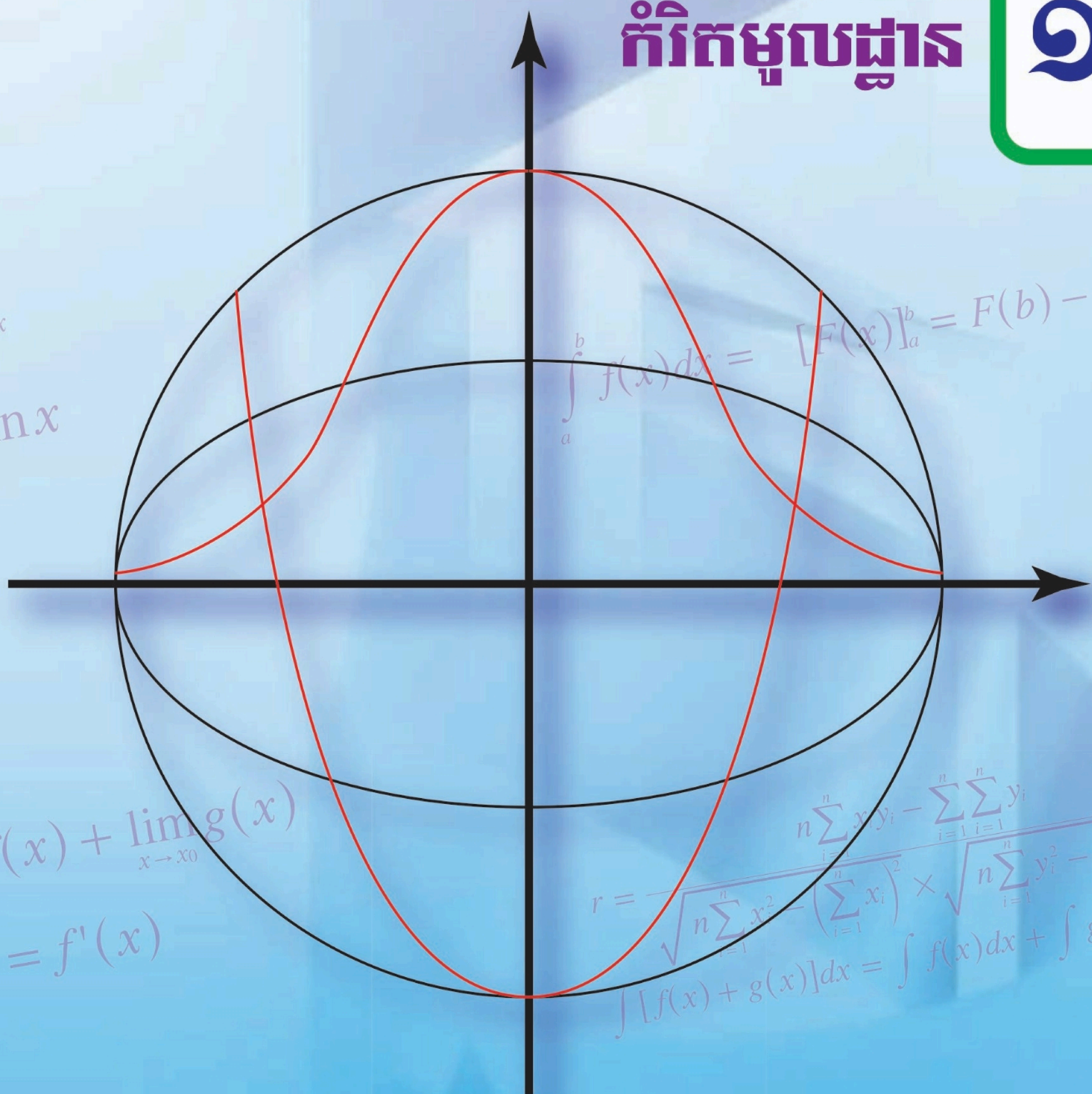
ក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា

សំរាប់លក់

គណិតវិទ្យា

កំរិតមូលដ្ឋាន

១២



គ្រឹះស្ថានបោះពុម្ពនិងចែកផ្សាយ

ក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា

គណិតវិទ្យា

កម្រិតមូលដ្ឋាន

ថ្នាក់ទី ១២

បោះពុម្ពផ្សាយដោយ

គ្រឹះស្ថានបោះពុម្ពនិងចែកផ្សាយ

អគារ ១៤៨ មហាវិថី ព្រះនរោត្តម ភ្នំពេញ

គណៈកម្មការនិពន្ធ	លោក អ៊ី ស៊ាងលី	លោកស្រី ទី ប៉ូលីរ៉េត
	លោក ឱក លីនដា	លោកស្រី អ៊ុក សុមនី
	លោក ចាន់ រ៉ាដា	លោក ប៊ុន រួ
	លោក នូ រ៉េត	លោក ប៊ូ សន
ទាយអត្ថបទ	លោកស្រី ឈាង ណារីន	
វិចិត្រករ	លោក តន់ ជាតិ	
រៀបរៀង	លោក ជួ សុវណ្ណជន	លោក ឡុង សុផេង
រចនាទំព័រ	លោក ហាក់ វណ្ណថា	
អ្នកឯកទេស	លោក អ៊ិន គឹមស្រ៊ុន	
គណៈកម្មការពិនិត្យ	លោក ម៉ែន វាំង	លោក នាង បូ

បានទទួលការអនុញ្ញាតឱ្យបោះពុម្ពផ្សាយពី ក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា តាមប្រកាសលេខ ៣១៩៧ អយក.ប្រក. ចុះថ្ងៃទី២៩ ខែ ធ្នូ ឆ្នាំ ២០១១ ដើម្បីប្រើប្រាស់នៅតាមសាលារៀន។

គ្រឹះស្ថានបោះពុម្ពនិងចែកផ្សាយ

បោះពុម្ពលើកទី១២ ឆ្នាំ២០២០ ចំនួន១៩ ០០០ច្បាប់

ISBN 9-789-995-001-131

អារម្ភកថា

សៀវភៅគណិតវិទ្យាកម្រិតមូលដ្ឋានថ្នាក់ទី 12 រួមមាន 6 ជំពូក សិក្សាអំពី **លីមីតនៃអនុគមន៍ ដេរីវេនៃអនុគន៍ អថេរភាព និងសង់ក្រាប អាំងតេក្រាល ស្ថិតិពីរអថេរ កោនិក ។**

ការរៀបចំមេរៀននៅក្នុងសៀវភៅនេះ មានទម្រង់ដូចខាងក្រោម :

- មេរៀននីមួយៗបានបញ្ជាក់អំពីវត្ថុបំណងច្បាស់លាស់
- ខ្លឹមសារមេរៀននីមួយៗ ផ្ដើមចេញពីឧទាហរណ៍ក្នុងជីវភាពរស់នៅ
- មានលំហាត់ប្រតិបត្តិសម្រាប់ពង្រឹងចំណេះដឹងសិស្ស
- នៅចុងមេរៀននៃជំពូកនីមួយៗមានសង្ខេបគន្លឹះមេរៀនសម្រាប់ឲ្យសិស្សចងចាំនូវអ្វីដែលបានរៀនរួច
- មេរៀននីមួយៗ មានលំហាត់និងលំហាត់ជំពូកសម្រាប់ឲ្យសិស្សអនុវត្តដើម្បីពង្រឹងចំណេះដឹង
- នៅចុងទំព័រនៃសៀវភៅនេះ មានពន្យល់ពាក្យគន្លឹះនិងមានចម្លើយលំហាត់សម្រាប់ឲ្យសិស្សផ្ទៀងផ្ទាត់ ។

សៀវភៅសិក្សានេះមានការចូលរួមពី :

- លោកគ្រូ អ្នកគ្រូដែលបានសាកល្បងជួយផ្ដល់យោបល់
- លោកគ្រូ អ្នកគ្រូដែលបានសាកល្បងបង្រៀននូវសៀវភៅសិក្សានេះ
- គណៈកម្មការវាយតម្លៃដែលបានជួយត្រួតពិនិត្យ និងផ្ដល់យោបល់ ។

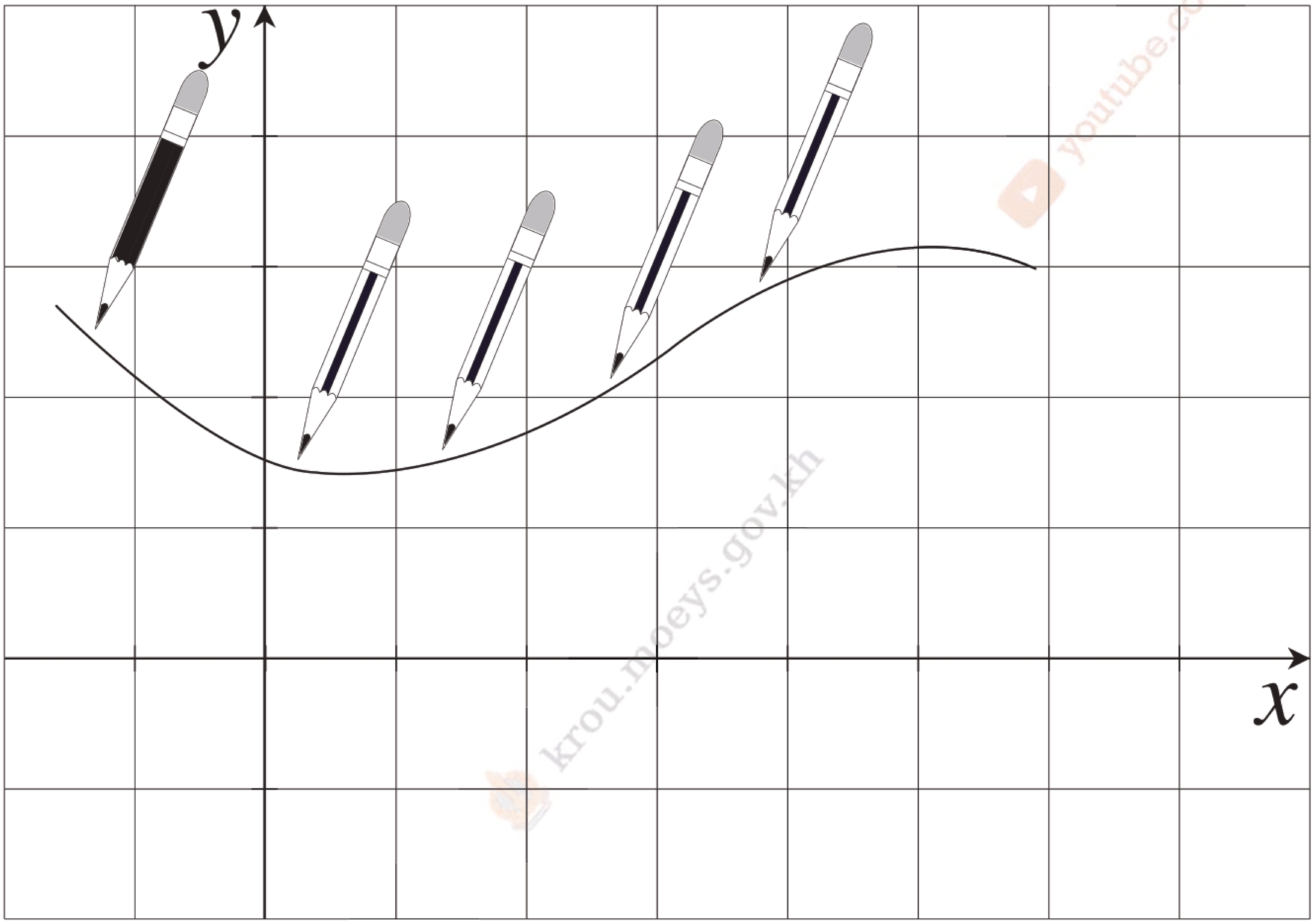
ដើម្បីឱ្យសៀវភៅនេះ កាន់តែល្អប្រសើរ យើងខ្ញុំនឹងរង់ចាំទទួលរាល់ការរិះគន់និងកែលម្អបន្ថែមអំពីសំណាក់លោកគ្រូ អ្នកគ្រូនិងប្រិយមិត្តអ្នកប្រើប្រាស់សៀវភៅគណិតវិទ្យាកម្រិតមូលដ្ឋាននេះដោយក្ដីរីករាយ ។

គណៈកម្មការនិពន្ធ

បញ្ជីអត្ថបទ

គណិតវិទ្យាកម្រិតមូលដ្ឋាន

ជំពូក 1 លីមីត



យើងបានសិក្សារួចមកហើយ នៅថ្នាក់ទី 11 ពីបញ្ញត្តិមូលដ្ឋាននៃលីមីតនិងប្រមាណវិធីលើលីមីតរបស់អនុគមន៍ពីជគណិត ។

នៅក្នុងជំពូកនេះ គេនឹងសិក្សាបន្តពីលីមីត ភាពមានលីមីតនៃអនុគមន៍មិនពីជគណិត ដូចជាអនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រ អនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែល អនុគមន៍លោការីត និងសិក្សាពីអនុគមន៍ជាប់ ។

បន្ទាប់ពីទទួលបានបញ្ញត្តិនៃលីមីតនិងបំណិនក្នុងការគណនាលីមីតនិងភាពជាប់នៃអនុគមន៍ទាំងនោះមក គេអាចប្រើចំណេះដឹងបំណិននេះក្នុងការសិក្សាអថេរភាពនិងសង់ក្រាបនៃអនុគមន៍រកអាស៊ីមតូត ហើយឈានទៅប្រើក្រាបតាងអនុគមន៍សម្រាប់ដោះស្រាយសមីការនិងវិសមីការមួយចំនួនទៀត ។

មេរៀនទី

1 លីមីតនៃអនុគមន៍

វត្ថុបំណង

- បង្ហាញលីមីតដោយប្រើនិយមន័យ
- គណនាលីមីតនៃអនុគមន៍អសនិទាននិងអនុគមន៍បណ្ដាក់
- គណនាលីមីតនៃអនុគមន៍មិនពីជគណិត ។

1. លីមីតនៃអនុគមន៍ត្រង់ចំនួនកំណត់និងអនន្ត

1.1. លីមីតនៃអនុគមន៍ត្រង់ចំនួនកំណត់

ឧទាហរណ៍ 1: f ជាអនុគមន៍កំណត់ចំពោះ $x \in \mathbb{R}-\{1\}$ ដោយ $f(x)=\dfrac{2x^2+x-3}{x-1}$ ។

ចំពោះ $x \neq 1$ គេបាន $f(x)=\dfrac{(2x+3)(x-1)}{x-1}=2x+3$ ។

គេមាន :

