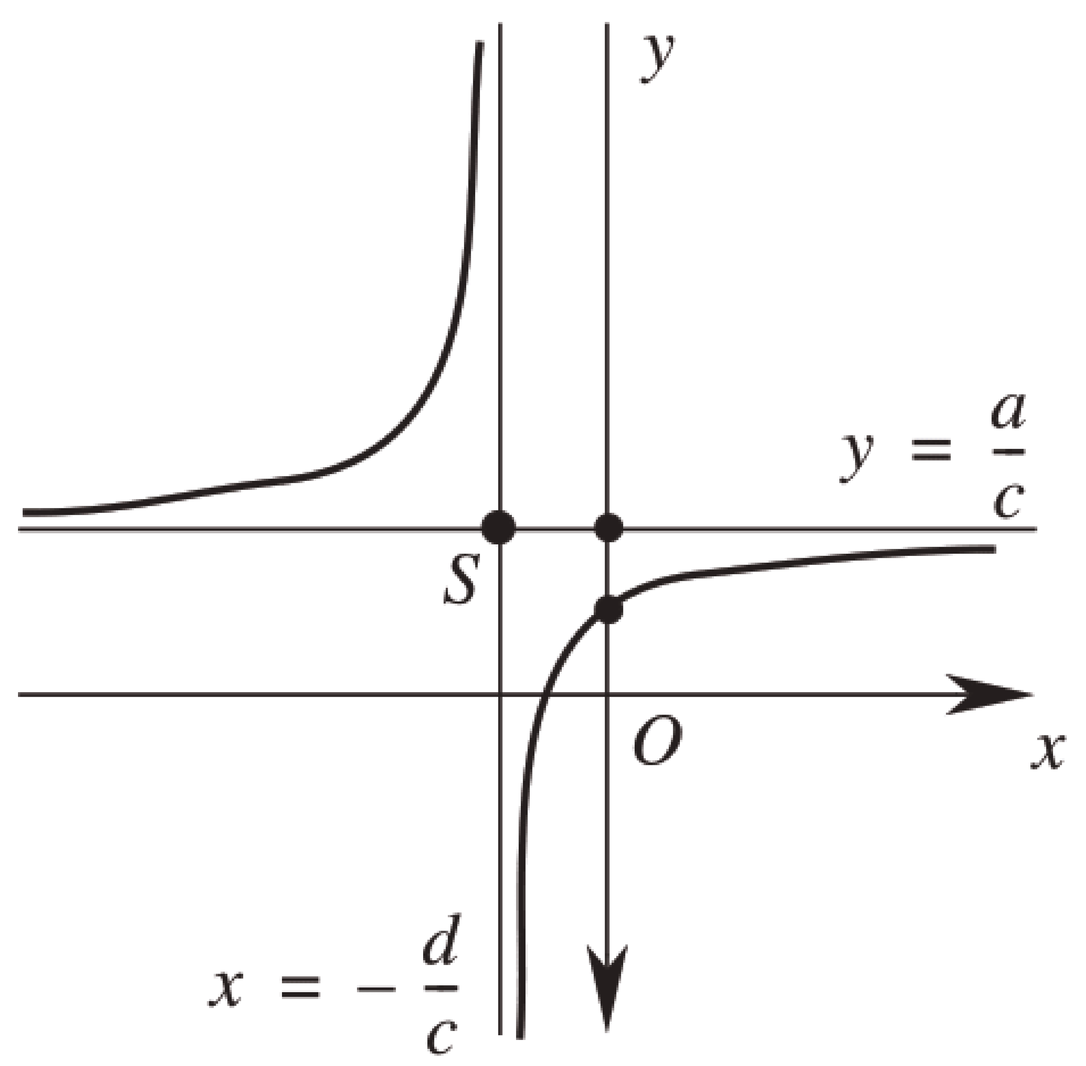
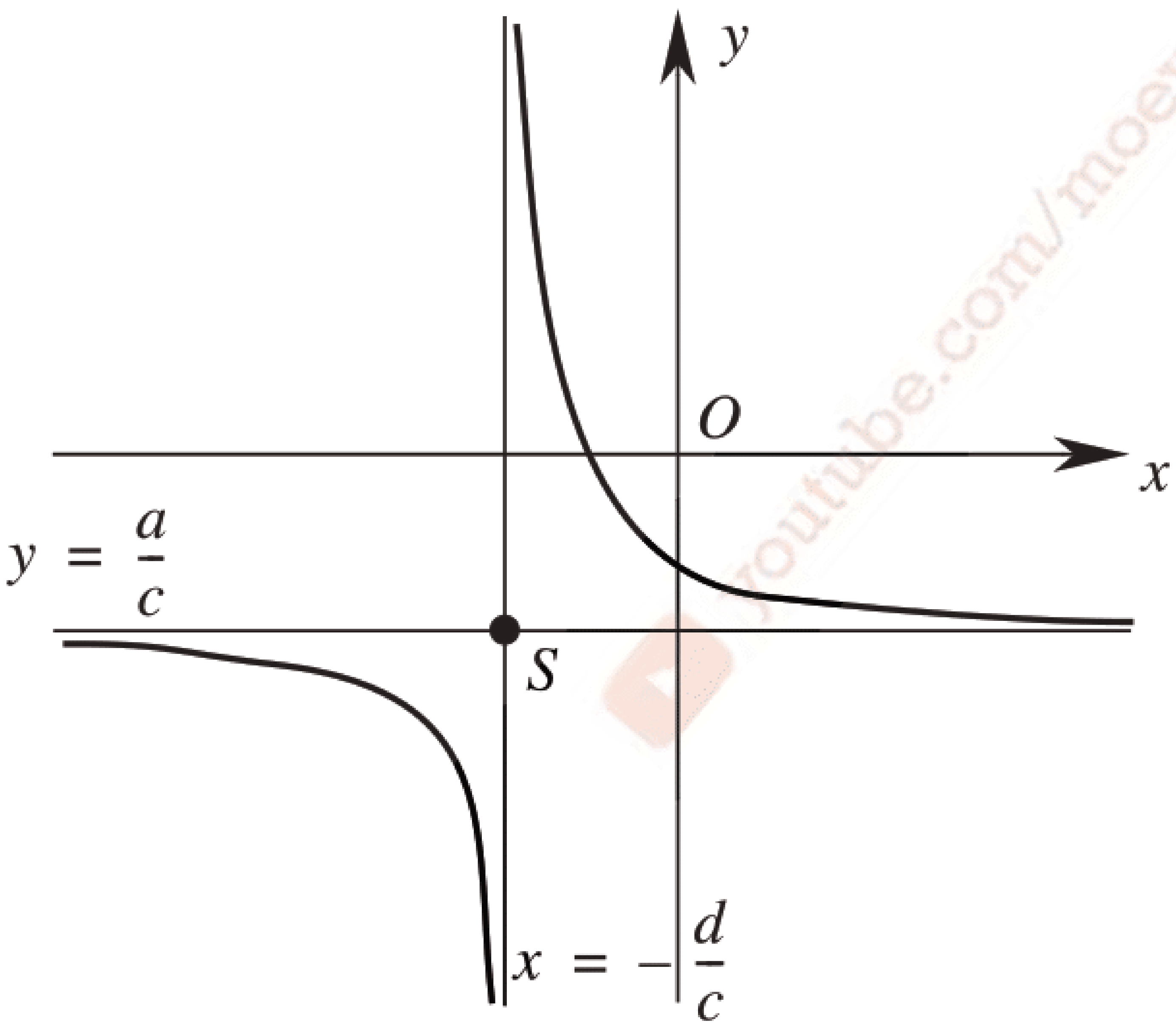
$ad - bc > 0$

x	$-\infty$		$-\dfrac{d}{c}$		$+\infty$
y'		$+$	‖	$+$	
y	$\dfrac{a}{c}$	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	$\dfrac{a}{c}$

$ad - bc < 0$

x	$-\infty$		$-\dfrac{d}{c}$		$+\infty$
y'		$-\infty$	‖	$-\infty$	
y	$\dfrac{a}{c}$	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	$\dfrac{a}{c}$

- ក្រាប

$ad - bc > 0$	$ad - bc < 0$
	

- ចំណុច $S\left(-\frac{d}{c}, \frac{a}{c}\right)$ ជាផ្ចិតឆ្លុះនៃក្រាប ។

លំហាត់

1. សិក្សាអថិរភាពនិងសង់ក្រាបតាងអនុគមន៍ខាងក្រោម :

   ក. $y = x^3 + 4x$

   ខ. $y = -2x^3 - 6x - 8$

   គ. $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 4$

   ឃ. $y = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + x - \frac{1}{3}$

   ង. $y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + 1$ ។

2. អនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x) = x^3 - 3x + 2$ ហើយមានក្រាប C ។

   ក. បង្ហាញថាចំណុច $I(0, 2)$ ជាចំណុចរបត់និងជាផ្ចិតឆ្លុះនៃ C ។

   ខ. រកសមីការបន្ទាត់ប៉ះនឹងក្រាប C ត្រង់ចំណុចរបត់ I ។

   គ. សង់តារាងអថិរភាពនៃ f និងក្រាប C ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ ។

3. អនុគមន៍ $y = x^3 + mx + 5$ កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ហើយ m ជាប៉ារ៉ាម៉ែត្រ ។

ក. រកតម្លៃ m ដើម្បីឱ្យអនុគមន៍មានអតិបរមាធៀបនិងអប្បបរមាធៀប ។

ខ. សិក្សាអថេរភាពនិងសង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ចំពោះ $m = -3$ ។

4. អនុគមន៍ f កំណត់នៅលើ $\mathbb{R}$ ដោយ $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ។

ក. រកតម្លៃនៃលេខមេគុណ a, b, c និង d ដោយដឹងថាអនុគមន៍មានអតិបរមាធៀប $y = 4$ ត្រង់ $x = 1$ ហើយក្រាបប៉ះនឹងអ័ក្សអាប់ស៊ីសត្រង់ $x = 3$ ។

ខ. សិក្សាអថេរភាពនិងសង់ក្រាបតាង $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$ ។

5. អនុគមន៍ $f_a(x) = x^3 - 1 - a(x-1)$ មានក្រាប C_a ទៅតាមតម្លៃប៉ារ៉ាម៉ែត្រ a នីមួយៗ ។

ក. រកតម្លៃ a ដើម្បីឱ្យក្រាប C_a ប៉ះនឹងអ័ក្សអាប់ស៊ីស ។

ខ. សិក្សាអថេរភាពនិងសង់ក្រាបតាងអនុគមន៍ចំពោះតម្លៃ a ដែលរកបាន ។

6. អនុគមន៍ $y = x^3 - x$ មានក្រាប C ។

ក. បង្ហាញថា $A(-1, 0)$ ជាចំណុចប្រសព្វមួយរវាងក្រាប C និងបន្ទាត់ L មានសមីការ $y = a(x+1)$ ។

ខ. រកសមីការបន្ទាត់ប៉ះនឹងក្រាប C ត្រង់ចំណុច A ។

គ. រកតម្លៃ a ដើម្បីឱ្យ L កាត់ក្រាប C ត្រង់ពីរចំណុចផ្សេងគ្នា M_1 និង M_2 ក្រៅពីចំណុច A ។ រកសំណុំចំណុចកណ្ដាល I នៃអង្កត់ $[M_1M_2]$ ។

7. សិក្សាអថេរភាពនិងសង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម ៖

ក. $y = x^4 + 2x^2 - 3$

ខ. $y = -\frac{1}{2}x^4 - x^2 + \frac{3}{2}$

គ. $y = x^4 - 4x^2$

ឃ. $y = x^4 - 2x^2 + 2$

ង. $t = 2x^2 - x^4$

ច. $y = x^4 - 6x^2 + 5$ ។

8. គេឱ្យអនុគមន៍ $y = x^4 - mx^2 + 3$ ដែល m ជាប៉ារ៉ាម៉ែត្រ ។

ក. រកតម្លៃ m ដើម្បីឱ្យក្រាបនៃអនុគមន៍នេះមានចំណុចរបត់ពីរ ។

ខ. រកតម្លៃ m ដើម្បីឱ្យក្រាបនៃអនុគមន៍គ្មានចំណុចរបត់ ។

9. អនុគមន៍ $y = \frac{1}{2}x^4 - 3x^2 + \frac{3}{2}$ មានក្រាប C ។

ក. សង់តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍នេះ ។ រកចំណុចរបត់នៃក្រាប C ។

ខ. រកសមីការបន្ទាត់ប៉ះត្រង់ចំណុចរបត់ ។

គ. សង់បន្ទាត់ប៉ះនោះ និងក្រាប C ។

ឃ. រកសមីការបន្ទាត់ទាំងអស់ដែលកាត់តាមចំណុច $A\left(0,\ \frac{3}{2}\right)$ ហើយប៉ះនឹងក្រាប C ។

10. អនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x) = -x^4 + 2mx^2 - 2m + 1$ ហើយមានក្រាប C_m ។

ក. រកតម្លៃ m ដើម្បីឱ្យអនុគមន៍ f មានអតិបរមាធៀបពីរនិងអប្បបរមាធៀបមួយ ។

ខ. សិក្សាអថេរភាព និងសង់ក្រាបតាងអនុគមន៍ f ចំពោះ $m = 5$ ។

គ. រកតម្លៃ m ដើម្បីឱ្យក្រាប C_m កាត់អ័ក្សអាប់ស៊ីសត្រង់បួនចំណុចផ្សេងគ្នា ។

- អនុគមន៍ $y = \dfrac{ax+b}{cx+d} \quad (c \neq 0,\ ad - bc \neq 0)$

11. បង្ហាញថាបន្ទាត់ដែលបានឱ្យ គឺជាអាស៊ីមតូតនៃក្រាបតាង f :

ក. $f(x) = \dfrac{2x+1}{x}$ បន្ទាត់ $L_1 : x = 0$, $L_2 : y = 2$ ។

ខ. $f(x) = \dfrac{-3x+1}{x+2}$ បន្ទាត់ $L_1 : x = -2$, $L_2 : y = -3$ ។

12. សិក្សាអថេរភាពនិងសង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម :

ក. $y = \dfrac{1}{x-3}$

ខ. $y = \dfrac{x+1}{x-1}$

គ. $y = \dfrac{2x}{x+1}$

ឃ. $y = \dfrac{1-2x}{2(x-2)}$

ង. $y = \dfrac{2-3x}{1-x}$

ច. $y = \dfrac{1-x}{x-3}$ ចំពោះ $x \in (3,\ +\infty)$

ឆ. $y = \dfrac{x-2}{2x}$ ចំពោះ $x \in (-\infty,\ 2]$ ។

13. អនុគមន៍ $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ មានក្រាប H ។

ក. រកមេគុណ a, b, c និង d ដោយដឹងថា ក្រាប H កាត់តាមចំណុច $E(-3, -1)$, $F(0, 5)$ និង $G(3, 2)$ ។

ខ. រកមេគុណ a, b, c និង d ដោយដឹងថា បន្ទាត់ $L_1 : x = 2$ ជាអាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាប H ហើយបន្ទាត់ $L_2 : y = \frac{3}{2}x+1$ ប៉ះនឹងក្រាប H ត្រង់ចំណុច $A(0, 1)$ ។

14. អនុគមន៍ $y = \dfrac{x+b}{cx+d}$ មានក្រាប H ។

ក. រកមេគុណ b, c, d ដើម្បីឱ្យក្រាប H កាត់អ័ក្សអាប់ស៊ីសត្រង់ $x = -1$ កាត់អ័ក្សអរដោនេត្រង់ $y = -1$ និងកាត់តាម $A(2, 3)$ ។

ខ. សិក្សាអថិរភាពនិងសង់ក្រាប H នៃ f ។

គ. កំណត់ចំណុចប្រសព្វរវាងក្រាប H និងបន្ទាត់ $L : y = x$ ។

15. គេឱ្យអនុគមន៍ $y = \dfrac{2px+1}{x-p}$ ដែលមានក្រាប H_p និង p ជាប៉ារ៉ាម៉ែត ។

ក. សិក្សាអថិរភាពនិងសង់ក្រាប H_1 នៃអនុគមន៍ចំពោះ $p = 1$ ។

ខ. រកកូអរដោនេនៃចំណុចប៉ះ A រវាងក្រាប H_1 និងបន្ទាត់តែមានមេគុណប្រាប់ទិសស្មើ $-\frac{1}{3}$ ។

គ. រកសមីការអាស៊ីមតូតទាំងពីរនៃក្រាប H_p ។

រកសំណុំចំណុចនៃចំណុចប្រសព្វរវាងអាស៊ីមតូតទាំងពីរ កាលណា p ប្រែប្រួលតម្លៃ ។

ជំពូក 6

ប្រូបាប

❶ ប្រូបាប

ការគណនាប្រូបាប គឺផ្នែកមួយដែលមានការទាក់ទាញអារម្មណ៍ខ្លាំងជាងគេនិងមានការពិបាកតិចជាងគេនៅក្នុងគណិតវិទ្យា ។ បញ្ហាទាក់ទងនឹងល្បែងចៃដន្យ ជាពិសេសការបោះឆ្នោតជ្រើសរើសតំណាងរាស្ត្រក៏ដូចជាបញ្ហាទាក់ទងនឹងការរស់នៅប្រចាំថ្ងៃរបស់មនុស្សក្នុងពិភពលោកជាប្រភពនៃការគណនាប្រូបាប ។ ការសិក្សាស្រាវជ្រាវពីការគណនាប្រូបាបត្រូវបានយកចិត្តទុកដាក់ដោយគណិតវិទូជាច្រើនដូចជា Blaise, Pascal, Cardan, Feunat, Bernoulli, Laplace, Poisson, . . . ជាពិសេសគណិតវិទូរុស្ស៊ី AN Kolmogorov នៅឆ្នាំ 1933 បានសរសេររចនាសម្ព័ន្ធស្វ័យសត្យជាទ្រឹស្ដីប្រូបាប ។

មេរៀនទី 1

ប្រូបាប

1. លំហសំណាកនិងព្រឹត្តិការណ៍

វត្ថុបំណង

- កំណត់ន័យរបស់ពាក្យ : ពិសោធន៍ចៃដន្យ វិញ្ញាសា លំហសំណាកនិងព្រឹត្តិការណ៍
- បង្ហាញប្រភេទនៃព្រឹត្តិការណ៍ឯកធាតុ ព្រឹត្តិការណ៍ប្រាកដ ព្រឹត្តិការណ៍មិនអាចមាន ព្រឹត្តិការណ៍ផលបូក ផលគុណ ព្រឹត្តិការណ៍មិនចុះសម្រុងនិងផ្ទុយ
- កំណត់និយមន័យប្រូបាប
- កំណត់រូបមន្តនិងលក្ខណៈនៃប្រូបាប
- ប្រើរូបមន្ត ចម្លាស់និងបន្សំដើម្បីគណនាប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍មួយ ។

1.1 ពិសោធន៍ចៃដន្យ - វិញ្ញាសា

ឧទាហរណ៍ 1 នៅពេលដែលគេបោះកាក់មួយ គេមិនអាចដឹងច្បាស់ជាមុនថាកាក់នោះផ្ងាឡើងខាងរូប ឬមួយក៏ខាងលេខនោះទេ ។

នៅពេលដែលគេបោះគ្រាប់ឡុកឡាក់មួយគ្រាប់ គេក៏មិនអាចដឹងជាមុនថាមុខលើនៃគ្រាប់ឡុកឡាក់ តាងឱ្យលេខណាមួយក្នុងចំណោមលេខពី 1 ដល់ 6 ។

ពិសោធន៍មួយដែលគេធ្វើដោយមិនបានដឹងជាមុនថាមានលទ្ធផលអ្វីមួយប្រាកដកើតឡើងនោះហៅថា ពិសោធន៍ចៃដន្យ ។

ឧទាហរណ៍ 2 បើគេយកកាក់មួយមកពិសោធន៍ដោយកំណត់ជាក់លាក់ថា គេបោះកាក់ 1 ដង ឬ 2 ដង ឬ 3 ដង ... នោះគេថា គេធ្វើវិញ្ញាសាបោះកាក់មួយ ចំនួន 1 ដង ឬ 2 ដង ឬ 3 ដង ... ។

ឧទាហរណ៍ 3 បើគេដាក់សន្លឹកប័ណ្ណ 4 សន្លឹកចុះលេខ 1, 2, 3 និង 4 ក្នុងថង់មួយ រួចគេធ្វើពិសោធន៍ដោយកំណត់សកម្មភាពជាក់លាក់ថា គេចាប់យកប័ណ្ណម្តងមួយៗចំនួន 2 លើកចេញពីថង់ដោយចៃដន្យ ហើយមិនដាក់ប័ណ្ណចូលថង់វិញ ។ គេថាគេធ្វើវិញ្ញាសាមួយ គឺវិញ្ញាសាចាប់យកប័ណ្ណចេញពីថង់ម្តងមួយចំនួន 2 លើក ដោយមិនដាក់វិញ ។

ពិសោធន៍មួយដែលគេកំណត់ធ្វើដោយជាក់លាក់ ក្នុងពិសោធន៍ចៃដន្យមួយហៅថា វិញ្ញាសា ។

1.2 លំហសំណាក

ឧទាហរណ៍ ក្នុងវិញ្ញាសាបោះកាក់មួយចំនួន 2 ដង បើលើកទី 1 គេបោះបានខាងរូបតាងដោយ H និងលើកទី 2 បានខាងលេខតាងដោយ T នោះគេថាគេបានលទ្ធផល (HT) ។ បើលើកទី 1 បោះបានខាង T និងលើកទី 2 បានខាង T នោះគេបានលទ្ធផល (TT) ជាលទ្ធផលដែលបោះបានខាង T ទាំង 2 លើក ។

តើក្នុងវិញ្ញាសាបោះកាក់មួយ 2 ដងនេះ គេអាចបានលទ្ធផលទាំងអស់ប៉ុន្មានរបៀប ?

លទ្ធផលដែលអាចកើតឡើងទាំងអស់មាន 4 របៀបគឺ :

(HH) , (HT) , (TH) និង (TT) ។

- លទ្ធផលទាំងអស់ដែលអាចកើតឡើងក្នុងវិញ្ញាសានេះ បង្កើតបានជាសំណុំមួយហៅថា លំហសំណាក ។

គេកំណត់សរសេរ : $S = \{(HH)\ ,\ (HT)\ ,\ (TH)\ ,\ (TT)\}$ ។

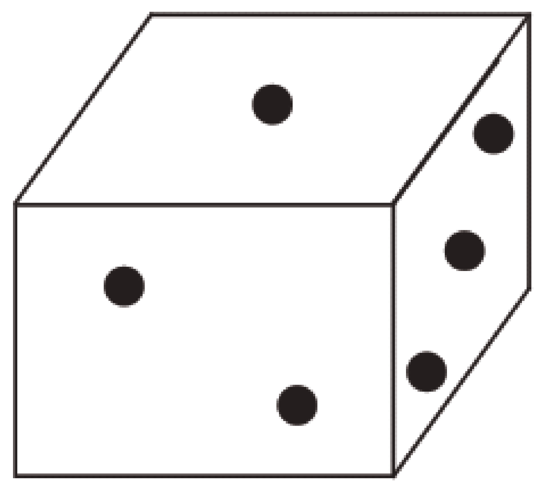
- ក្នុងវិញ្ញាសាបោះកាក់មួយ 1 ដង គេបានលំហសំណាក $S = \{H, T\}$ ។

លំហសំណាក គឺជាសំណុំលទ្ធផលទាំងអស់ដែលអាចកើតឡើងក្នុងវិញ្ញាសាមួយនៃពិសោធន៍ចៃដន្យ ។

លំហាត់គំរូ គេបោះគ្រាប់ឡុកឡាក់មួយចំនួន 2 ដង ។

ក. តើសកម្មភាពណាជាពិសោធន៍ចៃដន្យ ? ជាវិញ្ញាសា ?

ខ. ចូរសរសេរលំហសំណាក ។



ចម្លើយ ក. ពិសោធន៍ចៃដន្យគឺ សកម្មភាពបោះគ្រាប់ឡុកឡាក់

វិញ្ញាសាគឺ សកម្មភាពបោះគ្រាប់ឡុកឡាក់មួយចំនួន 2 ដង ។

ខ. គេបោះគ្រាប់ឡុកឡាក់មួយចំនួន 2 ដង លទ្ធផលនីមួយៗដែលអាចកើតឡើងជាគូមានលំដាប់ អាចមានលេខច្រំដែល ដែលជាធាតុរបស់ $E = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$ ។

គេបានលំហសំណាក : $S = \{(a,\ b)$ ដែល $a \in E\ ,\ b \in E\}$

$S = \{(1,\ 1)\ ,\ (1,\ 2),\ldots,(2,\ 3)\ ,\ (2,\ 4),\ldots,(6,\ 4)\ ,\ (6,\ 5)\ ,\ (6,\ 6)\}$ ។

ប្រតិបត្តិ គេចាប់យកឃ្លីម្ដង 2 គ្រាប់ចេញពីថង់មួយដោយចៃដន្យ ដែលក្នុងនោះមានឃ្លីក្រហម 2 ឃ្លីលឿង 2 និងឃ្លីខៀវ 1 ។

ក. តើសកម្មភាពណាជាពិសោធន៍ចៃដន្យ ជាវិញ្ញាសា ?