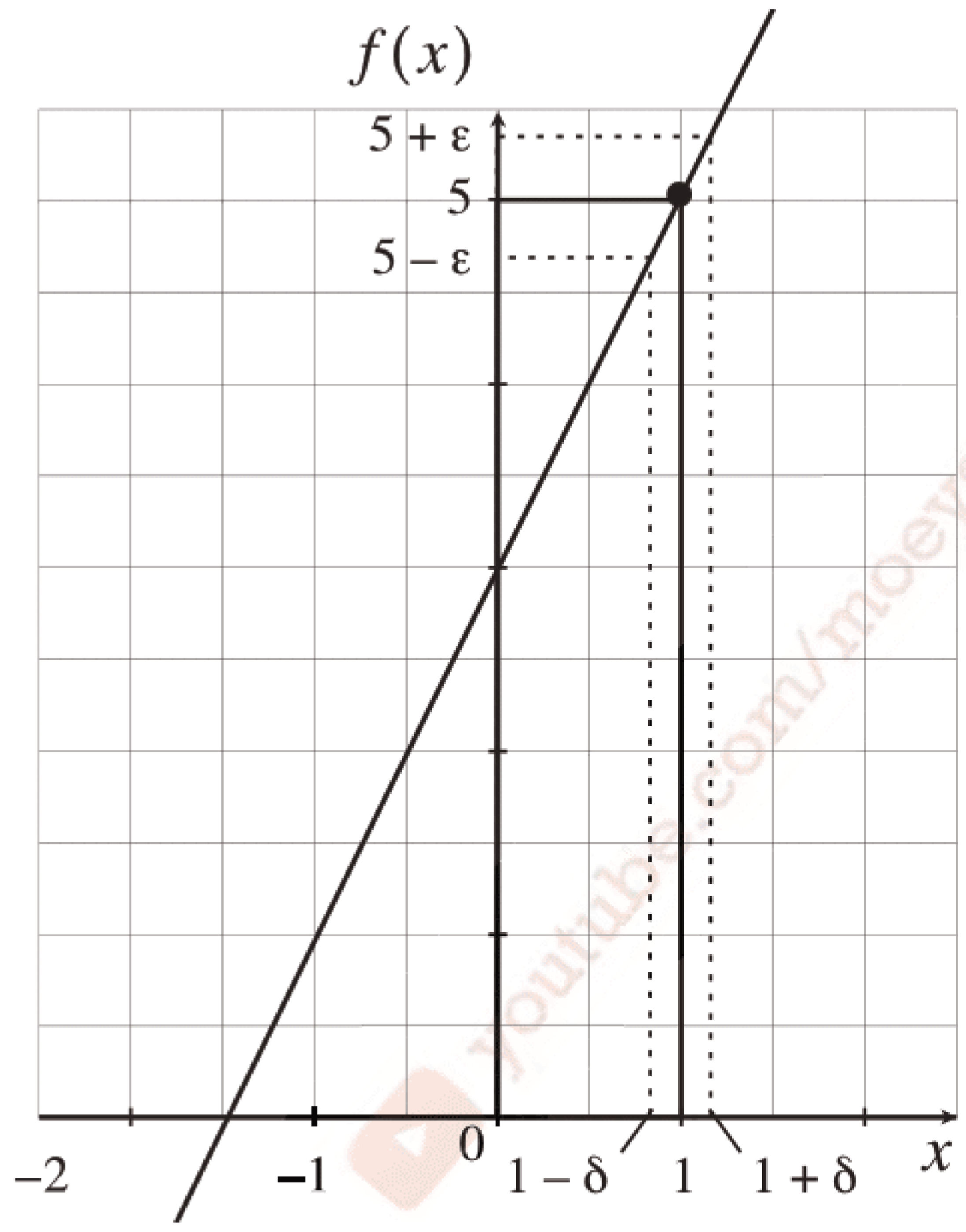
	x ខិតជិត 1 ពីខាងឆ្វេង					x ខិតជិត 1 ពីខាងស្ដាំ			
x	0.9	0.99	0.999	0.9999	1	1.0001	1.001	1.01	1.1
$f(x)$	4.8	4.98	4.998	4.9998		5.0002	5.002	5.02	5.2

$f(x)$ ខិតជិត 5 ពីខាងឆ្វេង $\qquad$ $f(x)$ ខិតជិត 5 ពីខាងស្ដាំ

តាមតារាងតម្លៃលេខ បើ x ខិតជិត 1 ពីខាងឆ្វេង និង 1 ពីខាងស្ដាំ នោះ $f(x)$ ខិតជិត 5 ។ គេថាអនុគមន៍ f មានលីមីតស្មើនឹង 5 កាលណា x ខិតជិត 1 ។

គេកំណត់សរសេរ : $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}(2x+3)=5$ ។

ម្យ៉ាងទៀត x ខិតជិត 1 កាលណា $|x-1|$ មានតម្លៃតូចជាងគ្រប់ចំនួនវិជ្ជមាន ។ មានន័យថា x ស្ថិតនៅក្នុងចន្លោះមួយដែលមានប្រវែងស្មើរតែសូន្យដែលមាន 1 ជាចំណុចកណ្ដាល ។



ចម្ងាយរវាង $f(x)$ និង 5 អាចតូចបំផុតដែលយើងចង់បានស្របតាមលក្ខខណ្ឌនៃ x ខិតជិត 1 ។

ឧបមាថា x ខិតជិត 1 នោះគេបាន ៖

បើ $|x-1|<0.1$ នោះ $|f(x)-5|<0.2$

បើ $|x-1|<0.01$ នោះ $|f(x)-5|<0.02$

បើ $|x-1|<0.001$ នោះ $|f(x)-5|<0.002$

ជាទូទៅតាង 0.2, 0.02, 0.002,... ដោយ ε (អ៊ិបស៊ីឡូន) ។

គេមាន $|f(x)-5| = |(2x+3-5)| = 2|x-1|$

$|f(x)-5|<\varepsilon$ នាំឱ្យ $2|x-1|<\varepsilon$ ឬ $|x-1|<\frac{\varepsilon}{2}$ ។

បើគេតាង δ (ដែលតា) ដែល $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$ នោះគេបានគ្រប់ $\varepsilon>0$ មាន $\delta>0$ ដែល $|x-1|<\delta$ នាំឱ្យ $|f(x)-5|<\varepsilon$ ។ គេថា $f(x)$ ខិតជិត 5 (ឬមានលីមីតស្មើនឹង 5) កាលណា x ខិតជិត 1 ។ គេកំណត់សរសេរ $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 5$ ។

និយមន័យ ៖ អនុគមន៍ f មានលីមីតស្មើនឹង L កាលណា x ខិតជិត a បើគ្រប់ចំនួន $\varepsilon>0$ មានចំនួន $\delta>0$ ដែល $0<|x-a|<\delta$ នាំឱ្យ $|f(x)-L|<\varepsilon$ ។

គេសរសេរ ៖ $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ ។

ឧទាហរណ៍ 2 ៖ គេមានអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x) = \frac{3}{x-2}$ ។ អនុគមន៍កំណត់ ចំពោះគ្រប់ $x\in\mathbb{R}-\{2\}$ ។ ពិនិត្យមើលតារាងតម្លៃលេខ ៖

	x ខិតជិត 2 ពីខាងឆ្វេង					x ខិតជិត 2 ពីខាងស្តាំ			
x	1.5	1.9	1.99	1.999	2	2.001	2.01	2.1	2.5
$f(x)$	−6	−30	−300	−3000		3000	300	30	6
	$f(x)$ តូចទៅៗគ្មានទីបញ្ចប់					$f(x)$ ធំទៅៗគ្មានទីបញ្ចប់			

តាមតារាងតម្លៃលេខ គេសង្កេតឃើញថា $f(x)$ មានតម្លៃអវិជ្ជមានកាន់តែតូចទៅគ្មានទីបញ្ចប់ កាលណា x ខិតជិត 2 ពីខាងឆ្វេង និង $f(x)$ មានតម្លៃវិជ្ជមានហើយកាន់តែធំទៅៗ គ្មានទីបញ្ចប់ កាលណា x ខិតជិត 2 ពីខាងស្តាំ ។

គេសរសេរ $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{3}{x-2} = -\infty$ និង $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{3}{x-2} = +\infty$ ។ ដូចនេះតម្លៃនៃ $f(x)$ កើន ឬចុះគ្មានទីបញ្ចប់ កាលណា x ខិតជិត a លីមីតនៃ f ហៅថាលីមីតអនន្ត ។

និយមន័យ : គេថាអនុគមន៍ f ខិតទៅ $+\infty$ (ឬ $-\infty$)កាលណា x ខិតទៅជិត a បើចំពោះគ្រប់ចំនួន $M>0$ មាន $\delta>0$ ដែល $0<|x-a|<\delta$ នាំឱ្យ $f(x)>M$ (ឬ $f(x)<-M$) ។

គេសរសេរ $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ ឬ $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$ ។

លំហាត់គំរូ 1 : f ជាអនុគមន៍កំណត់ដោយ $f(x) = 2+5x$ ។ គេដឹងថា $\lim\limits_{x\to -2}(2+5x) = -8$ ។ រកចំនួន $\alpha>0$ ដោយស្គាល់ចំនួន $\varepsilon = 0.002$ ដែល $0<|x+2|<\alpha$ នាំឱ្យ $|f(x)-(-8)|<\varepsilon$ ។

ចម្លើយ : គេមាន

$|f(x)-(-8)|<0.002$, $|2+5x+8|<0.002$, $|5x+10|<0.002$, $5|x+2|<0.002$, $|x+2|<\dfrac{0.002}{5} = 0.0004 = \alpha$ ។

ដូចនេះ $\alpha = 0.0004$ ។

លំហាត់គំរូ 2 : គេមានអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x) = \dfrac{2x+1}{x-1}$ ។ បង្ហាញថា $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = +\infty$ ។

ចម្លើយ : $f(x) = \dfrac{2x+1}{x-1} = 2+\dfrac{3}{x-1}$

កំណត់ចំនួន $M>0$ ដែល $f(x)>M$

ដើម្បីឱ្យ $f(x)>M$ យើងគ្រាន់តែឱ្យ $\dfrac{3}{x-1}>M$ ។$\dfrac{3}{x-1}>M$ និង $x>1$ នាំឱ្យ $0<x-1<\dfrac{3}{M}$ ឬ $1<x<\dfrac{3}{M}+1$

ចំពោះគ្រប់ចំនួន $M>0$ មាន $\alpha = \dfrac{3}{M}>0$ ដែល $0<|x-1|<\alpha$ នាំឱ្យ $f(x)>M$

ដូចនេះ $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = +\infty$ ។

ប្រតិបត្តិ : ដោយប្រើនិយមន័យចូរបង្ហាញថា :

ក. $\lim\limits_{x\to 2}\sqrt{x} = \sqrt{2}$ ខ. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\dfrac{1}{x} = -\infty$ ។

1.2. លីមីតនៃអនុគមន៍នៅត្រង់អនន្ត

ឧទាហរណ៍ 1 : គេមានអនុគមន៍ $y = f(x) = \frac{1}{x}$ និងតារាងតម្លៃលេខ :

ក.

x	10	100	1000	10000
y	0.1	0.01	0.001	0.0001

ខ.

x	–10	–100	–1000	–10000
y	–0.1	–0.01	–0.001	–0.0001

តាមតារាងតម្លៃលេខ ក. គេសង្កេតឃើញថា កាលណា x យកតម្លៃវិជ្ជមានហើយកាន់តែធំទៅៗគ្មានទីបញ្ចប់នោះ $\frac{1}{x}$ មានតម្លៃវិជ្ជមាន ហើយកាន់តែតូចទៅៗស្ទើរតែសូន្យ ។

ដូចនេះ $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$ ។

តាមតារាងតម្លៃលេខ ខ. គេសង្កេតឃើញថា កាលណា x យកតម្លៃអវិជ្ជមាន ហើយកាន់តែតូចទៅៗគ្មានទីបញ្ចប់នោះ $\frac{1}{x}$ មានតម្លៃអវិជ្ជមានកាន់តែជិតស្មើនឹងសូន្យ ។

ដូចនេះ $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$ ។

និយមន័យ : អនុគមន៍ f មានលីមីតស្មើនឹង L កាលណា x ខិតទៅ $+\infty$ (ឬ $-\infty$) បើចំពោះគ្រប់ចំនួន $\varepsilon > 0$ មាន $N > 0$ ដែល $x > N$ (ឬ $x < -N$) នាំឱ្យ $|f(x) - L| < \varepsilon$ ។

គេសរសេរ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = L$ ឬ $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = L$ ។

ឧទាហរណ៍ 2 : បង្ហាញថា អនុគមន៍ $y = x^2$ ខិតទៅ $+\infty$ កាលណា x ខិតទៅ $+\infty$ ។

យើងស្រាយបញ្ជាក់ថាគ្រប់ $M > 0$ មាន $N > 0$ ដែល $x > N$ នាំឱ្យ $x^2 > M$ ។

កំណត់យក $M > 0$ ដែល $x^2 > M$ ដើម្បីឱ្យបាន $x^2 > M$ យើងត្រូវយក $x > \sqrt{M}$ ។

ដូចនេះគ្រប់ $M > 0$, មាន $N = \sqrt{M}$ ដែល $x > N$ នាំឱ្យ $x^2 > M$ ។

តាមនិយមន័យ យើងបាន $\lim\limits_{x \to +\infty} y = +\infty$ ។

និយមន័យ :

- អនុគមន៍ f មានលីមីត $+\infty$ កាលណា x ខិតទៅ $+\infty$ បើចំពោះគ្រប់ $M>0$ មាន $N>0$ ដែល $x>N$ នាំឱ្យ $f(x)>M$ ។

  គេសរសេរ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ ។

- អនុគមន៍ f មានលីមីត $+\infty$ កាលណា x ខិតទៅ $-\infty$ បើគ្រប់ $M>0$ មាន $N>0$ ដែល $x<-N$ នាំឱ្យ $f(x)>M$ ។

  គេសរសេរ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ ។

លំហាត់គំរូ 1 : គេមានអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x) = \dfrac{4x+1}{2x+1}$ ។ បង្ហាញថា $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2$ និង $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 2$ ។

ចម្លើយ : កាលណា $x\neq-\dfrac{1}{2}$ គេបាន $f(x)-2 = \dfrac{4x+1}{2x+1}-2 = \dfrac{-1}{2x+1}$

នាំឱ្យ $|f(x)-2| = \dfrac{1}{|2x+1|}$ ។

ចំពោះ $|f(x)-2| = \dfrac{1}{|2x+1|}<\varepsilon$, $\varepsilon>0$

នាំឱ្យ $|2x+1|>\dfrac{1}{\varepsilon}$, $\begin{cases} 2x+1>\dfrac{1}{\varepsilon} \\ 2x+1<-\dfrac{1}{\varepsilon} \end{cases}$ ឬ $\begin{cases} x>\dfrac{1-\varepsilon}{2\varepsilon} \\ x<-\dfrac{1+\varepsilon}{2\varepsilon} \end{cases}$ ឬ $\begin{cases} x>\dfrac{1}{2\varepsilon}-\dfrac{1}{2} \\ x<\dfrac{-1}{2\varepsilon}-\dfrac{1}{2} \end{cases}$ ឬ $\begin{cases} x>\dfrac{1}{2\varepsilon} \\ x<-\left(\dfrac{1}{2\varepsilon}+\dfrac{1}{2}\right) \end{cases}$

ពីព្រោះ $\dfrac{1}{2\varepsilon}>\dfrac{1}{2\varepsilon}-\dfrac{1}{2}$ ។ ε តូចនាំឱ្យ $\dfrac{1}{2\varepsilon}$ ឬ $\dfrac{1}{2\varepsilon}+\dfrac{1}{2}$ ធំ

គេបានគ្រប់ $\varepsilon>0$ មាន $A = \dfrac{1}{2\varepsilon}$ ឬ $A = \dfrac{1}{2\varepsilon}+\dfrac{1}{2}$ ដែល $x>A$ ឬ $x<-A$ នាំឱ្យបាន $|f(x)-2|<\varepsilon$ ។ ដូចនេះ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2$ និង $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 2$ ។

លំហាត់គំរូ 2 : គេមានអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x) = x^2-3x+10$ ។ ដោយសរសេរត្រីធានេះជារាងកាណូនិក បង្ហាញថាគេអាចរកចំនួន $A>0$ ដែល $|x|>A$ នាំឱ្យ $f(x)>10^3$ រួចរក $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)$ ។

ចម្លើយ : គេមាន $f(x) = x^2-3x+10$

គេសរសេរ : $f(x)$ ជារាងកាណូនិក $f(x) = \left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2+\dfrac{31}{4}$

បើ $f(x)>10^3$ ឬ $\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2+\dfrac{31}{4}>10^3$

គេបាន $\left(x-\frac{3}{2}\right)^2 > \frac{3969}{4}$ ឬ $\left|x-\frac{3}{2}\right| > \frac{63}{2}$ សមមូល $x-\frac{3}{2} > \frac{63}{2}$ ឬ $x-\frac{3}{2} < -\frac{63}{2}$

គេបាន $x > 33$ ឬ $x < -30$ ។

ចំពោះ $x > 33$ ឬ $x < -30$ គេបាន $|x| > 33$ គ្រប់ x ដែល $|x| > 33$ នាំឱ្យ $f(x) > 100$