ខ. ចូរសរសេរលំហសំណាក ។

1.3 ព្រឹត្តិការណ៍

ក. ព្រឹត្តិការណ៍

ឧទាហរណ៍ 1 ក្នុងវិញ្ញាសាបោះកាក់មួយចំនួន 2 ដង បើគេកំណត់ថាគេចង់បានខាងរូប H កើតឡើងតែ 1 ដងគត់ នោះលទ្ធផលដែលស្របនឹងការចង់បាននេះគឺ (HT) និង (TH) ។ បើគេចង់បានខាងរូប H កើតឡើង 2 ដង នោះគេបានលទ្ធផល (HH) ។

- សំណុំលទ្ធផលដែលកើតឡើងស្របតាមការប្រាថ្នាចង់បានហៅថា **ព្រឹត្តិការណ៍** ។

  បើគេតាង A ជាព្រឹត្តិការណ៍ "បោះកាក់មួយចំនួន 2 ដង បានខាងរូបម្ដងគត់ "

  នោះគេសរសេរ : $A = \{(HT)\ ,\ (TH)\}$ ។

  បើគេតាង B ជាព្រឹត្តិការណ៍ "បោះបានខាងលេខ 2 ដង " : $B = \{(TT)\}$ ។

  ក្នុងវិញ្ញាសានេះ គេឃើញថាលំហសំណាក $S = \{(HH)\ ,\ (HT)\ ,\ (TH)\ ,\ (TT)\}$ ។

  ដូចនេះ A និង B ជាសំណុំរងនៃលំហសំណាក ។

ព្រឹត្តិការណ៍ ជាសំណុំរងនៃលំហសំណាក ។

ឧទាហរណ៍ 2 ក្នុងថង់មួយមានឃ្លីក្រហម 1 ខៀវ 1 និងលឿង 1 ។ គេចាប់យកឃ្លីម្ដងមួយដោយចៃដន្យចេញពីថង់ រួចដាក់ចូលថង់វិញចំនួន 2 លើក ។ គេតាង ក ជាឃ្លីពណ៌ក្រហម ខ ជាឃ្លីពណ៌ខៀវ និង ល ជាឃ្លីពណ៌លឿង ។

ក្នុងវិញ្ញាសានេះគេបានលំហសំណាក : $S = \{(a,\ b)$ ដែល $a,b \in E\}$ ដែល $E = \{$ក, ខ, ល$\}$

$S = \{$ (កក) , (ខខ) , (លល) , (កខ) , (ខក) , (ខល) , (លខ) , (កល) , (លក) $\}$ ។

បើតាង A_1 ជាព្រឹត្តិការណ៍ "ចាប់បានឃ្លីខៀវទាំង 2 លើក " ។ គេបាន $A_1 = \{$ (ខខ) $\}$ ។

A_2 ជាព្រឹត្តិការណ៍ "ចាប់បានឃ្លីខ្មៅលើកទី 1 ឃ្លីក្រហមលើកទី 2 "

គេបាន $A_2 = \varnothing$ ព្រោះក្នុងថង់គ្មានឃ្លីខ្មៅទេ ។

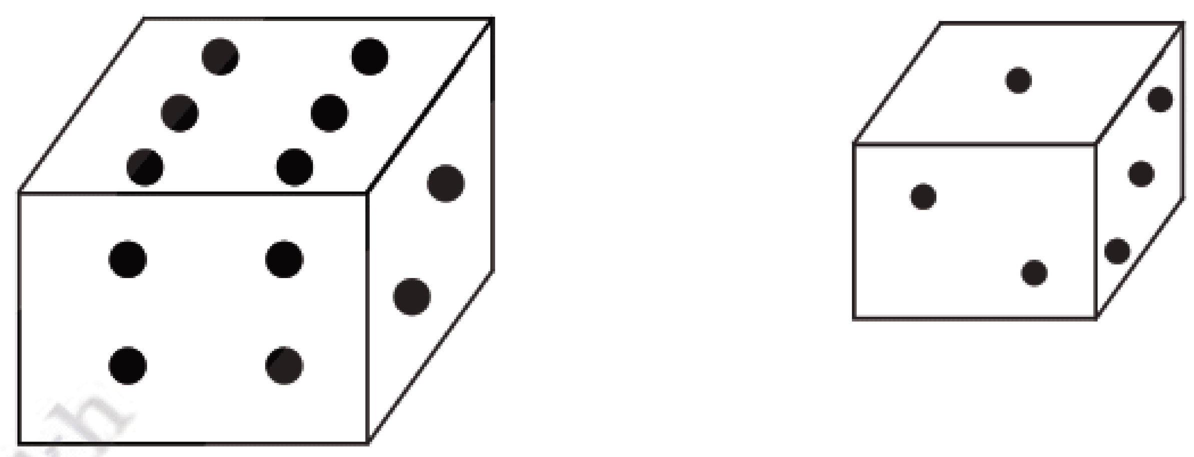
A_3 ជាព្រឹត្តិការណ៍ "ចាប់បានឃ្លី 2 ពណ៌ដូចគ្នា ឬ 2 ពណ៌ខុសគ្នា "

គេបាន $A_3 = \{$ (កក), (ខខ), (លល), (កខ), (ខក), (កល), (លក), (ខល), (លខ) $\}$ ។

គេឃើញថា ៖

- ព្រឹត្តិការណ៍ A_1 មានលទ្ធផលតែមួយគត់ ។ ព្រឹត្តិការណ៍ A_1 ហៅថា **ព្រឹត្តិការណ៍ឯកធាតុ ។**
- ព្រឹត្តិការណ៍ A_2 ហៅថា **ព្រឹត្តិការណ៍មិនអាចមាន** ព្រោះគ្មានលទ្ធផលណាមួយកើតឡើងក្នុង ព្រឹត្តិការណ៍ A_2 ។
- ព្រឹត្តិការណ៍ A_3 មានគ្រប់លទ្ធផលទាំងអស់ដែលអាចកើតឡើង ដូចក្នុងលំហសំណាក ។ ព្រឹត្តិការណ៍ A_3 ហៅថា **ព្រឹត្តិការណ៍ប្រាកដ** ។

លំហាត់គំរូ គេធ្វើវិញ្ញាសាបោះគ្រាប់ឡុកឡាក់ 2 គ្រាប់មួយតូច មួយធំ ។



ក. ចូរកំណត់ព្រឹត្តិការណ៍ ៖

B_1 : “គ្រាប់ឡុកឡាក់ធំចេញលេខ 4 ”

B_2 : “គ្រាប់ឡុកឡាក់ធំចេញលេខសេស”

B_3 : “គ្រាប់តូចចេញលេខ 3 គ្រាប់ធំចេញលេខ 5 ”

B_4 : “គ្រាប់តូចចេញលេខ 1 គ្រាប់ធំចេញលេខ 7 ” ។

ខ. តើព្រឹត្តិការណ៍ណាជាព្រឹត្តិការណ៍ឯកធាតុ ?

ចម្លើយ ក. គេបោះគ្រាប់ឡុកឡាក់ 2 គ្រាប់មួយតូចមួយធំ គេបានលទ្ធផលនីមួយៗជាគូ (a, b) ដែល a ជាលេខរបស់គ្រាប់ធំ និង b ជាលេខរបស់គ្រាប់តូច ។ គេបាន ៖ B_1 ជាព្រឹត្តិការណ៍ដែលគ្រាប់ឡុកឡាក់ធំចេញលេខ 4 ៖

$$B_1 = \{(4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6)\}$$

$$B_2 = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6), (5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6)\}$$

$B_3 = \{(3, 5)\}$, B_4 ជាព្រឹត្តិការណ៍មិនអាចមាន ។

ខ. ព្រឹត្តិការណ៍ B_3 ជាព្រឹត្តិការណ៍ឯកធាតុ ។

ប្រតិបត្តិ ក្នុងថង់មួយមានសន្លឹកប័ណ្ណ 4 សន្លឹកដែលចុះលេខ 1, 2, 3 និង 4 ។ គេហូតយកម្តងមួយ ចំនួន 2 លើកដោយមិនដាក់វិញ ។ ចូរកំណត់ ៖ លំហសំណាក និងព្រឹត្តិការណ៍ ៖

C_1 : "ហូតបានលេខគូនៅលើកទី 1 "

C_2 : "ហូតបានលេខសេសទាំង 2 លើក"

C_3 : "ហូតលើកទី 1 បានលេខគូ លើកទី 2 បានលេខធំជាង 3 "

C_4 : "លើកទី 1 បានលេខ 1 លើកទី 2 បានលេខតូចជាង 2 " ។

ខ. ព្រឹត្តិការណ៍សមាស

គេឃើញថាព្រឹត្តិការណ៍ជាសំណុំរងនៃលំហសំណាក ដូចនេះគេអាចប្រើសញ្ញាប្រសព្វ និងប្រជុំ ដើម្បីបង្កើតព្រឹត្តិការណ៍បន្ថែមទៀតដែលជាព្រឹត្តិការណ៍សមាស ហៅថា ព្រឹត្តិការណ៍ផលគុណ និង ព្រឹត្តិការណ៍ផលបូក ។

ឧទាហរណ៍ គេធ្វើវិញ្ញាសា ចាប់យកឃ្លីម្តងមួយចំនួន 2 លើកចេញពីថង់ ដែលមានឃ្លី 3 មានពណ៌ខុសគ្នា ក្រហម ខៀវ លឿងដោយដាក់វិញ ។ ចូរកំណត់លំហសំណាក S និងព្រឹត្តិការណ៍ :

A : "ចាប់បានឃ្លី 2 ពណ៌ខុសគ្នា" , B : "ចាប់បានឃ្លីខៀវនៅលើកទី 1 "

C : "ចាប់បានឃ្លី 2 ពណ៌ដូចគ្នា" , D : "ចាប់បានឃ្លីក្រហមនៅលើកទី 1 "

តាង ខ ជាឃ្លីពណ៌ខៀវ ក ជាឃ្លីពណ៌ក្រហម និង ល ជាឃ្លីពណ៌លឿង

S = { (ខខ), (កក), (លល), (ខក), (ខល), (កល), (កខ), (លខ), (លក) }

A = { (ខក), (ខល), (កល), (កខ), (លខ), (លក) }

B = { (ខក), (ខល), (ខខ) } , C = { (ខខ), (កក), (លល) }

D = { (កខ), (កល), (កក) } ។

- គេឃើញថាព្រឹត្តិការណ៍ A និងព្រឹត្តិការណ៍ B មានលទ្ធផលរួម (ខក) , (ខល) ។
  លទ្ធផលរួមនេះបង្កើតបានព្រឹត្តិការណ៍មួយហៅថា ព្រឹត្តិការណ៍ផលគុណ នៃ A និង B ។
  គេកំណត់សរសេរ : $A \cap B$ = { (ខក) , (ខល) } ។
  ព្រឹត្តិការណ៍ផលគុណនៃ A និង B ជាព្រឹត្តិការណ៍ "ឃ្លីទាំង 2 ពណ៌ខុសគ្នា និងចាប់លើកទី 1 បានពណ៌ខៀវ" ។

ព្រឹត្តិការណ៍ផលគុណនៃ A និង B ជាប្រសព្វនៃព្រឹត្តិការណ៍ A និងព្រឹត្តិការណ៍ B ។

- គេឃើញថា គ្រប់លទ្ធផលទាំងអស់នៃព្រឹត្តិការណ៍ A និងគ្រប់លទ្ធផលនៃព្រឹត្តិការណ៍ B បង្កើតបានព្រឹត្តិការណ៍មួយហៅថា ព្រឹត្តិការណ៍ផលបូក នៃ A និង B ។
  គេកំណត់សរសេរ $A \cup B = \{$ (ខក), (ខល), (កល), (កខ), (លខ), (លក), (ខខ) $\}$
  ព្រឹត្តិការណ៍ផលបូកនៃ A និង B គឺ " ចាប់ឃ្លីទាំង 2 បានពណ៌ខុសគ្នា ឬបានខៀវនៅលេខទី 1 " ។

ព្រឹត្តិការណ៍ផលបូកនៃ A និង B ជាប្រជុំនៃព្រឹត្តិការណ៍ A និងព្រឹត្តិការណ៍ B ។

- ព្រឹត្តិការណ៍ B និងព្រឹត្តិការណ៍ D គ្មានលទ្ធផលណាមួយដូចគ្នាទេ ។ គេថាព្រឹត្តិការណ៍ B និងព្រឹត្តិការណ៍ D ជាព្រឹត្តិការណ៍ **មិនចុះសម្រុងគ្នា** ។ គេបាន $B \cap D = \varnothing$ ។

ព្រឹត្តិការណ៍ B និងព្រឹត្តិការណ៍ D ជាព្រឹត្តិការណ៍មិនចុះសម្រុងគ្នា កាលណាព្រឹត្តិការណ៍ផលគុណនៃ B និង D ជាព្រឹត្តិការណ៍មិនអាចមាន : $B \cap D = \varnothing$ ។

- គេឃើញថា $A \cap C = \varnothing$ និង $A \cup C = S$ ។
  គេថាព្រឹត្តិការណ៍ C ជាព្រឹត្តិការណ៍ផ្ទុយនឹង A ឬ C ជាព្រឹត្តិការណ៍បំពេញនៃ A ។
  គេកំណត់សរសេរព្រឹត្តិការណ៍ផ្ទុយនៃ A ឬ ព្រឹត្តិការណ៍បំពេញនៃ A ដោយ : $\bar{A}$

ព្រឹត្តិការណ៍ 2 ជាព្រឹត្តិការណ៍បំពេញគ្នា កាលណាផលគុណនៃព្រឹត្តិការណ៍ទាំង 2 ជាព្រឹត្តិការណ៍មិនអាចមាន និងព្រឹត្តិការណ៍ផលបូកនៃព្រឹត្តិការណ៍ទាំង 2 ជាព្រឹត្តិការណ៍ប្រាកដ : $A \cap \bar{A} = \varnothing$, $A \cup \bar{A} = S$ គេបានព្រឹត្តិការណ៍ 2 បំពេញគ្នាជាព្រឹត្តិការណ៍មិនចុះសម្រុង ។

លំហាត់គំរូ គេបោះគ្រាប់ឡុកឡាក់មួយគ្រាប់ ។ គេតាង A ជាព្រឹត្តិការណ៍ដែលគ្រាប់ឡុកឡាក់ចេញលេខគូ B ជាព្រឹត្តិការណ៍ដែលគ្រាប់ឡុកឡាក់ចេញលេខជាពហុគុណនៃ 3 និង C ជាព្រឹត្តិការណ៍ដែលគ្រាប់ឡុកឡាក់ចេញលេខតូចជាង ឬស្មើនឹង 2 ។ ចូរកំណត់ :

ក. លំហសំណាក និងព្រឹត្តិការណ៍ A, B, C

ខ. ព្រឹត្តិការណ៍ផលគុណ $A \cap B$, $A \cap C$, $B \cap C$

គ. ព្រឹត្តិការណ៍ផលបូក $A \cup B$, $B \cup C$ ។

ឃ. ព្រឹត្តិការណ៍បំពេញនៃព្រឹត្តិការណ៍ A, B, C

ង. តើព្រឹត្តិការណ៍ណាជាព្រឹត្តិការណ៍មិនចុះសម្រុងគ្នា ?

ចម្លើយ ក. គេបោះគ្រាប់ឡុកឡាក់មួយគ្រាប់ គេបានលទ្ធផលអាចកើតឡើងមានលេខ $1, 2, 3, 4, 5$ និង 6 ។ គេបានលំហសំណាក $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

ព្រឹត្តិការណ៍ $A = \{2, 4, 6\}$, $B = \{3, 6\}$, $C = \{1, 2\}$ ។

ខ. ព្រឹត្តិការណ៍ផលគុណ : $A \cap B = \{6\}$, $A \cap C = \{2\}$, $B \cap C = \varnothing$ ។

គ. ព្រឹត្តិការណ៍ផលបូក : $A \cup B = \{2, 3, 4, 6\}$, $B \cup C = \{1, 2, 3, 6\}$ ។

ឃ. ព្រឹត្តិការណ៍បំពេញនៃព្រឹត្តិការណ៍ A, B, C គឺ

$\bar{A} = \{1, 3, 5\}$, $\bar{B} = \{1, 2, 4, 5\}$, $\bar{C} = \{3, 4, 5, 6\}$ ។

ង. ដោយ $B \cap C = \varnothing$

នោះ B និង C ជាព្រឹត្តិការណ៍មិនចុះសម្រុង ។

ប្រតិបត្តិ គេធ្វើវិញ្ញាសា ចាប់យកប័ណ្ណមួយសន្លឹកចំនួន 2 លើក ដោយចៃដន្យនិងមិនដាក់វិញ ចេញពីថង់មួយ ដែលមានប័ណ្ណ 4 សន្លឹកគឺ ប័ណ្ណលេខ 1 លេខ 2 លេខ 3 និងលេខ 4 ។

ក. ចូរកំណត់លំហសំណាក និងព្រឹត្តិការណ៍ :

A : “ ចាប់ទាំង 2 លើកបានប័ណ្ណមានលេខតូចជាង 4 ”

B : “ ចាប់លើកទី 1 បានលេខតូចជាង 2 និងលើកទី 2 បានលេខសេស”

C : “ ចាប់ទាំង 2 លើកបានលេខខុសគ្នា ”

D : “ ចាប់លើកទី 1 បានលេខធំជាង 4 ”

E : “ ចាប់លើកទី 2 បានលេខ 1 ” ។

ខ. តើមួយណាជាព្រឹត្តិការណ៍ឯកធាតុ ព្រឹត្តិការណ៍មិនអាចមាន ព្រឹត្តិការណ៍ប្រាកដ ។

គ. តើព្រឹត្តិការណ៍ណា ជាព្រឹត្តិការណ៍មិនចុះសម្រុង ។

ឃ. រកព្រឹត្តិការណ៍ផលគុណ $A \cap B$, $B \cap F$ និងព្រឹត្តិការណ៍ផលបូក $A \cup B$, BUE ។

2. ប្រូបាប

2.1 និយមន័យប្រូបាប

ឧទាហរណ៍ 1 គេមានគ្រាប់ឡុកឡាក់ស្មើសាច់ល្អមួយគ្រាប់ ។ បើគេបោះគ្រាប់ឡុកឡាក់នេះ គេឃើញថាមុខនីមួយៗមានឱកាស (ឬសំណាង) អាចកើតឡើងដូចៗគ្នា ។ សំណាងដែលអាចកើតឡើងនេះមានមួយដងក្នុងចំណោម 6 ដងគឺមានសំណាង $\frac{1}{6}$ ។

បើគេធ្វើពិសោធន៍បោះដដែលៗជាច្រើនដង នោះប្រេកង់ដែលអាចកើតឡើងចំពោះមុខនីមួយៗស្ទើរតែស្មើគ្នា ។

គេកត់ត្រាលទ្ធផលពិសោធន៍បោះគ្រាប់ឡុកឡាក់ស្មើសាច់ល្អមួយគ្រាប់ចំនួន n ដង

r ជាប្រេកង់ដែលមុខណាមួយអាចកើតឡើង $\frac{r}{n}$ ជាប្រេកង់ធៀប :

n	10	30	50	60	90	100	200	500
r	2	4	8	11	16	16	33	83
$\frac{r}{n}$	0.20	0.133	0.160	0.183	0.177	0.160	0.165	0.166

គេឃើញថា បើចំនួនដង n នៃការបោះកាន់តែច្រើនដង នោះប្រេកង់ធៀបខិតទៅរកចំនួនថេរមួយគឺ $\frac{1}{6} = 0.1666\ldots$ ។

- $\frac{1}{6}$ ហៅថាប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ ដែលគ្រាប់ឡុកឡាក់ចេញលេខណាមួយក្នុងវិញ្ញាសា
  គេសរសេរ :$P(\{1\}) = P(\{2\}) = \ldots = P(\{6\}) = \frac{1}{6}$

ឧទាហរណ៍ 2 គ្រូធ្វើសំណួរផ្ទាល់មាត់ដោយឱ្យសិស្សចាប់ឆ្នោតយកសំណួរមួយក្នុងចំណោមសំណួរពីជគណិត 3 សំណួរ និងធរណីមាត្រ 2 សំណួរ ។ សុខជាសិស្សចូលចិត្តរៀនតែពីជគណិត ។ តើសុខមានសំណាង (ឬឱកាស) ប៉ុន្មានភាគរយចាប់បានសំណួរពីជគណិត ? ចាប់បានសំណួរធរណីមាត្រ ?

ក្នុងវិញ្ញាសានេះ គេអាចសរសេរលំហសំណាក $S = \{$ ពីជគណិត - ពីជគណិត - ពីជគណិត - ធរណីមាត្រ - ធរណីមាត្រ $\}$ ។ សន្លឹកឆ្នោតមួយសន្លឹកៗមានសំណាងក្នុងការចាប់បានស្មើគ្នា ។ ដូចនេះ ការចាប់បានសំណួរពីជគណិត សុខមានសំណាង $\frac{3}{5}$ ត្រូវនឹង 60 % និងឱកាសចាប់បានសំណួរធរណីមាត្រមាន $\frac{2}{5}$ ត្រូវនឹង 40 % ។

- គេថា $\frac{3}{5} = 0.6$ ជាប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍សុខចាប់បានសំណួរពីជគណិត

  $\frac{2}{5} = 0.4$ ជាប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍សុខចាប់បានសំណួរធរណីមាត្រ ។

បើគេតាង A ជាព្រឹត្តិការណ៍ សុខចាប់បានសំណួរពីជគណិត នោះ $n(A) = 3$ ហៅថា ចំនួនករណីស្រប

B ជាព្រឹត្តិការណ៍ សុខចាប់បានសំណួរធរណីមាត្រ នោះ $n(B) = 2$ ហៅថា ចំនួនករណីស្របលំហសំណាក S មាន 5 ធាតុ គេបាន $n(S) = 5$ ហៅថា ចំនួនករណីអាច ។

គេកំណត់សរសេរ : ប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ A : $P(A) = 0.6$

ប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ B : $P(B) = 0.4$ ។

- គេឃើញថា ប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ A គឺ $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{3}{5} = 0.6$

  ប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ B គឺ $P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{2}{5} = 0.4$ ។

ដែល $n(A) = 3$ ឬ $n(B) = 2$ ជាចំនួនករណីស្របនិង $n(S) = 5$ ជាចំនួនករណីអាច ។

និយមន័យ ប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍មួយ ជាផលធៀបនៃចំនួនករណីស្រប និងចំនួនករណីអាច $P(A) = \frac{\text{ចំនួនករណីស្រប}}{\text{ចំនួនករណីអាច}} = \frac{n(A)}{n(S)}$ ។

សម្គាល់ បើការរើសយកធាតុនីមួយៗ ជាការរើសដោយចៃដន្យនោះ ធាតុនីមួយៗមានឱកាសដូចគ្នាក្នុងការជ្រើសរើស ។ ដូចនេះ ប្រូបាបដែលយកបានធាតុនីមួយៗជាសមប្រូបាប ។

លំហាត់គំរូ គេរើសសិស្សម្នាក់ឱ្យធ្វើជាប្រធានក្រុម ក្នុងចំណោមសិស្សស្រី 5 នាក់ និងសិស្សប្រុស 3 នាក់ ។ រកប្រូបាបដែលប្រធានក្រុមជាសិស្សស្រី និងរកប្រូបាបសិស្សប្រុសជាប្រធានក្រុម ។

ចម្លើយ តាង A ជាព្រឹត្តិការណ៍ដែលសិស្សស្រីធ្វើជាប្រធានក្រុម

B ជាព្រឹត្តិការណ៍ដែលសិស្សប្រុសធ្វើជាប្រធានក្រុម

សិស្សទាំងអស់មាន $5+3 = 8$ នាក់ : $n(S) = 8$

សិស្សស្រីមាន 5 នាក់ : $n(A) = 5$ និងសិស្សប្រុសមាន 3 នាក់ : $n(B) = 3$ ។

គេបាន ៖ ប្រូបាបដែលសិស្សស្រីជាប្រធាន ៖ $P(A) = \frac{5}{8}$ ។

ប្រូបាបដែលសិស្សប្រុសជាប្រធាន ៖ $P(B) = \frac{3}{8}$ ។

ប្រតិបត្តិ គេធ្វើវិញ្ញាសាហូតប័ណ្ណម្តងមួយសន្លឹកចំនួន 2 ដងចេញពីថង់មួយដែលមានប័ណ្ណលេខ 1 លេខ 2 និងលេខ 3 ដោយហូតហើយដាក់វិញ ។

ក. ចូរសរសេរលំហសំណាក S ព្រឹត្តិការណ៍ A ដែលហូតលើកទី 1 បានលេខគូ និង ព្រឹត្តិការណ៍ B ដែលហូតទាំង 2 លើកបានប័ណ្ណមានផលបូកលេខស្មើនឹង 5 ។

ខ. រកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ A និងប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ B ។

2.2 លក្ខណៈនៃប្រូបាប

ឧទាហរណ៍ ក្នុងវិញ្ញាសាបោះគ្រាប់ឡុកឡាក់មួយគ្រាប់ ។

លទ្ធផលដែលអាចកើតឡើងទាំងអស់ក្នុងលំហសំណាកគឺ លទ្ធផលបោះបានលេខ 1 លេខ 2 លេខ 3 លេខ 4 លេខ 5 និងលេខ 6 ។

គេបានប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍នីមួយៗស្មើនឹង $\frac{1}{6}$ គឺ ៖

$$P(\{1\}) = P(\{2\}) = P(\{3\}) = P(\{4\}) = P(\{5\}) = P(\{6\}) = \frac{1}{6} \text{ ។}$$

ផលបូកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ឯកធាតុទាំងអស់ដែលអាចកើតឡើងក្នុងលំហសំណាក S ស្មើនឹង 1 គឺ $\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6} = 1$ ។ គេបាន $P(S) = 1$ ។

ជាទូទៅ ៖ + បើគេតាង e_i ៖ ជាព្រឹត្តិការណ៍ឯកធាតុនៃលំហសំណាក S នោះគេបាន

$$P(e_1)+P(e_2)+\ldots+P(e_n) = \sum_{i=1}^{n} P(e_i) = P(S) = 1 \text{ ។}$$

+ បើ A ជាព្រឹត្តិការណ៍មិនអាចកើតឡើងគឺ $A = \varnothing$ នោះ $n(A) = 0$ ហើយ $P(A) = 0$

+ បើ A ជាព្រឹត្តិការណ៍មួយនៃលំហសំណាក S នោះ $n(A) \le n(S)$ ហើយ $P(A) \le P(S)$ ។

សន្និដ្ឋាន
- ប្រូបាបនៃលំហសំណាក S ស្មើនឹង 1 ៖ $P(S) = 1$
- ប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍មិនអាចមានស្មើនឹង 0 ៖ $P(\varnothing) = 0$
- ប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍មួយក្នុងលំហសំណាក ជាចំនួនដែលនៅចន្លោះ $[0, 1]$

$0 \le P(A) \le 1$ ។

- ប្រូបាបជាអនុវត្តន៍ ដែលកំណត់ពីលំហសំណាក S ទៅចន្លោះ $[0, 1]$

  $P \; : \; S \rightarrow [0, 1]$ ។

ប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍សមាស

ឧទាហរណ៍ 1 គេធ្វើវិញ្ញាសាបោះគ្រាប់ឡុកឡាក់មួយគ្រាប់ ។ តាង A ជាព្រឹត្តិការណ៍បោះបានលេខគូ និង B ជាព្រឹត្តិការណ៍បោះបានលេខជាពហុគុណនៃ 3 ។

គេបាន : លំហសំណាក $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$A = \{2, 4, 6\}$, $B = \{3, 6\}$ ។

ក. ព្រឹត្តិការណ៍ផលគុណនៃ A និង B ជាព្រឹត្តិការណ៍បោះបានលេខគូ និងជាពហុគុណនៃ 3 :

$A \cap B = \{6\}$ ។ ដូចនេះ ប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ផលគុណ A និង B ជាប្រូបាបដែលបោះបានលេខគូ និងលេខជាពហុគុណនៃ 3 គឺ $P(A \cap B) = \frac{1}{6}$ ។

ប្រូបាបបោះបានលេខគូគឺ $P(A) = \frac{3}{6}$ ប្រូបាបបោះបានលេខជាពហុគុណនៃ 3 គឺ $P(B) = \frac{2}{6}$

ដោយ $P(A \cap B) = \frac{1}{6}$, $P(A) \times P(B) = \frac{1}{6}$ នោះគេបាន : $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$ ។

ខ. ព្រឹត្តិការណ៍ផលបូកនៃ A និង B ជាព្រឹត្តិការណ៍បោះបានលេខគូ ឬលេខជាពហុគុណនៃ 3 :

$A \cup B = \{2, 3, 4, 6\}$

ប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ផលបូក A និង B គឺ $P(A \cup B) = \dfrac{n(A \cup B)}{n(S)} = \dfrac{4}{6}$ ។

គេដឹងថា បើ $A \cap B \neq \varnothing$ នោះ $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

$$P(A \cup B) = \frac{n(A) + n(B) - n(A \cap B)}{n(S)} = \frac{n(A)}{n(S)} + \frac{n(B)}{n(S)} - \frac{n(A \cap B)}{n(S)} = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} - \frac{1}{6} = \frac{4}{6} \text{ ។}$$

ដូចនេះ $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ ។

បើ $A \cap B$ ជាព្រឹត្តិការណ៍មិនអាចកើតឡើង $P(A \cap B) = 0$ នោះ

$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ ។

គ. ព្រឹត្តិការណ៍បំពេញនៃព្រឹត្តិការណ៍ A គឺ $\bar{A}$

គេបាន $\bar{A} = \{1, 3, 5\}$, $P(\bar{A}) = \frac{3}{6}$ ។

ដោយ $A \cap \bar{A} = \varnothing$, $A \cup \bar{A} = S$ នោះ $P(A \cup \bar{A}) = P(A) + P(\bar{A}) = 1$

ដូចនេះ $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$ ។

ឧទាហរណ៍ 2 ក្នុងថង់មួយមានឃ្លីក្រហម 2 និងឃ្លីខៀវ 3 ។ គេចាប់យកឃ្លី 2 ចេញពីថង់ម្តងមួយៗដោយចៃដន្យ ។

ក. ក្នុងករណីយកហើយដាក់វិញ ចូររកប្រូបាបដែលចាប់បាន :

- ឃ្លីក្រហមមុន និងខៀវក្រោយ
- ឃ្លីក្រហមមុន ឬខៀវក្រោយ ។

ខ. ក្នុងករណីយកហើយមិនដាក់វិញ ចូររកប្រូបាបដែលចាប់បាន

- ឃ្លីក្រហមមុន និងខៀវក្រោយ
- ឃ្លីក្រហមមុន ឬខៀវក្រោយ ។

ចម្លើយ តាងព្រឹត្តិការណ៍ A : " ចាប់បានឃ្លីក្រហមមុន " B : " ចាប់បានឃ្លីខៀវក្រោយ "

ក. ក្នុងវិញ្ញាសាយកហើយដាក់វិញ គេបានចំនួនឃ្លីនៅក្នុងថង់សម្រាប់ចាប់មុន និងក្រោយស្មើគ្នា ដូចនេះ ការចាប់យកឃ្លីទី 1 និងឃ្លីទី 2 ជាព្រឹត្តិការណ៍ 2 មិនទាក់ទងគ្នាទេ ។

គេបាន $P(A) = \frac{2}{5}$, $P(B) = \frac{3}{5}$ ។

ព្រឹត្តិការណ៍ចាប់បានឃ្លីក្រហមមុន និងឃ្លីខៀវក្រោយ ជាព្រឹត្តិការណ៍ផលគុណ A និង B : $A \cap B$ ។ គេបាន : $P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = \frac{2}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{6}{25}$ ។

ព្រឹត្តិការណ៍ចាប់បានឃ្លីក្រហមមុន ឬខៀវក្រោយជាព្រឹត្តិការណ៍ផលបូក A និង B : $A \cup B$

ព្រឹត្តិការណ៍ A ជាព្រឹត្តិការណ៍ចាប់បានឃ្លីក្រហមមុន : $A = \{$ (កក) , (កខ) $\}$

B ជាព្រឹត្តិការណ៍ចាប់បានឃ្លីខៀវក្រោយ : $B = \{$ (ខខ) , (កខ) $\}$ ។

គេឃើញថា ព្រឹត្តិការណ៍ A និងព្រឹត្តិការណ៍ B មានលទ្ធផលរួម $A \cap B = \{$ (ក-ខ) $\}$

គេបាន $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{2}{5} + \frac{3}{5} - \frac{6}{25} = \frac{19}{25}$ ។

ខ. ក្នុងវិញ្ញាសាយកហើយមិនដាក់វិញ

ចំនួនឃ្លីក្នុងថង់សម្រាប់ចាប់លើកទី 1 មាន 5 ។ ក្រោយពីយកមួយចេញហើយមិនដាក់វិញ ចំនួនឃ្លីសល់ក្នុងថង់សម្រាប់ចាប់លើកទី 2 មានតែ 4 ។

បើលើកទី 1 ចាប់បានឃ្លីក្រហម នោះចំនួនឃ្លីចាប់លើកទី 2 មានតែក្រហម 1 និងខៀវ 3

បើលើកទី 1 ចាប់បានឃ្លីខៀវ នោះចំនួនឃ្លីចាប់លើកទី 2 មានខៀវតែ 2 និងឃ្លីក្រហម 2

គេថាព្រឹត្តិការណ៍ដែលកើតលើកទី 2 ទាក់ទងនឹងព្រឹត្តិការណ៍កើតលើកទី 1 ។

- បើលើកទី 1 ចាប់បានឃ្លីក្រហម និងលើកទី 2 ចាប់បានឃ្លីខៀវ នោះប្រូបាបដែលចាប់បាន ឃ្លីក្រហមមុនគឺ $\frac{2}{5}$ និងប្រូបាបចាប់បានឃ្លីខៀវក្រោយគឺ $\frac{3}{4}$ ។

គេកំណត់សរសេរ : $P(A) = \frac{2}{5}$ និង $P(B$ ដែល A កើតមុន $) = \frac{3}{4}$ ។

ដូចនេះប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ផលគុណ A និង B គឺ :

$P(A \cap B) = P(A) \times P(B$ ដែល A កើតមុន$) = \frac{2}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{10}$ ។

- ព្រឹត្តិការណ៍ចាប់បានឃ្លីក្រហម ឬខៀវក្រោយជា ប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ផលបូក A និង B គឺៈ

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{2}{5} + \frac{3}{5} - \frac{3}{10} = \frac{7}{10}$ ។

សម្គាល់ - ក្នុងវិញ្ញាសាហូតហើយដាក់វិញ ប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍កើតមុន ឬព្រឹត្តិការណ៍កើតក្រោយរក្សាដដែល ។

- ក្នុងវិញ្ញាសាហូតហើយមិនដាក់វិញ ប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍កើតក្រោយប្រែប្រួលទៅតាមព្រឹត្តិការណ៍កើតមុន ។

សន្និដ្ឋាន

- ប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ផលគុណ A និង B គឺ :

  $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$ បើ A និង B មិនទាក់ទងគ្នា

  $P(A \cap B) = P(A) \times P(B$ ដែល A កើតមុន $)$ បើ A និង B ទាក់ទងគ្នា ។

- ប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ផលបូក A និង B គឺ :

  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

  $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ បើ A និង B ជាព្រឹត្តិការណ៍មិនចុះសម្រុង ។

- ប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ផ្ទុយនឹង A គឺ : $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$ ។

លំហាត់គំរូ 1 គេសរសេរតួអក្សរមួយដាក់លើសន្លឹកកាតមួយ ក្នុងចំណោមតួអក្សរនៃពាក្យ *ALGEBRA* រួចដាក់ចូលក្នុងថង់ ។ គេចាប់សន្លឹកកាតម្តងមួយចេញពីថង់ 2 ដងដោយចៃដន្យ ដោយយកហើយដាក់វិញ ។ តាង A ជាព្រឹត្តិការណ៍ដែលចាប់បានស្រៈនៅលើកទី 1 B ជាព្រឹត្តិការណ៍ចាប់បានព្យញ្ជនៈនៅលើកទី 1 និង C ជាព្រឹត្តិការណ៍ចាប់បានព្យញ្ជនៈនៅលើកទី 2 ។

ក. តើព្រឹត្តិការណ៍ណាជាព្រឹត្តិការណ៍បំពេញគ្នា

ខ. រកប្រូបាបដែលចាប់យកបាន :

a. ស្រៈនៅលើកទី 1

b. ព្យញ្ជនៈនៅលើកទី 1

c. ព្យញ្ជនៈនៅលើកទី 2

d. ស្រៈមុន និងព្យញ្ជនៈក្រោយ ។

ចម្លើយ ព្រឹត្តិការណ៍ $A = \{($ សព $), ($ សស $)\}$ (ដែល ស = ស្រៈ និងព = ព្យញ្ជនៈ)

$B = \{($ ពស $), ($ ពព $)\}$, $C = \{($ សព $), ($ ពព $)\}$ ។

ក. ព្រឹត្តិការណ៍ A និង B ជាព្រឹត្តិការណ៍បំពេញគ្នា ព្រោះ $A \cap B = \varnothing$ និង $A \cup B = S$ ។

ខ. a. ប្រូបាបដែលចាប់បានស្រៈនៅលើកទី 1 គឺ $P(A) = \frac{3}{7} = 0.428$

ព្រោះក្នុងពាក្យ *ALGEBRA* មានតួអក្សរ 7 ដែលមានស្រៈ 3 និងព្យញ្ជនៈ 4 ។

b. ប្រូបាបដែលចាប់បានព្យញ្ជនៈនៅលើកទី 1 គឺ $P(B) = \frac{4}{7} = 0.571$ ។

c. ប្រូបាបដែលចាប់បានព្យញ្ជនៈនៅលើកទី 2 គឺ $P(C)$

ដោយវិញ្ញាសានេះជាវិញ្ញាសាហូតហើយដាក់វិញ នោះចំនួនកាតត្រូវហូតយកលើកទី 1 និងលើកទី 2 ស្មើគ្នា។ ដូចនេះ ព្រឹត្តិការណ៍ចាប់យកលើកទី 1 មិនទាក់ទងនឹងព្រឹត្តិការណ៍ចាប់យកលើកទី 2 ទេ ។ គេបាន : $P(C) = \frac{4}{7} = 0.571$ ។

d. ប្រូបាបដែលចាប់បានស្រៈមុន និងព្យញ្ជនៈក្រោយ $P(A \cap C)$

$P(A \cap C) = P(A) \times P(C) = \frac{3}{7} \times \frac{4}{7} = \frac{12}{49} = 0.631$ ។

លំហាត់គំរូ 2 គេជ្រើសរើសសិស្ស 2 នាក់ ក្នុងចំណោមសិស្សស្រី 4 នាក់ និងសិស្សប្រុស 5 នាក់ ជាតំណាងក្រុម ។ រកប្រូបាបដែលសិស្ស :

ក. ស្រីជាប្រធានក្រុម

ខ. ប្រុសទាំង 2 ជាតំណាងក្រុម

គ. ស្រីជាប្រធាន និងប្រុសជាអនុប្រធាន

ឃ. យ៉ាងតិចមានសិស្សស្រីម្នាក់ជាតំណាងក្រុម ។

ចម្លើយ តាង M ជាព្រឹត្តិការណ៍ដែលសិស្សប្រុសជាប្រធានក្រុម : $M = \{($ ប-ប $),($ ប-ស$)\}$

W ជាព្រឹត្តិការណ៍ដែលសិស្សស្រីជាប្រធានក្រុម : $W = \{($ ស-ស $),($ ស-ប$)\}$

B ជាព្រឹត្តិការណ៍ដែលសិស្សប្រុសជាអនុប្រធាន : $B = \{($ ស-ប $),($ ប-ប$)\}$

G ជាព្រឹត្តិការណ៍ដែលសិស្សស្រីជាអនុប្រធាន : $G = \{($ ស-ស $),($ ប-ស$)\}$

(ប = ប្រុស , ស = ស្រី) ។

ក. ប្រូបាបដែលសិស្សស្រីជាប្រធាន $P(W)$

ដោយសិស្សទាំងអស់មាន 9 នាក់ និងសិស្សស្រីមាន 4 នាក់ នោះឱកាសដែលរើសបានសិស្សស្រីជាប្រធានមាន 4 ដងក្នុង 9 ដង ។ ដូចនេះ $P(W) = \frac{4}{9} = 0.444$ ។

ខ. ប្រូបាបដែលសិស្សប្រុសទាំង 2 ជាតំណាងក្រុម $P(M \cap B)$

ឱកាសដែលរើសបានសិស្សប្រុសធ្វើជាប្រធានក្រុមមាន 5 ដងក្នុង 9 ដងនិងសិស្សប្រុសម្នាក់ទៀត វាអនុប្រធានមាន 4 ដងក្នុង 8 ដង ។

ដូចនេះ $P(M \cap B) = \frac{5}{9} \times \frac{4}{8} = \frac{5}{18} = 0.278$ ។

គ. ប្រូបាបដែលសិស្សស្រីជាប្រធាន និងសិស្សប្រុសជាអនុប្រធាន $P(W \cap B)$

$W \cap B = \{($ ស-ប $)\}$ ។

ឱកាសដែលរើសសិស្សស្រីម្នាក់ជាប្រធានមាន 4 ដងក្នុង 9 ដង ។ បន្ទាប់មកនៅសល់សិស្ស 8 នាក់ ដើម្បីរើសយកម្នាក់ជាអនុប្រធានក្រុម ព្រោះសិស្សស្រីដែលជាប្រធានមិនអាចរើសធ្វើជាអនុប្រធានបានទៀតទេ គឺជាវិញ្ញាសាយកហើយមិនដាក់វិញ ។ ដូចនេះព្រឹត្តិការណ៍ដែលកើតក្រោយអាស្រ័យនឹងព្រឹត្តិការណ៍កើតមុន ។ ដោយអនុប្រធានជាសិស្សប្រុសនោះឱកាសរើសសិស្សប្រុសមាន 5 ដងក្នុង 8 ដង ។

$P(W \cap B) = P(W) \times P(B) = P(W) \times P(M$ ដែលស្រីជាប្រធាន $) = \frac{4}{9} \times \frac{5}{8} = 0.278$ ។

ឃ. ប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍យ៉ាងតិចមានសិស្សស្រីម្នាក់ជាតំណាងក្រុម

ព្រឹត្តិការណ៍ដែលយ៉ាងតិចមានស្រីម្នាក់ ជាព្រឹត្តិការណ៍បំពេញនៃនឹងព្រឹត្តិការណ៍គ្មានស្រីសោះ

ព្រឹត្តិការណ៍គ្មានសិស្សស្រីសោះ គឺជាព្រឹត្តិការណ៍ដែលសិស្សប្រុសទាំង 2 ជាតំណាងក្រុម ។

ដូចនេះ P (យ៉ាងតិចមានសិស្សស្រីម្នាក់) $= 1 - P$ (សិស្សប្រុសទាំង 2 ជាតំណាងក្រុម)

$$= 1 - P(M \cap B) = 1 - \frac{5}{18} = \frac{13}{18} = 0.722$$ ។

ប្រតិបត្តិ 1 ក្នុងថង់មួយមានឃ្លីក្រហម 4 និងឃ្លីខៀវ 6 ។ គេចាប់យកឃ្លី 2 ព្រមគ្នាដោយចៃដន្យ ។

ក. រកប្រូបាបដែលចាប់បានឃ្លីក្រហមទាំង 2

ខ. រកប្រូបាបដែលចាប់បានឃ្លីខៀវទាំង 2

គ. រកប្រូបាបដែលចាប់បានឃ្លី 2 មានពណ៌ដូចគ្នា ។

ប្រតិបត្តិ 2 ក្នុងប្រអប់ A មានសំបុត្រ 5 សន្លឹក ចុះលេខពី 1 ដល់ 5 ។ ប្រអប់ B មានសំបុត្រ 3 សន្លឹក ចុះលេខពី 4 ដល់ 6 ។ គេចាប់យកសំបុត្រ 1 សន្លឹកចេញពីប្រអប់នីមួយៗដោយចៃដន្យ ។ រកប្រូបាបដែលសំបុត្រទាំង 2 :

ក. មានលេខដូចគ្នា ខ. មានលេខខុសគ្នា គ. មានផលបូកលេខជាចំនួនសេស ។

3. គណនាប្រូបាបដោយប្រើចម្លាស់និងបន្សំ

3.1 គណនាប្រូបាបដោយប្រើចម្លាស់

ឧទាហរណ៍ 1 គេបោះគ្រាប់ឡុកឡាក់មួយគ្រាប់ 2 ដង ។

ក. រកប្រូបាបដែលបោះបានលេខទាំង 2 លើកខុសគ្នា ។

ខ. រកប្រូបាបដែលបោះបានលេខទាំង 2 លើកជាលេខគូ ។

គ. រកប្រូបាបដែលបោះបានលេខទាំង 2 លើកខុសគ្នា និងជាលេខគូ ។

ការបោះគ្រាប់ឡុកឡាក់មួយគ្រាប់ 2 ដងជាចម្លាស់ច្រំដែលនៃ 2 ធាតុយកពី 6 ធាតុ ព្រោះលេខដែលអាចចេញលើកទី 1 មាន 6 ជម្រើស និងលេខអាចចេញលើកទី 2 ក៏មាន 6 ជម្រើសដែរ ។

ដូចនេះ លទ្ធផលដែលអាចកើតឡើងទាំងអស់មានចំនួន $6^2 = 36$ ។ 36 ជាចំនួនករណីអាច ។

ក. តាង A ជាព្រឹត្តិការណ៍ដែលបោះបានលេខខុសគ្នាទាំង 2 លើក

បើគេចង់បានតែលទ្ធផលណាដែលមានលេខទាំង 2 ខុសគ្នា នោះលទ្ធផលទាំងនេះជាចម្លាស់នៃ 2 ធាតុយកពី 6 ធាតុ ។ លទ្ធផលទាំងអស់មានចំនួន $P(6,\ 2) = 6\times 5 = 30$ ។

ដោយ 30 ជាចំនួនករណីស្រប និង 36 ជាចំនួនករណីអាច : $P(A) = \frac{30}{36} = \frac{5}{6} = 0.833$ ។

ខ. តាង B ជាព្រឹត្តិការណ៍បោះបានលេខទាំង 2 ជាលេខគូ

លទ្ធផលដែលមានលេខទាំង 2 ជាលេខគូ គឺលទ្ធផលនៃចម្លាស់ច្រំដែលនៃ 2 ធាតុយកចេញពី 3 ធាតុ ដែលជាលេខ 2, 4, 6 ។ លទ្ធផលដែលគេចង់បាននេះមានចំនួន $3^2 = 9$ ។

គេបាន $P(B) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4} = 0.25$ ។

គ. ព្រឹត្តិការណ៍ដែលបោះបានលេខទាំង 2 ខុសគ្នា និងជាលេខគូគឺជាព្រឹត្តិការណ៍ $A\cap B$

សំណុំលទ្ធផលដែលមានលេខទាំង 2 ខុសគ្នា និងជាលេខគូគឺ

$A\cap B = \{(2,\ 4),\ (2,\ 6),\ (4,\ 2),\ (4,\ 6),\ (6,\ 2),\ (6,\ 4)\}$ ។

$n(A\cap B) = 6$ ជាចំនួនករណីស្រប ។ ដូចនេះ $P(A\cap B) = \frac{6}{36} = 0.166$ ។

ឧទាហរណ៍ 2 គេបង្កើតលេខសម្ងាត់របស់សោដោយចំនួនដែលមានលេខ 4 ខ្ទង់ខុសពីលេខ 0 ។

ក. តើគេអាចបង្កើតលេខសម្ងាត់នេះបានប៉ុន្មានបែប ?

ខ. គេរើសយកលេខសម្ងាត់មួយដោយចៃដន្យ ។ រកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ :

A : " លេខសម្ងាត់ជាចំនួនគូ"

B : " លេខសម្ងាត់ទាំង 4 ខ្ទង់ជាលេខគូ"

C : " លេខសម្ងាត់ទាំង 4 ខ្ទង់មានលេខ 1 តែម្តងគត់"

D : " លេខសម្ងាត់ទាំង 4 ខ្ទង់ខុសៗគ្នា" ។

ក. លេខសម្ងាត់នេះជាចម្លាស់ 4 លេខយកចេញពី 9 លេខហើយអាចមានលេខច្រំដែល ។

ចំនួនចម្លាស់ច្រំដែល 4 ធាតុយកពី 9 ធាតុគឺ $9^4 = 6561$ ។

ខ. ការរើសយកលេខសម្ងាត់នីមួយៗ មានឱកាសដូចគ្នាព្រោះគេរើសដោយចៃដន្យ គេថាប្រូបាបនៃការយកបានលេខនីមួយៗជាសមប្រូបាប ។

- ព្រឹត្តិការណ៍ A ជាព្រឹត្តិការណ៍យកបានលេខសម្ងាត់ជាចំនួនគូ គឺជាចំនួនដែលមានលេខ 2, 4, 6, 8 នៅខាងចុង ។ លេខនីមួយៗក្នុងចំណោម 3 លេខខាងដើមរបស់លេខសម្ងាត់ត្រូវរើសចេញពី 9 លេខ ហើយលេខចុងក្រោយរើសចេញពី 4 លេខ ដែលជាលេខគូ ។ គេអាចបង្កើតលេខសម្ងាត់តាមរបៀបនេះបានចំនួន $9^3 \times 4$ របៀបដោយចំនួនករណីអាចមាន 9^4 និងចំនួនករណីស្រួបមាន $9^3 \times 4$ នោះ $P(A) = \dfrac{9^3 \times 4}{9^4} = \dfrac{4}{9} = 0.444$ ។
- ព្រឹត្តិការណ៍ B ជាព្រឹត្តិការណ៍មានលេខទាំង 4 ខ្ទង់ជាលេខគូ នោះលេខមួយខ្ទង់ៗត្រូវរើសយកពី 4 លេខ 2, 4, 6 និង 8 ហើយអាចច្រំដែល ។

  គេបានចំនួនចម្លាស់ច្រំដែលនៃ 4 ធាតុគឺ $4^4 = 256$

  $P(B) = \dfrac{256}{6561} = 0.390$ ។
- C ជាព្រឹត្តិការណ៍លេខសម្ងាត់មានលេខ 1 តែម្តងគត់

  លេខ 1 អាចមានទីតាំង 4 បែប : $1***$, $*1**$, $**1*$, $***1$

  ឯលេខនីមួយៗក្នុងចំណោមលេខនៅត្រង់ 3 កន្លែងទៀតត្រូវមាន 8 ជម្រើស

  ចំនួនលេខសម្ងាត់ដែលកើតឡើងទាំងអស់មាន 4×8^3

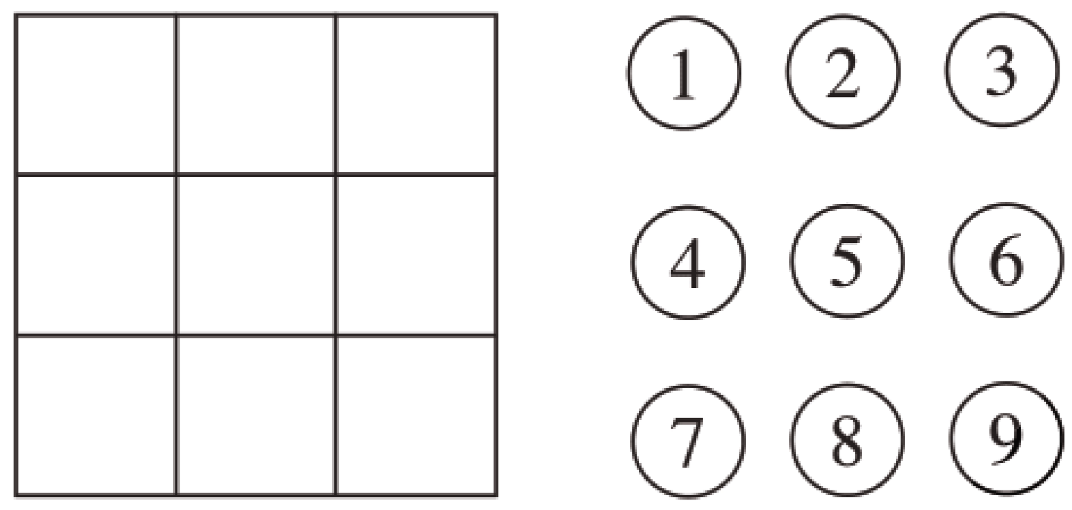
  $P(C) = \dfrac{4 \times 8^3}{9^4} = \dfrac{2048}{6561} = 0.312$ ។
- D ជាព្រឹត្តិការណ៍ដែលលេខទាំង 4 ខ្ទង់របស់លេខសម្ងាត់ ជាលេខខុសៗគ្នា

  ចំនួននៃលេខសម្ងាត់ជាចំនួនចម្លាស់នៃ 4 ធាតុយកពី 9 ធាតុ :

  $P(9,\ 4) = 9 \times 8 \times 7 \times 6 = 3024$

  $P(D) = \dfrac{3024}{6561} = 0.46$ ។

ប្រតិបត្តិ គេមានកាស 9 ដែលចុះតាមលេខរៀងពី 1 ដល់ 9 ។ គេរៀបកាសមួយៗដាក់ទៅក្នុងការេមួយដែលមាន 9 ក្រឡា ។



ក. តើគេអាចរៀបកាសទាំង 9 បានប៉ុន្មានរបៀប ?

ខ. រកប្រូបាបដែលកាសលេខ 1 និងលេខ 2 នៅក្នុងជួរឈរទី 1 ។

3.2 គណនាប្រូបាបដោយប្រើបន្សំ

ឧទាហរណ៍ 1 គេរើសសិស្ស 8 នាក់ដោយចៃដន្យក្នុងចំណោមសិស្សប្រុស 9 នាក់ និងសិស្សស្រី 11 នាក់ទៅសម្ភាសន៍ ។

ក. តើគេអាចរៀបសិស្សបានប៉ុន្មានរបៀបខុសៗគ្នា ?

ខ. រកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ :

A : " ក្រុមសិស្សទាំង 8 នាក់មានសុទ្ធតែសិស្សស្រី "

B : " ក្នុងក្រុមមានសិស្សស្រី 5 នាក់ និងប្រុស 3 នាក់" ។

ក. សកម្មភាពនេះគឺគេរើសសិស្ស 8 នាក់ក្នុងចំណោមសិស្ស 20 នាក់ ដោយគ្មានលំដាប់ ហើយសិស្សម្នាក់មិនអាចមានឈ្មោះ 2 ដងក្នុងក្រុមតែមួយ ។ ចំនួនករណីដែលអាចកើតឡើងជាបន្សំ 8 ធាតុយកពី 20 ធាតុ ។

ចំនួនករណីអាចគឺ $C(20,\ 8) = \dfrac{20!}{12!8!} = 125970$ ។

ខ. គេរើសសិស្សដោយចៃដន្យ ដូចនេះធាតុនីមួយៗមានសមប្រូបាប

- សិស្ស 8 នាក់ដែលត្រូវជ្រើសរើសសុទ្ធតែស្រី គឺគេរើស 8 នាក់ក្នុងចំណោម 11 នាក់ ចំនួនករណីស្រួបជាចំនួនបន្សំ $C(11,\ 8) = 165$ ។

  ប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ A គឺ : $P(A) = \dfrac{C(11,\ 8)}{C(20,\ 8)} = \dfrac{165}{125970} = 0.0013$ ។

- គេរើសសិស្សស្រី 5 នាក់ និងសិស្សប្រុស 3 នាក់ចេញពីសិស្សស្រី 11 នាក់ និងប្រុស 9 នាក់ ចំនួនរបៀបដែលរើសសិស្សស្រី 5 នាក់គឺ $C(11,\ 5)$ និងចំនួនរបៀបដែលរើសសិស្សប្រុស 3 នាក់គឺ $C(9,\ 3)$ ។

  ដូចនេះ ចំនួនករណីស្រួបនៃព្រឹត្តិការណ៍ B គឺ $C(11,\ 5) \times C(9,\ 3)$

  $$P(B) = \frac{C(11,\ 5) \times C(9,\ 3)}{C(20,\ 8)} = 0.308 \text{ ។}$$

ឧទាហរណ៍ 2 គេរៀបចំឆ្នោត 150 សន្លឹកដើម្បីលក់ឱ្យអស់មុនពេលចេញផ្សៀង ដែលក្នុងនោះមានឆ្នោតត្រូវរង្វាន់ 5 សន្លឹក ។ មនុស្សម្នាក់ទិញឆ្នោត 10 សន្លឹក ។ រកប្រូបាបដែល :

ក. គ្មានត្រូវរង្វាន់សោះ

ខ. ត្រូវរង្វាន់យ៉ាងតិច 1 សន្លឹក

គ. ត្រូវរង្វាន់ 3 សន្លឹកគត់ តាង A : ជាព្រឹត្តិការណ៍ គ្មានត្រូវរង្វាន់សោះ

B : " ត្រូវរង្វាន់ 3 សន្លឹក" ។

ក. ប្រូបាបដែលគ្មានត្រូវរង្វាន់សោះ

ចំនួនរបៀបដែលអាចទិញឆ្នោតបាន 10 សន្លឹកគឺ $C(150,\ 10)$ ជាចំនួនករណីអាច

ចំនួនឆ្នោតដែលគ្មានរង្វាន់ មាន $150 - 5 = 145$ សន្លឹក

ចំនួនរបៀបដែលជ្រើសរើសឆ្នោតគ្មានរង្វាន់ 10 សន្លឹកគឺ $C(145,\ 10)$ ជាចំនួនករណីស្រប ។

ដូចនេះ $P(A) = \dfrac{C(145,\ 10)}{C(150,\ 10)} = 0.7048$ ។

ខ. ប្រូបាបដែលត្រូវរង្វាន់យ៉ាងតិច 1 សន្លឹក

ព្រឹត្តិការណ៍ត្រូវរង្វាន់យ៉ាងតិច 1 សន្លឹក ជាព្រឹត្តិការណ៍ផ្ទុយនឹងគ្មានត្រូវរង្វាន់សោះ ។

ប្រូបាបដែលត្រូវរង្វាន់យ៉ាងតិច 1 សន្លឹក គឺ $P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0.705 = 0.2952$ ។

គ. ប្រូបាបត្រូវរង្វាន់ 3 សន្លឹក

ចំនួនរបៀបដែលជ្រើសរើសបានឆ្នោតត្រូវរង្វាន់ 3 សន្លឹក ក្នុងចំណោមឆ្នោតត្រូវរង្វាន់ 5 សន្លឹកគឺ $C(5,\ 3)$ ឯឆ្នោតដែលទិញ 7 សន្លឹកទៀតជាឆ្នោតគ្មានរង្វាន់រើសចេញពីឆ្នោត 145 **សន្លឹកដែលគ្មានរង្វាន់** ។ ចំនួនរបៀបដែលជ្រើសរើសបានឆ្នោត 7 សន្លឹកនេះគឺ $C(145,\ 7)$ ។ គេបាន $P(B) = \dfrac{C(5,\ 3) \times C(145,\ 7)}{C(150,\ 10)} = 0.002$ ។