ដូចនេះ $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ ។

ប្រតិបត្តិ : បង្ហាញថា

ក. $\lim_{x\to+\infty} \frac{2x+1}{x-1} = 2$ ខ. $\lim_{x\to+\infty} \frac{2x-x^2}{3x+5} = -\infty$ ។

1.3. ប្រមាណវិធីលើលីមីត

បើ $\lim_{x\to a} f(x) = L$, $\lim_{x\to a} g(x) = M$ និង $\lim_{x\to a} h(x) = N$ ហើយ L, M, N ជាចំនួនពិត គេបាន

ក. $\lim_{x\to a}[f(x) \pm g(x)] = L \pm M$ ដែល (a អាចជាចំនួនកំណត់ ឬអនន្ត)

ខ. $\lim_{x\to a}[f(x)+g(x)-h(x)] = L+M-N$

គ. $\lim_{x\to a} kf(x) = kL$, k ជាចំនួនថេរ

ឃ. $\lim_{x\to a}[f(x)\cdot g(x)\cdot h(x)] = L\cdot M\cdot N$

ង. $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)} = \frac{L}{M}$ ដែល $M \neq 0$, $g(x) \neq 0$

ច. $\lim_{x\to a}[f(x)]^n = L^n$ ដែល n ជាចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីបវិជ្ជមាន ។

លំហាត់គំរូ 1 : គណនាលីមីតខាងក្រោម :

ក. $\lim_{x\to-1}(3x^3-4x+8)$ ខ. $\lim_{x\to-4} 5x^3$ គ. $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x^2-3x+2}$ ។

ចម្លើយ :

ក. $\lim_{x\to-1}(3x^3-4x+8) = 3(\lim_{x\to-1} x)^3 - 4(\lim_{x\to-1} x) + \lim_{x\to-1} 8$

$$= 3(-1)^3 - 4(-1) + 8 = 9$$

ខ. $\lim_{x\to-4} 5x^3 = 5(\lim_{x\to-4} x)^3 = 5(-4)^3 = -320$

គ. $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x^2-3x+2}$ ដោយ $\frac{x^2-1}{x^2-3x+2} = \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x-2)} = \frac{x+1}{x-2}$

គេបាន $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x^2-3x+2} = \frac{\lim_{x\to 1}(x+1)}{\lim_{x\to 1}(x-2)} = \frac{2}{-1} = -2$ ។

លំហាត់គំរូ 2 : កំណត់តម្លៃ a ដើម្បីឱ្យ $\lim_{x\to 1}\dfrac{x^2-ax+1}{x-1}$ ជាចំនួនថេរ ។ គណនាលីមីតនេះ ។

ចម្លើយ : ដោយ $\lim_{x\to 1}(x-1) = 0$ គេបាន $\lim_{x\to 1}(x^2-ax+1) = 0$ ។

ដោយ $\lim_{x\to 1}(x^2-ax+1) = 2-a$ គេបាន $2-a = 0$ នាំឱ្យ $a = 2$ ។

ដូចនេះ $\lim_{x\to 1}\dfrac{x^2-ax+1}{x-1} = \lim_{x\to 1}\dfrac{(x-1)^2}{x-1} = \lim_{x\to 1}(x-1) = 0$ ។

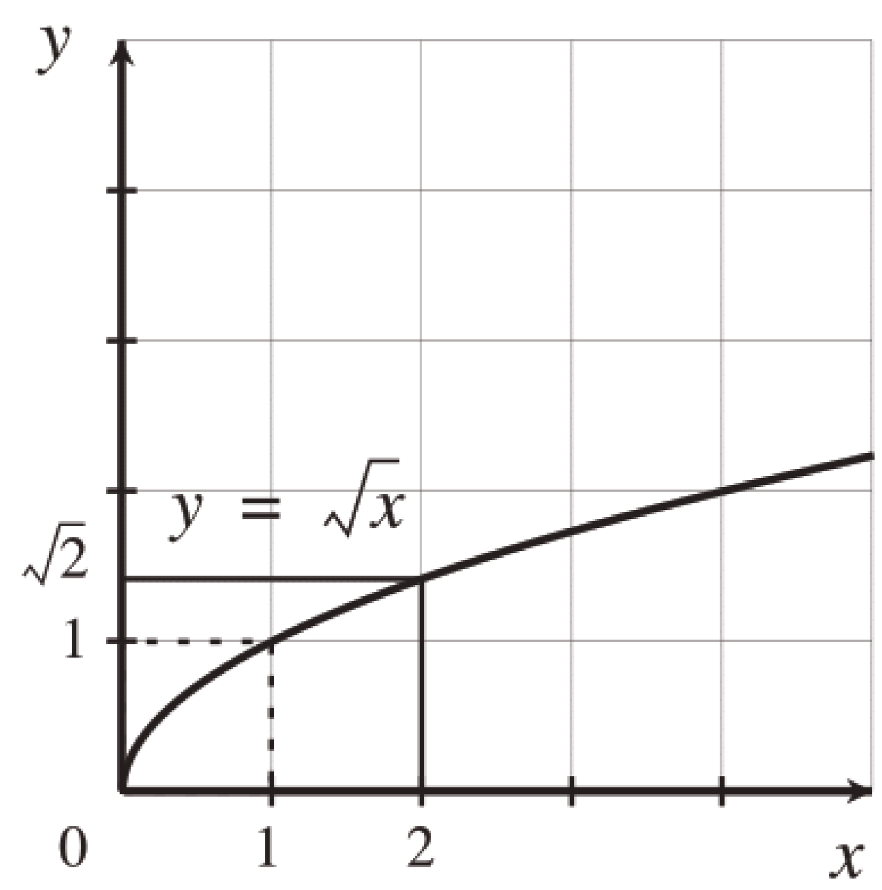
ប្រតិបត្តិ : កំណត់តម្លៃ a និង b ដែលបំពេញលក្ខខណ្ឌ $\lim_{x\to -2}\dfrac{x^2+ax-6}{2x^2+3x-2} = b$ ។

2. លីមីតនៃអនុគមន៍អសនិទាន

ឧទាហរណ៍ 1 : គេឱ្យអនុគមន៍ $y = f(x) = \sqrt{x}$ និងតារាងតម្លៃលេខ

x	1.99	1.999	1.9999	2.0001	2.001	2.01
$y = \sqrt{x}$	1.4106	1.4138	1.4141	1.4142	1.4145	1.4177

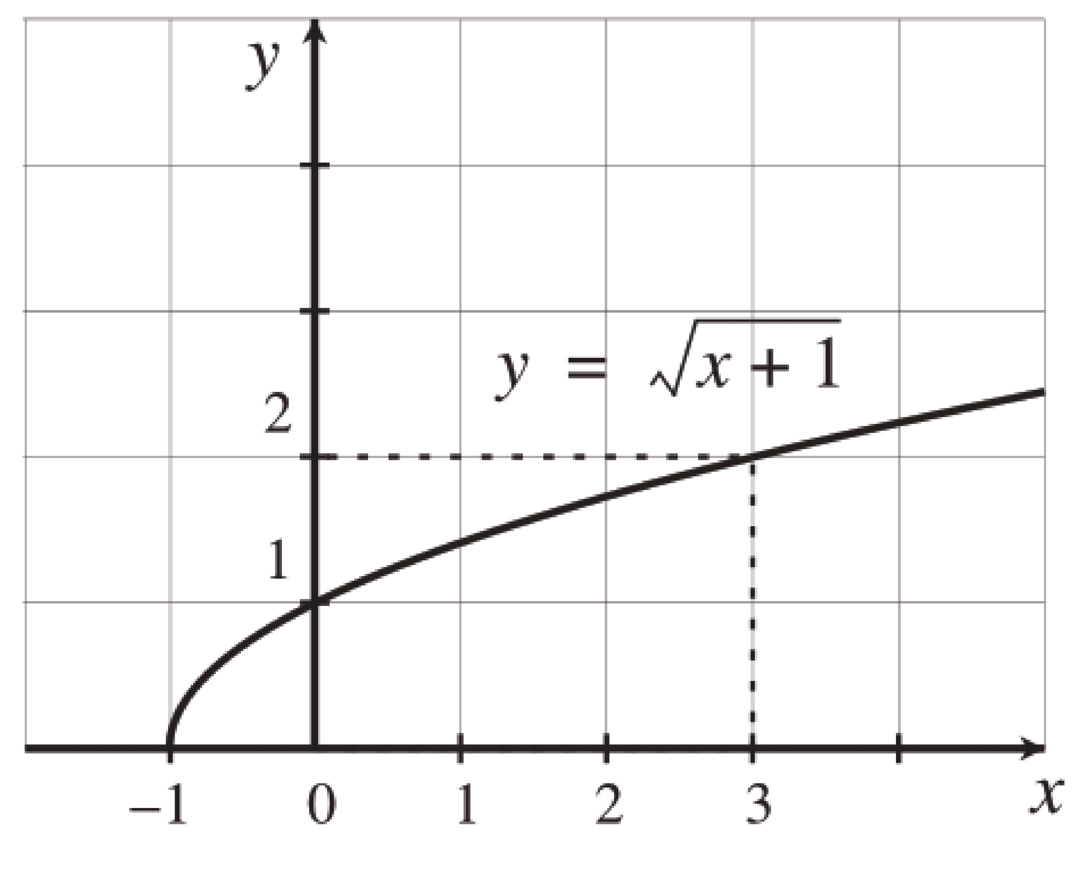
តាមតារាងតម្លៃលេខ និងតាមក្រាប បើ x ខិតជិត 2 ខាងឆ្វេង និងខិតជិត 2 ខាងស្តាំ នោះ $f(x)$ ខិតជិត $\sqrt{2}$ ។ គេថា $f(x)$ មានលីមីតស្មើនឹង $\sqrt{2}$ កាលណា x ខិតជិត 2 ។ ហើយគេកំណត់សរសេរ : $\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2}\sqrt{x} = \sqrt{2}$ ។



ឧទាហរណ៍ 2 : គណនា $\lim_{x\to 3}\sqrt{x+1}$ ។

តាមក្រាបគេឃើញថាកាលណា $x\to 3$ នោះ $\sqrt{x+1}\to 2$

ដូចនេះ $\lim_{x\to 3}\sqrt{x+1} = 2$ ។



ជាទូទៅ :

- $\lim\limits_{x \to a} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{a}$ ចំពោះ $a \geq 0$ និង $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$
- $\lim\limits_{x \to a} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{a}$ ចំពោះ $a < 0$ និង n ជាចំនួនគត់ធម្មជាតិសេសធំជាង 2
- $\lim\limits_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim\limits_{x \to a} f(x)} = \sqrt[n]{L} = L^{\frac{1}{n}}$

  បើ $L \geq 0$ និង $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$

  បើ $L < 0$ និង n ជាចំនួនគត់សេសធំជាង 2 ។

លំហាត់គំរូ 1 : គណនា

ក. $\lim\limits_{x \to 4} \sqrt[3]{\dfrac{x}{-7x+1}} = \sqrt[3]{\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{x}{-7x+1}} = \sqrt[3]{-\dfrac{4}{27}} = -\dfrac{\sqrt[3]{4}}{3}$ ។

ខ. $\lim\limits_{x \to 2} \sqrt{\dfrac{x^3+2x+3}{x^2+5}} = \sqrt{\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^3+2x+3}{x^2+5}} = \sqrt{\dfrac{2^3+2\times 2+3}{2^2+5}} = \sqrt{\dfrac{8+4+3}{9}} = \dfrac{\sqrt{15}}{3}$ ។

ប្រតិបត្តិ : គណនា ក. $\lim\limits_{x \to 4} \sqrt[3]{\dfrac{x^2-3x+4}{2x^2-x-1}}$ ខ. $\lim\limits_{x \to -3} \sqrt{\dfrac{x^2-9}{2x^2+7x+3}}$ ។

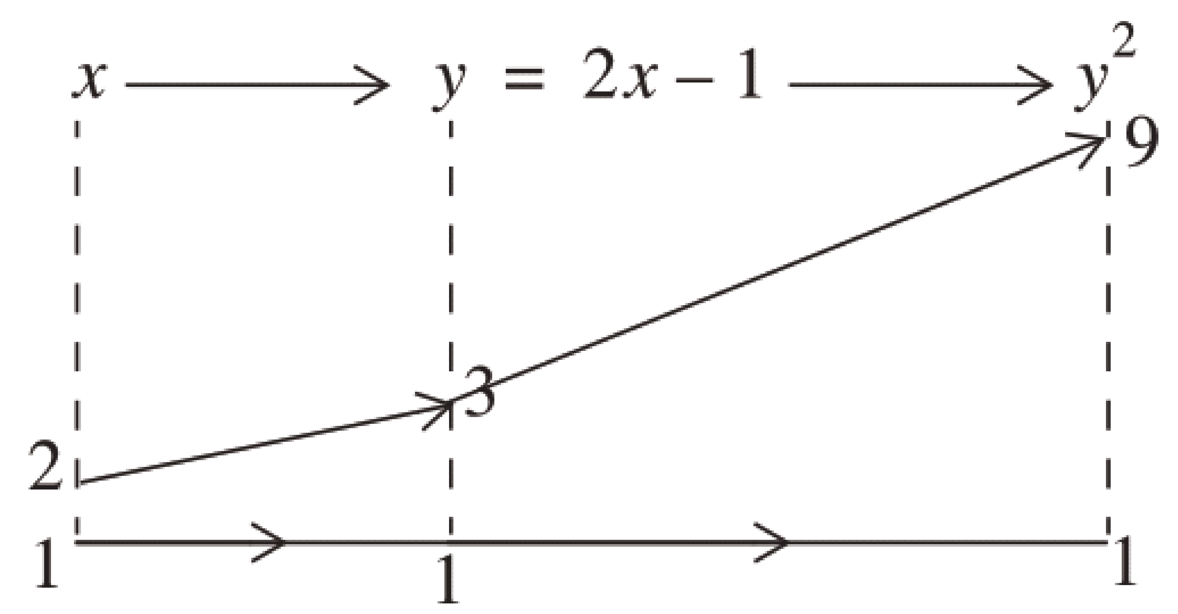
3. លីមីតនៃអនុគមន៍បណ្តាក់

3.1. អនុគមន៍បណ្តាក់

ឧទាហរណ៍ 1 : អនុគមន៍ f និង g កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ដោយ $f : x \longmapsto f(x) = 2x-1$

$g : x \longmapsto g(x) = x^2$

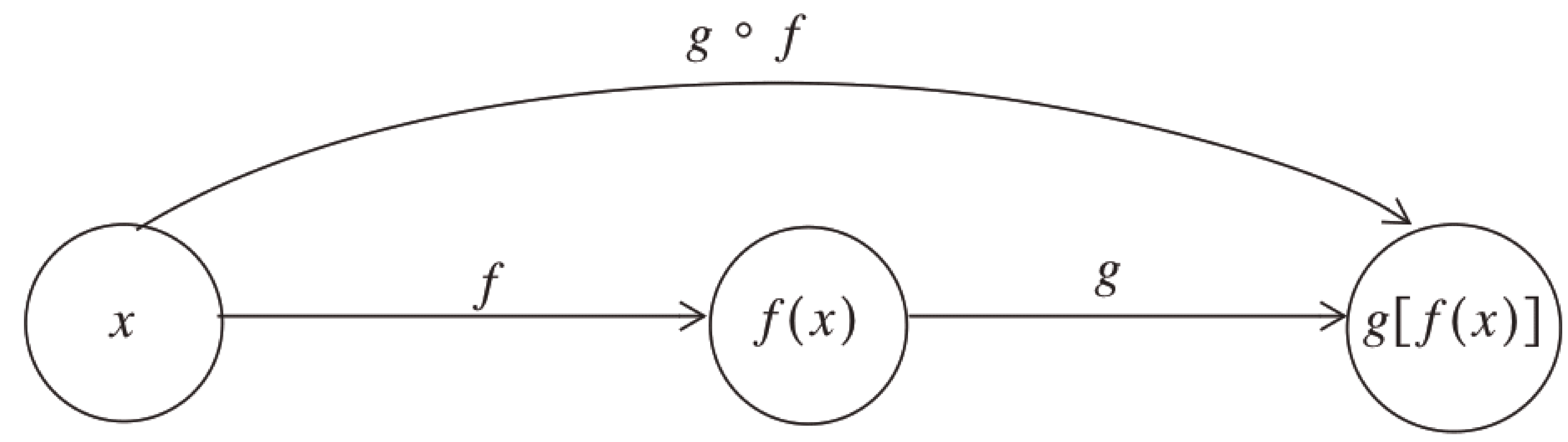
ដ្យាក្រាមខាងក្រោមនឹងបង្ហាញពីផ្នែកខ្លះនៃទំនាក់ទំនងរវាងអនុគមន៍ f និង g



គេបាន $1 \xrightarrow{f} 2\times 1-1 = 1 \xrightarrow{g} 1^2 = 1$

$1 \xrightarrow{f} 2\times 2-1 = 3 \xrightarrow{g} 3^2 = 9$

$x \xrightarrow{f} 2x-1 \xrightarrow{g} y^2 = (2x-1)^2$



គេបានអនុគមន៍ថ្មីមួយដែលធាតុដើម x ឱ្យរូបភាព $g[f(x)]$ ។

អនុគមន៍ថ្មី $g \circ f$ នេះហៅថា អនុគមន៍បណ្តាក់នៃអនុគមន៍ f និង g ។

> ***ជាទូទៅ :*** f និង g ជាអនុគមន៍ពីរ ។ អនុគមន៍បណ្តាក់នៃអនុគមន៍ f និង g ដែលតាងដោយ $g \circ f$ គឺជាអនុគមន៍ដែលកំណត់ $(g \circ f)(x) = g[f(x)]$ ។

លំហាត់គំរូ : អនុគមន៍ $f(x) = x^2 + 1$ និង $g(x) = \dfrac{1}{x}$ ដែលកំណត់ចំពោះ $x \neq 0$ ។ គណនា $(f \circ g)(x)$ និង $(g \circ f)(x)$ ។ តើ $(f \circ g)(x)$ និង $(g \circ f)(x)$ ស្មើគ្នាឬទេ ?