ប្រតិបត្តិ ក្នុងថង់មួយមានអក្សរ 10 តួ $a, b, c, d, e, f, g, h, i, j$ ។ គេចាប់យកអក្សរ 4 តួព្រមគ្នាចេញពីថង់ដោយចៃដន្យ ។ រកប្រូបាបដែល :

ក. គ្មានបានស្រៈមួយសោះ

ខ. បានស្រៈតែមួយគត់

គ. បានស្រៈតែ 2 គត់

ឃ. យ៉ាងតិចណាស់បានស្រៈមួយ ។

មេរៀនសង្ខេប

- ព្រឹត្តិការណ៍ផលគុណនៃ A និង B ជាប្រសព្វនៃព្រឹត្តិការណ៍ A និងព្រឹត្តិការណ៍ B ។
- ព្រឹត្តិការណ៍ផលបូកនៃ A និង B ជាប្រជុំនៃព្រឹត្តិការណ៍ A និងព្រឹត្តិការណ៍ B ។
- ព្រឹត្តិការណ៍ B និងព្រឹត្តិការណ៍ D ជាព្រឹត្តិការណ៍មិនចុះសម្រុង កាលណាព្រឹត្តិការណ៍ផលគុណនៃ B និង D ជាព្រឹត្តិការណ៍មិនអាចមាន : $B \cap D = \varnothing$ ។
- ព្រឹត្តិការណ៍ 2 ជាព្រឹត្តិការណ៍ផ្ទុយគ្នា ឬជាព្រឹត្តិការណ៍បំពេញគ្នា កាលណាព្រឹត្តិការណ៍ផលគុណនៃព្រឹត្តិការណ៍ទាំង 2 ជាព្រឹត្តិការណ៍មិនអាចមាន និងព្រឹត្តិការណ៍ផលបូកនៃព្រឹត្តិការណ៍ទាំង 2 ជាព្រឹត្តិការណ៍ប្រាកដ : $A \cap \bar{A} = \varnothing$, $A \cup \bar{A} = S$ ។
- គេបានព្រឹត្តិការណ៍ 2 បំពេញគ្នាជាព្រឹត្តិការណ៍មិនចុះសម្រុង ។
- ប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍មួយ ជាផលធៀបនៃចំនួនករណីស្រប និងចំនួនករណីអាច $P(A) = \dfrac{\text{ចំនួនករណីស្រប } n(A)}{\text{ចំនួនករណីអាច } n(S)}$ ។
- ប្រូបាបនៃលំហសំណាក S ស្មើនឹង 1 : $P(S) = 1$ ។
- ប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍មិនអាចមានស្មើនឹង 0 : $P(\varnothing) = 0$ ។
- ប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍មួយក្នុងលំហសំណាក ជាចំនួនដែលនៅចន្លោះ $[0, 1]$

  $0 \le P(A) \le 1$ ។
- ប្រូបាបជាអនុវត្តន៍ ដែលកំណត់ពីលំហសំណាក S ទៅចន្លោះ $[0, 1]$

  $P : S \to [0, 1]$ ។
- ប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ផលគុណ A និង B គឺ :

  $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$ បើ A និង B មិនទាក់ទងគ្នា

  $P(A \cap B) = P(A) \times P(B$ ដែល A កើតមុន $)$ បើ A និង B ទាក់ទងគ្នា ។
- ប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ផលបូក A និង B គឺ : $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

  $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ បើ A និង B ជាព្រឹត្តិការណ៍មិនចុះសម្រុង ។
- ប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍បំពេញនៃ A គឺ : $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$ ។

លំហាត់

1. គេបោះកាក់មួយ និងគ្រាប់ឡុកឡាក់មួយគ្រាប់ព្រមគ្នា ។ ចូរកំណត់ :

   ក. សកម្មភាពដែលជាពិសោធន៍ចៃដន្យ និងជាវិញ្ញាសា

   ខ. លំហសំណាក S និងព្រឹត្តិការណ៍ A : " បោះកាក់បានខាងរូប H "

   ព្រឹត្តិការណ៍ B : " បោះគ្រាប់ឡុកឡាក់បានលេខ 4 "

   គ. រកប្រូបាបព្រឹត្តិការណ៍ផ្ទុយនឹង A ព្រឹត្តិការណ៍ផ្ទុយនឹង B និងព្រឹត្តិការណ៍ផលគុណ A និង B ។

2. គេហូតបៀរមួយសន្លឹកដោយចៃដន្យចេញពីហ៊ូបៀរ 52 សន្លឹក ។ រកប្រូបាបដែលហូតបាន :

   ក. សន្លឹកអាត់ ខ. សន្លឹកក្រហម

   គ. សន្លឹកអាត់ ឬក្រហម ឃ. មិនមែនអាត់ និងមិនមែនក្រហម ។

3. ថង់មួយមានឃ្លី 10 ចុះលេខពី 0 ដល់ 9 ។ គេចាប់យកឃ្លីមួយដោយចៃដន្យ ។ ចូរកំណត់ :

   ក. លំហសំណាក S និងព្រឹត្តិការណ៍ A : " ចាប់បានឃ្លីមានលេខជាពហុគុណនៃ 3 "

   B : " ចាប់បានឃ្លីមានលេខធំជាង 5 "

   ខ. រកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ $A, B, A\cap B$ និង $A\cup B$ ។

4. ថង់មួយមានឃ្លីខៀវ 7 និងឃ្លីស 3 ។ គេចាប់យកឃ្លីម្តង 3 ដោយចៃដន្យតែម្តងគត់ ។ រកប្រូបាបដែលចាប់បាន :

   ក. ឃ្លីខៀវ 2 និងឃ្លី ស 1 ខ. ឃ្លីខៀវទាំង 3 គ. ឃ្លីសទាំង 3 ។

5. គេបោះគ្រាប់ឡុកឡាក់ 2 ព្រមគ្នា មួយពណ៌ខៀវ មួយទៀតពណ៌ក្រហម ។ រកប្រូបាបដែល :

   ក. លេខចេញលើគ្រាប់ខៀវ ស្មើនឹង 2 ដងនៃលេខចេញលើគ្រាប់ក្រហម

   ខ. ផលបូកលេខគ្រាប់ឡុកឡាក់ទាំង 2 ស្មើនឹង 5 ។

6. ក្នុងប្រអប់ 1 មានក្រដាសបត់ជាសន្លឹកឆ្នោតចាប់យករង្វាន់ ។ សន្លឹកឆ្នោតមាន 20 សន្លឹកដែលឆ្នោតត្រូវរង្វាន់មាន 12 សន្លឹកសម្រាប់សិស្ស 20 នាក់ចាប់យកមួយសន្លឹកម្នាក់បន្តបន្ទាប់គ្នា ដើម្បីផ្ទៀងមើលរង្វាន់រៀងៗខ្លួន ។ សុខជាអ្នកចាប់បានមុនគេ បន្ទាប់សៅចាប់ទី 2 និងសនចាប់ទី 3 និងសិស្សឯទៀតចាប់ម្នាក់មួយបន្តបន្ទាប់គ្នារហូតអស់ឆ្នោត ។ រកប្រូបាបដែល :

   ក. សុខចាប់បានឆ្នោតត្រូវរង្វាន់

   ខ. សៅចាប់បានឆ្នោតត្រូវរង្វាន់

   គ. សនចាប់បានឆ្នោតត្រូវរង្វាន់

   ឃ. តើអ្នកចាប់មុន និងអ្នកចាប់ក្រោយអ្នកណាមានសំណាងជាងអ្នកណា ?

ជំពូក 7

ស្ថិតិ

នៅជំពូកនេះ យើងនឹងសិក្សាពីការបែងចែកសំណុំទិន្នន័យមួយជាភាគរយ និងបម្រែបម្រួលសំណុំទិន្នន័យមួយធៀបនឹងសំណុំទិន្នន័យមួយទៀត ។

លើសពីនេះទៀត យើងនឹងសិក្សាបំណែងចែកនៃអថិរជាប់ដ៏សំខាន់មួយក្នុងស្ថិតិ ។

មេរៀនទី

1 ការបែងចែកនិន្នន័យជាភាគរយ

1. រង្វាស់ទីតាំង

ឧទាហរណ៍ សាលារៀនបើកបររថយន្តមួយកន្លែងទទួលបានសិស្សចំនួន 16 នាក់ ដែលមានអាយុ 25, 23, 26, 30, 37, 20, 21, 23, 31, 34, 26, 34 31, 26, 35, 32 ។ នៅពេលគេរៀបអាយុសិស្សតាមលំដាប់ពីតិចទៅច្រើន រួចហើយគេចង់ដឹងថា ៖

តើ 25 % នៃសិស្សទាំងអស់នៅក្រោមអាយុប៉ុន្មានឆ្នាំ ?

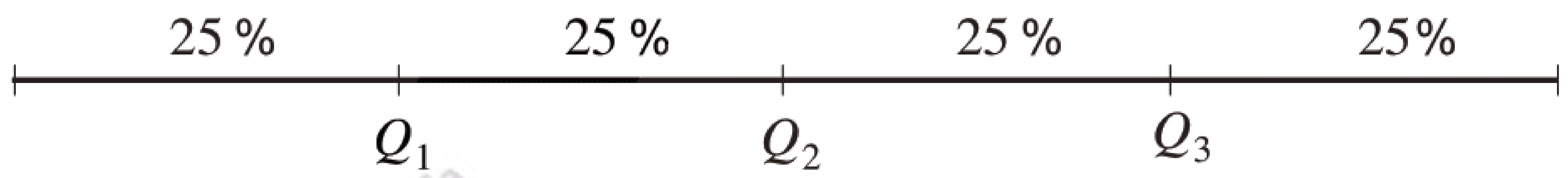
50 % នៃសិស្សទាំងអស់នៅក្រោមអាយុប៉ុន្មានឆ្នាំ ?

75 % នៃសិស្សទាំងអស់នៅក្រោមអាយុប៉ុន្មានឆ្នាំ ?

វត្ថុបំណង

- គណនាកាទីល ឬភាគបួន ភាគដប់ និងភាគរយ
- គណនាកាទីល ឬភាគបួន ភាគដប់ និងភាគរយនៃទិន្នន័យមានបំណែងចែកប្រេកង់ ។

ចំពោះទិន្នន័យដែលរៀបតាមលំដាប់កើន តម្លៃ 25 % នៃទិន្នន័យទាំងអស់ ហៅកាទីលទី 1 តាងដោយ Q_1 និង 75 % នៃទិន្នន័យទាំងអស់ ហៅថាកាទីលទី 3 តាងដោយ Q_3 ។ ចំណែកកាទីលទី 2 តាងដោយ Q_2 គឺជាមេដ្យាន ជាតម្លៃត្រូវនឹង 50 % នៃទិន្នន័យទាំងអស់ ។



20 21 23 23 | 25 26 26 26 | 30 31 31 32 | 34 34 35 37

Q_1 Q_2 Q_3

គេសង្កេតឃើញថា ចំនួនទិន្នន័យទាំងអស់ស្មើនឹង 16 ដូចនេះ

$Q_1 =$ តម្លៃតួទី $\frac{1}{4}(16+1) =$ តម្លៃតួទី 4.25

ដោយតួទី 4.25 នៅចន្លោះតួទី 4 និងតួទី 5 គេបាន $Q_1 = \frac{23+25}{2} = 24$ ។

$Q_2 =$ តម្លៃតួទី $\frac{1}{2}(16+1) =$ តម្លៃតួទី 8.5

ដោយតួទី 8.5 នៅចន្លោះតួទី 8 និងតួទី 9 គេបាន $Q_2 = \frac{26+30}{2} = 28$ ។

$Q_3 =$ តម្លៃតួទី $\frac{3}{4}(16+1) =$ តម្លៃតួទី 12.75

ដោយតួទី 12.75 នៅចន្លោះតួទី 12 និងតួទី 13 គេបាន $Q_3 = \frac{32+34}{2} = 33$ ។

បំណកស្រាយចម្លើយ យើងឃើញថា $25\ \%$ នៃសិស្សទាំងអស់មានអាយុតិចជាង 24 ឆ្នាំ $50\ \%$ នៃសិស្សទាំងអស់មានអាយុតិចជាង 28 ឆ្នាំ ហើយ $75\ \%$ នៃសិស្សទាំងអស់មានអាយុតិចជាង 33 ឆ្នាំ។

ជាទូទៅ បើទិន្នន័យដែលបានរៀបតាមលំដាប់មានចំនួនតួស្មើនឹង n នោះគេបាន

កាទីលទីមួយ $Q_1 =$ តម្លៃតួទី $\frac{1}{4}(n+1)$

កាទីលទីពីរ $Q_2 =$ តម្លៃតួទី $\frac{2}{4}(n+1) =$ តម្លៃទី $\frac{1}{2}(n+1)$

កាទីលទីបី $Q_3 =$ តម្លៃតួទី $\frac{3}{4}(n+1)$ ។

វិធាន
- មុននឹងគណនាកាទីល ត្រូវរៀបទិន្នន័យតាមលំដាប់ពីតូចទៅធំ
- បើទីតាំងនៃ Q ស្ថិតនៅចំទិន្នន័យណា នោះ Q ស្មើនឹងតម្លៃទិន្នន័យនោះ
- បើទីតាំងនៃ Q ស្ថិតនៅចំចន្លោះទិន្នន័យពីរ នោះតម្លៃ Q ជាមធ្យមនៃទិន្នន័យទាំងពីរនោះ ។

ដូចគ្នានេះដែរ ភាគដប់ចែកទិន្នន័យជាដប់ចំណែកស្មើៗគ្នា ។

បើគេតាង D_1 ជាទីតាំងនៃភាគដប់ នោះគេបាន D_1 , D_2 , D_3 , ..., D_9 ។

រូបមន្តភាគដប់ $\boxed{D_1 = \text{តម្លៃតួទី } \frac{1}{10}(n+1)\ ,\quad D_9 = \text{តម្លៃតួទី } \frac{9}{10}(n+1)}$ ។

ភាគរយចែកទិន្នន័យជាមួយរយចំណែកស្មើៗគ្នា។ បើគេតាង L_1 ជាទីតាំងភាគរយ នោះគេបាន L_1 , L_2 ,... L_{99} ។

រូបមន្តភាគរយ $\boxed{L_p = \text{តម្លៃតួទី} \frac{P}{100}(n+1) \text{ ដែល } P \text{ ជាភាគរយដែលគេត្រូវរក}}$ ។

លំហាត់គំរូ ប្រាក់កម្រៃជើងសាប្រចាំខែរបស់បុគ្គលិកក្នុងក្រុមហ៊ុនលក់កុំព្យូទ័រមួយ (គិតជាដុល្លារ) មាន 120 150 150 180 200 120 170 220 190 ។ គណនា Q_1 និង D_2 ។

ចម្លើយ រៀបទិន្នន័យតាមលំដាប់ 120 120 150 150 170 180 190 200 220

$Q_1 =$ តម្លៃតួទី $\frac{1}{4}(n+1)$, $n = 9$

$=$ តម្លៃតួទី $\frac{1}{4}(9+1) =$ តម្លៃតួទី 2.5 ។

ដូចនេះ $Q_1 = \dfrac{120+150}{2} = \$135$ មានន័យថា 25 % នៃបុគ្គលិកទាំងអស់មានប្រាក់កម្រៃជើងសាតិចជាង \$135 ។

$D_2 =$ តម្លៃតួទី $\frac{2}{10}(n+1) =$ តម្លៃតួទី 2 ។ ដូចនេះ $D_2 = \$120$ មានន័យថា 80 % នៃបុគ្គលិកទាំងអស់មានប្រាក់កម្រៃជើងសាច្រើនជាង \$120 ។

ប្រតិបត្តិ គណនា Q_1 , Q_2 , Q_3 និង L_{25} នៃសំណុំទិន្នន័យខាងក្រោម :

4 6 18 25 9 16 22 5 20 4 8 ។

2. រង្វាស់ទីតាំងនៃទិន្នន័យផ្តុំជាប្រេកង់

ដើម្បីកំណត់រង្វាស់ទីតាំងនៃទិន្នន័យផ្តុំជាប្រេកង់ គេត្រូវបង្កើតតារាងប្រេកង់កើន ។

លំហាត់គំរូ អ្នកលក់សៀវភៅម្នាក់បានឱ្យដឹងថា សៀវភៅថ្មីរបស់គាត់ទាំងអស់មានចំនួន 30 ក្បាល ។ ក្នុងនោះមានចំនួន 5 ក្បាល មួយក្បាលលក់តម្លៃ \$12 មានចំនួន 8 ក្បាល មួយក្បាលលក់តម្លៃ \$9 មានចំនួន 6 ក្បាល មួយក្បាលលក់តម្លៃ \$7 មានចំនួន 9 ក្បាល មួយក្បាលលក់តម្លៃ \$15 និងមានចំនួន 2 ក្បាល មួយក្បាលលក់តម្លៃ \$20 ។ គណនា Q_1 មេដ្យាននិង L_{81} ។

ចម្លើយ បង្កើតតារាងប្រេកង់កើន

តំលៃសៀវភៅ x	ចំនួនសៀវភៅ f	$f^{\uparrow}$
\$7	6	6
\$9	8	14
\$12	5	19
\$15	9	28
\$20	2	30

$Q_1 =$ តម្លៃតួទី $\frac{1}{4}(n+1)$, $n = 30$

$=$ តម្លៃតួទី $\frac{1}{4}(30+1)$

$=$ តម្លៃតួទី 7.75 ។

ដូចនេះ $Q_1 = \$\ 9$ ។

មេដ្យាន $=$ តម្លៃតួទី $\frac{1}{2}(n+1)$

= តម្លៃតួទី $\frac{1}{2}(30+1)$

= តម្លៃតួទី 15.5 ។ ដូចនេះ មេដ្យានស្មើនឹង \$ 12 ។

L_{81} = តម្លៃតួទី $\frac{P}{100}(n+1)$ = តម្លៃតួទី $\frac{81}{100}(30+1)$ = តម្លៃតួទី 25.11 ។

ដូចនេះ L_{81} = \$ 15 ។

ប្រតិបត្តិ តារាងបំណែងចែកប្រេកង់ខាងក្រោម បង្ហាញពីចំនួនក្មេងក្នុងគ្រួសារនៃ 35 គ្រួសារ ដែលគេបានទៅសម្ភាសន៍ក្នុងភូមិមួយ ។ គណនាមេដ្យាន កាទីលទីមួយ Q_1 និង L_{73} ។

ចំនួនក្មេង x	0	1	2	3	4	5
ចំនួនគ្រួសារ f	3	5	12	9	4	2

3. រង្វាស់ទីតាំងនៃទិន្នន័យផ្តុំជាថ្នាក់

ដើម្បីកំណត់រង្វាស់ទីតាំងនៃទិន្នន័យផ្តុំជាថ្នាក់ គេត្រូវបង្កើតតារាងប្រេកង់កើន ។

លំហាត់គំរូ 1 ខាងក្រោមជាតារាងបំណែងចែកប្រេកង់នៃពិន្ទុសិស្សចំនួន 40 នាក់ ដែលគេបានធ្វើតេស្តគណិតវិទ្យា ។

ថ្នាក់នៃពិន្ទុ	30 - 40	40 - 50	50 - 60	60 - 70	70 - 80	80 - 90
ចំនួនសិស្ស	5	7	12	11	3	2

គណនា Q_1 និង Q_3 ។

ចម្លើយ ដំបូងត្រូវបង្កើតតារាងប្រេកង់កើន

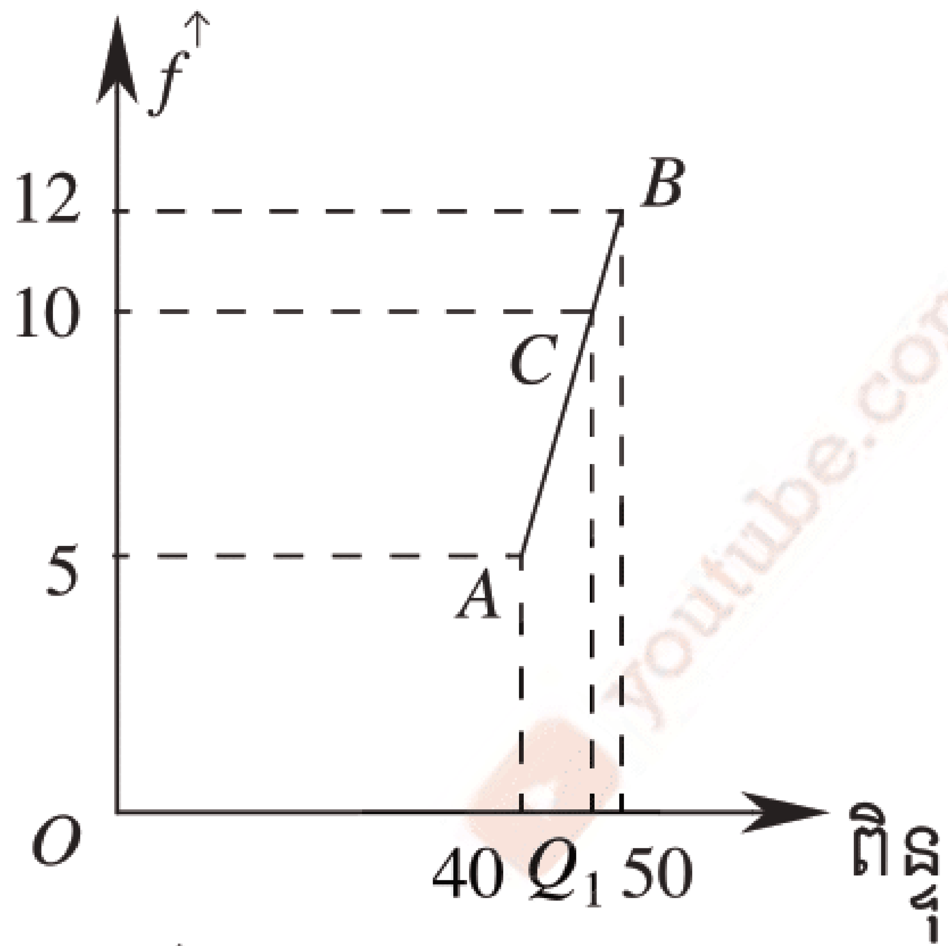
- មួយភាគបួននៃប្រេកង់សរុប ឬ 25 % នៃទិន្នន័យគឺ $\frac{40}{4} = 10$
- ក្នុងជួរប្រេកង់កើន 10 ស្ថិតនៅក្នុងថ្នាក់ 40 - 50
- ដូចនេះ Q_1 ស្ថិតនៅក្នុងថ្នាក់ 40 - 50 ។

ថ្នាក់	ចំនួនសិស្ស f	$f^{\uparrow}$
30 - 40	5	5
40 - 50	7	12
50 - 60	12	24
60 - 70	11	35
70 - 80	3	38
80 - 90	2	40

គេអាចកំណត់ទីតាំង Q_1 ឱ្យកាន់តែជាក់លាក់ទៀតតាមផលធៀប ។

គេបាន $\dfrac{10-5}{Q_1-40} = \dfrac{7}{10} \Rightarrow Q_1 = 40 + \dfrac{10-5}{7} \times 10 = 47.14$ ។

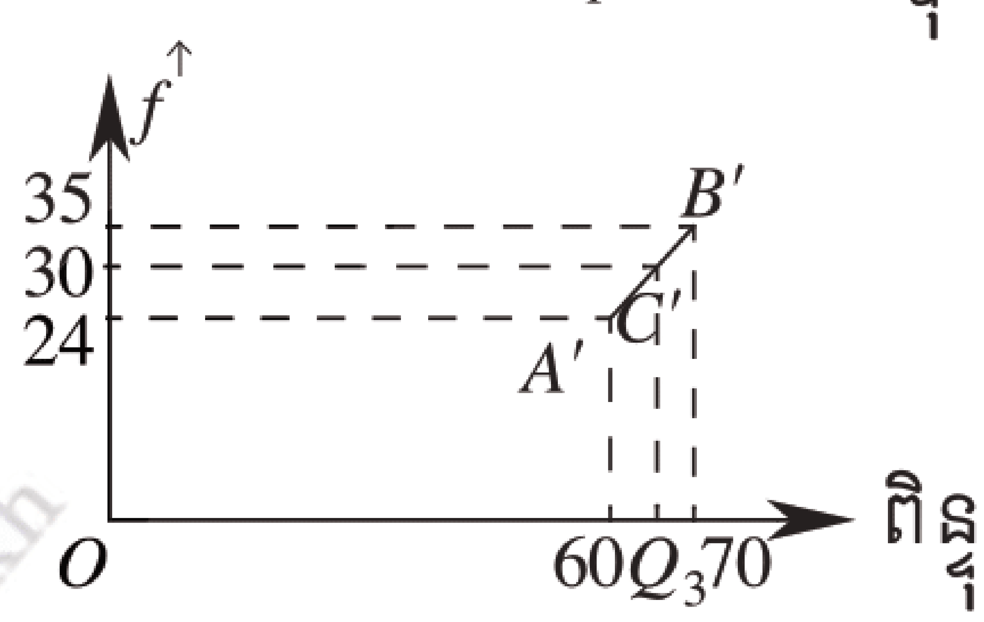
គណនាកាទីលទីបី Q_3



- បីភាគបួននៃប្រេកង់សរុប ឬ 75 % នៃទិន្នន័យស្មើនិង $\frac{3}{4} \times 40 = 30$
- ក្នុងជួរប្រេកង់កើន 30 ស្ថិតនៅក្នុងថ្នាក់ 60 - 70 ដូចនេះ Q_3 ស្ថិតក្នុងថ្នាក់ 60 - 70 ។ គេអាចកំណត់ទីតាំងនៃ Q_3 ឱ្យកាន់តែជាក់លាក់ទៀតតាមផលធៀប

គេបាន

$\dfrac{30-24}{Q_3-60} = \dfrac{11}{10} \Rightarrow Q_3 = 60 + \dfrac{30-24}{11} \times 10 = 65.45$ ។



ជាទូទៅបើ

L ថ្នាក់គោលក្រោម

$f^{\uparrow}$ ជាប្រេកង់កើនមុនបន្ទាន់នៃថ្នាក់ដែល Q ស្ថិតនៅ

f ជាប្រេកង់

i ជាប្រវែងថ្នាក់

n ជាផលបូកប្រេកង់សរុប

នោះ

$$Q_1 = L + \dfrac{\frac{1}{4}n - f^{\uparrow}}{f} \times (i)$$

$$Q_3 = L + \dfrac{\frac{3}{4}n - f^{\uparrow}}{f} \times (i)$$

$$L_p = L + \dfrac{\frac{P}{100}n - f^{\uparrow}}{f} \times (i)$$

លំហាត់គំរូ 2 ខាងក្រោមនេះជាបំណែងចែក ការប្រាក់ (គិតជាដុល្លារ) ដែលអ្នកវិនិយោគចំនួន 460 នាក់ឱ្យក្នុងមួយឆ្នាំ ។

ការប្រាក់	30 - 40	40 - 50	50 - 60	60 - 70	70 - 80
ចំនួនអ្នកវិនិយោគ f	17	55	142	153	93

គណនា Q_1 Q_3 និង L_{45} ។

ចម្លើយ ដំបូងត្រូវបង្កើតតារាងប្រេកង់កើន

$Q_1 = L + \dfrac{\frac{1}{4}n - f^{\uparrow}}{f} \times (i)$ ដើម្បីអនុវត្តរូបមន្តនេះបាន លុះត្រាតែយើងដឹង Q_1 ស្ថិតក្នុងថ្នាក់មួយណាសិន ។

ការប្រាក់	f	$f^{\uparrow}$
30 - 40	17	17
40 - 50	55	72
50 - 60	142	214
60 - 70	153	367
70 - 80	93	460

យើងដឹងថា $Q_1 =$ តម្លៃតួទី $\frac{1}{4}n =$ តម្លៃតួទី $\frac{1}{4} \times 460 =$ តម្លៃតួទី 115 ។

តាមតារាងប្រេកង់កើន គេបាន Q_1 ស្ថិតក្នុងថ្នាក់ 50 - 60 ។

គេបាន $L = 50$, $\frac{1}{4}n = \frac{1}{4} \times 460 = 115$, $f^{\uparrow} = 72$, $f = 142$, $i = 60 - 50 = 10$ ។

ដូចនេះ $Q_1 = 50 + \dfrac{115 - 72}{142} \times (10) = 53.03$ ដុល្លារ ។

$Q_3 = L + \dfrac{\frac{3}{4}n - f^{\uparrow}}{f} \times (i)$ យើងដឹងថា $Q_3 =$ តម្លៃតួទី $\frac{3}{4}n =$ តម្លៃតួទី $\frac{3}{4} \times 460$

$=$ តម្លៃតួទី 345 ។

តាមតារាងប្រេកង់កើន គេបាន Q_3 ស្ថិតក្នុងថ្នាក់ " 60 - 70 " ។

គេបាន $L = 60$, $\frac{3}{4}n = \frac{3}{4} \times 460 = 345$, $f^{\uparrow} = 214$, $f = 153$, $i = 70 - 60 = 10$ ។

ដូចនេះ $Q_3 = 60 + \dfrac{345 - 214}{153} \times (10) = 68.56$ ដុល្លារ ។

$L_{45} = L + \dfrac{\frac{P}{100}n - f^{\uparrow}}{f}(i)$

យើងដឹងថា $L_p =$ តម្លៃតួទី $\frac{P}{100} \times n \Rightarrow L_{45} =$ តម្លៃតួទី $\frac{45}{100} \times 460 =$ តម្លៃតួទី 207

តាមតារាងប្រេកង់កើន គេបាន L_{45} ស្ថិតនៅក្នុងថ្នាក់ " 50 - 60 " ។

គេបាន $L = 50$, $\frac{P}{100} \times n = \frac{45}{100} \times 460 = 207$, $f^{\uparrow} = 72$, $f = 142$, $i = 10$ ។

ដូចនេះ $L_{45} = 50 + \dfrac{207 - 72}{142} \times 10 = 50 + 9.51 = 59.51$ ដុល្លារ ។

បំណកស្រាយចម្លើយ ដូចជា $L_{45} = 59.51$ មានន័យថាមាន $45\ \%$ នៃអ្នកវិនិយោគទាំងអស់ឱ្យការប្រាក់តិចជាង 59.51 ដុល្លារក្នុងមួយឆ្នាំ ។

សម្គាល់ ចំពោះទិន្នន័យផ្ដុំជាថ្នាក់ការគណនាកាទីល យើងប្រើ $\frac{1}{4}n$, $\frac{3}{4}n$ ជំនួស $\frac{1}{4}(n+1)$, $\frac{3}{4}(n+1)$ ដែលជាទិន្នន័យមិនផ្ដុំជាថ្នាក់ ករណីនេះដូចគ្នាចំពោះភាគដប់ ឬភាគយកដែរ ។

ប្រតិបត្តិ តារាងបង្ហាញពីពិន្ទុ សិស្សដែលបានធ្វើតេស្ត ភាសាអង់គ្លេសចំនួន 40 នាក់ ។

ពិន្ទុ	70 - 80	70 - 80	70 - 80	70 - 80	70 - 80
ចំនួនសិស្ស f	8	10	13	6	3

គណនា L_{50} , Q_1 និង Q_3 រួចបកស្រាយចម្លើយ ។

លំហាត់

1. គណនាកាទីលទាំងបី និងភាគដប់នៃសំណុំទិន្នន័យនីមួយៗខាងក្រោម :

ក. 1 3 5 5 7 0 8 2 2 4 4

ខ. 7 10 22 2 0 8 12 13 18 21 ។

2. គណនាកាទីលទីមួយ Q_1 កាទីលទីបី Q_3 និង L_{68} នៃសំណុំទិន្នន័យ :

ក. 18 0 8 16 10 4 4 14 2 13 5 7

ខ. 0.7 0.4 0.65 0.78 0.45 0.32 1.9 0.0078 ។

3. គណនាមេដ្យាន កាទីលទីមួយ Q_1 កាទីលទីបី Q_3 និង L_{63} នៃបំណែងចែកប្រេកង់ខាងក្រោម :

ក.

x	4	5	6	7	8	9
f	12	9	8	13	9	9

ខ.

x	12	13	14	15	16
f	3	9	11	15	7

4. តារាងខាងក្រោមបង្ហាញពិន្ទុ ដែលបានមកពីបោះគ្រាប់ឡុកឡាក់មួយ ចំនួន 60 ដង ។ គណនា Q_2 និង D_1 ។

ពិន្ទុ x	1	2	3	4	5	6
ប្រេកង់ f	12	9	8	13	9	9

5. អ្នកលក់សៀវភៅម្នាក់បានឱ្យ ដឹងថា សៀវភៅថ្មីរបស់គាត់មានទាំងអស់ចំនួន 25 ក្បាល ក្នុងនោះ មានចំនួន 4 ក្បាលមួយក្បាលលក់តម្លៃ \$10 មានចំនួន 6 ក្បាលមួយក្បាលលក់តម្លៃ \$8 មានចំនួន 4 ក្បាលមួយលក់តម្លៃ \$7 មានចំនួន 9 ក្បាលមួយក្បាលលក់តម្លៃ \$15 និងមានចំនួន 2 ក្បាល មួយក្បាលលក់តម្លៃ \$22 ។

ក. គណនាតម្លៃមធ្យមក្នុងសៀវភៅមួយក្បាល

ខ. គណនាកាទីល Q_1 , Q_2 , Q_3 និង L_{32} ។

6. ការពិសោធន៍បណ្ដុះកូនប៉េងប៉ោះដោយប្រើជីគីមីក្នុងរយៈពេលមួយអាទិត្យ បម្រែបម្រួលកំពស់កូនប៉េងប៉ោះ ទទួលបានលទ្ធផលដូចខាងក្រោម :

កំពស់ (mm)	0 - 5	5 - 10	10 - 15	15 - 20	20 - 25	25 - 30	30 - 35
ចំនួនកូនប៉េងបោះ f	3	15	72	15	90	36	8

គណនា Q_1 , Q_3 និង D_1 ។

7. គេបានកត់ត្រា ចំនួនសៀវភៅដែលមាននៅតាមធ្នើចំនួន 40 ក្នុងបណ្ណាល័យមួយ ។

ចំនួនសៀវភៅ	30 - 35	35 - 40	40 - 45	45 - 50	50 - 55	55 - 60
ចំនួនធ្នើ	4	6	10	13	5	3

គណនាមេដ្យាន និង L_{28} ។

មេរៀនទី

2 រង្វាស់នៃគម្លាត

1. រ៉ង់

ឧទាហរណ៍ 1 ទិន្នន័យខាងក្រោម ជាពិន្ទុសិស្ស 5 នាក់ដែលគេបានជ្រើសរើសចេញពីថ្នាក់រៀនពីរ គឺថ្នាក់ A និងថ្នាក់ B ។

វត្ថុបំណង

- គណនារ៉ង់និងចន្លោះអាំងទែរកាទីល
- គណនាវ៉ារ្យង់និងគម្លាតស្តង់ដាស្ថិតិសកលនិងគំរូ ។

ថ្នាក់ A : 3 4 5 6 7

ថ្នាក់ B : 1 3 5 7 9 ។

បើគេគណនាគម្លាតរវាងពិន្ទុដែលខ្ពស់ជាងគេ និងពិន្ទុដែលទាបជាងគេ នោះគេបាន : គម្លាតពិន្ទុថ្នាក់ A : $7-3=4$

គម្លាតពិន្ទុថ្នាក់ B : $9-1=8$ ។

គេសង្កេតឃើញថាពិន្ទុថ្នាក់ A និង B មានមធ្យមស្មើនឹង 5 ដូចគ្នា។ ប៉ុន្តែពិន្ទុថ្នាក់ B មានគម្លាតធំជាងគម្លាតពិន្ទុថ្នាក់ A ។ គេថាពិន្ទុថ្នាក់ B មានពង្រាយខ្លាំងជាង ។

> **រ៉ង់ គឺជាផលដករវាងតម្លៃទិន្នន័យដែលខ្ពស់ជាងគេ និងតម្លៃទិន្នន័យដែលទាបជាងគេ ។**

ឧទាហរណ៍ 2 សង្កេតទិន្នន័យដែលជាពិន្ទុសិស្សមាន 6 9 11 15 25 26 27 29 30 30 30 31 35 85 100 ។ ទិន្នន័យនេះពង្រាយខ្សោយ ព្រោះយើងឃើញថាពិន្ទុមួយចំនួននៅកៀកៗគ្នា។ ប៉ុន្តែបើគេពិនិត្យតាមរ៉ង់នោះ $100-6=94$ រ៉ង់មានតម្លៃធំបញ្ជាក់ថាពិន្ទុមានពង្រាយខ្លាំង ក្នុងករណីនេះផ្ទុយនឹងពិន្ទុពិតរបស់សិស្សដែលបានទទួល ។ ដូចនេះ រ៉ង់មិនអាចយកជាការបាន ។

ក្នុងករណីដែលរ៉ង់មានតម្លៃធំពេក ហើយទិន្នន័យពិតមួយចំនួននៅកៀកគ្នា គេត្រូវបង្កើតគម្លាតមួយទៀតដោយកាត់ចោល 25 % នៃពិន្ទុទាប និង 25 % នៃពិន្ទុខ្ពស់ ហើយគេសិក្សាតែរ៉ង់ 50 % នៃពិន្ទុដែលស្ថិតនៅកណ្តាល ។

6 9 11 15 | 25 26 27 27 29 30 30 31 | 31 35 85 100

25 % នៃពិន្ទុទាបគឺ 6 9 11 15

25 % នៃពិន្ទុខ្ពស់គឺ 31 35 85 100

50 % នៃពិន្ទុកណ្តាលគឺ 25 26 27 27 29 30 30 31 ។

គណនារ៉ង់នៃពិន្ទុកណ្តាលនេះ គេបាន រ៉ង់ $31-25=6$ ហៅថាចន្លោះអាំងទែរកាទីល តាងដោយ I ។

ចន្លោះអាំងទែរកាទីល $I = Q_3 - Q_1$ ។

ធ្វើរបៀបនេះ គេនឹងបានតម្លៃមួយដែលផ្តល់ផលល្អក្នុងការវិភាគទិន្នន័យ ទោះបីទិន្នន័យនោះមានពង្រាយខ្លាំង ឬពង្រាយខ្សោយក៏ដោយ ។

លំហាត់គំរូ គេបានសម្ភាសន៍សមាជិកក្រុមភ្លេងមួយក្រុម គេដឹងថា តើសមាជិកម្នាក់ៗអាចប្រើឧបករណ៍ភ្លេងបានចំនួនប៉ុន្មាន ? លទ្ធផលនៃការសម្ភាសន៍ត្រូវបានគេរៀបដាក់ក្នុងតារាងបំណែងចែកប្រេកង់ខាងក្រោម :

ចំនួនឧបករណ៍ភ្លេង x	1	2	3	4	5
ចំនួនសមាជិក f	11	10	5	3	1

គណនារ៉ង់ និងចន្លោះអាំងទែរកាទីល ។

ចម្លើយ រ៉ង់ $= 5-1 = 4$ ។

ទិន្នន័យមានបំណែងចែកប្រេកង់ ការគណនាកាទីលត្រូវបង្កើតតារាងប្រេកង់កើន

Q_1 = តម្លៃតួទី $\frac{1}{4}(n+1)$ = តម្លៃតួទី $\frac{1}{4}(30+1)$ = តម្លៃតួទី 7.75 , $n = 30 \Rightarrow Q_1 = 1$ ។ ដូចនេះ $Q_1 = 1$ ។

Q_3 = តម្លៃតួទី $\frac{3}{4}(n+1)$ = តម្លៃតួទី $\frac{3}{4}(30+1)$ = តម្លៃតួទី 23.25 $\Rightarrow Q_3 = 3$ ។ ដូចនេះ $I = 3-1 = 2$ ។

x	f	$f^{\uparrow}$
1	11	11
2	10	21
3	5	26
4	3	29
5	1	30

ប្រតិបត្តិ គណនារ៉ង់ និងចន្លោះអាំងទែរកាទីលនៃសំណុំទិន្នន័យខាងក្រោម :

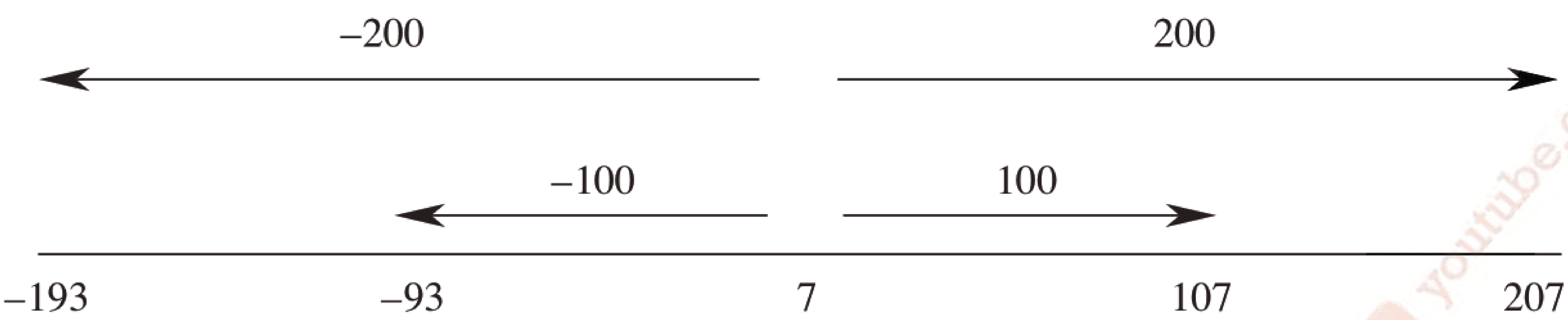
ក. 4 2 8 3 9 11 12 18 7 3

ខ.

x	3	8	9	7	5	10
f	5	7	3	9	4	2

2.1 វ៉ារ្យង់និងគម្លាតស្តង់ដានៃស្ថិតិសកល

ឥឡូវនេះ យើងពិនិត្យមើលពង្រាយនៃចំនួនដែលនៅសងខាងតម្លៃមធ្យម សម្រាប់ទិន្នន័យខាងក្រោម : គេមានសំណុំទិន្នន័យ -193 -93 7 107 207 ដែលមានមធ្យមស្មើនឹង 7 ។



យើងឃើញថាគម្លាតពីមធ្យមមាន -200 -100 0 100 និង 200 បើគេបូកគំលាតទាំងអស់នេះ នោះផលបូកស្មើនឹងសូន្យ ។ លទ្ធផលស្មើនឹងសូន្យ ពុំអាចបញ្ជាក់ពីពង្រាយឡើយនៅពេលដែលគេចង់ប្រៀបធៀបរង្វាស់ពង្រាយនៃសំណុំទិន្នន័យមួយ ទៅនឹងរង្វាស់ពង្រាយនៃសំណុំទិន្នន័យមួយទៀត ។ ហេតុនេះ គេត្រូវពិនិត្យមើលការេនៃគម្លាតទាំង 5 ខាងលើ គេបាន $(-200)^2$ $(-100)^2$ 0^2 $(100)^2$ $(200)^2$ ឬស្មើនឹង 40 000 10 000 0 10 000 40 000 ។

បើគេយកផលបូកការេនៃគម្លាតដែលស្មើនឹង 100 000 ទៅចែកនឹងចំនួនគម្លាត 5 នោះគេបានតម្លៃមួយហៅថា វ៉ារ្យង់ស្ថិតិសកល តម្លៃនោះគឺ $\frac{100\,000}{5} = 20\,000$ ។

ជាទូទៅ វ៉ារ្យង់ស្ថិតិសកលមានរូបមន្ត $\sigma^2 = \dfrac{\Sigma(X_1-\mu)^2}{N}$ ។

ដែល σ^2 តាងវ៉ារ្យង់ស្ថិតិសកល σ អានថា “ sigma ” ស៊ីចម៉ា

μ តាងមធ្យមស្ថិតិសកល អានថា “ mu ” មុយ

N តាងចំនួនទិន្នន័យទាំងអស់ក្នុងស្ថិតិសកល

X_1 តួនីមួយៗនៃទិន្នន័យក្នុងស្ថិតិសកល ។

រូបមន្តផ្សេងទៀតសម្រាប់វ៉ារ្យង់ស្ថិតិសកល

$$\sigma^2 = \frac{\Sigma(X_i-\mu)^2}{N} = \frac{\Sigma(X_i^2-2\mu X_i+\mu^2)}{N}$$

$$= \frac{\Sigma X_i^2 - 2\mu\Sigma X_1 + \Sigma\mu^2}{N}$$

$$= \frac{\Sigma X_i^2}{N} - 2\mu\frac{\Sigma X_i}{N} + \frac{\Sigma\mu^2}{N}$$ ។

ដោយ $\frac{\Sigma X_i}{N} = \mu$ ហើយ $\Sigma\mu^2 = N\mu^2$ យើងបាន :

$$= \frac{\Sigma X_i^2}{N} - 2\mu^2 + \mu^2$$

$$= \frac{\Sigma X_i^2}{N} - \mu^2 \text{ ។}$$

ដូចនេះ $\boxed{\sigma^2 = \frac{\Sigma X_i^2}{N} - \mu^2}$ ។

ឫសការេនៃវ៉ារ្យង់ស្ថិតិសកលហៅថា គម្លាតស្តង់ដាស្ថិតិសកល ។

ដូចនេះ $\boxed{\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma(X_i-\mu)^2}{N}}}$ ឬ $\boxed{\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma X_i^2}{N} - \mu^2}}$ ។

លំហាត់គំរូ 1 គេមានទិន្នន័យ 7 4 6 9 12 4 10 11 15 17 15 ។ គេសន្មតថាទិន្នន័យនេះជាស្ថិតិសកល ។ គណនាវ៉ារ្យង់ និងគំលាតស្តង់ដា ។

ចម្លើយ តាមរូបមន្តវ៉ារ្យង់ស្ថិតិសកល $\sigma^2 = \frac{\Sigma(X_i-\mu)^2}{N}$

មធ្យមស្ថិតិសកល $\mu = \frac{\Sigma X_i}{N} = \frac{7+4+6+9+12+4+10+11+15+17+15}{11}$

$$\mu = \frac{110}{11} = 10 \text{ ។}$$

X_i	$X_i - \mu$	$(X_i-\mu)^2$
7	$7-10 = -3$	9
4	$4-10 = -6$	36
6	$6-10 = -4$	16
9	$9-10 = -1$	1
12	$12-10 = 2$	4
4	$4-10 = -6$	36
10	$10-10 = 0$	0
11	$11-10 = 1$	1
15	$15-10 = 5$	25
17	$17-10 = 7$	49
15	$15-10 = 5$	25
		$\Sigma(X_i-\mu)^2 = 202$

ដូចនេះ វ៉ារ្យង់ $\sigma^2 = \frac{202}{11} = 18.36$ ។

គម្លាតស្តង់ដាស្ថិតិសកល $\sigma = \sqrt{18.36} = 4.28$ ។

លំហាត់គំរូ 2 ប្រាក់ចំណូលប្រចាំសប្តាហ៍របស់នាយករង 5 នាក់ក្នុងក្រុមហ៊ុនមួយមាន \$50 \$60 \$55 \$52 និង \$58 (គេសន្មតថាទិន្នន័យជាស្ថិតិសកល) ។

ក. គណនាវ៉ារ្យង់ស្ថិតិសកល ខ. គណនាគម្លាតស្តង់ដាស្ថិតិសកល ។

ចម្លើយ ក. រូបមន្តវ៉ារ្យង់ស្ថិតិសកល $\sigma^2 = \dfrac{\Sigma(X_i - \mu)^2}{N}$

ក្នុងរូបមន្តនេះ យើងមិនស្គាល់មធ្យមស្ថិតិសកល μ ទេ ។ គណនា μ ។

$\mu = \dfrac{\Sigma X_i}{N} = \dfrac{50+60+55+52+58}{5} = \dfrac{275}{5} = 55$ ។

ដូចនេះ $\sigma^2 = \dfrac{68}{5} = 13.6$ ។

ខ. គម្លាតស្តង់ដាសកលស្ថិតិ ជាឫសការេនៃវ៉ារ្យង់ស្ថិតិសកល

$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{13 \cdot 6} = 3.69$ ។

X_i	$X_i - \mu$	$(X_i - \mu)^2$
50	$50 - 55 = -5$	25
60	$60 - 55 = 5$	25
55	$55 - 55 = 0$	0
52	$52 - 55 = -3$	9
58	$58 - 55 = 3$	9
		$\Sigma(X_i - \mu)^2 = 68$

ប្រតិបត្តិ ម៉ាសនៃឡាំងឥវ៉ាន់មួយចំនួន ដែលគេផ្ញើទៅប្រទេសថៃមានទម្ងន់ 98kg 95kg 110kg 106kg 103kg 112kg 119kg 102kg 92kg 105kg 91kg និង 90kg ។

គណនាវ៉ារ្យង់ និងគម្លាតស្តង់ដាស្ថិតិសកល ។

2.2 វ៉ារ្យង់ និងគម្លាតស្តង់ដានៃស្ថិតិគំរូ

វ៉ារ្យង់គំរូ និងវ៉ារ្យង់ស្ថិតិសកលមានការខុសគ្នាបន្តិច ។ វ៉ារ្យង់គំរូ តាងដោយ $s^2 = \dfrac{\Sigma(X_i - \bar{X})^2}{n-1}$

ដែល s^2 តាងវ៉ារ្យង់គំរូ

$\bar{X}$ តាងមធ្យមគំរូ $\bar{X} = \dfrac{\Sigma X_i}{n}$

n តាងចំនួនទិន្នន័យក្នុងគំរូ

X_i តាងតួនីមួយៗនៃទិន្នន័យក្នុងគំរូ ។

រូបមន្តផ្សេងទៀតសម្រាប់វ៉ារ្យង់គំរូ យើងមាន $s^2 = \dfrac{\Sigma(X_i - \bar{X})^2}{n-1} = \dfrac{\Sigma(X_i^2 - 2\bar{X}X_i + \bar{X}^2)}{n-1}$

$$s^2 = \frac{\Sigma X_i^2 - 2\bar{X}\Sigma X_i + \Sigma \bar{X}^2}{n-1}$$ ចែកភាគយក និងភាគបែងនឹង n

គេបាន $$= \frac{\frac{\Sigma X_i^2 - 2\bar{X}\Sigma X_i + \Sigma \bar{X}^2}{n}}{\frac{n-1}{n}} = \frac{\frac{\Sigma X_i^2}{n} - 2\bar{X}\frac{\Sigma X_i}{n} + \frac{\Sigma \bar{X}^2}{n}}{\frac{n-1}{n}}$$

(ដោយ $\bar{X} = \frac{\Sigma X_i}{n}$ មធ្យមគំរូ និង $\Sigma\bar{X}^2 = n\bar{X}^2$)

$$\Rightarrow s^2 = \frac{\frac{\Sigma X_i^2}{n} - 2\bar{X}^2 + \bar{X}^2}{\frac{n-1}{n}} = \left(\frac{\Sigma X_i^2}{n} - \bar{X}^2\right) \times \frac{n}{n-1} = \frac{\Sigma X_i^2 - n\bar{X}^2}{n-1}$$ ។

ដូចនេះ $$s^2 = \frac{\Sigma X_i^2 - n\bar{X}^2}{n-1}$$ ។

សម្គាល់ កាលណាចំនួនទិន្នន័យក្នុងគំរូកាន់តែធំទៅៗ ពេលនោះរូបមន្តវ៉ារ្យង់គំរូកាន់តែដូចវ៉ារ្យង់សកលស្ថិតិ ។ មានន័យថា កាលណា n កាន់តែធំនោះ $s^2 \to \sigma^2$ ។ គេអាចយកវ៉ារ្យង់គំរូ ដើម្បីធ្វើការប៉ាន់ស្មានវ៉ារ្យង់ស្ថិតិសកល ។ ហេតុនេះហើយបានជាភាគបែងនៃវ៉ារ្យង់នៃស្ថិតិគំរូ $n-1$ ព្រោះចៀសវាងកុំឱ្យមានល្អៀងធំពេក ។

លំហាត់គំរូ ក្នុងរោងចក្រធ្វើនំមួយ មានម៉ាស៊ីនសម្រាប់ខ្ចប់នំពីរគឺ ម៉ាស៊ីន A និងម៉ាស៊ីន B ។ គេជ្រើសរើសយកគំរូនំចំនួន 10 កញ្ចប់ចេញពីលទ្ធផលនៃម៉ាស៊ីននីមួយៗ ហើយម៉ាសនំថ្លឹងបង្គត់គិតជាក្រាម ។

ម៉ាស៊ីន A	196	198	198	199	200	200	201	201	202	205
ម៉ាស៊ីន B	192	194	195	198	200	201	203	204	206	207

ក. គណនាគម្លាតស្តង់ដានៃម៉ាសកញ្ចប់នំ ដែលយកចេញពីលទ្ធផលការងារម៉ាស៊ីននីមួយៗ

ខ. បកស្រាយចម្លើយសំនួរខាងលើ ។

ចម្លើយ ក. គម្លាតស្តង់ដានៃម៉ាស៊ីន A និងម៉ាស៊ីន B តាមរូបមន្ត $s^2 = \frac{\Sigma(X_i - \bar{X})^2}{n-1}$

មធ្យមគំរូនំនៃម៉ាស៊ីន A $\bar{X} = \frac{\Sigma X_i}{n} = \frac{196+198+198+199+200+200+201+201+202+205}{10}$

$$= \frac{2000}{10} = 200g$$ ។

មធ្យមគំរូនៃម៉ាស៊ីន B $\bar{X} = \frac{\Sigma X_1}{n} = \frac{192 + 194 + 195 + 198 + 200 + 201 + 203 + 204 + 206 + 207}{10}$

$= \frac{2000}{10} = 200g$ ។

ម៉ាស៊ីន A, X_i	$X_i - \bar{X}$	$(X_i - \bar{X})^2$	ម៉ាស៊ីន B, X_i	$X_i - \bar{X}$	$(X_i - \bar{X})^2$
196	–4	16	192	–8	64
198	–2	4	194	–6	36
198	–2	4	195	–5	25
199	–1	1	198	–2	4
200	0	0	200	0	0
200	0	0	201	1	1
201	1	1	203	3	9
201	1	1	204	4	16
202	2	4	206	6	36
205	5	25	207	7	49
		$\Sigma(X_i - \bar{X})^2 = 56$			$\Sigma(X_i - \bar{X})^2 = 240$

គម្លាតស្តង់ដាសម្រាប់ម៉ាស៊ីន A $s_A = \sqrt{s_A^2} = \sqrt{\frac{\Sigma(X_i - \bar{X})^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{56}{9}} = \sqrt{6.22} = 2.49$ ។

គម្លាតស្តង់ដាសម្រាប់ម៉ាស៊ីន B $s_B = \sqrt{s_B^2} = \sqrt{\frac{\Sigma(X_i - \bar{X})^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{240}{9}} = \sqrt{26.67} = 5.16$ ។

ខ. បកស្រាយចម្លើយ : ដោយម៉ាស៊ីន A មានគម្លាតស្តង់ដាតូចជាងគម្លាតស្តង់ដាម៉ាស៊ីន B នាំឱ្យម៉ាស៊ីន A ធ្វើការបានល្អជាងម៉ាស៊ីន B ។

ប្រតិបត្តិ អាយុកាលអាគារអ្នកជំងឺតាមផ្នែកនីមួយៗក្នុងមន្ទីរពេទ្យមួយមាន 38 26 13 និង 22 ឆ្នាំ។ គណនាវ៉ារ្យង់ និងគម្លាតស្តង់ដា បើគេឧបមាថាទិន្នន័យជាគំរូ ។