ចម្លើយ : គេបាន $(f \circ g)(x)\ :\ x \to g(x) \ \to f[g(x)]$

$(f \circ g)(x) = f[g(x)] = f\left(\dfrac{1}{x}\right) = \left(\dfrac{1}{x}\right)^2 + 1 = \dfrac{1}{x^2} + 1$ ។

ម្យ៉ាងទៀត $(g \circ f)(x) : x \to f(x) \ \to g[f(x)]$

គេបាន $(g \circ f)(x) = g[f(x)] = \dfrac{1}{f(x)} = \dfrac{1}{x^2+1}$

គេឃើញថា $(g \circ f)(x) \neq (f \circ g)(x)$ ។

ប្រតិបត្តិ : គេមាន $f(x) = 3x + 1$ និង $g(x) = x^2$ ។ គណនា $(f \circ g)(x)$ និង $(g \circ f)(x)$ ។ តើ $(f \circ g)(x)$ និង $(g \circ f)(x)$ ស្មើគ្នាឬទេ ?

3.2. លីមីតនៃអនុគមន៍បណ្តាក់

ឧទាហរណ៍ 1 : គេមានអនុគមន៍ $y = (x+1)^2$ កំណត់ដោយ

$$x \xrightarrow{f} x+1 \xrightarrow{g} (x+1)^2$$

$$y = g[f(x)] = (x+1)^2$$

គេបានតារាងតម្លៃលេខ

x	-0.01	-0.001	0	0.0001	0.01
$f(x) = x+1$	0.99	0.999	1	1.001	1.01
$g[f(x)] = (x+1)^2$	0.9801	0.998	1	1.002	1.02

តាមតារាងតម្លៃលេខ គេសង្កេតឃើញថាបើ x យកតម្លៃកាន់តែជិត 0 ពីខាងឆ្វេង និងពីខាងស្តាំ នោះ $y = g[f(x)]$ យកតម្លៃកាន់តែជិត 1 ។ គេថាអនុគមន៍បណ្តាក់ $y = g[f(x)]$ មានលីមីត 1 កាលណា x ខិតជិត 0 ។

គេបាន $\lim\limits_{x \to 0}(x+1)^2 = 1$ ។

ឧទាហរណ៍ 2 : គណនា $\lim\limits_{x \to 4}\sqrt[3]{3x^2 - 21}$ ។

ដោយ $\lim\limits_{x \to 4}(3x^2 - 21) = 3 \times 16 - 21 = 27$ និង $\lim\limits_{x \to 27}\sqrt[3]{x} = \sqrt[3]{27} = 3$

គេបាន $\lim\limits_{x \to 4}\sqrt[3]{3x^2 - 21} = 3$ ។

ជាទូទៅ : បើ f និង g ជាអនុគមន៍ដែលមានលីមីត $\lim\limits_{x \to a} g(x) = L$ និង $\lim\limits_{x \to L} f(x) = f(L)$ នោះ $\lim\limits_{x \to a} f[g(x)] = f(L)$ ។

លំហាត់គំរូ 1 : គណនា $\lim\limits_{x \to +\infty}\sqrt{\dfrac{2x-3}{x+2}}$ ។

ចម្លើយ : ដោយ $\lim\limits_{x \to +\infty}\dfrac{2x-3}{x+2} = 2$ ដូចនេះ $\lim\limits_{x \to +\infty}\sqrt{\dfrac{2x-3}{x+2}} = \lim\limits_{X \to 2}\sqrt{X} = \sqrt{2}$ ។

លំហាត់គំរូ 2 : គណនា $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x < 2}}\left(\dfrac{x+1}{x-2}\right)^2$ ។

ចម្លើយ : ដោយ $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x < 2}}\dfrac{x+1}{x-2} = -\infty$ ដូចនេះ $\lim\limits_{\substack{X \to 2 \\ X < 2}}\left(\dfrac{x+1}{x-2}\right)^2 = \lim\limits_{\substack{X \to 2 \\ x < 2}}(X)^2 = +\infty$ ។

ប្រតិបត្តិ : គណនា ក. $\lim\limits_{x \to -4}\sqrt[3]{3x+4}$ ខ. $\lim\limits_{x \to 5}\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2+2}}$ ។

3.3. លីមីតតាមការប្រៀបធៀប

បើមានអនុគមន៍ f, g និងចំនួនពិត A ដែល $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$ និង $f(x) \geq g(x)$ ចំពោះគ្រប់ $x \geq A$ នោះ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ ។

ឧទាហរណ៍ 1 **:** គេមាន $f(x) = x - \sqrt{x}$ ។

ចំពោះ $x \geq 4$ គេបាន $x^2 \geq 4x$ នោះ $x \geq 2\sqrt{x}$ ហើយ $f(x) = x - \sqrt{x} \geq \sqrt{x}$ តែ $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$ ។ ដូចនេះ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ ។

> បើមានអនុគមន៍ f, g និងចំនួនពិត A ដែល $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$ និង $f(x) \leq g(x)$ ចំពោះគ្រប់ $x \geq A$ នោះ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ ។

ឧទាហរណ៍ 2 **:** គេមានអនុគមន៍ f ដែល $f(x) < -x + 1$ ចំពោះគ្រប់ $x \in \mathbb{R}$ ដោយ $\lim\limits_{x \to +\infty} (-x + 1) = -\infty$ នោះយើងបាន $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ ។

> បើមានអនុគមន៍ f, g, h និងចំនួនពិត A ដែល $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = \lambda$ និង $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ ចំពោះគ្រប់ $x \geq A$ នោះ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lambda$ ។

ឧទាហរណ៍ 3 **:** គេមាន $f(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$ ។

បើ $x \geq 0$ នោះ $f(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x} = \dfrac{\sqrt{(x+1)^2} - \sqrt{x^2}}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = \dfrac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}$

ដោយ $\sqrt{x} \leq \sqrt{x+1}$ គេបាន $2\sqrt{x} \leq \sqrt{x+1} + \sqrt{x} \leq 2\sqrt{x+1}$

គេបាន $\dfrac{1}{2\sqrt{x+1}} \leq f(x) \leq \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ តែ $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{2\sqrt{x+1}} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = 0$ ។

ដូចនេះ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ ។

> បើមានអនុគមន៍ f និង g និងចំនួនពិត A ដែល $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lambda$ $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lambda'$ និង $f(x) \leq g(x)$ នោះចំពោះគ្រប់ $x \geq A$ គេបាន $\lambda \leq \lambda'$ ។

សម្គាល់ **:** គេនឹងបានវិធាន និងរបៀបដូចគ្នា កាលណា $x \to -\infty$ ដោយគ្រាន់តែជំនួស $x \geq A$ ដោយ $x \leq A$ វិញ ។

4. លីមីតរាងមិនកំណត់

4.1. លីមីតដែលមានរាងមិនកំណត់ $\frac{0}{0}$

ឧទាហរណ៍ 1 **:** គណនា $\lim_{x \to 2} \frac{x^3-8}{x-2}$ ។

បើ $x \to 2$ នោះ $\lim_{x \to 2} \frac{x^3-8}{x-2}$ មានរាងមិនកំណត់ $\frac{0}{0}$ ព្រោះ $\lim_{x \to 2}(x^3-8) = 0$ និង $\lim_{x \to 2}(x-2) = 0$ ។

ដូចនេះ គេត្រូវបំបែកភាគយក និងភាគបែង ហើយសម្រួលកត្តារួម រួចគណនាលីមីតនៃកន្សោមថ្មី ។

គេមាន $\frac{x^3-8}{x-2} = \frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{x-2} = (x^2+2x+4)$ (បើ $x \neq 2$) ។

ដូចនេះ $\lim_{x \to 2} \frac{x^3-8}{x-2} = \lim_{x \to 2}(x^2+2x+4) = 2^2+2\times 2+4 = 12$ ។

ឧទាហរណ៍ 2 **:** គណនា $\lim_{x \to 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x-4}$ ។

គេបាន $\frac{\sqrt{x}-2}{x-4} = \frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}{(x-4)(\sqrt{x}+2)} = \frac{x-4}{(x-4)(\sqrt{x}+2)} = \frac{1}{\sqrt{x}+2}$ បើ $x \neq 4$ ។

ដូចនេះ $\lim_{x \to 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x-4} = \lim_{x \to 4} \frac{1}{\sqrt{x}+2} = \frac{\lim_{x \to 4} 1}{\lim_{x \to 4}(\sqrt{x}+2)} = \frac{1}{\lim_{x \to 4}\sqrt{x} + \lim_{x \to 4} 2} = \frac{1}{\sqrt{4}+2} = \frac{1}{4}$ ។

វិធាន: ដើម្បីគណនាលីមីតដែលមានរាងមិនកំណត់ $\frac{0}{0}$ គេត្រូវបំបែកភាគយក និងភាគបែងជាផលគុណកត្តា ហើយសម្រួលកត្តារួម រួចគណនាលីមីតនៃកន្សោមថ្មី ។

ប្រតិបត្តិ **:** គណនា

ក. $\lim_{x \to -2} \frac{x^3+3x^2+2x}{x^2-x-6}$

ខ. $\lim_{x \to \frac{1}{2}} \frac{8x^3-1}{6x^2-5x+1}$ ។

4.2. លីមីតដែលមានរាងមិនកំណត់ $\frac{\infty}{\infty}$

ឧទាហរណ៍ 1 **:** គណនា $\lim_{x \to +\infty} \frac{x^3+x}{x^4-3x^2+1}$ ។ បើ $x \to +\infty$ នោះ $\lim_{x \to +\infty} \frac{x^3+x}{x^4-3x^2+1}$ មានរាងមិនកំណត់ $\frac{\infty}{\infty}$ ។

គេដាក់ស្វ័យគុណដែលមានដឺក្រេខ្ពស់ជាងគេនៃភាគយក និងភាគបែងជាកត្តារួម រួចសម្រួលកត្តារួម ។ គេបាន :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3+x}{x^4-3x^2+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{x^4\left(1-\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x^4}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\frac{1}{x^2}}{x\left(1-\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x^4}\right)}=0$$

ឧទាហរណ៍ 2 **:** គណនា $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2-2x+3}}{x+5}$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2-2x+3}}{x+5}=\lim_{x\to-\infty}\frac{|x|\sqrt{1-\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}}{x\left(1+\frac{5}{x}\right)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x\sqrt{1-\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}}{x\left(1+\frac{5}{x}\right)}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{-\sqrt{1-\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}}{1+\frac{5}{x}}=\frac{-\sqrt{1-0+0}}{1+0}=-1 \text{ ។}$$

> ***វិធាន*** **:** ដើម្បីគណនាលីមីតដែលមានរាងមិនកំណត់ $\frac{\infty}{\infty}$ គេត្រូវដាក់តួដែលមានដឺក្រេធំជាងគេនៅភាគយក និងភាគបែងជាកត្តារួមសិន ហើយសម្រួលកត្តារួមចោល រួចគណនាលីមីតនៃកន្សោមថ្មី ។

ប្រតិបត្តិ **:** គណនា

ក. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^4-5x}{x^2-3x+1}$ ខ. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3+x-x^4}}$ ។

4.3. លីមីតដែលមានរាងមិនកំណត់ $+\infty-\infty$

ឧទាហរណ៍ 1 **:** គណនា $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^3-x^2+5)$ ។ បើ $x\to+\infty$ នោះ $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^3-x^2+5)$ មានរាងមិនកំណត់ $+\infty-\infty$ ។ គេដាក់ស្វ័យគុណដែលមានដឺក្រេខ្ពស់ជាងគេជាកត្តារួម :

$$\lim_{x\to+\infty}(x^3-x^2+5)=\lim_{x\to+\infty}x^3\left(1-\frac{1}{x}+\frac{5}{x^3}\right)=\lim_{x\to+\infty}x^3=+\infty \text{ ។}$$

ឧទាហរណ៍ 2 **:** គណនា $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+x}-x+1)$ ។

$$\left(\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+x}-x+1\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{[\sqrt{x^2+x}-(x-1)][\sqrt{x^2+x}+(x-1)]}{\sqrt{x^2+x}+(x-1)}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{(x^2+x)-(x-1)^2}{\sqrt{x^2+x}+(x-1)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(3-\frac{1}{x}\right)}{x\left[\sqrt{1+\frac{1}{x}}+\left(1-\frac{1}{x}\right)\right]}=\frac{3}{2} \text{ ។}$$

វិធាន : ដើម្បីគណនាលីមីតរាងមិនកំណត់ $+\infty-\infty$ គេត្រូវដាក់តួដែលមានដឺក្រេធំជាងគេ ជាកត្តារួម ហើយគណនាលីមីតនៃកន្សោមថ្មី ។

លំហាត់គំរូ 1 : គណនា $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^m-1}{x^n-1}$ $(m,\ n\in\mathbb{N})$ ។

ចម្លើយ : $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^m-1}{x^n-1} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x^{m-1}+x^{m-2}+\ldots+1)}{(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\ldots+1)}$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{(x^{m-1}+x^{m-2}+\ldots+1)}{(x^{n-1}+x^{n-2}+\ldots+1)} = \frac{m}{n}$$ ។

លំហាត់គំរូ 2 : គណនា $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(x+1)^{10}+(x+2)^{10}+\ldots+(x+100)^{10}}{x^{10}-10^{10}}$

ចម្លើយ : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(x+1)^{10}+(x+2)^{10}+\ldots+(x+100)^{10}}{x^{10}-10^{10}} =$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{10}\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^{10}+\left(1+\frac{2}{x}\right)^{10}+\ldots+\left(1+\frac{100}{x}\right)^{10}\right]}{x^{10}\left(1-\frac{10^{10}}{x^{10}}\right)} = 100$$ ។

លំហាត់គំរូ 3 : រកតម្លៃ a និង b បើគេដឹងថា $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+ax}-bx-1) = 3$