2.3 វ៉ារ្យង់និងគម្លាតស្តង់ដាសម្រាប់ទិន្នន័យមានបំណែងចែកប្រេកង់

បើទិន្នន័យ x_1 , x_2 , x_3 , ... , x_n កើតឡើងដោយមានប្រេកង់ f_1 , f_2 , f_3 , ... , f_n នោះវ៉ារ្យង់មានរូបមន្ត

$$\boxed{\sigma^2 = \frac{\Sigma f_i(X_i - \mu)^2}{\Sigma f_i}}$$

ឬ $$\boxed{\sigma^2 = \frac{\Sigma f_i X_i^2}{\Sigma f_i} - \mu^2}$$ ។

σ ឫសការេនៃវ៉ារ្យង់ហៅថា គម្លាតស្តង់ដា គេបាន :

$$\boxed{\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma f_i(X_i - \mu)^2}{\Sigma f_i}}}$$

ឬ $$\boxed{\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma f_i X_i^2}{\Sigma f_i} - \mu^2}}$$ ។

សម្គាល់ ចំពោះទិន្នន័យមានបំណែងចែកប្រេកង់ វ៉ារ្យង់ស្ថិតិសកល និងស្ថិតិគំរូ ដូចគ្នាវ៉ារ្យង់គំរូត្រូវប្រើ s^2 និងមធ្យមគំរូប្រើ $\bar{X}$ ។

លំហាត់គំរូ តារាងខាងក្រោម ជាបំណែងចែកការប្រាក់ដែលអ្នកវិនិយោគចំនួន 460 នាក់ឱ្យក្នុងមួយឆ្នាំ ។

ការប្រាក់ (គិតជាដុល្លារ)	25 - 30	30 - 40	40 - 60	60 - 80	80 - 110
ចំនួនអ្នកវិនិយោគ f_i	17	55	142	153	93

គណនាគម្លាតស្តង់ដា ។

ចម្លើយ ចំពោះទិន្នន័យដែលផ្តុំជាថ្នាក់ ចំណុចកណ្តាលនៃថ្នាក់តំណាងឱ្យថ្នាក់នីមួយៗ ។ ឧបមាថាទិន្នន័យជាទិន្នន័យគំរូ ។

គម្លាតស្តង់ដាគំរូ $s = \sqrt{\frac{\Sigma f_i X_i^2}{\Sigma f_i} - \bar{X}^2}$

ការប្រាក់	f_i	ចំណុចកណ្ដាលនៃថ្នាក់ X_i	f_iX_i	X_i^2	$f_iX_i^2$
25 - 30	17	27.5	467.5	756.25	12856.25
30 - 40	55	35	1925	1225	67375
40 - 60	142	50	7100	2500	355000
60 - 80	153	70	10710	4900	749700
80 - 110	93	95	8835	9025	839325
	$\Sigma f_i = 460$		$\Sigma f_iX_i = 29037.5$		$\Sigma f_iX_i^2 = 2024256.25$

$\overline{X} = \frac{\Sigma f_iX_i}{\Sigma f_i} = \frac{29037.5}{460} = 63.125$ គម្លាតស្តង់ដា $s = \sqrt{\frac{2024256.25}{460} - (63.125)^2} = \sqrt{415.79}$ ។

ដូចនេះ $s = 20.39$ ។

ប្រតិបត្តិ គេមានបំណែងចែកប្រេកង់ខាងក្រោម ។ គណនាមធ្យម និងគម្លាតស្តង់ដាគំរូ ។

ថ្នាក់	3 - 10	10 - 15	15 - 20	20 - 25	25 - 30	30 - 35
f_i	15	72	15	90	35	8

លំហាត់

1. គណនាវ៉ារ្យ៉ង់ និងចន្លោះអាំងទែរកាទីលនៃសំណុំទិន្នន័យខាងក្រោម ៖

ក. 5 16 9 8 6 10 12 10 8 6

ខ.

x	3	4	5	6	7	8	9
f	5	2	7	9	4	10	5

។

2. ប្រាក់ចំណូលប្រចាំសប្តាហ៍ (គិតជាដុល្លារ) របស់អ្នកនឹងនាំថ្នាក់កណ្តាលក្នុងក្រុមហ៊ុនមួយមាន 52 56 58 65 68 65 75 70 ។ ដោយសន្មតថាទិន្នន័យទាំងនេះជាសកលស្ថិតិ ។

ក. គណនារ៉ង់ ខ. គណនាវ៉ារ្យង់សកលស្ថិតិ និងគម្លាតស្តង់ដាសកលស្ថិតិ ។

3. ពូសែ និងពូសុខជាឈ្មួញទិញជ្រូកដូចគ្នា ។ ឈ្មួញទាំងពីរទិញជ្រូកបានម្នាក់ 10 ក្បាល ដែលជ្រូកនីមួយៗមានម៉ាស

ម៉ាសជ្រូកពូសែ (គិតជា kg)	70	92	102	98	105	35	39	39	40	60
ម៉ាសជ្រូកពូសុខ (គិតជា kg)	63	63	65	71	72	74	40	58	80	94

ក. គណនាវ៉ារ្យង់ (ស្ថិតិសកល) ។

ខ. តើឈ្មួញមួយណាទិញជ្រូកបានម៉ាសស្មើសាច់ជាង ?

4. គេមានទិន្នន័យ a b 8 5 7 (ជាស្ថិតិសកល) ដែលមានតម្លៃមធ្យមស្មើនឹង 6 និងវ៉ារ្យង់ស្មើនឹង 2 ។ គណនាតំលៃ a និង b បើ $a>b$ ។

5. បំណែងចែកប្រេកង់ខាងក្រោម ជាបំណែងចែកម៉ាស (kg) ជ្រូកចំនួន 40 ក្បាលក្នុងកសិដ្ឋានមួយ

ម៉ាស (kg)	20 - 30	30 - 40	40 - 50	50 - 60	60 - 70
ចំនួនជ្រូក f_i	5	8	10	11	6

ក. គណនារ៉ង់ ខ. គណនាមធ្យម គ. គណនាគម្លាតស្តង់ដា ។

មេរៀនទី

3 បំណែងចែកណរម៉ាល់

1. រាងនៃបំណែងចែកណរម៉ាល់ និងទីតាំង

វត្ថុបំណង

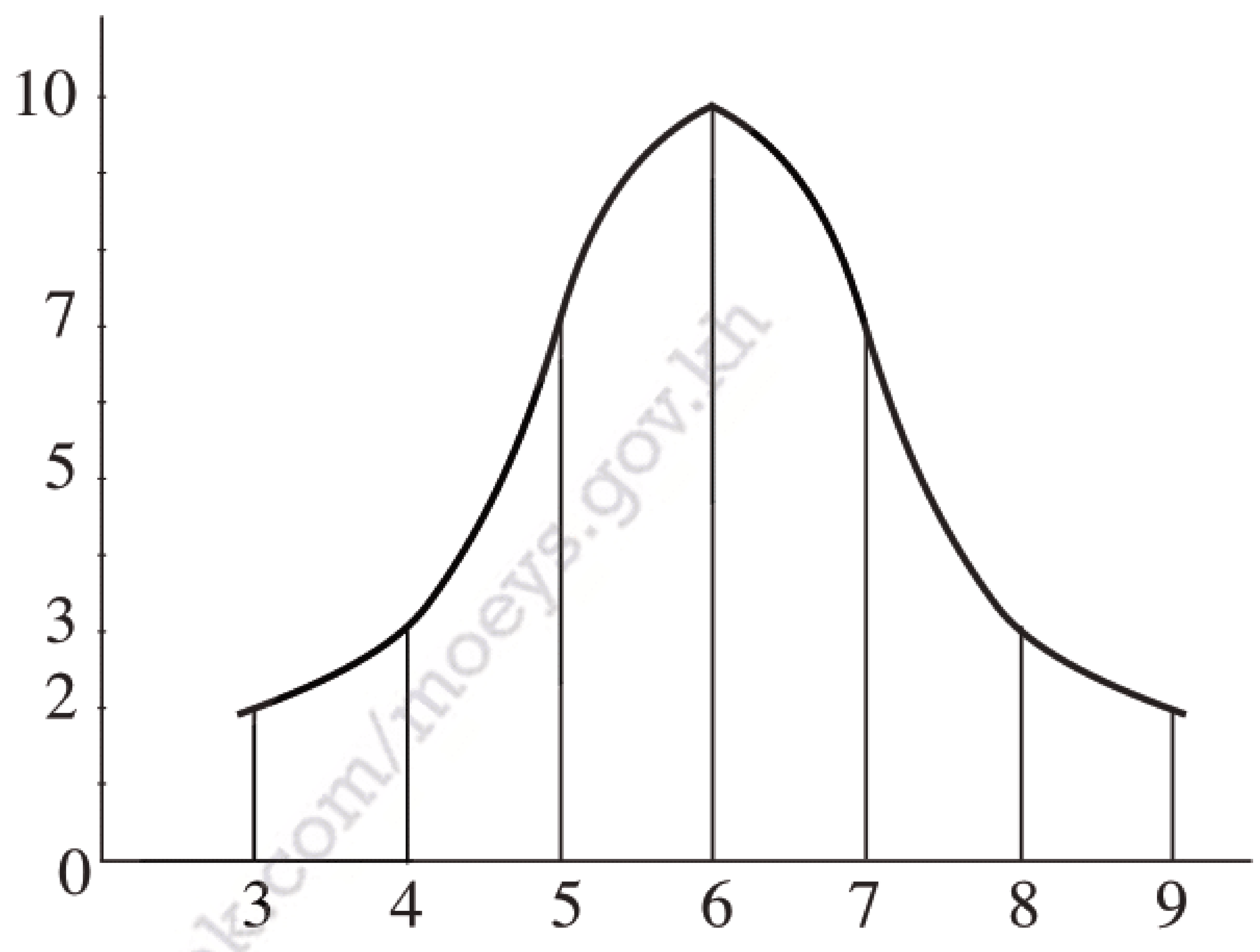
- ស្គាល់រាងនៃបំណែងចែកណរម៉ាល់
- គណនាផ្ទៃក្រឡា ឬភាគរយនៃបំណែងចែកក្រោមខ្សែកោងណរម៉ាល់

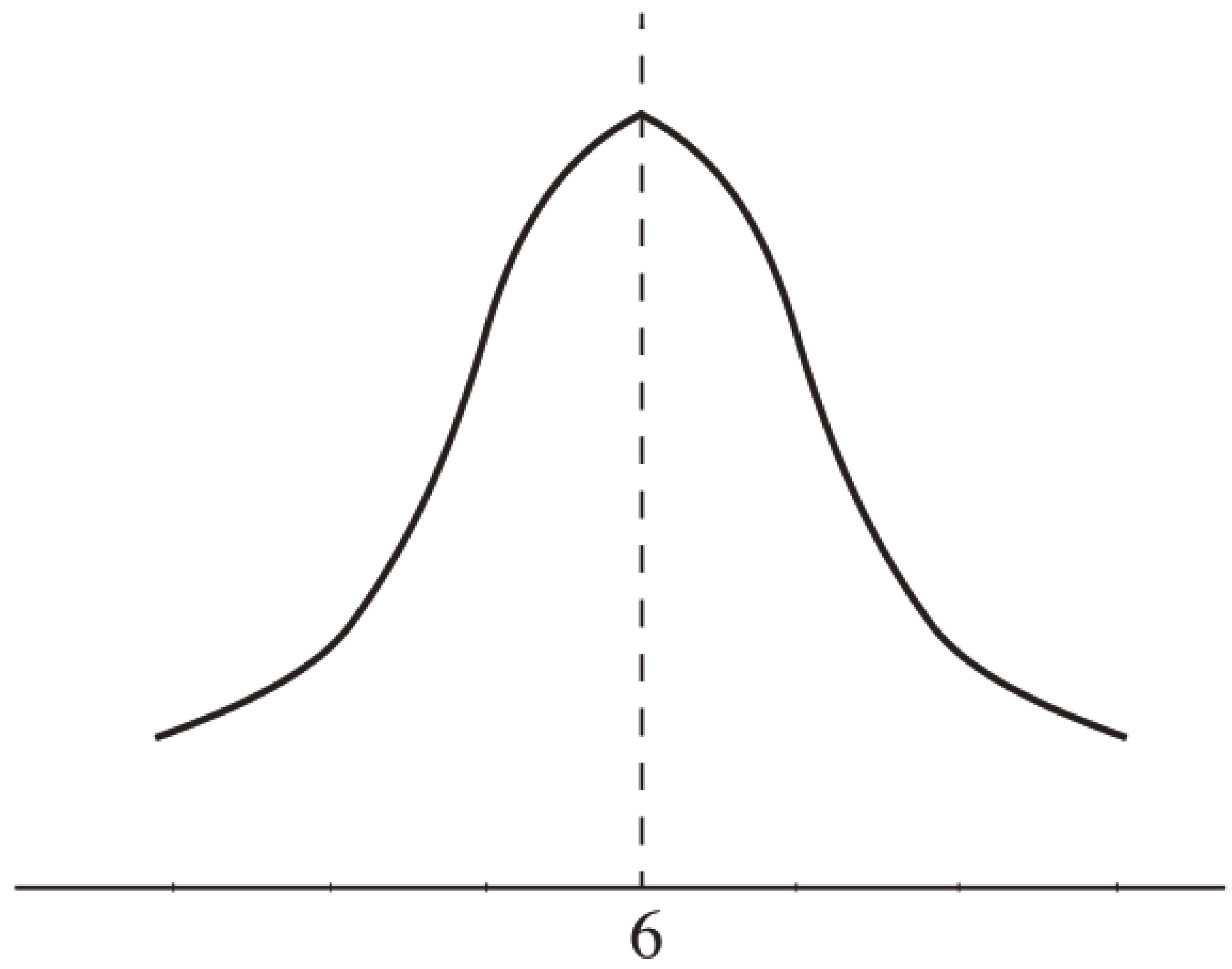
បំណែងចែកប្រេកង់នៃទិន្នន័យមួយ គេអាចតាងដោយក្រាបបន្ទាត់ឈរ ឬអ៊ីស្តូក្រាម (ទិន្នន័យផ្តុំជាថ្នាក់) ដើម្បីបង្ហាញរាងនៃបំណែងចែកនោះតាមរយៈខ្សែកោងប្រេកង់ ។

ឧទាហរណ៍ បំណែងចែកប្រេកង់ខាងក្រោម ជាបំណែងចែកពិន្ទុសិស្សដែលបានធ្វើតេស្តគណិតវិទ្យាចំនួន 34 នាក់ ។

តើបំណែងចែកនេះមានរាងយ៉ាងដូចម្តេច ? យើងអាចបង្ហាញគំនូសតាងនៃបំណែងចែកនេះតាមរយៈក្រាបនៃបន្ទាត់ឈរ ៖

ពិន្ទុ x	3	4	5	6	7	8	9
f	2	3	7	10	7	3	2





យើងសង្កេតឃើញថាបំណែងចែកនេះមានរាងជាជួង និងមានលក្ខណៈឆ្លុះធៀបនឹងម៉ូត ។

តាមរូបមន្តមធ្យម $\bar{X} = \dfrac{\Sigma fx}{\Sigma f}$

ត្រូវបង្កើតតារាង

គេបាន $\bar{X} = \frac{\Sigma fx}{\Sigma f} = \frac{204}{34} = 6$ ។

ម៉ូតជាតម្លៃនៃទិន្នន័យដែលត្រូវនឹងប្រេកង់ខ្ពស់ជាងគេ តាមក្រាបបន្ទាត់ឈរ ម៉ូតស្មើនឹង 6 ។

x	f	fx	$f^{\uparrow}$
3	2	6	2
4	3	12	5
5	7	35	12
6	10	60	22
7	7	49	29
8	3	24	32
9	2	18	34
	$\Sigma f = 34$	$\Sigma fx = 204$	

តាមរូបមន្ត មេដ្យាន $=$ តម្លៃតួទី $\frac{1}{2}(n+1)$

ដោយ $n = \Sigma f = 34$

$=$ តម្លៃតួទី $\frac{1}{2}(34+1)$

$=$ តម្លៃតួទី 17.5 ។

ដូចនេះ មេដ្យាន $= 6$ ។

យើងសង្កេតឃើញថា តម្លៃមធ្យម ម៉ូត និងមេដ្យាននៃបំណែងចែកនេះស្មើគ្នា គេថាបំណែងចែកជាបំណែងចែក **ណរម៉ាល់** ។

សន្និដ្ឋាន បើបំណែងចែកមួយ ជាបំណែងចែកណរម៉ាល់នោះត្រូវមាន

- រាងជាជួង និងមានលក្ខណៈឆ្លុះធៀបនឹងម៉ូត
- តម្លៃមធ្យម ម៉ូត និងមេដ្យានស្មើគ្នា មានទីតាំងត្រួតស៊ីគ្នា ។

លំហាត់គំរូ តារាងខាងក្រោមបង្ហាញពីបំណែងចែកប្រេកង់នៃម៉ាសសិស្សចំនួន 35 នាក់ក្នុងថ្នាក់រៀនមួយ ។

ម៉ាស (kg)	40 - 45	45 - 50	50 - 55	55 - 60	60 - 65
ចំនួនសិស្ស f	3	8	13	8	3

ក. គណនាម៉ាសមធ្យមក្នុងសិស្សម្នាក់

ខ. គណនាមេដ្យាន និងម៉ូត រួចធ្វើការសន្និដ្ឋានចំពោះបំណែងចែក ។

ចម្លើយ ក. ដោយសន្មតថាទិន្នន័យខាងលើជាស្ថិតិសកល

គេបាន $\mu = \frac{\Sigma fx}{\Sigma f}$ ត្រូវបង្កើតតារាង

ម៉ាស	ចំណុចកណ្តាលនៃថ្នាក់ x	f	fx	$f^{\uparrow}$
40 - 45	42.5	3	127.5	3
45 - 50	47.5	8	380	11

50 - 55	52.5	13	682.5	24
55 - 60	57.5	8	460	32
60 - 65	62.5	3	187.5	35
		$\Sigma f = 35$	$\Sigma fx = 1837.5$	

$\mu = \dfrac{1837.5}{35} = 52.5\text{kg}$ ។

ដូចនេះ ម៉ាសសិស្សម្នាក់គិតជាមធ្យមស្មើនឹង 52.5kg ។

ខ. គណនាមេដ្យាន

តាមរូបមន្ត មេដ្យាន $= L + \dfrac{n/2 - cf}{f} \times (i)$ ដែល $n = \Sigma f$ ។

យើងដឹងថាមេដ្យានស្មើនឹង 50 % នៃប្រេកង់សរុបគឺ $\dfrac{1}{2} \times 35 = 17.5$ ។

តាមប្រេកង់កើន មេដ្យានស្ថិតនៅក្នុងថ្នាក់ " 50 - 55 "

គេបាន $L = 50$, $cf = 11$, $f = 13$, $i = 55 - 50 = 5$ ។

ដូចនេះ មេដ្យាន $= 50 + \dfrac{17.5 - 11}{13} \times (5) = 52.5$ ។

ចំពោះទិន្នន័យដែលផ្ដុំជាថ្នាក់ ម៉ូតស្មើនឹងចំណុចកណ្ដាលនៃថ្នាក់ដែលត្រូវនឹងប្រេកង់ខ្ពស់ជាងគេ ។

ដូចនេះ ម៉ូត $= \dfrac{50 + 55}{2} = 52.5$ ។

សន្និដ្ឋាន ដោយមធ្យម ម៉ូត និងមេដ្យានស្មើនឹង 52.5kg ដូចនេះបំណែងចែកប្រេកង់នេះជាបំណែងចែកណរម៉ាល់ ។

ប្រតិបត្តិ គេមានបំណែងចែកប្រេកង់

x	1	2	3	4	5	6	7
f	1	3	5	7	5	3	1

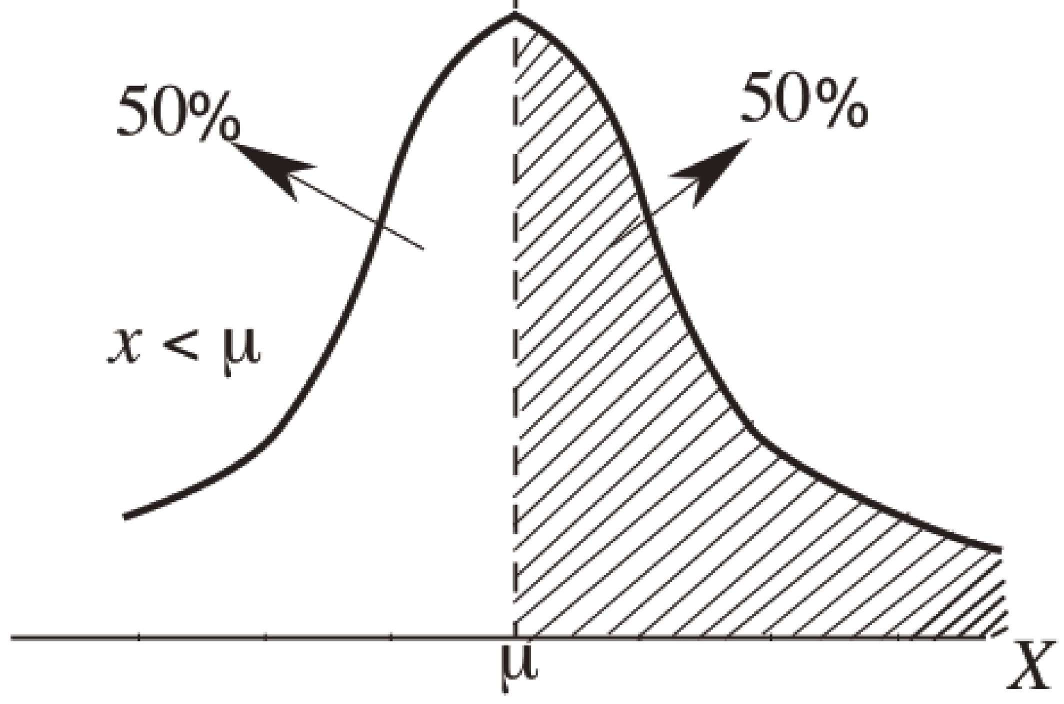
ក. ចូរបង្ហាញរាងនៃបំណែងចែក

ខ. គណនាមធ្យម ម៉ូត និងមេដ្យាន រួចធ្វើការសន្និដ្ឋានចំពោះបំណែងចែក ។

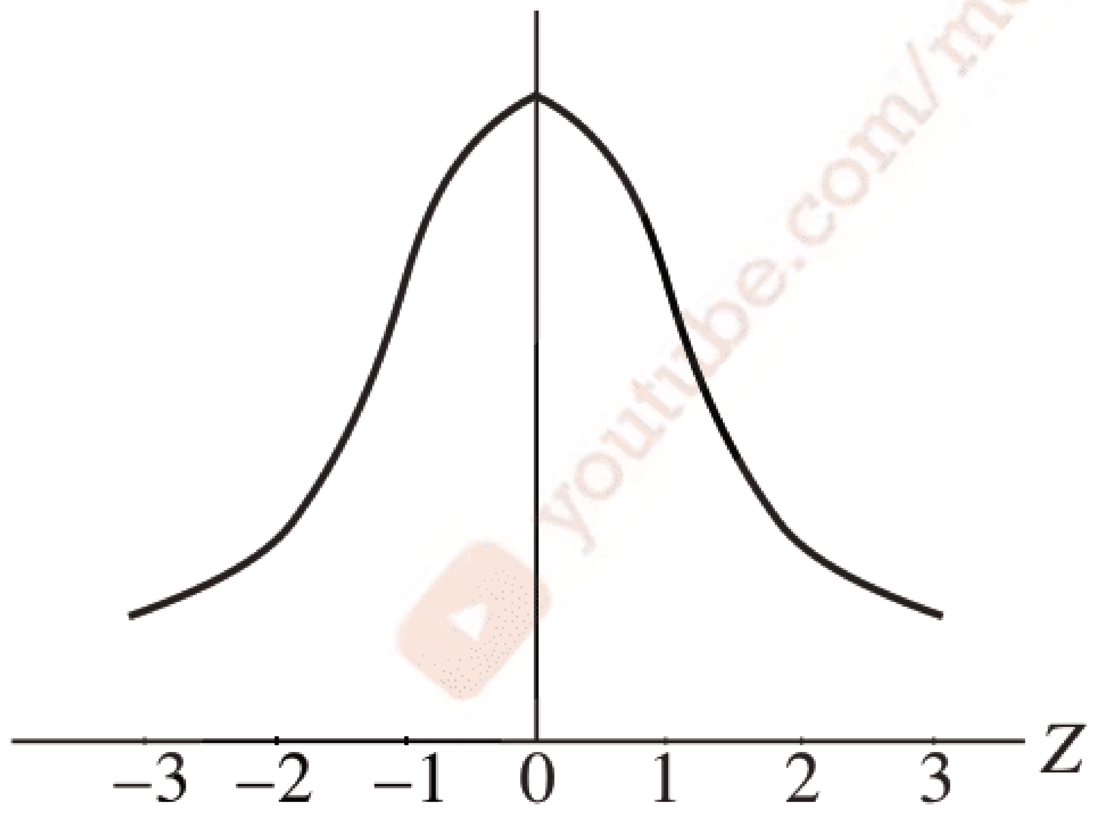
2. ផ្ទៃក្រឡានៅក្រោមខ្សែកោងណរម៉ាល់

បើយើងយកមួយឯកតាស្មើនឹងមួយស្តង់ដាគម្លាត σ ពីមធ្យមនោះ គេបាន

- ផ្ទៃក្រឡាដែលស្ថិតនៅក្រោមខ្សែកោងណរម៉ាល់ផ្នែកឆ្វេតគឺ $X > \mu$ ស្មើនឹង 50 % នៃផ្ទៃក្រឡាទាំងអស់ ។
- ផ្ទៃក្រឡាដែលស្ថិតនៅក្រោមខ្សែកោងណរម៉ាល់ផ្នែកមិនឆ្វេតគឺ $X < \mu$ ស្មើនឹង 50 % នៃផ្ទៃក្រឡាទាំងអស់ ។



ដើម្បីងាយស្រួលក្នុងការគណនាផ្ទៃក្រឡាដែលស្ថិតនៅក្រោមខ្សែកោងណរម៉ាល់ គេបង្កើតអ័ក្សថ្មីមួយទៀត ដោយកំណត់យក O នៅចំតម្លៃ μ ហើយមួយឯកតាស្មើនឹង មួយគម្លាតស្តង់ដា σ គេបាន $z = 0$, $z = 1$, $z = 2$ និង $z = 3$ យើងសិក្សាតែចន្លោះពី -3 ទៅ 3 ប៉ុណ្ណោះ ។ តម្លៃ z ហៅថាតម្លៃណរម៉ាល់ ។



គេមានទំនាក់ទំនងរវាងតម្លៃ z ធៀបនឹងតម្លៃនៃទិន្នន័យ x ដោយ $\sigma \to 1$ ហើយ $x-\mu \to z$ នោះ

គេបាន $\boxed{Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma}}$ ដែល x ជាតម្លៃទិន្នន័យ

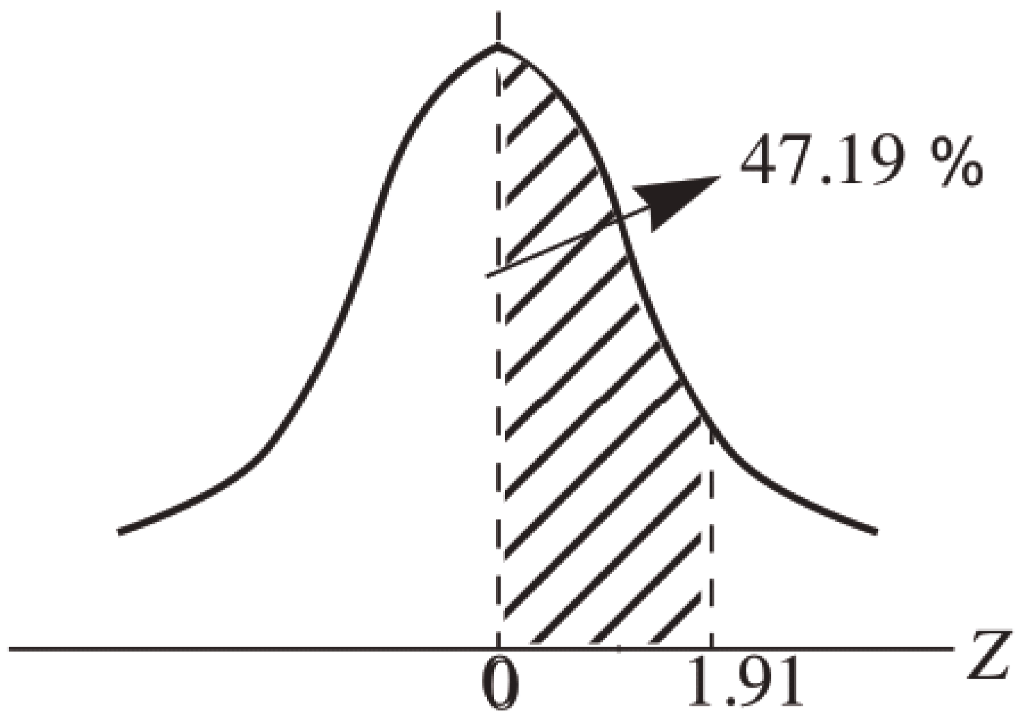
μ ជាមធ្យមនៃបំណែងចែក

σ ជាគម្លាតស្តង់ដានៃបំណែងចែក ។

យើងអាចគណនាផ្ទៃក្រឡា ឬប្រូបាបដែលស្ថិតនៅក្រោមខ្សែកោងណរម៉ាល់ ដោយមើលតារាងផ្ទៃក្រឡាស្ថិតនៅក្រោមខ្សែកោងណរម៉ាល់ (តារាងនៅទំព័រខាងក្រោយ) ។

ដូចជាតម្លៃ $z = 1.91$ មានន័យថាផ្ទៃក្រឡាដែលស្ថិតនៅក្រោមខ្សែកោងណរម៉ាល់ស្ថិតនៅចន្លោះពី 0 ទៅ 1.91 (រូបខាងស្តាំ) ។

តាមតារាងផ្ទៃក្រឡានៅក្រោមខ្សែកោងណរម៉ាល់ ។



ដូចនេះ ផ្ទៃក្រឡាស្ថិតនៅក្រោមខ្សែកោងណរម៉ាល់ស្មើនឹង $47.19\ \%$ នៃផ្ទៃក្រឡាទាំងអស់ ឬ ប្រេកង់សរុប ។

ឧទាហរណ៍ ប្រាក់ចំណូលប្រចាំសប្តាហ៍សម្រាប់ប្រធានក្រុមតាមផ្នែកទាំងអស់នៃសហគ្រាសមួយជាបំណែងចែកណរម៉ាល់ ដែលមានតម្លៃមធ្យមស្មើនឹង $\$\ 50$ និងគម្លាតស្តង់ដាស្មើនឹង $\$\ 10$ ។

ក. កំណត់តម្លៃ z បើប្រាក់ចំណូល $x = \$\ 60$ និង $x = \$\ 40$ ក្នុងមួយសប្តាហ៍ ។

ខ. តើមានប្រធានក្រុមតាមផ្នែកប៉ុន្មានភាគរយ មានប្រាក់ចំណូលតិចជាង $\$\ 55$?