ចម្លើយ :

- បើ $b\le 0$ គេបាន $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+ax}-bx-1) = +\infty$ មិនអាចស្មើនឹង 3 បានទេ ។
- បើ $b>0$ គេបាន

$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+ax}-bx-1) = \lim_{x\to+\infty}\frac{(x^2+ax)-(bx+1)^2}{\sqrt{x^2+ax}+bx+1} = \lim_{x\to+\infty}\frac{(1-b^2)x^2+(a-2b)x-1}{\sqrt{x^2+ax}+bx+1} =$$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(1-b^2)x^2+x\left(a-2b-\frac{1}{x}\right)}{x\left(\sqrt{1+\frac{a}{x}}+b+\frac{1}{x}\right)}$ លីមីតជាចំនួនថេរបើ $1-b^2 = 0$ ត្រូវនឹង $b = 1$ (ព្រោះ $b>0$) ។

ដូចនេះ $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+ax}-bx-1) = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{a-2b-\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{a}{x}}+b+\frac{1}{x}} = \dfrac{a-2b}{1+b} = \dfrac{a-2}{2} = 3$ ។

នាំឱ្យ $a = 8$ ។ ដូចនេះ $a = 8$, $b = 1$ ។

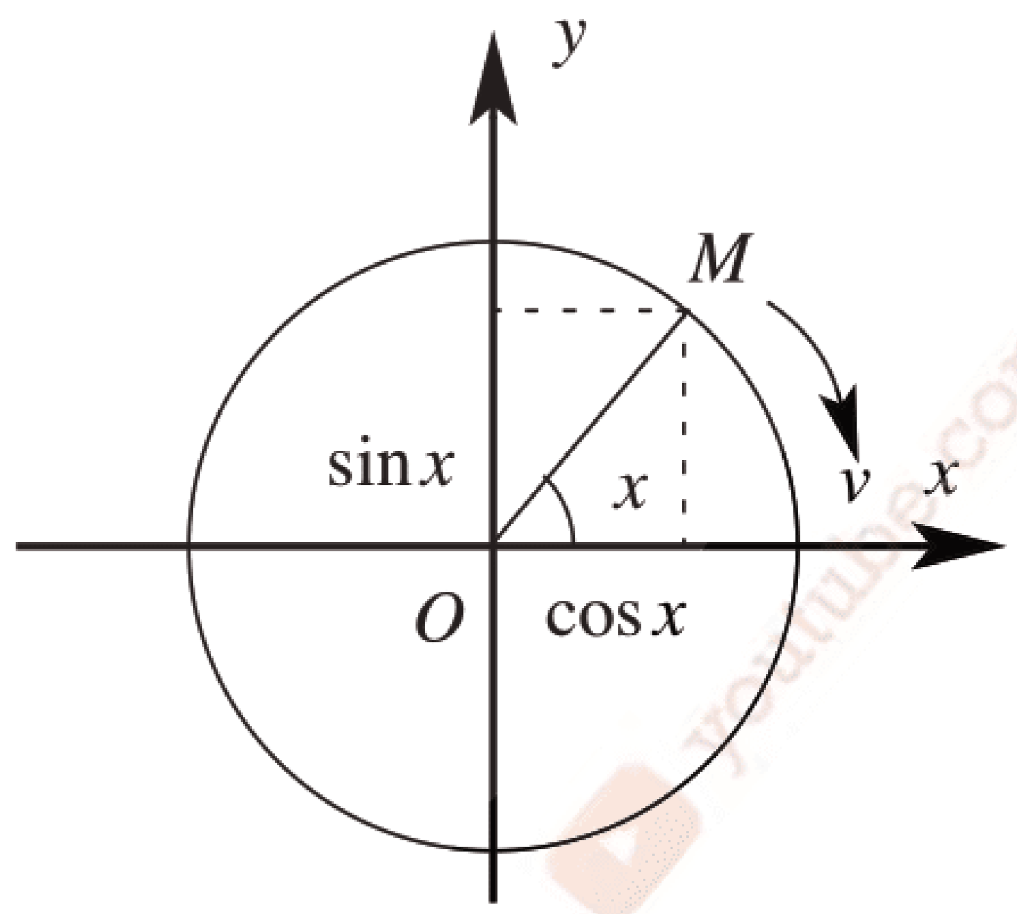
ប្រតិបត្តិ : គណនា

ក. $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+2}-x+1)$ ខ. $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x})$ ។

5. លីមីតនៃអនុគមន៍មិនពីជគណិត

5.1. លីមីតនៃអនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រ

ឧទាហរណ៍ 1 : គេមានរង្វង់ត្រីកោណមាត្រដូចរូបខាងស្តាំនេះ គេសង្កេតឃើញថា :



- កាលណាមុំ x ខិតជិត 0 នោះ $\sin x$ ខិតទៅរកសូន្យ ។
- កាលណាមុំ x ខិតជិត 0 នោះ $\cos x$ ខិតទៅរក 1 ។
- កាលណាមុំ x ខិតជិត 0 នោះ $\tan x$ ខិតទៅរកសូន្យ ។

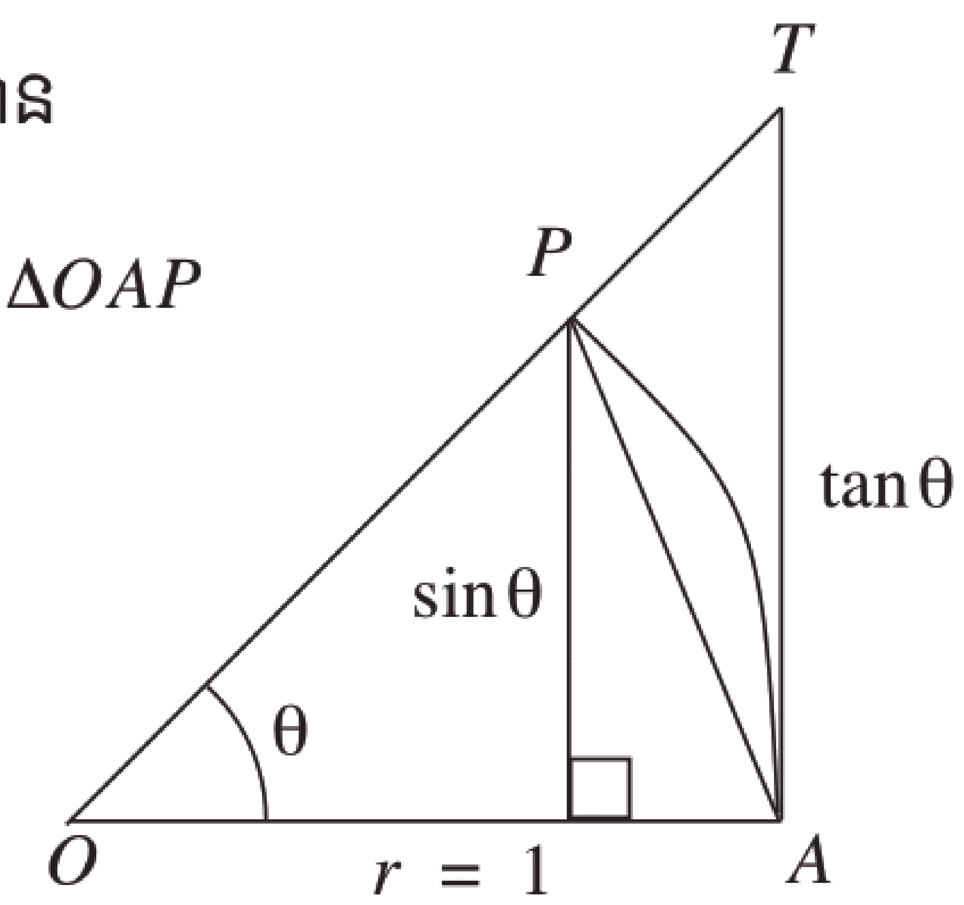
គេសរសេរ $\lim\limits_{x\to 0}\sin x = 0$, $\lim\limits_{x\to 0}\cos x = 1$, $\lim\limits_{x\to 0}\tan x = 0$ ។

ជាទូទៅ : បើ a ជាចំនួនពិតស្ថិតក្នុងដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រដែលឱ្យ គេបាន $\lim\limits_{x\to a}\sin x = \sin a$, $\lim\limits_{x\to a}\cos x = \cos a$, $\lim\limits_{x\to a}\tan x = \tan a$ ។

ទ្រឹស្តីបទ : បើ x ជារង្វាស់មុំ ឬ ធ្នូគិតជារ៉ាដ្យង់នោះគេបាន :

ក. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1$ ខ. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x} = 0$ ។

សម្រាយបញ្ជាក់ :



ក. គេមាន θ ជារង្វាស់មុំគិតជារ៉ាដ្យង់ដែល $0<\theta<\frac{\pi}{2}$ គេបាន

ផ្ទៃក្រឡា $\Delta OAT \geq$ ផ្ទៃក្រឡាចម្រៀកថាស $OAP \geq$ ផ្ទៃក្រឡា ΔOAP

$\frac{1}{2}\times 1\times\tan\theta \geq \frac{1}{2}\times 1^2\theta \geq \frac{1}{2}\times 1\times\sin\theta$

$\tan\theta \geq \theta \geq \sin\theta$

គុណវិសមភាពនេះនឹង $\dfrac{1}{\sin\theta}$ គេបាន $\dfrac{1}{\cos\theta} \geq \dfrac{\theta}{\sin\theta} \geq 1$

ឬ $\cos\theta \leq \dfrac{\sin\theta}{\theta} \leq 1$ ។

- បើ $-\frac{\pi}{2}<\theta<0$ នោះ $0<-\theta<\frac{\pi}{2}$ តាមវិសមភាព

ខាងលើគេបាន : $\cos(-\theta) \leq \dfrac{\sin(-\theta)}{-\theta} \leq 1$ ឬ $\cos\theta \leq \dfrac{\sin\theta}{\theta} \leq 1$ ។

ដោយ $\lim\limits_{\theta \to 0} \cos\theta = 1$ និង $\lim\limits_{\theta \to 0} 1 = 1$ នោះគេបាន $\lim\limits_{\theta \to 0} \dfrac{\sin\theta}{\theta} = 1$ ។

ដោយជំនួស θ ដោយ x នោះគេបាន $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$ ។

ខ. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1-\cos x}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x} = \lim\limits_{x \to 0}\left(\dfrac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \times \sin\dfrac{x}{2}\right) = 0$ ។

ឧទាហរណ៍ 2 : $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2 = \dfrac{1}{2}$ ។

ឧទាហរណ៍ 3 : គណនា $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\cos x}{x - \frac{\pi}{2}}$ ។

តាង $\alpha = x - \dfrac{\pi}{2}$ នោះ $x = \alpha + \dfrac{\pi}{2}$ ហើយកាលណា $x \to \dfrac{\pi}{2}$ នោះ $\alpha \to 0$

គេបាន $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\cos x}{x - \frac{\pi}{2}} = \lim\limits_{\alpha \to 0} \dfrac{\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)}{\alpha} = -\lim\limits_{\alpha \to 0} \dfrac{\sin\alpha}{\alpha} = -1$

លំហាត់គំរូ : គណនា

ក. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\cos x - \sin x}{\cos 2x}$ ខ. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{\sin 3x}$ គ. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 3x}{\sqrt{x+2} - \sqrt{2}}$ ។

ចម្លើយ :

ក. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\cos x - \sin x}{\cos 2x} = \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\cos x - \sin x}{\cos^2 x - \sin^2 x} = \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \dfrac{1}{\cos x + \sin x} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ។

ខ. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{\sin 3x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2x}{(\sin 3x)(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})}$

$$= \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\frac{2}{3}}{\frac{\sin 3x}{3x}(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})} = \dfrac{1}{3} \text{ ។}$$

គ. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 3x}{\sqrt{x+2} - \sqrt{2}} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(\sqrt{x+2} + \sqrt{2})\sin 3x}{(x+2-2)} = \lim\limits_{x \to 0}\left((\sqrt{x+2} + \sqrt{2})\dfrac{\sin 3x}{3x} \times 3\right)$

$$= 2\sqrt{2} \times 3 = 6\sqrt{2} \text{ ។}$$

ប្រតិបត្តិ : គណនា

ក. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{x+4} - 2}{\sin 5x}$ ខ. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos 6x - \cos x}{\sin^2 x}$ គ. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan x - \sin x}{x^3}$ ។

5.2. លីមីតនៃអនុគមន៍អ៊ិចស្ប៉ូណង់ស្យែល

អនុគមន៍ $y = e^x$ ហៅថាអនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែលដែល $e = \lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \approx 2.7182$ ។

ឧទាហរណ៍ 1 **:** គេមានអនុគមន៍ $f(x) = e^x$ និងតារាងតម្លៃលេខខាងក្រោម :

x	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	2.7182	7.3886	20.0837	54.5915	143.3908	403.3559

តាមតារាងនេះ គេសង្កេតឃើញថាបើ x យកតម្លៃវិជ្ជមានធំទៅៗគ្មានទីបញ្ចប់នោះ e^x ក៏មានតម្លៃវិជ្ជមានធំទៅៗ គ្មានទីបញ្ចប់ដែរ ។ គេបាន $\boxed{\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty}$ ។

ឧទាហរណ៍ 2 **:** គេមានអនុគមន៍ $f(x) = e^x$ និងតារាងតម្លៃលេខខាងក្រោម :

x	-2	-3	-4	-5	-6	-7
$f(x)$	0.1353	0.0497	0.0183	0.00673	0.00247	0.000912

តាមតារាងនេះ គេសង្កេតឃើញថាបើ x យកតម្លៃអវិជ្ជមានតូចទៅៗគ្មានទីបញ្ចប់នោះ e^x មានតម្លៃវិជ្ជមានកាន់តែតូចជិតស្មើនឹងសូន្យ ។ គេបាន $x \to -\infty$ នោះ $e^x \to 0$ ។

គេកំណត់សរសេរ $\boxed{\lim_{x \to -\infty} e^x = 0}$ ។

លំហាត់គំរូ **:** គណនា

ក. $\lim_{x \to -\infty} (e^x + 3)$ ខ. $\lim_{x \to +\infty} (e^x + 3x - 5)$ ។

ចម្លើយ **:**

ក. $\lim_{x \to -\infty} (e^x + 3) = 0 + 3 = 3$ ។

ខ. $\lim_{x \to +\infty} (e^x + 3x - 5) = \lim_{x \to +\infty} e^x + \lim_{x \to +\infty} (3x - 5) = +\infty$ ។

ប្រតិបត្តិ **:** គណនា

ក. $\lim_{x \to -\infty} (e^{-x} - 5)$ ខ. $\lim_{x \to +\infty} (e^x - 7x + 6)$ គ. $\lim_{x \to -\infty} (2e^x - x^2 + 1)$ ។

ឧទាហរណ៍ 3 **:** គេមានអនុគមន៍ $g(x) = \frac{e^x}{x}$ និងតារាងតម្លៃលេខខាងក្រោម :

x	3	5	7	9	10……
$g(x)$	6.6945	29.6781	156.6288	900.0987	2201.9836……

តាមតារាងនេះ គេសង្កេតឃើញថាបើ x យកតម្លៃវិជ្ជមានធំទៅៗគ្មានទីបញ្ចប់នោះ $g(x)$ ក៏

មានតម្លៃវិជ្ជមានធំទៅៗ គ្មានទីបញ្ចប់ដែរ ។ គេបាន $x \to +\infty$ នោះគេបាន $\frac{e^x}{x} \to +\infty$

គេកំណត់សរសេរ $\boxed{\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty}$ ។

ឧទាហរណ៍ 4 : គេមានអនុគមន៍ $g(x) = \frac{e^x}{x^{10}}$ និងតារាងតម្លៃលេខខាងក្រោម :

x	10	20	30	…	100
$g(x)$	2.2019×10^{-6}	4.735×10^{-5}	1.808×10^{-2}	…	2.68×10^{23}