ក. យើងត្រូវប្រើរូបមន្តបំប្លែងពីអ័ក្ស X ទៅអ័ក្សតម្លៃ Z

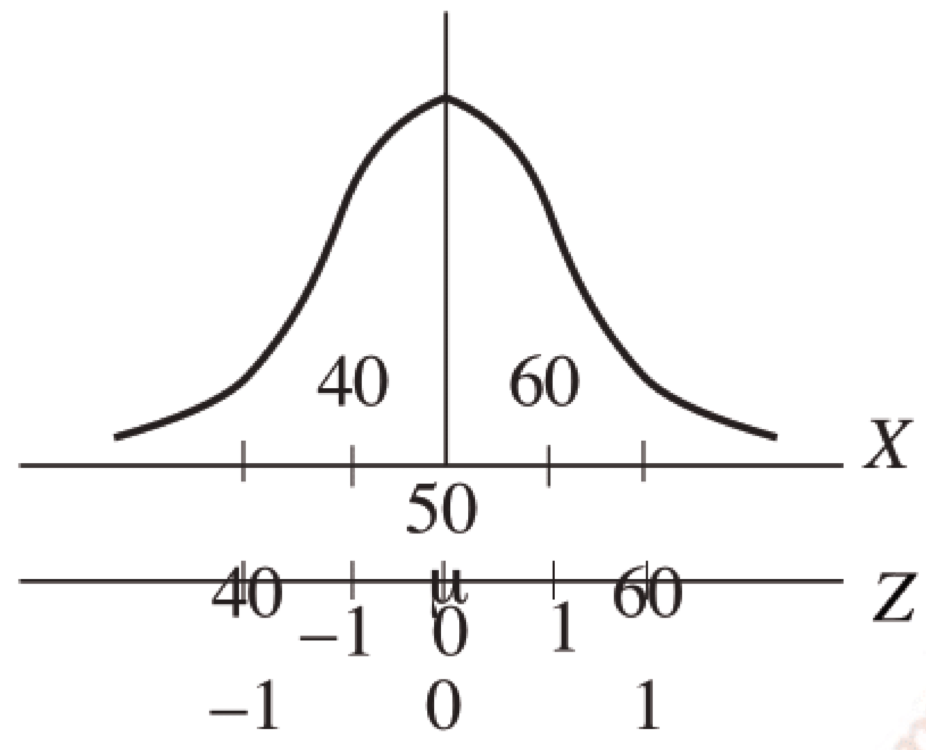
ចំពោះ $x = \$\ 60$

$$z = \frac{x-\mu}{\sigma} = \frac{60-50}{10} = 1$$ ។

ចំពោះ $x = \$\ 40$

$$z = \frac{x-\mu}{\sigma} = \frac{40-50}{10} = -1$$ ។

តម្លៃ $z = 1$ បញ្ជាក់ថាប្រាក់ចំណូលប្រចាំសប្ដាហ៍ \$ 60 ស្ថិតនៅលើមធ្យមមួយគម្លាតស្តង់ដា ហើយ $z = -1$ បញ្ជាក់ថាប្រាក់ចំណូលប្រចាំសប្ដាហ៍ \$ 40 ស្ថិតនៅក្រោមមធ្យមមួយគម្លាតស្តង់ដា ។

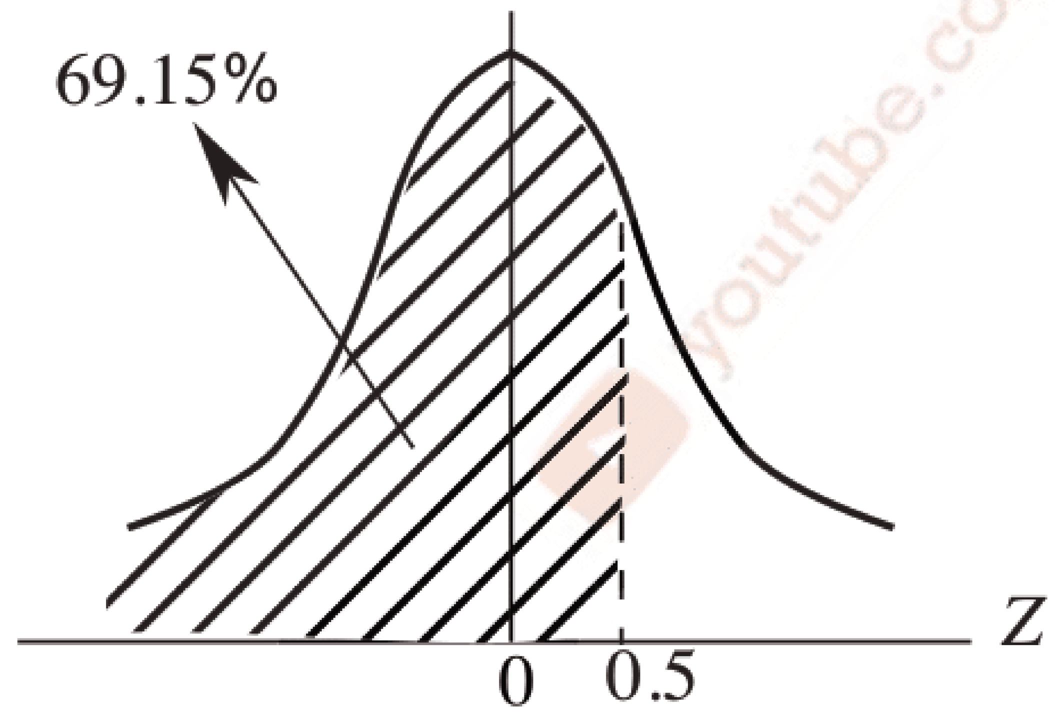


ខ. យើងមានទិន្នន័យ $X = \$\ 55$

តាមរូបមន្ត $Z = \dfrac{x-\mu}{\sigma} = \dfrac{55-50}{10} = 0.5$

ភាគរយ $(Z < 0.5) = 0.5 + 0.1915$

$= 0.6915 = 69.15\ \%$ ។



ដូចនេះ ប្រធានក្រុមតាមផ្ទែកដែលមានប្រាក់ចំណូលប្រចាំសប្ដាហ៍តិចជាង \$ 55 មាន 69.15 % នៃប្រធានក្រុមតាមផ្ទែកទាំងអស់ ។

លំហាត់គំរូ ម៉ាស៊ីនច្រកស្ករគ្រាប់មួយបានច្រកស្ករគ្រាប់បានជាច្រើនកញ្ចប់ដែលម៉ាសនៃកញ្ចប់ស្ករគ្រាប់តាមជាបំណែងចែកណរម៉ាល់ មានមធ្យមស្មើនឹង 200g និងមានគម្លាតស្មើនឹង 2g ។ គណនាភាគរយ ម៉ាសកញ្ចប់ស្ករគ្រាប់ដែលបានច្រកដោយម៉ាស៊ីន

ក. ច្រើនជាង 200.5g ខ. នៅចន្លោះ 198.5g និង 199.5g ។

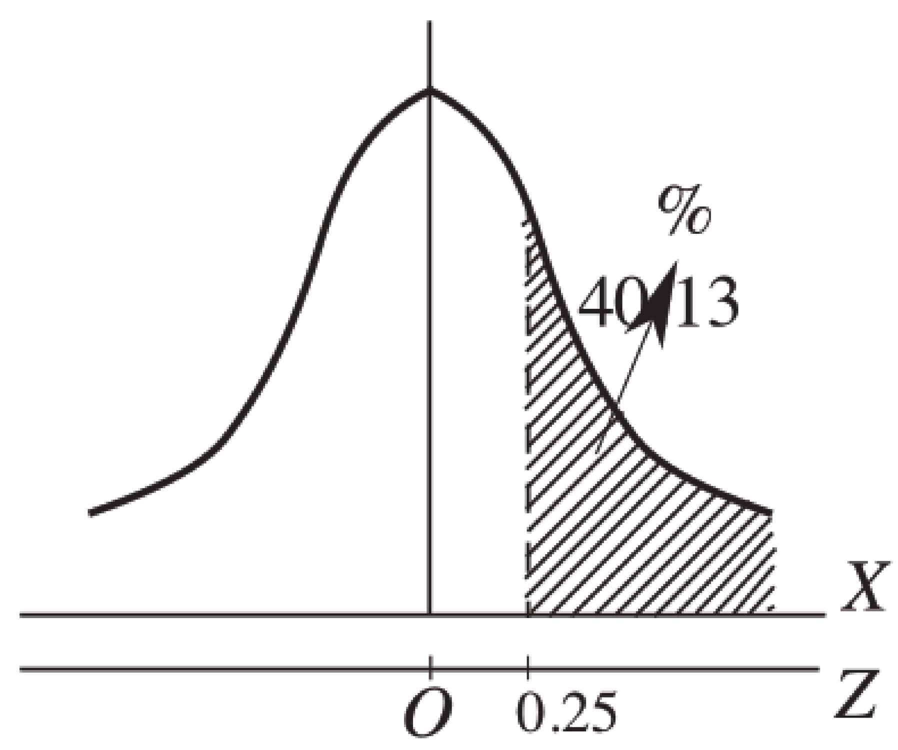
ចម្លើយ ក. រកភាគរយដែល $(X > 200.5)$

ភាគរយដែល $(X > 200.5)$

$=$ ភាគរយដែល $\left(\dfrac{X-200}{2} > \dfrac{200.5-200}{2}\right)$

$=$ ភាគរយដែល $(Z > 0.25)$

$= 0.5 - 0.0987 = 0.4013 = 40.13\ \%$ ។



ដូចនេះ កញ្ចប់ស្ករគ្រាប់ដែលមានម៉ាស់ច្រើនជាង $200.5g$ មាន 40.13 % ។

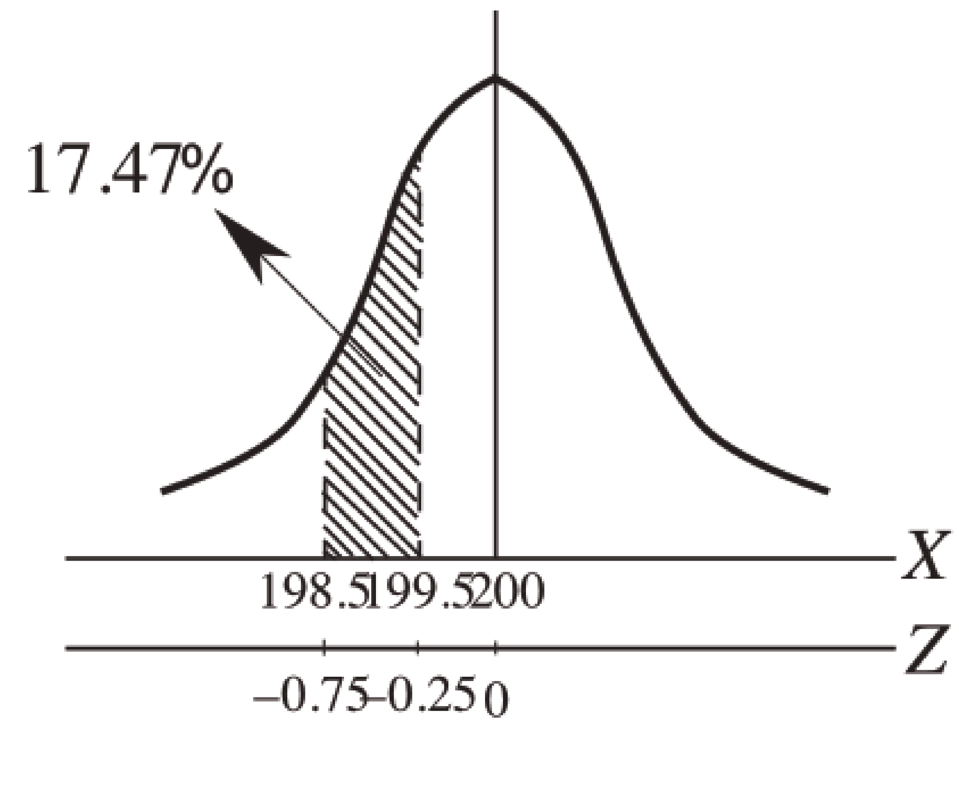
ខ. រកភាគរយដែល $(198.5 < X < 199.5)$

$=$ ភាគរយដែល $(198.5 < X < 199.5) =$

ភាគរយដែល $\left(\dfrac{198.5-200}{2} < \dfrac{X-200}{2} < \dfrac{199.5-200}{2}\right)$

$=$ ភាគរយដែល $(-0.75 < Z < -0.25)$

$= 0.2734 - 0.0987 = 0.1747 = 17.47\ \%$ ។



ដូចនេះ កញ្ចប់ស្ករគ្រាប់ដែលមានម៉ាសនៅចន្លោះ 198.5g និង 199.5g មាន 17.47 % ។

ប្រតិបត្តិ ប្រាក់ចំណូលប្រចាំខែរបស់ប្រធានក្រុមតាមផ្នែកក្នុងក្រុមហ៊ុនមួយ ជាបំណែងចែកណរម៉ាល់ដែលមានមធ្យមស្មើនឹង $ 200 និងមានគម្លាតស្តង់ដាស្មើនឹង $ 20 ។ គណនាក្រឡាផ្ទៃដែលស្ថិតនៅក្រោមខ្សែកោងណរម៉ាល់ចន្លោះ $ 175 និង $ 210 ។

មេរៀនសង្ខេប

ទិន្នន័យមានចំនួន n តួ រៀបតាមលំដាប់នោះកាទីល :

$$Q_1 = \text{តម្លៃតួទី } \frac{1}{4}(n+1) \quad , \quad Q_2 = \text{តម្លៃតួទី } \frac{1}{2}(n+1) \quad , \quad Q_3 = \text{តម្លៃតួទី } \frac{3}{4}(n+1) \text{ ។}$$

- ភាគដប់ចែកសំណុំទិន្នន័យជា 10 ចំណែកស្មើៗគ្នា ។
- ភាគរយចែកសំណុំទិន្នន័យជា 100 ចំណែកស្មើៗគ្នា ។

$$L_p = \text{តម្លៃទី } \frac{P}{100}(n+1) \quad , \quad P \text{ ជាភាគរយដែលយើងត្រូវរក ។}$$

ចំពោះទិន្នន័យផ្តុំជាថ្នាក់

$$Q_1 = L + \frac{\frac{1}{4}n - f^{\uparrow}}{f} \times (i) \quad , \quad Q_3 = L + \frac{\frac{3}{4}n - f^{\uparrow}}{f} \times (i) \quad , \quad L_p = L + \frac{\frac{P}{100}n - f^{\uparrow}}{f} \times (i) \text{ ។}$$

- រ៉ង់ = ផលដករវាងតម្លៃទិន្នន័យដែលខ្ពស់ជាងគេ និងតម្លៃទិន្នន័យដែលទាបជាងគេ ។

	សកលស្ថិតិ	គំរូ
វ៉ារ្យង់	$\sigma^2 = \frac{\Sigma(X_i - \mu)^2}{N}$	$S^2 = \frac{\Sigma(X_i - \bar{X})^2}{n-1}$
គម្លាតស្តង់ដា	$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma(X_i - \mu)^2}{N}}$	$S = \sqrt{\frac{\Sigma(X_i - \bar{X})^2}{n-1}}$ ។

- បើបំណែងចែកមួយជាបំណែងចែកណរម៉ាល់ នោះមធ្យម ម៉ូត មេដ្យានមានតម្លៃស្មើគ្នា ។
- ទំនាក់ទំនងរវាងតម្លៃ 2 និងតម្លៃនៃទិន្នន័យ x គឺ $\boxed{Z = \frac{X-4}{\varphi}}$ ។

លំហាត់

1. បំណែងចែកណរម៉ាល់មួយមានមធ្យមស្មើនឹង 80 និងមានគម្លាតស្មើនឹង 14 ។

   ក. គណនាជាភាគរយនៃទិន្នន័យដែលស្ថិតនៅចន្លោះ 75 និង 90

   ខ. គណនាជាភាគរយនៃទិន្នន័យដែលតិចជាង 75

   គ. គណនាជាភាគរយនៃទិន្នន័យដែលនៅចន្លោះ 55 និង 70 ។

2. បើ z តាងបំណែងចែកណរម៉ាល់ ដែលមានមធ្យមស្មើនឹង 0 និងគម្លាតស្តង់ដាស្មើនឹង 1 ។ គណនាតម្លៃ a បើ

   ក. ភាគរយដែល $(z < a) = 96.93\ \%$ ខ. ភាគរយដែល $(z > a) = 88.49\ \%$ ។

3. កម្ពស់ក្មេងប្រុសមួយក្រុមដែលមានអាយុ 15 ឆ្នាំ ជាបំណែងចែកណរម៉ាល់មានមធ្យមស្មើនឹង 150.3cm និងគម្លាតស្តង់ដាស្មើនឹង 5cm ។ គណនាជាភាគរយដែលគេជ្រើសរើសដោយចៃដន្យបានក្មេងម្នាក់កម្ពស់ៈ ក. តិចជាង 153cm ខ. ច្រើនជាង 158cm

   គ. នៅចន្លោះ 147cm និង 149.5cm ឃ. នៅចន្លោះ 150cm និង 158cm ។

4. កម្ពស់ដើមផ្កាក្នុងសួនមួយកន្លែងជាបំណែងចែកណរម៉ាល់ ដែលមានមធ្យមស្មើនឹង μ និងមានគម្លាតស្មើនឹង 6cm ។ គេដឹងថាមាន 4.78 % នៃដើមផ្កាទាំងអស់មានកម្ពស់ខ្ពស់ជាង 82cm ។ គណនាតម្លៃនៃ μ ។

លំហាត់ជំពូក

1. គេមានសំណុំទិន្នន័យខាងក្រោម ។ គណនាកាទីលទាំងបី ភាគដប់ និង L_{35}

   ក. 4 8 3 6 7 10 11 18 15 19 20 ។

   ខ.

x	7	8	9	11	13	15	19	20
f	2	5	4	12	11	9	7	3

2. អ្នកទេសចរជនជាតិជប៉ុន ដែលធ្វើដំណើរតាមយន្តហោះមកព្រះរាជាណាចក្រកម្ពុជាមានអាយុ 32 21 60 47 54 17 72 55 33 និង 41 ឆ្នាំ ។

   ក. គណនារ៉ង់ ។ ខ. គណនាចន្លោះអាំងទែរកាទីល ។ គ. គណនាគម្លាតស្តង់ដា ។

3. ប្រាក់ចំណូលប្រចាំសប្តាហ៍របស់នាយករង 5 នាក់ក្នុងក្រុមហ៊ុនមួយនោះមាន \$30 \$35 \$50 \$42 និង \$40 ដោយគិតថាទិន្នន័យជាសកលស្ថិតិ ។

   ក. គណនាវ៉ារ្យង់ ។ ខ. គណនាគម្លាតស្តង់ដា ។

4. ពិន្ទុនៃការធ្វើតេស្តសិស្សចំនួន 60 នាក់លើមុខវិជ្ជាគណិតវិទ្យា បានបង្ហាញដូចតារាងខាងក្រោម :

ពិន្ទុ	100 - 105	105 - 110	110 - 115	115 - 120	120 - 125
ចំនួនសិស្ស f	8	13	25	11	4

ក. គណនារ៉ង់ ខ. គណនា Q_1 និង Q_3

គ. គណនាភាគដប់ និង L_{36} ឃ. គណនាវ៉ារ្យង់ និងគម្លាតស្តង់ដា ។

5. តារាងខាងក្រោម ជាបំណែងចែកប្រេកង់រយៈពេលសម្រាប់ដោះស្រាយចំណោទរបស់សិស្ស 38 នាក់ងាយមួយ ។

រយៈពេល (គិតជាវិនាទី)	5 - 10	10 - 20	20 - 25	25 - 40	40 - 45
ចំនួនសិស្ស f	8	13	24	11	4

ក. គណនាម៉ូត ខ. គណនាមធ្យម

គ. គណនាគម្លាតស្តង់ដា ឃ. រកមេគុណនៃភាពទេរ ។

6. គេមានបំណែងចែកប្រេកង់ខាងក្រោម ។

x_i	20	21	22	23	24	25	26	27	29	30	31
f_i	20	30	33	31	20	18	12	10	5	3	2

ក. គណនាម៉ូត ។ ខ. គណនាគម្លាតស្តង់ដា ។ គ. រកមេគុណនៃភាពទេរ រួចធ្វើការសន្និដ្ឋាន ។

7. បើ z តាមបំណែងចែកណរម៉ាល់ ដែលមានមធ្យមស្មើនឹង 0 និងវ៉ារ្យង់ស្មើនឹង 1 ។ គណនាតម្លៃ a បើ ក. ភាគរយដែល $(Z > a) = 34.09\,\%$ ខ. ភាគរយដែល $(Z < a) = 7.93\,\%$ ។

8. ល្បឿនរថយន្តឆ្លងកាត់ចំណុចត្រួតពិនិត្យមួយ ជាបំណែងចែកណរម៉ាល់ ។ ការអង្កេតបានបង្ហាញថា រថយន្តដែលឆ្លងកាត់ការអង្កេតមាន 95 % មានល្បឿនតិចជាង 85km/h និងល្បឿនតិចជាង 55km/h ។ ក. គណនាល្បឿនមធ្យមនៃរថយន្តដែលឆ្លងកាត់ចំណុចត្រួតពិនិត្យ

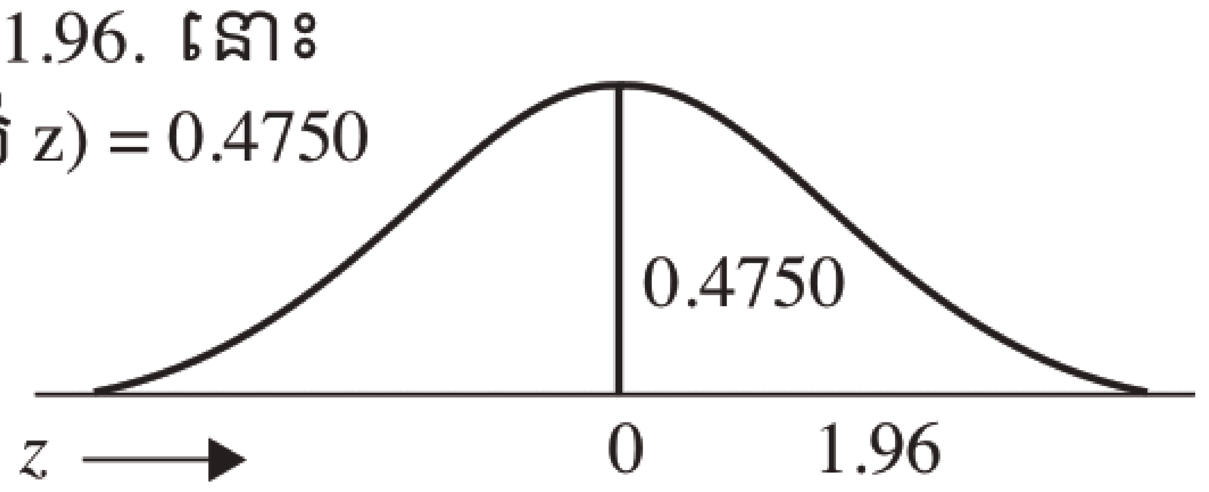
ខ. រកភាគរយល្បឿនរថយន្តដែលបើកបរលើសពី 70km/h ។

9. គេដឹងថា ទិន្នន័យ X ជាបំណែងចែកណរម៉ាល់ដែលមានមធ្យមស្មើនឹង μ និងវ៉ារ្យង់ស្មើនឹង σ^2 ម្យ៉ាងទៀតភាគរយដែល $(x > 51) = 1.13\,\%$ និងភាគរយដែល $(x > 30) = 97.13\,\%$ ។ គណនា μ និង σ ។

តារាង

ផ្ទៃក្រឡាស្ថិតនៅក្រោមខ្សែកោងណរម៉ាល់

ឧទាហរណ៍ :
បើ z = 1.96. នោះ
P(0 ដល់ z) = 0.4750



z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.0000	0.0040	0.0080	0.0120	0.0160	0.0199	0.0239	0.0279	0.0319	0.0359
0.1	0.0398	0.0438	0.0478	0.0517	0.0557	0.0596	0.0636	0.0675	0.0714	0.0753
0.2	0.0793	0.0832	0.0871	0.0910	0.0948	0.0987	0.1026	0.1064	0.1103	0.1141
0.3	0.1179	0.1217	0.1255	0.1293	0.1331	0.1368	0.1406	0.1443	0.1480	0.1517
0.4	0.1554	0.1591	0.1628	0.1664	0.1700	0.1736	0.1772	0.1808	0.1844	0.1879
0.5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088	0.2123	0.2157	0.2190	0.2224
0.6	0.2257	0.2291	0.2324	0.2357	0.2389	0.2422	0.2454	0.2486	0.2517	0.2549
0.7	0.2580	0.2611	0.2642	0.2673	0.2704	0.2734	0.2764	0.2794	0.2823	0.2852
0.8	0.2881	0.2910	0.2939	0.2967	0.2995	0.3023	0.3051	0.3078	0.3106	0.3133
0.9	0.3159	0.3186	0.3212	0.3238	0.3264	0.3289	0.3315	0.3340	0.3365	0.3389
1.0	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3531	0.3554	0.3577	0.3599	0.3621
1.1	0.3643	0.3665	0.3686	0.3708	0.3729	0.3749	0.3770	0.3790	0.3810	0.3830
1.2	0.3849	0.3869	0.3888	0.3907	0.3925	0.3944	0.3962	0.3980	0.3997	0.4015
1.3	0.4032	0.4049	0.4066	0.4082	0.4099	0.4115	0.4131	0.4147	0.4162	0.4177
1.4	0.4192	0.4207	0.4222	0.4236	0.4251	0.4265	0.4279	0.4292	0.4306	0.4319
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4406	0.4418	0.4429	0.4441
1.6	0.4452	0.4463	0.4474	0.4484	0.4495	0.4505	0.4515	0.4525	0.4535	0.4545
1.7	0.4554	0.4564	0.4573	0.4582	0.4591	0.4599	0.4608	0.4616	0.4625	0.4633
1.8	0.4641	0.4649	0.4656	0.4664	0.4671	0.4678	0.4686	0.4693	0.4699	0.4706
1.9	0.4713	0.4719	0.4726	0.4732	0.4738	0.4744	0.4750	0.4756	0.4761	0.4767
2.0	0.4772	0.4778	0.4783	0.4788	0.4793	0.4798	0.4803	0.4808	0.4812	0.4817
2.1	0.4821	0.4826	0.4830	0.4834	0.4838	0.4842	0.4846	0.4850	0.4854	0.4857
2.2	0.4861	0.4864	0.4868	0.4871	0.4875	0.4878	0.4881	0.4884	0.4887	0.4890
2.3	0.4893	0.4896	0.4898	0.4901	0.4904	0.4906	0.4909	0.4911	0.4913	0.4916
2.4	0.4918	0.4920	0.4922	0.4925	0.4927	0.4929	0.4931	0.4932	0.4934	0.4936
2.5	0.4938	0.4940	0.4941	0.4943	0.4945	0.4946	0.4948	0.4949	0.4951	0.4952
2.6	0.4953	0.4955	0.4956	0.4957	0.4959	0.4960	0.4961	0.4962	0.4963	0.4964
2.7	0.4965	0.4966	0.4967	0.4968	0.4969	0.4970	0.4971	0.4972	0.4973	0.4974
2.8	0.4974	0.4975	0.4976	0.4977	0.4977	0.4978	0.4979	0.4979	0.4980	0.4981
2.9	0.4981	0.4982	0.4982	0.4983	0.4984	0.4984	0.4985	0.4985	0.4986	0.4986
3.0	0.4987	0.4987	0.4987	0.4988	0.4988	0.4989	0.4989	0.4989	0.4990	0.4990

ចម្លើយជំពូក ១

មេរៀនទី ១

3. ក. $1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}$ ខ. $\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{12}, \frac{1}{20}$ គ. $4, -1, 0, -1$ ឃ. $\frac{1}{2}, -1, 2, -4$; **4.** ក. $U_n = 2\times n+3$ ខ. $U_n = 2\times n-5$ គ. $U_n = -3\times n+19$ ឃ. $U_n = \frac{n+1}{2n+1}$ **7.** $0 \le a_n \le 1$ ស៊ីត (a_n) ជាស៊ីតទាល់ ។

8. ក. ស៊ីតមិនទាល់ ខ. ស៊ីតទាល់ ។ **9.** ក. ស៊ីតទាល់ក្រោម ហើយ 1 ជាចំនួនទាល់ក្រោម ។
ខ. ស៊ីតទាល់ក្រោម ហើយ $\frac{e^2}{6}$ ជាចំនួនទាល់ក្រោម ។

មេរៀនទី ២

4. ក. 25 តួ ខ. 37 តួ ; **5.** ក. ស៊ីតនេះជាស៊ីតនព្វន្ត ខ. ស៊ីតនេះមិនមែនជាស៊ីតនព្វន្ត ។

6. ក. $U_{40} = 13$ ។ ខ. $U_0 = 0$ ។ គ. $U_1 = -15$, $d = 3$ និង $U_0 = 3$

7. មាន 25 តួដូចៗគ្នា ។ **8.** $U_{1+1} - U_n = \frac{2n+5}{4} - \frac{2n+3}{4} = \frac{1}{2} > 0$ ដូចនេះស៊ីត (U_n) ជាស៊ីតនព្វន្តកើន ។

9. 17, 21, 25, 29, 33 ។ **10.** $S_{30} = 930$ ។ **11.** 7, 12, 17 ឬ 17, 12, 7

12. ក. 5402 ខ. 1000 គ. –4725 ឃ. $\frac{27}{2}$; **13.** រយៈពេល 12 ថ្ងៃ ។ **14.** $S_{15} = 585$

មេរៀនទី ៣

5. ក. $q = 3$, $U_{10} = 39366$ ខ. $q = 4$, $U_1 = \frac{5}{4}$ គ. $q = 2$, $S_7 = 381$ ។

6. ក. $\frac{24480}{256}$ ខ. $\frac{29524}{3}$ គ. $\frac{1261}{243}$ ឃ. $\frac{9}{8}\left(1-\left(\frac{1}{9}\right)^{n+1}\right) - \frac{2}{3}\left(1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n}\right)$

10. ក. $0.\bar{7} = \frac{7}{9}$ ខ. $2.\overline{34} = \frac{232}{99}$ គ. $0.\overline{452} = \frac{448}{990}$ ។

ចម្លើយលំហាត់ជំពូក

6. $U_1 = 64026.088$, $U_2 = 57623.479$, $U_3 = 51861.131$, $U_4 = 46675.018$, $U_5 = 42007.516$

7. ក. $U_n = 3+3n$, $V_n = 3+2n$; **8.** $U_{10} = 44$, $S_{10} = 215$ ។

9. $S_\infty = 6$ ។ 10. 1 $x = 2$, $x = \frac{2}{3}$, 2. ក. $q = 3$ ។ ខ. $U_1 = \frac{2}{27}$ ។

ចម្លើយជំពូក ២

មេរៀនទី ១

10. គ. $(2-\sqrt{3})^x + (2+\sqrt{3})^x = 2$ យើងដឹងថា $(2-\sqrt{3})^x + (2+\sqrt{3})^x = 1$ គុណអង្គទាំងពីរនឹង $(2-\sqrt{3})^x$
$(2-\sqrt{3})^{2x} + 1 = 2(2-\sqrt{3})^x$ ឬ $(2-\sqrt{3})^{2x} - 2(2-\sqrt{3})^x + 1 = 0$

តាង $t = (2-\sqrt{3})^x$, $t>0$ $t^2-2t+1 = 0$ នាំឲ្យ $t = 1$ សមីការមានចម្លើយ $x = 0$ ។

ឆ. គ្មានចម្លើយ ជ. $(\sqrt{2+\sqrt{3}})^x + (\sqrt{2-\sqrt{3}})^x = 4$ ដោយ $(\sqrt{2+\sqrt{3}})^x + (\sqrt{2-\sqrt{3}})^x = 1$

គុណអង្គទាំងពីរនឹង $(\sqrt{2-\sqrt{3}})^x$ គេបាន $(\sqrt{2-\sqrt{3}})^{2x} - 4(\sqrt{2-\sqrt{3}})^x + 1 = 0$

តាង $t = (\sqrt{2-\sqrt{3}})^x$, $t>0$ គេបាន $t = 2-\sqrt{3}$, $t = 2+\sqrt{3}$ ដូចនេះសមីការមានឫស $x = \pm 2$ ។

ឈ. $x = -1$, $x = 1$ ញ. $2\left(\frac{7^x+7-x}{2}\right)^2 - 7\left(\frac{7^x+7^{-x}}{2}\right) + 3 = 0$ តាង $t = \frac{7^x+7^{-x}}{2}$, $t>0$

គេបាន $2t^2-7t+3 = 0$ នាំឱ្យ $t = \frac{1}{2}$, $t = 3$ សមីការមានឫស $x = \log_7(3 \pm 2\sqrt{2})$

11. ក. $x>0$ ខ. $x \le 0$ គ. $x \le -2$ ឃ. $x<3$ ង. $x \ge -\frac{6}{5}$ ច. $x>-1$

12. គ. $27^x \cdot 3^{1-x} < \frac{1}{3}$ សមមូល $3^{3x} \cdot 3^{1-x}$, $3^{3x+1-x} < 3^{-1}$, $x<-1$

ឃ. $(0.2)^x \le 25$ សមមូល $5^{-x} \le 5^2$ នាំឱ្យ $x \ge -2$ ង. $3^x \le \sqrt[3]{9}$ សមមូល $3^x \le 3^{\frac{2}{3}}$ នាំឱ្យ $x \le \frac{2}{3}$

ច. $\left(\frac{1}{2}\right)^x > \sqrt[3]{\frac{1}{4}}$ សមមូល $\left(\frac{1}{2}\right)^x > \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{3}}$ នាំឱ្យ $x < \frac{2}{3}$ **13.** មីងសយមានប្រាក់ដើមចំនួន 1995 ដុល្លារ ។

14. ពេលគាត់មានអាយុ 65 ឆ្នាំ ប្រាក់សរុបមានចំនួន 1995 ដុល្លារ ។

15. ប្រាំពីរឆ្នាំក្រោយមករថយន្តមានតម្លៃ 14426 ដុល្លារ ។

មេរៀនទី ២

5. ក. $x = 27$ ខ. $x = 4$ គ. $x = 1$ ឃ. $x = \frac{1}{2}$ ង. $x = 3$ ច. $x = 2$ ឆ. $x = 1$, $x = 10^9$

ជ. $x = 5$ ឈ. $x = \pm\sqrt{24}$ ញ. $x = \sqrt{2^{-3}}$

6. ក. $x = 1$ ខ. $x \ge 6$ គ. $x \in \,]0\,,\,1[\, \cup \,]1\,,\,+\infty[$ ឃ. $x>3$ ង. $x>3$ ច. $\forall x$ ឆ. $x<3$

7. 11, 89 ឆ្នាំ **8.** 12342 ដុល្លារ

ចម្លើយជំពូក ៣

មេរៀនទី ១

5. ក. $|\tan\alpha + \cot\alpha|$ ខ. $\tan^6\alpha$ គ. $|\sin\alpha + \cos\alpha|$ ឃ. $\cot^4\alpha$

7. ក. 3π ខ. 4π គ. 8π ឃ. 4π ង. 3π ច. 2π

13. ក. $13^2 = 12^2 + 5^2$ តាមពីតាគ័រ $\Rightarrow$ $\angle PQR$ ជាមុំកែង ខ. $\tan\widehat{QPR} = \frac{5}{2}$; $\cos\widehat{PRS} = -\frac{5}{13}$

មេរៀនទី ២

7. ក. $16\sin 2x \sin^4\frac{x}{2}$ ខ. 1 គ. $\tan 3\alpha$ ឃ. $\tan 2\alpha$

9. ក. $\sin A = 2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2} = \frac{\cos\frac{A}{2}}{\sin\frac{A}{2}}$ $\Leftrightarrow$ $\cos\frac{A}{2}\cos A = 0$ $\Rightarrow$ $A = 90°$

11. $\tan A + \tan B = 2\tan\frac{A+B}{2}$ $\Leftrightarrow$ $\sin\frac{A-B}{2}(\cos B - \cos A) = 0$

$$\Rightarrow \quad \sin\frac{A-B}{2} = 0 \quad \text{ឬ} \quad \cos B = \cos A \quad \Rightarrow \quad A = B$$

13. ក. $\sin 3A + \sin 3B + \sin 3C = 4\cos\frac{3A}{2}\cos\frac{3B}{2}\cos\frac{3C}{2} = 0$ ។ គេបាន $A = \frac{\pi}{3}$, $B = \frac{\pi}{3}$, $C = \frac{\pi}{3}$

ខ. $\sin 5A + \sin 5B + \sin 5C = 4\cos\frac{5A}{2}\cos\frac{5B}{2}\cos\frac{5C}{2} = 0$

គេបាន $A = \frac{\pi}{5} = 36°$, $A = \frac{3\pi}{5} = 108°$

$B = \frac{\pi}{5} = 36°$, $B = \frac{3\pi}{5} = 108°$, $C = \frac{\pi}{5}$, $C = \frac{3\pi}{5}$ ។

មេរៀនទី ៣

3. ក. $\frac{3\pi}{4} + 3k\pi \le \theta \le \frac{5\pi}{4} + 2k\pi$ ខ. $0 \le \theta \le \frac{\pi}{4}$, $\frac{3\pi}{4} \le \theta < 2\pi$

គ. $0 \le \theta \le \frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{7\pi}{6}$, $\frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$ ឃ. $\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{5\pi}{6}$ ង. $0 \le \theta \le \frac{\pi}{6}$, $\frac{7\pi}{6} \le \theta \le 2\pi$

5. ក. $x = y \Rightarrow \sin\theta = 5\cos\theta \Leftrightarrow \tan\theta = 5 \Rightarrow \theta = 78.7°$ ខ. $x^2 + y^2 = 13$

7. ΔABC ជាត្រីកោណសមបាត ។

ចម្លើយលំហាត់ជំពូក

5. $x = k\pi$, $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi$, $x = \frac{\pi}{20} + \frac{k\pi}{10}$, $x = \pm\frac{\pi}{9} + \frac{k\pi}{3}$, $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$, $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$

ឃ. $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ ង. $x = 2k\pi$, $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ ច. $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$ $(k \in Z)$

9. ក. $0 \le x \le \frac{\pi}{3}$, $\pi \le x < 2\pi$ ខ. $0 \le x < \frac{2\pi}{3}$, $\frac{11\pi}{12} \le x < \frac{5\pi}{3}$

ចម្លើយជំពូក ៤

មេរៀនទី ១

5. $a = 1, \; b = -3, \; c = 5$

7. ក. $A^2 = \begin{bmatrix} 16 & 14 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}$, $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{6} \\ 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$ ខ. $K = -\frac{1}{6}$

8. គ. $AB = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -11 & 1 \end{bmatrix}$, $(AB)^{-1} = -\frac{1}{6}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 11 & 5 \end{bmatrix}$

ខ. $A^{-1} = -\frac{1}{3}\begin{bmatrix} -4 & -1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$, $B^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$, $B^{-1}A^{-1} = -\frac{1}{6}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 11 & 5 \end{bmatrix}$ គ. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

9. ក. $X = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$ ខ. គ្មានម៉ាទ្រីស X

10. ក. $P = 1$, $q = -2$ ខ. $a = 3, b = 7$ គ. $a = 2, b = 2$

មេរៀនទី ៣

4. ពុទ្រាតូច $x = 37.5$, ពុទ្រាធំ $y = 12.5$; **5.** $x = 10, y = -20, z = 30$

6. $x = 4, y = 3, z = 2$; **7.** ក. $\begin{bmatrix} \frac{3}{4} & -1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \end{bmatrix} x = 8$, $y = 6$ ខ. $x = -\frac{4}{3}$, $y = 8$

គ. ចម្លើយច្រើនរាប់មិនអស់ ឃ. $x = \frac{46}{13}$, $y = \frac{16}{13}$, $z = \frac{21}{13}$

ង. $x = -\frac{215}{66}$, $y = -\frac{275}{66}$, $z = -\frac{475}{66}$ ច. ប្រព័ន្ធគ្មានចម្លើយ ព្រោះ $\begin{vmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 1 & -7 & -3 \\ 4 & -2 & -6 \end{vmatrix} = 0$

ចម្លើយលំហាត់ជំពូក

2. $x = -8$, $y = -1$, $z = 0$; 3. ក. $\begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$

4. ក. $p = 1$, $q = -2$ ខ. $a = 3$, $b = 7$ គ. $a = -17b$, $b = -28$

6. ក. $x = -\frac{25}{29}$, $y = \frac{22}{29}$ ខ. $x = 2$, $y = -1$ គ. $x = 4$, $y = 3$, $z = 2$ ឃ. $x = 3$, $y = 8$, $z = 1$

ចម្លើយជំពូក ៥

មេរៀនទី ១

12. ក. $g'(x) = 12x^3 - 4x$ $g''(x) = 36x^2 - 4$

ខ. សញ្ញានៃ $g'(x)$:

$g'(x) < 0$ ចំពោះ $x \in \left(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \cup \left(0, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

$g'(x) = 0$ ចំពោះ $x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$, $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $x = 0$

$g'(x) > 0$ ចំពោះ $x \in \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, 0\right) \cup \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, +\infty\right)$

សញ្ញានៃ $g''(x)$:

$g''(x) > 0$ ចំពោះ $x \in \left(-\infty, -\frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{1}{3}, +\infty\right)$

$g''(x) = 0$ ចំពោះ $x = \pm\frac{1}{3}$

$g''(x) < 0$ ចំពោះ $x \in \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$

មេរៀនទី ២

9. ប្រអប់មានមាឌ $V = \frac{3}{4}x(x-2a)^2$ ។

ប្រអប់មានមាឌធំបំផុត កាលណា $x = \frac{2a}{3}$ ។

10. ក. $t = 3s$ ខ. $V(2) = -39.2m/s$ គ. $V(3) = -588m/s$

11. ក. $V = -9.8t + 39.2m/s$ ខ. $t = 4s$ កម្ពស់ខ្ពស់បំផុត $S = 78.4m$

គ. វត្ថុស្ថិតក្នុងលំហអាកាសក្នុងរយៈពេល $t = 8s$

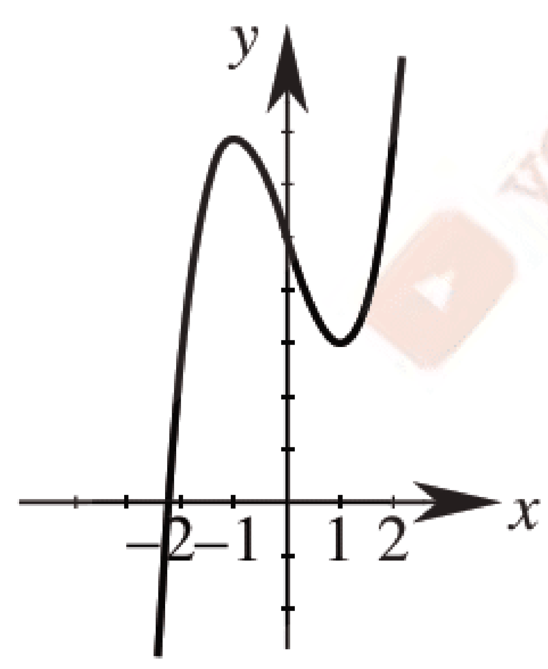
ឃ. ចម្ងាយចរសរុប $S_t = 156.8m$

មេរៀនទី ៣

3. ក. $m < 0$

ខ. $y' = 3x^2 - 3$ $y'' = 6x$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	7	↘	3	↗	$+\infty$

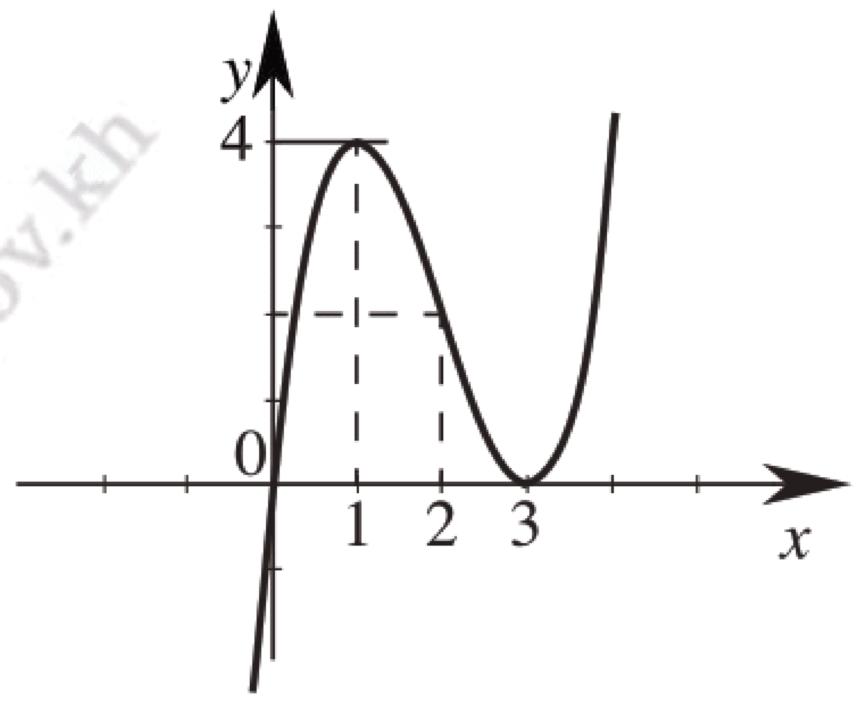


4. ក. $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

$a = 1$, $b = -6$, $c = 9$, $d = 0$

ខ. $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$ $f''(x) = 6x - 12$

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	4	↘	0	↗	$+\infty$

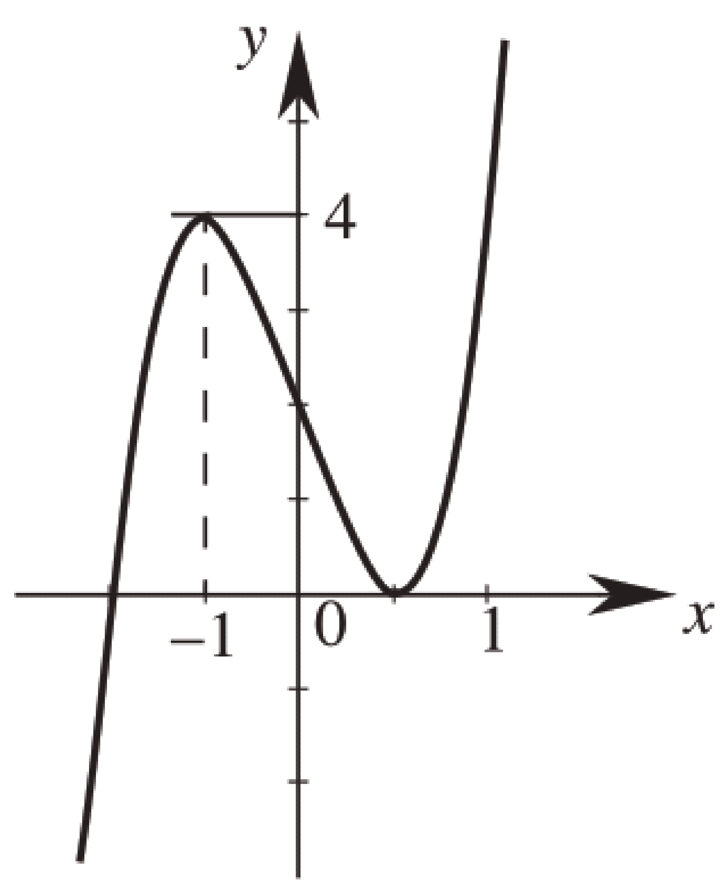


5. ក. $a = 3$, $a = \frac{3}{4}$

- ចំពោះ $a = 3$ គេបាន $f(x) = x^3 - 1 - 3(x-1)$

$f'(x) = 3x^2 - 3$ $f''(x) = 6x$

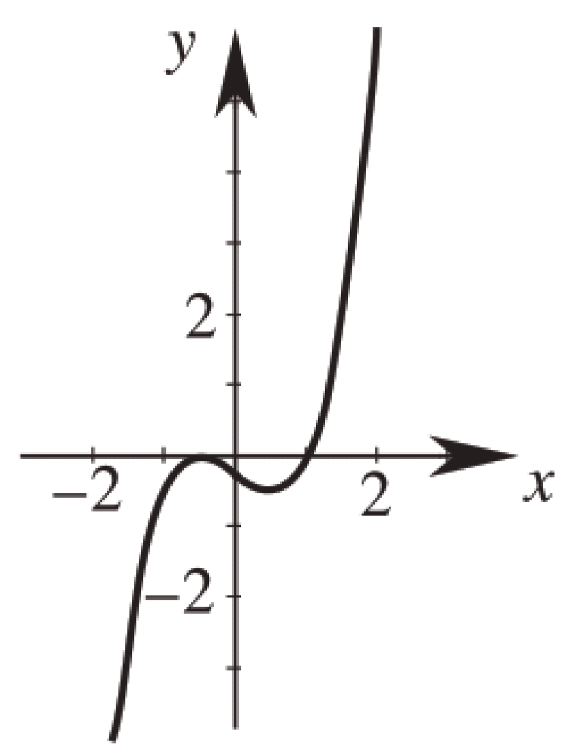
x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	4	↘	0	↗	$+\infty$



- ចំពោះ $a = \frac{3}{4}$ គេបាន $f(x) = x^3 - 1 - \frac{3}{4}(x-1)$

$f'(x) = 3x^2 - \frac{3}{4}$ $f''(x) = 6x$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
y'		$+\infty$	0	$-$	0	$+\infty$	
y	$-\infty$	↗	0	↘	$-\frac{1}{2}$	↗	$+\infty$



ចម្លើយជំពូក ៦

មេរៀនទី ១

1. ក. P (អាត់) $= \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$ ខ. P (ក្រហម) $= \frac{26}{52} = \frac{1}{2}$ គ. P (អាត់ឬក្រហម) $= \frac{1}{13}+\frac{1}{2}-\frac{2}{52} = \frac{7}{13}$

ឃ. មិនមែនអាត់ និងមិនមែនក្រហម = មិនមែនអាត់ឬក្រហម; P ; (មិនមែនអាត់ឬក្រហម) $= \frac{24}{52} = \frac{6}{13}$

2. ក. $S = \{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9\}$, $A = \{0,\ 3,\ 6,\ 9\}$, $B = \{6,\ 7,\ 8,\ 9\}$

ខ. $\mathrm{P}(\mathrm{A}) = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$, $P(B) = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$, $P(A \cap B) = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$, $P(A \cup B) = \frac{3}{5}$

3. ក. $P($ ខ2 , ស 1 $) = \frac{c(7,2) \times c(3,1)}{c(10,3)} = 0.525$

ខ. $P($ ខ3 $) = \frac{c(7,3)}{c(10,3)} = 0.292$ គ. $P($ ស3 $) = \frac{c(3,3)}{c(10,3)} = 0.0083$

4. ក. $P(A) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$ ខ. $P(B) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$ **5.** ក. P (សុខ) $= \frac{12}{20} = \frac{3}{5}$

6. ខ. P (សៅ) $= \frac{12}{20} \times \frac{11}{19} + \frac{8}{20} \times \frac{12}{19} = \frac{3}{5}$

គ. P (សន) $= \frac{3}{5}$ ឃ. អ្នកចាប់មុន និងអ្នកចាប់ក្រោយមានសំណាងដូចគ្នា។

ចម្លើយជំពូក ៧

មេរៀនទី ១

5. ក. $\bar{X} = \$11.8$ ខ. $Q_1 = \$\,8$, $Q_2 = \$\,10$, $Q_3 = \$\,15$, $L_{32} = \$\,8$

6. $Q_1 = 12.88mm$, $Q_3 = 24.08mm$, $D_1 = 10.40mm$ **7.** មេដ្យាន $= 45$, $L_{28} = 40$

មេរៀនទី ២

2. ក. រ៉ង់ $= 23$ ខ. $\varphi^2 = 52.23$, $\varphi = 7.23$ **3.** ក. $\varphi_1^2 = 762.4$, $\varphi_2^2 = 122.4$ ខ. $\varphi_1^2 > \varphi_2^2 \Rightarrow$ ឈ្មួញទី 2

4. $a = 6$ និង $b = 4$ **5.** ក. រ៉ង់ $= 50$ ខ. $\bar{X} = 46.25$ គ. $S = 12.49$

មេរៀនទី ៣

1. ក. 40.17 %   ខ. 35.94 %   គ. 20.22 %   **2.** ក. $a = 1.87$ ខ. $a = -1.2$

3. ក. 47.61 %   ខ. 6.18 %   គ. 18.18 %   ឃ. 46.21 % ; 4. $\mu = 71.98cm$ ។

ចម្លើយលំហាត់ជំពូក

2. ក. រ៉ង់ $= 55$ ខ. $I = 31$ គ. $S = 17.62$ **3.** ក. $\varphi^2 = 45.44$ ខ. $\varphi = 6.74$

7. ក. $a = 0.41$ ខ. $a = 1.41$ **8.** ក. $\mu = 68.11 km/h$ ខ. 42.86 %

9. $\mu = 39.54$, $\varphi = 5.02$ ។