តាមតារាងនេះ គេសង្កេតឃើញថាបើ x យកតម្លៃវិជ្ជមានធំទៅៗគ្មានទីបញ្ចប់នោះ $g(x)$ ក៏មានតម្លៃវិជ្ជមានធំទៅៗគ្មានទីបញ្ចប់ដែរ ។ គេបាន $x \to +\infty$ នោះគេបាន $\frac{e^x}{x^{10}} \to +\infty$

គេកំណត់សរសេរ $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^{10}} = +\infty$ ។

ជាទូទៅ : បើ $n > 0$ នោះ $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$, $\lim_{x \to +\infty} \frac{x^n}{e^x} = 0$ ។

សម្រាយបញ្ជាក់ : ដោយ $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$

នោះគេបាន $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\frac{e^x}{x^n}} = 0$ ឬ $\lim_{x \to +\infty} \frac{x^n}{e^x} = 0$ ។

លំហាត់គំរូ : គណនា

ក. $\lim_{x \to +\infty} (x^3 + x)e^{-x}$ ខ. $\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{2e^x - 1}{x^2 + x - 3}\right)$ គ. $\lim_{x \to -\infty} e^x(x^3 + 1)$ ។

ចម្លើយ :

ក. $\lim_{x \to +\infty} (x^3 + x)e^{-x} = \lim_{x \to +\infty} x^3 e^{-x}\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) = 0 \times 1 = 0$ ។

ខ. $\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{2e^x - 1}{x^2 + x - 3}\right) = \lim_{x \to +\infty} \cdot \frac{e^x}{x^2} \times \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{2 - \frac{1}{e^x}}{1 + \frac{1}{x} - \frac{3}{x^2}}\right) = +\infty$ ។

គ. $\lim_{x \to -\infty} e^x(x^3 + 1) = \lim_{x \to -\infty} x^3 e^x + \lim_{x \to -\infty} e^x$

តាង $x = -X$ គេបាន : $\lim_{x \to -\infty} e^x(x^3 + 1) = \lim_{X \to +\infty} (-X)^3 e^{-X} = -\lim_{X \to +\infty} X^3 \, e^{-X} = 0$ ។

ប្រតិបត្តិ : គណនា

ក. $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{e^x - 1}$ ខ. $\lim_{x \to +\infty} (x - 2 + xe^x)$ គ. $\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{xe^x + 2}{x^2 - 1}\right)$ ។

5.3. លីមីតនៃអនុគមន៍លោការីតនេពែ

អនុគមន៍លោការីតគោល e ហៅថា ***អនុគមន៍លោការីតនេពែ*** $(y = \ln x, x > 0)$ ។

ឧទាហរណ៍ 1 : គេមានអនុគមន៍ $f(x) = \ln x$ និងតារាងតម្លៃលេខដូចខាងក្រោម :

x	20	40	60	80	100	…
$\ln x$	2.995	3.668	4.094	4.382	4.605	…

តារាងនេះគេសង្កេតឃើញថា បើ x យកតម្លៃវិជ្ជមានកាន់តែធំទៅៗគ្មានទីបញ្ចប់នោះ $\ln x$ មានតម្លៃកាន់តែធំទៅៗគ្មានទីបញ្ចប់ដែរ ។ គេថា $\ln x$ ខិតជិត $+\infty$ កាលណា x ខិតជិត $+\infty$ ។

គេកំណត់សរសេរ $\boxed{\lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty}$ ។ តាមរូបមន្តនេះ គេបាន $\boxed{\lim_{x \to 0^+} \ln x = -\infty}$

សម្រាយបញ្ជាក់ : បើ x ខិតជិត 0 $(x > 0)$; នោះ $\frac{1}{x}$ ខិតទៅរក $+\infty$ ។ គេតាង $X = \frac{1}{x}$

នោះ $x = \frac{1}{X}$ ។ គេបាន $\lim_{x \to 0} \ln x = \lim_{X \to +\infty} \ln \frac{1}{X} = -\lim_{X \to +\infty} \ln X = -\infty$ ។

លំហាត់គំរូ : គណនា

ក. $\lim_{x \to +\infty} (x^2 + 3 + \ln x)$ ខ. $\lim_{x \to 0^+} [\ln x\,(\ln x - 3)]$ ។

ចម្លើយ :

ក. $\lim_{x \to +\infty} (x^2 + 3 + \ln x) = \lim_{x \to +\infty} x^2 + \lim_{x \to +\infty} 3 + \lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$ ។

ខ. $\lim_{x \to 0^+} [\ln x(\ln x - 3)] = \lim_{x \to 0^+} \ln x \times \left(\lim_{x \to 0^+} \ln x - \lim_{x \to 0^+} 3 \right) = +\infty$ ។

ប្រតិបត្តិ : គណនា

ក. $\lim_{x \to +\infty} \ln(x + 5)$ ខ. $\lim_{x \to 0^+} (x + 2 - \ln x)$ ។

ឧទាហរណ៍ 2 : គេមានអនុគមន៍ $g(x) = \frac{\ln x}{x}$ និងតារាងតម្លៃលេខ :

x	10	20	30	40	50	……
$\frac{\ln x}{x}$	0.2302	0.1497	0.1133	0.09222	0.07824	……

តាមតារាងនេះ គេសង្កេតឃើញថា បើ x យកតម្លៃវិជ្ជមានកាន់តែធំទៅៗគ្មានទីបញ្ចប់នោះ $\frac{\ln x}{x}$ មានតម្លៃវិជ្ជមានកាន់តែតូចទៅៗ ហើយខិតទៅរកសូន្យ ។ បើ $x \to +\infty$ នោះ $\frac{\ln x}{x} \to 0$ ។

គេកំណត់សរសេរ $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0}$

តាមរូបមន្ត គេបាន $\boxed{\lim\limits_{x \to 0^+} x \ln x = 0}$ ។

សម្រាយបញ្ជាក់ : បើ x ខិតជិត 0 និង $x > 0$ នោះ $\frac{1}{x}$ ខិតទៅជិត $+\infty$ ។

គេតាង $x = \frac{1}{X}$ នោះ $X = \frac{1}{x}$ ហើយ $x \to 0$ នោះ $X \to +\infty$ ។

គេបាន $\lim\limits_{x \to 0} x \ln x = \lim\limits_{X \to +\infty} \frac{1}{X} \ln \frac{1}{X} = \lim\limits_{X \to +\infty} \left(\frac{-\ln X}{X} \right) = 0$ ។

ដូចនេះ $\lim\limits_{x \to 0} x \ln x = 0$ ។

ឧទាហរណ៍ 3 : គេមានអនុគមន៍ $g(x) = \frac{\ln x}{x^3}$ និងតារាងតម្លៃលេខ :

x	10	20	30	40	50	......
$\frac{\ln x}{x^3}$	2.3×10^{-3}	3.74×10^{-4}	1.25×10^{-4}	5.76×10^{-5}	3.12×10^{-5}	......

តាមតារាងនេះ គេសង្កេតឃើញថា បើ x យកតម្លៃកាន់តែធំទៅៗគ្មានទីបញ្ចប់នោះ $g(x)$ មានតម្លៃកាន់តែតូចទៅៗស្មើរតែសូន្យ ។ គេថា $\frac{\ln x}{x^3}$ ខិតជិតសូន្យ កាលណា x ខិតជិត $+\infty$ ។

ជាទូទៅ : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$ បើ $n \geq 0$ ។

វិបាក : $\boxed{\lim\limits_{x \to 0^+} x^n \ln x = 0}$ ។

សម្រាយបញ្ជាក់ : តាង $x = \frac{1}{X}$ នោះ $X = \frac{1}{x}$ ដែល $x \to 0^+$ នោះ $X \to +\infty$

គេបាន $x^n \ln x = \frac{1}{X^n} \ln \frac{1}{X}$ ឬ $x^n \ln x = -\frac{\ln X}{X^n}$

$$\lim_{x \to 0} x^n \ln x = -\lim_{X \to +\infty} \frac{\ln X}{X^n} = 0 \text{ ។}$$

ដូចនេះ $\lim\limits_{x \to 0} x^n \ln x = 0$ ។

លំហាត់គំរូ : គណនា :

ក. $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{\ln x}{x^2 - x} \right)$

ខ. $\lim\limits_{x \to +\infty} (x \ln x - x^2 + 5)$ ។

ចម្លើយ :

ក. $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln x}{x^2-x}\right)$

គេបាន $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln x}{x^2-x}\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}\times\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x-1}\right)$

ដោយ $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x} = 0$ និង $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x-1}\right) = 0$

ដូចនេះ $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^2-x} = 0$ ។

ខ. $\lim_{x\to+\infty}(x\ln x - x^2+5)$

គេតាង $f(x) = x\ln x - x^2 + 5$

គេបាន $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x^2\left(\frac{\ln x}{x} - 1 + \frac{5}{x^2}\right)$

$= \lim_{x\to+\infty} x^2 \times \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln x}{x} - 1 + \frac{5}{x^2}\right)$

ដោយ $\lim_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$ និង $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x} = 0$, $\lim_{x\to+\infty}\frac{5}{x^2} = 0$ នោះ

$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln x}{x} - 1 + \frac{5}{x^2}\right) = -1$ ។

ដូចនេះ $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ ។

ប្រតិបត្តិ : គណនា

ក. $\lim_{x\to1^-}[x\ln(4-3x-x^2)]$

ខ. $\lim_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$

គ. $\lim_{x\to-\infty}\ln(e^x+1)$

ឃ. $\lim_{x\to+\infty}\ln(\ln x)$ ។

មេរៀនសង្ខេប

1. លីមីតនៃអនុគមន៍ត្រង់ចំនួនកំណត់

- អនុគមន៍ f មានលីមីត L កាលណា x ខិតជិត a បើគ្រប់ចំនួន $\varepsilon > 0$ មានចំនួន $\delta > 0$ ដែល $0 < |x-a| < \delta$ នាំឱ្យ $|f(x)-L| < \varepsilon$ ។ គេសរសេរ : $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ ។
- គេថាអនុគមន៍ f ខិតជិត $+\infty$ (ឬ $-\infty$) កាលណា x ខិតជិត a បើចំពោះគ្រប់ចំនួន $M > 0$ គេមាន $\delta > 0$ ដែល $0 < |x-a| < \delta$ នាំឱ្យ $f(x) > M$ (ឬ $f(x) < -M$) ។ គេសរសេរ $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$ ឬ $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$ ។

2. លីមីតនៃអនុគមន៍ត្រង់អនន្ត

- អនុគមន៍ f មានលីមីត L កាលណា x ខិតជិត $+\infty$ (ឬ $-\infty$) បើចំពោះគ្រប់ចំនួន $\varepsilon > 0$ គេអាចរក $N > 0$ ដែល $x > N$ (ឬ $x < -N$) នាំឱ្យ $|f(x) - L| < \varepsilon$ ។ គេសរសេរ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = L$ ឬ $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = L$ ។
- អនុគមន៍ f មានលីមីត $+\infty$ កាលណា x ខិតជិត $+\infty$ បើចំពោះគ្រប់ចំនួន $M > 0$ គេមាន $N > 0$ ដែល $x > N$ នាំឱ្យ $f(x) > M$ គេសរសេរ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ ។
- អនុគមន៍ f មានលីមីត $+\infty$ កាលណា x ខិតជិត $-\infty$ បើចំពោះគ្រប់ចំនួន $M > 0$ គេមាន $N > 0$ ដែល $x < -N$ នាំឱ្យ $f(x) > M$ គេសរសេរ $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ ។

3. ប្រមាណវិធីលើលីមីត

បើ $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$, $\lim\limits_{x \to a} g(x) = M$ និង $\lim\limits_{x \to a} h(x) = N$ ហើយ L, M, N ជាចំនួនពិត ។ គេបាន :

- $\lim\limits_{x \to a} [f(x) \pm g(x)] = L \pm M$ ដែល (a អាចជាចំនួនកំណត់ ឬអនន្ត)
- $\lim\limits_{x \to a} [f(x) + g(x) - h(x)] = L + M - N$
- $\lim\limits_{x \to a} kf(x) = kL$, k ជាចំនួនថេរ
- $\lim\limits_{x \to a} [f(x) \cdot g(x) \cdot h(x)] = L \cdot M \cdot N$
- $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x \to a} f(x)}{\lim\limits_{x \to a} g(x)} = \dfrac{L}{M}$ ដែល $M \neq 0$, $g(a) \neq 0$
- $\lim\limits_{x \to a} [f(x)]^n = L^n$ ដែល n ជាចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីបវិជ្ជមាន ។

4. លីមីតនៃអនុគមន៍អសនិទាន

- $\lim_{x \to a} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{a}$ ចំពោះ $a \geq 0$ និង $n \in \mathbb{N}$
- $\lim_{x \to a} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{a}$ ចំពោះ $a < 0$ និង n ជាចំនួនគត់សេស
- $\lim_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \to a} f(x)} = \sqrt[n]{L} = L^{\frac{1}{n}}$ បើ $L > 0$ និង n ជាចំនួនគត់គូ ឬបើ $L \leq 0$ និង n ជាចំនួនគត់សេស ។

5. លីមីតនៃអនុគមន៍បណ្ដាក់

និយមន័យ : f និង g ជាអនុគមន៍ពីរ ។ អនុគមន៍បណ្ដាក់នៃអនុគមន៍ f និង g គឺជាអនុគមន៍ដែលកំណត់ដោយ $(g \circ f)(x) = g[f(x)]$ ។

លីមីត : បើ f និង g ជាអនុគមន៍ដែលមាន $\lim_{x \to a} g(x) = L$ និង $\lim_{x \to L} f(x) = f(L)$ នោះ $\lim_{x \to a} f[g(x)] = f(L)$ ។

6. លីមីតតាមការប្រៀបធៀប

- បើមានអនុគមន៍ f, g និងចំនួនពិត A ដែល $\lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$ និង $f(x) \geq g(x)$ ចំពោះគ្រប់ $x \geq A$ នោះ $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ ។
- បើមានអនុគមន៍ f, g និងចំនួនពិត A ដែល $\lim_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$ និង $f(x) \leq g(x)$ ចំពោះគ្រប់ $x \geq A$ នោះ $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ ។
- បើមានអនុគមន៍ f, g, h និងចំនួនពិត A ដែល $\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} h(x) = \lambda$ និង $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ ចំពោះគ្រប់ $x \geq A$ នោះ $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lambda$ ។
- បើមានអនុគមន៍ f និង g និងចំនួនពិត A ដែល $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lambda'$ និង $f(x) \leq g(x)$ ចំពោះគ្រប់ $x \geq A$ នោះ $\lambda \leq \lambda'$ ។

7. លីមីតមានរាងមិនកំណត់

- ***លីមីតដែលមានរាងមិនកំណត់ $\frac{0}{0}$***

  វិធាន : ដើម្បីគណនាលីមីតដែលមានរាងមិនកំណត់ $\frac{0}{0}$ គេត្រូវបំបែកភាគយកនិងភាគបែងជាផលគុណកត្តា ហើយសម្រួលកត្តារួម រួចគណនាលីមីតនៃកន្សោមថ្មី ។

- ***លីមីតដែលមានរាងមិនកំណត់*** $\frac{\infty}{\infty}$

វិធាន : ដើម្បីគណនាលីមីតដែលមានរាងមិនកំណត់ $\frac{\infty}{\infty}$ គេត្រូវដាក់តួដែលមានដឺក្រេធំជាងគេនៅភាគយកនិងភាគបែងជាកត្តារួម ហើយសម្រួលកត្តារួមចោល រួចគណនាលីមីតនៃប្រភាគថ្មី ។

- ***លីមីតដែលមានរាងមិនកំណត់*** $+\infty-\infty$

វិធាន : ដើម្បីគណនាលីមីតដែលមានរាងមិនកំណត់ $+\infty-\infty$ គេត្រូវដាក់តួដែលមានដឺក្រេធំជាងជាកត្តារួម ហើយគណនាលីមីតនៃកន្សោមថ្មី ។

8. លីមីតនៃអនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រ

បើ a ជាចំនួនពិតស្ថិតក្នុងដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រដែលឱ្យ គេបាន៖

$\lim\limits_{x\to a}\sin x = \sin a$, $\lim\limits_{x\to a}\cos x = \cos a$, $\lim\limits_{x\to a}\tan x = \tan a$ ។

វិធាន : បើ x ជារង្វាស់មុំ ឬធ្នូគិតជារ៉ាដ្យង់នោះគេបាន : $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$ និង $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x} = 0$ ។

9. លីមីតនៃអនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែល

$$\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$$

បើ $n>0$ នោះ $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^n} = +\infty$ និង $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^n}{e^x} = 0$ ។

10. លីមីតនៃអនុគមន៍លោការីតនេពែ

$$\lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$$

$$\lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

$$\lim_{x\to 0} x\ln x = 0$$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^n} = 0$ បើ $n\geq 0$, $\lim\limits_{x\to 0^+} x^n\ln x = 0$ ។

លំហាត់

1. ស្រាយបញ្ជាក់ថា លីមីតខាងក្រោមនេះពិតដោយប្រើនិយមន័យ :

ក. $\lim\limits_{x \to 3}(5x-2) = 13$

ខ. $\lim\limits_{x \to 2^-}\sqrt{(x-2)(x-3)} = 0$

គ. $\lim\limits_{x \to x_0}(ax+b) = ax_0+b$ ។

2. បើ $\lim\limits_{x \to a} f(x) = M$ និង $\lim\limits_{x \to a} g(x) = L$ ដែល M និង L ជាចំនួនថេរនោះ ចូរបង្ហាញថា :

ក. $\lim\limits_{x \to a} kf(x) = kM$

ខ. $\lim\limits_{x \to a}[f(x) \pm g(x)] = M \pm L$ ។

3. គណនាលីមីតខាងក្រោម :

ក. $\lim\limits_{x \to 0}\dfrac{\sqrt{x^2-x+1}-1}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}$

ខ. $\lim\limits_{x \to +\infty}\dfrac{(x-1)(2x+3)(2-x)}{(x^2+1)(2x+1)}$

គ. $\lim\limits_{x \to 0^-}\dfrac{x^2+x}{|x|}$

ឃ. $\lim\limits_{x \to -\infty}\left(\sqrt{x^2+8x-1}-\sqrt{x^2-3}\right)$ ។

4. កំណត់តម្លៃនៃចំនួនថេរ a ដើម្បីឱ្យលីមីតខាងក្រោមជាលីមីតនៃចំនួនថេរ ហើយកំណត់លីមីតនេះផង ។

ក. $\lim\limits_{x \to 1}\dfrac{\sqrt{x+3}-a}{x-1}$

ខ. $\lim\limits_{x \to 0}\dfrac{\sqrt{1+3x}+a}{x}$

គ. $\lim\limits_{x \to 2}\dfrac{\sqrt{x+a}-1}{x-2}$

ឃ. $\lim\limits_{x \to -1}\dfrac{\sqrt{x^2+ax}-1}{x^2-1}$ ។

5. គណនាលីមីតខាងក្រោម :

ក. $\lim\limits_{x \to 0}\dfrac{x\sin 3x}{\sin^2 5x}$

ខ. $\lim\limits_{x \to 0}\dfrac{(1-\cos x)^2}{\tan^3 x-\sin^3 x}$

គ. $\lim\limits_{x \to 0}\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{1+\cos x}}{\sin^2 x}$

ឃ. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}}\dfrac{1-\sin x}{\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^2}$

ង. $\lim\limits_{x \to \pm\infty} x\sin\dfrac{1}{x}$

ច. $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2\left(1-\cos\dfrac{1}{x}\right)$ ។

6. គណនាលីមីតខាងក្រោម ៖

ក. $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(x^2+xe^x)$

ខ. $\lim\limits_{x\to+\infty}(1-x)e^x$

គ. $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+2)e^{-x}$

ឃ. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x-x}{2e^x+1}$

ង. $\lim\limits_{x\to0}\ln\left(\dfrac{x}{x+1}\right)$

ច. $\lim\limits_{x\to\pm\infty}x\ln(x^2+1)$

ឆ. $\lim\limits_{x\to-4}x\ln(4-3x-x^2)$

ជ. $\lim\limits_{x\to+\infty}\{x[\ln((x+1)-\ln x)]\}$ ។

7. គណនាលីមីតខាងក្រោម ៖

ក. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}$

ខ. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1+\sin x-\cos x}{1-\sin x-\cos x}$

គ. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x\sqrt{\cos 2x}}{x^2}$

ឃ. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x\cdot\cos 2x}{x^2}$

8. គណនាលីមីតខាងក្រោម ៖

ក. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\dfrac{2\sin^2x-3\sin x+1}{4\sin^2x-1}$

ខ. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1+x\sin x-\cos 2x}{\sin^2x}$

គ. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x(a-b)}{\sin ax-\sin bx}$ $(a\neq0,\ b\neq0, a\neq b)$

ឃ. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin^2x}{\sqrt{1+x\sin x}-\cos x}$

ង. $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+3x}-\sqrt{x^2+1}-1)$

ច. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 3x}{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}$ ។

9. កំណត់អនុគមន៍ដឺក្រេទី 2 $y=f(x)$ ដែលបំពេញលក្ខខណ្ឌលីមីតទាំងពីរខាងក្រោម ៖

ក. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x^2-1}=1$

ខ. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)}{x^2-1}=-1$

10. គេមានពហុកោណចារឹកក្នុងរង្វង់ដែលមាន n ជ្រុង និងកាំស្មើនឹង a ។ តាង S_n ជាផ្ទៃក្រឡានៃពហុកោណនេះ ។ គណនា S_n រួចកំណត់រកតម្លៃ $\lim\limits_{x\to+\infty}S_n$ ។

មេរៀនទី

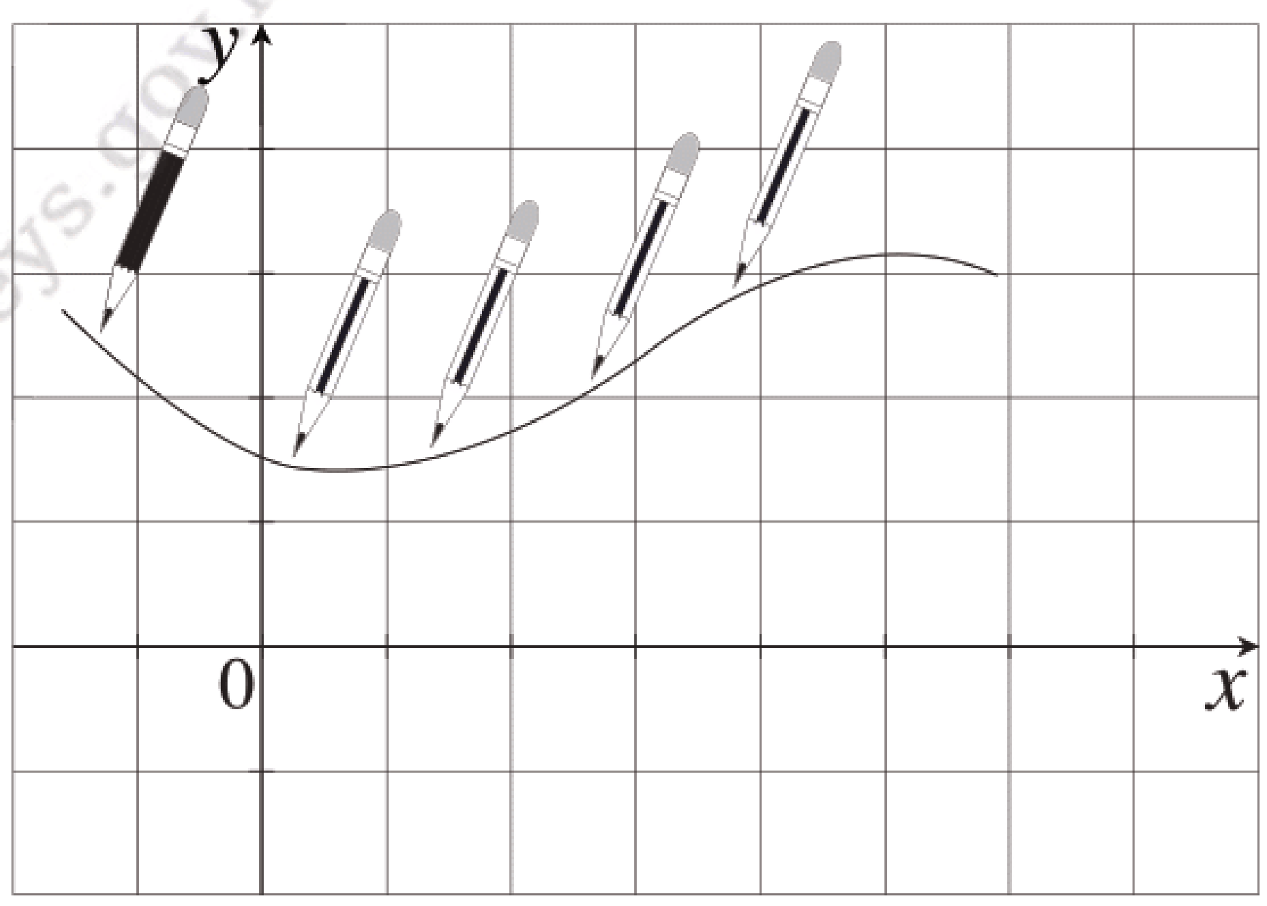
2 ភាពជាប់នៃអនុគមន៍

វត្ថុបំណង

- កំណត់និយមន័យអនុគមន៍ជាប់ត្រង់ចំណុចមួយនិងជាប់លើចន្លោះមួយ
- បង្ហាញលក្ខណៈនៃអនុគមន៍ជាប់
- អនុវត្តទ្រឹស្តីបទតម្លៃកណ្តាលក្នុងការរកឫសនៃសមីការ ។

1. សញ្ញាណនៃអនុគមន៍ជាប់

កាលណាគេគូសក្រាបនៃអនុគមន៍ $y = f(x)$ លើចន្លោះ I មួយនៃដែនកំណត់ ដោយមិនលើកខ្មៅដៃនោះគេបានគំនូសមួយដែលជាខ្សែជាប់ ដូចរូបខាងស្តាំ ។



គេថាអនុគមន៍ f ជាអនុគមន៍ជាប់ត្រង់គ្រប់ចំណុចនៃចន្លោះ I ។

2. ភាពជាប់ត្រង់មួយចំណុច

ឧទាហរណ៍ : គេមានអនុគមន៍ $y = f(x) = \begin{cases} x^2+7 & x \geq 0 \\ x+7 & x < 0 \end{cases}$ ។

គេបាន $f(0) = 0^2 + 7 = 7$

- $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} (x^2+7) = 0^2 + 7 = 7$
- $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} (x+7) = 0+7 = 7$

ដោយ $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = 7 = f(0)$

ដូចនេះ $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 7 = f(0)$ ។ គេថា f ជាអនុគមន៍ជាប់ត្រង់ $x = 0$ ។

និយមន័យ : អនុគមន៍ $y = f(x)$ ជាប់ត្រង់ចំណុច $x = c$ កាលណា f បំពេញលក្ខខណ្ឌទាំងបីដូចខាងក្រោម :

1. f កំណត់ចំពោះ $x = c$
2. f មានលីមីតកាលណា $x \to c$
3. $\lim\limits_{x \to c} f(x) = f(c)$ ។

សម្គាល់ : បើអនុគមន៍ $y = f(x)$ មិនជាប់ត្រង់ចំណុច $x = c$ គេថា f ជាអនុគមន៍ដាច់ត្រង់ $x = c$ ។

លំហាត់គំរូ 1 :

ក. អនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x) = x^2 - 4$ ។ តើ f ជាអនុគមន៍ជាប់ត្រង់ $x = 2$ ឬទេ ?

ខ. អនុគមន៍ g កំណត់ដោយ $g(x) = \begin{cases} -1 & \text{បើ } x < 0 \\ 1 & \text{បើ } x > 0 \end{cases}$ ។ តើ g ជាអនុគមន៍ជាប់ត្រង់ $x = 0$ ឬទេ ?

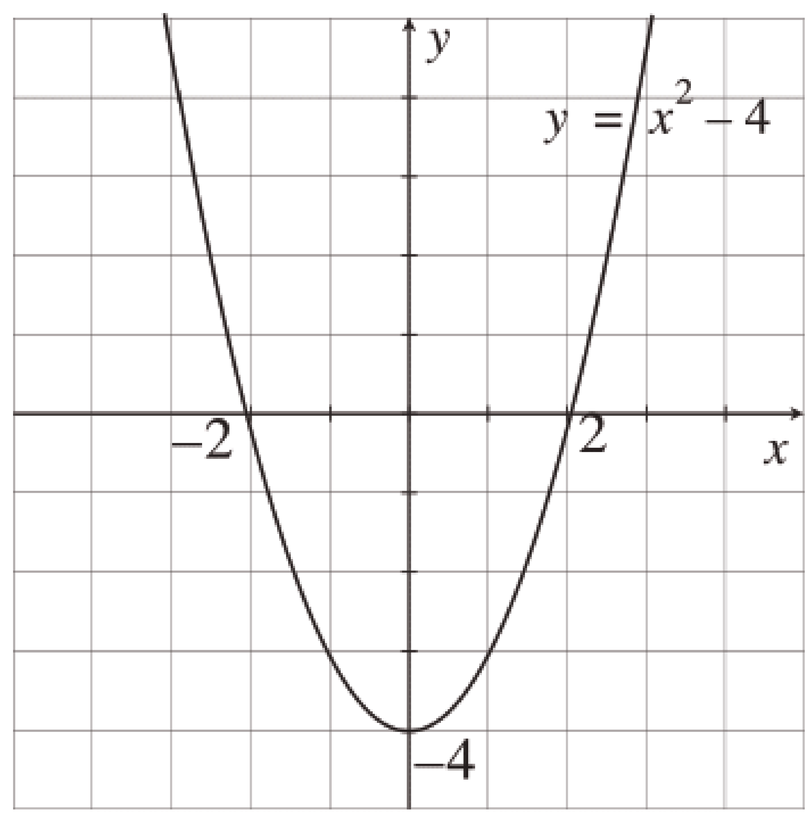
ចម្លើយ :

ក. ត្រង់ $x = 2$ នាំឱ្យ $f(x) = 2^2 - 4 = 0$

ហើយ $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = \lim\limits_{x \to 2} (x^2 - 4) = 0$

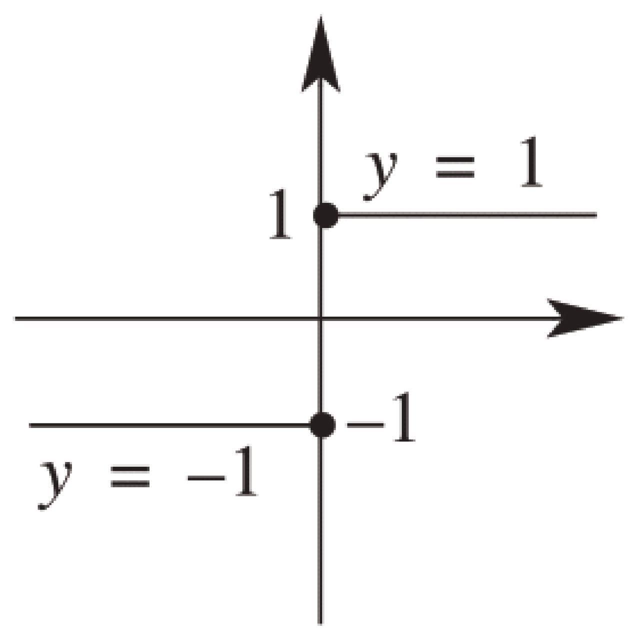
គេបាន $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = f(2) = 0$ ។

ដូចនេះ អនុគមន៍ f ជាប់ត្រង់ $x = 2$ ។



ខ. $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -1$ និង $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 1$

លីមីតឆ្វេងមិនស្មើលីមីតស្តាំ អនុគមន៍ f គ្មានលីមីតត្រង់ $x = 0$ ទេ ។ ដូចនេះអនុគមន៍ f ដាច់ត្រង់ $x = 0$ ។



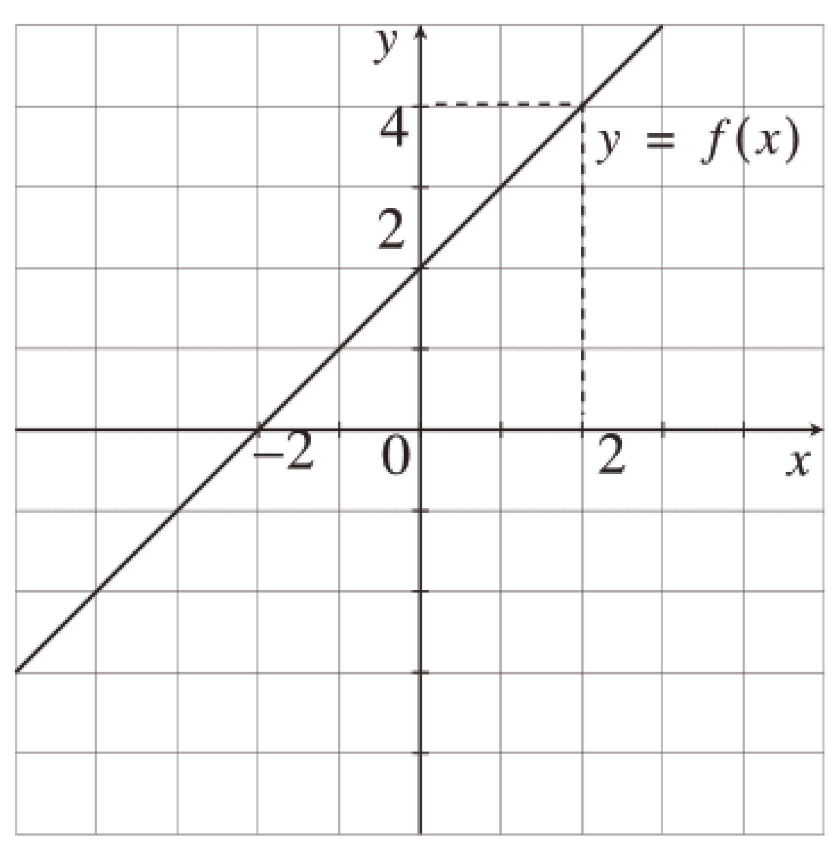
លំហាត់គំរូ 2 : គេមានអនុគមន៍ $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2} & \text{បើ } x \neq 2 \\ 4 & \text{បើ } x = 2 \end{cases}$ ។

បង្ហាញថា f ជាអនុគមន៍ជាប់ត្រង់ $x = 2$ ។

ចម្លើយ : f កំណត់ត្រង់ $x = 2$ ហើយ $f(2) = 4$ ។

$\lim\limits_{x \to 2} f(x) = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim\limits_{x \to 2} (x + 2) = 4 = f(2)$ ។

ដូចនេះ f ជាអនុគមន៍ជាប់ត្រង់ 2 ។



ប្រតិបត្តិ **:**

ក. សង់ក្រាបនៃ $f(x) = \begin{cases} 3+x & \text{បើ } x \le 1 \\ 3-x & \text{បើ } 1 < x \end{cases}$ ។ សិក្សាភាពជាប់នៃ f នៅត្រង់ $x = 1$ ។

ខ. សង់ក្រាបនៃ $g(x) = \begin{cases} \sin x & \text{បើ } x \ge 0 \\ \frac{1}{2}x^2 + x & \text{បើ } x < 0 \end{cases}$ ។ តើ g ជាប់នៅត្រង់ $x = 0$ ឬទេ ?

3. លក្ខណៈនៃអនុគមន៍ជាប់

ផ្អែកតាមលក្ខណៈនៃលីមីតនិងនិយមន័យភាពជាប់ គេបានលក្ខណៈនៃអនុគមន៍ជាប់ដូចខាងក្រោម :

បើអនុគមន៍ f និង g ជាប់ត្រង់ $x = c$ នោះគេបាន :

1. $f(x)+g(x)$ ជាអនុគមន៍ជាប់ត្រង់ $x = c$
2. $f(x)-g(x)$ ជាអនុគមន៍ជាប់ត្រង់ $x = c$
3. $f(x)\cdot g(x)$ ជាអនុគមន៍ជាប់ត្រង់ $x = c$
4. $kf(x)$ ជាអនុគមន៍ជាប់ត្រង់ $x = c$ (ដែល k ជាចំនួនថេរ)
5. $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ ជាប់ត្រង់ $x = c$ ដែល $g(c) \ne 0$ ។

ដោយប្រើលក្ខណៈនៃលីមីតនិងលក្ខណៈនៃអនុគមន៍ជាប់គេបាន :

- អនុគមន៍លីនេអ៊ែ ជាអនុគមន៍ជាប់ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត ។
- អនុគមន៍ពហុធា P ដែលមានដឺក្រេ n : $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_n$ ដែល $a_1,\ a_2,\ a_3,\ldots,\ a_n$ ជាចំនួនថេរនិង $a_0 \ne 0$ ជាអនុគមន៍ជាប់គ្រប់តម្លៃ x ។ តាមទ្រឹស្តីបទនៃលីមីតពហុធាបង្ហាញថា បើ c ជាចំនួនពិត ។ គេបាន :

  $\lim\limits_{x \to c} P(x) = a_0c^n + a_1c^{n-1} + a_2c^{n-2} + \ldots + a_n = P(c)$

  ដូចនេះ $\lim\limits_{x \to c} P(x) = P(c)$ នាំឱ្យអនុគមន៍ពហុធាជាអនុគមន៍ជាប់គ្រប់តម្លៃ x ។
- អនុគមន៍សនិទាន $R(x) = \dfrac{P(x)}{q(x)}$; $q(x) \ne 0$ ។

  ដោយ p និង q ជាអនុគមន៍ពហុធាជាប់ត្រង់ c ដូចនេះ $\lim\limits_{x \to c} p(x) = p(c)$ និង

  $\lim\limits_{x \to c} q(x) = q(c)$

  គេបាន $\lim\limits_{x \to c} R(x) = \dfrac{p(c)}{q(c)}$ ។ ដូចនេះ អនុគមន៍សនិទានជាប់គ្រប់តម្លៃ x ដែល $q(x) \ne 0$ ។
- អនុគមន៍រ៉ាឌីកាល់ $f(x) = \sqrt[n]{x}$ ជាអនុគមន៍ជាប់គ្រប់តម្លៃ x ក្នុងដែនកំណត់ ។

- អនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រ $y = \sin x$, $y = \cos x$ ជាអនុគមន៍ជាប់ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត ។
- អនុគមន៍ $y = \tan x$ ជាអនុគមន៍ជាប់ចំពោះគ្រប់ $x \in \mathbb{R}$ និង $x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$ ។
- អនុគមន៍ $y = \cot x$ ជាអនុគមន៍ជាប់ចំពោះគ្រប់ $x \in \mathbb{R}$ និង $x \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ ។

លំហាត់គំរូ 1 : រកតម្លៃនៃ x ដែលនាំឱ្យអនុគមន៍ខាងក្រោម ជាអនុគមន៍ជាប់ :

ក. $f(x) = x^{14} + 20x^4$ ខ. $g(x) = (7x^2+8)(3-x)$ គ. $h(x) = \dfrac{x+3}{x^2-3x-10}$

ចម្លើយ :

ក. ដោយ x^{14} និង $20x^4$ ជាប់គ្រប់តម្លៃ x នោះតាមលក្ខណៈ1

គេបាន $f(x) = x^{14} + 20x^4$ ជាប់គ្រប់តម្លៃ x ។

ខ. ដោយ $(7x^2+8)$ និង $(3-x)$ ជាអនុគមន៍ពហុធាជាប់គ្រប់តម្លៃ x នោះ តាមលក្ខណៈ 3

គេបាន $g(x) = (7x^2+8)(3-x)$ ជាប់គ្រប់តម្លៃ x ។

គ. គេបាន $h(x) = \dfrac{x+3}{x^2-3x-10} = \dfrac{x+3}{(x-5)(x+2)}$ ជាអនុគមន៍សនិទាន ។ តាមលក្ខណៈ 5

អនុគមន៍ h ជាប់គ្រប់តម្លៃ x លើកលែងតែ $x = 5$ និង $x = -2$ ។

លំហាត់គំរូ 2 : បង្ហាញថា $y = f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & \text{បើ } x \neq 0 \\ 1 & \text{បើ } x = 0 \end{cases}$ ជាអនុគមន៍ជាប់ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត ។

ចម្លើយ : ដោយ $y = \sin x$ និង $y = x$ ជាអនុគមន៍ជាប់ចំពោះគ្រប់ $x \in \mathbb{R}$ នោះគេបាន $y = \dfrac{\sin x}{x}$ ជាអនុគមន៍ជាប់ចំពោះ $x \neq 0$ ។

គេមាន $f(0) = 1$ និង $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1 = f(0)$ ។ ដូចនេះ អនុគមន៍ f ជាប់ត្រង់ $x = 0$ នាំឱ្យអនុគមន៍ f ជាប់ ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត ។

លំហាត់គំរូ 3 : រកតម្លៃ a ដែលធ្វើឱ្យអនុគមន៍ $f(x) = \begin{cases} 3x-a & \text{បើ } x \leq 1 \\ \dfrac{x^2-3x+2}{x-1} & \text{បើ } x > 1 \end{cases}$ ជាប់ត្រង់ $x = 1$ ។

បើ $f(x)$ ជាអនុគមន៍ជាប់ត្រង់ $x = 1$ នោះ $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$ ។

គេបាន $\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{x^2-3x+2}{x-1} = \lim\limits_{x \to 1^-} (3x-a) = 3(1)-a = 3-a$

ដូចនេះ $3-a = \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{x^2-3x+2}{x-1} = \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{(x-2)(x-1)}{x-1} = \lim\limits_{x \to 1^+} (x-2) = 1-2 = -1$

$3-a = -1$ នាំឱ្យ $a = 4$ ។

ប្រតិបត្តិ1 : បង្ហាញថាអនុគមន៍ខាងក្រោម ជាអនុគមន៍ជាប់ចំពោះគ្រប់ x នៃដែនកំណត់របស់វា ។

ក. $f(x) = x^4\left(x+\frac{1}{3}\right)^2$ ខ. $g(x) = \frac{x^2+7x-11}{x^3+6x^2+5x-12}$ ។

ប្រតិបត្តិ2 : កំណត់តម្លៃ a ដែលនាំឱ្យអនុគមន៍ខាងក្រោមជាប់ត្រង់ $x = 0$ ។

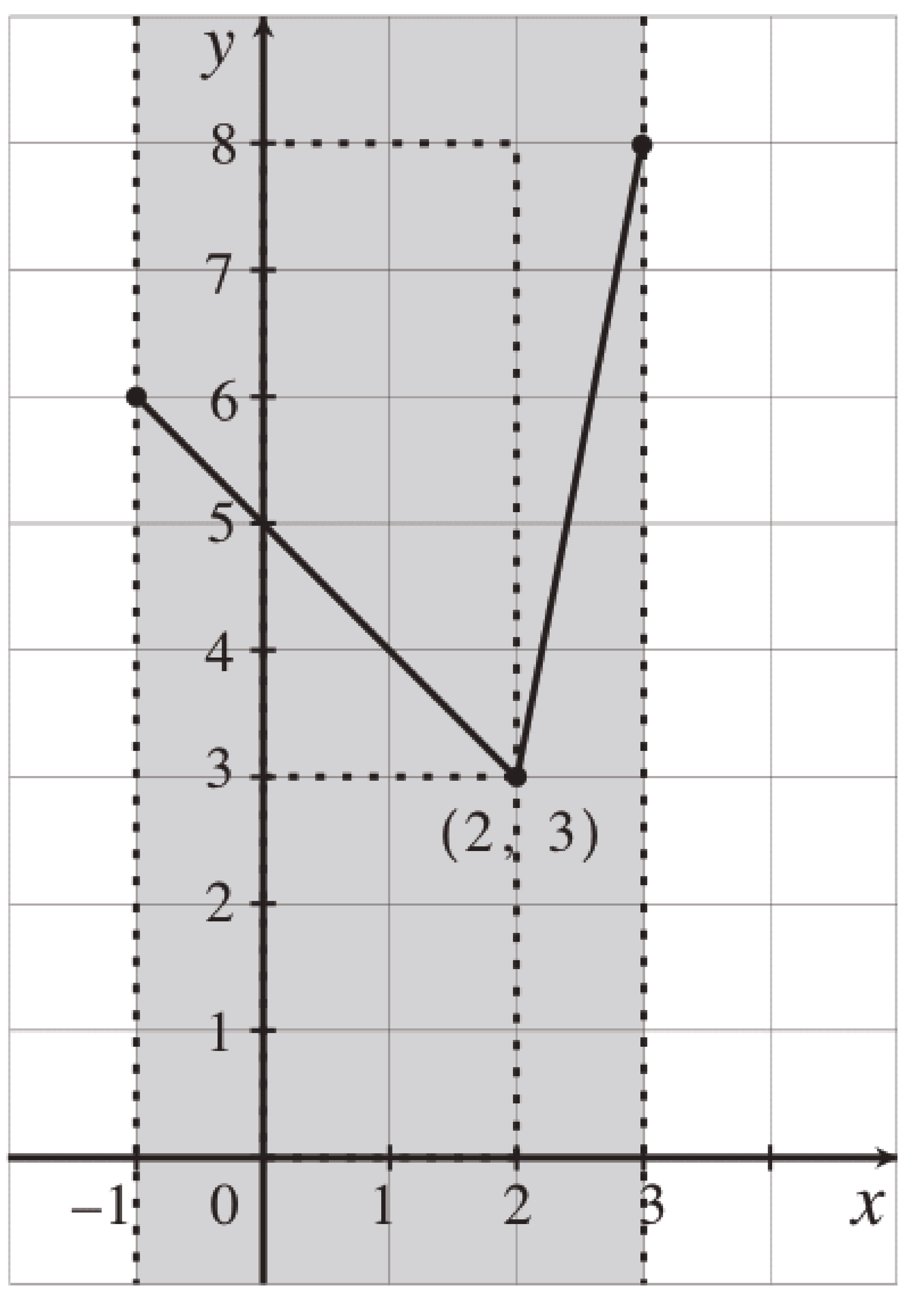
$f(x) = \begin{cases} -x+a & \text{បើ } x<0 \\ x^2-1 & \text{បើ } x \geq 0 \end{cases}$ ។

4. ភាពជាប់លើចន្លោះ

ឧទាហរណ៍ 1 : គេមានអនុគមន៍ $f(x) = \frac{2}{x+5}$ ។ អនុគមន៍ f កំណត់កាលណា $x \neq -5$ ។ ដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ f គឺ $D = (-\infty, -5) \cup (-5, +\infty)$ ។ f ជាអនុគមន៍សនិទាន f ជាប់គ្រប់តម្លៃ $x \in (-\infty, -5)$ និងគ្រប់ $x \in (-5, +\infty)$ ។ គេថាអនុគមន៍ f ជាប់លើចន្លោះបើក $(-\infty, -5)$ និងជាប់លើចន្លោះបើក $(-5, +\infty)$ ។

ឧទាហរណ៍ 2 : សិក្សាភាពជាប់នៃអនុគមន៍ $g(x) = \begin{cases} 5-x & \text{បើ } -1 \leq x \leq 2 \\ x^2-1 & \text{បើ } 2 < x \leq 3 \end{cases}$ ។

គេមាន $5-x$ និង x^2-1 ជាអនុគមន៍ពហុធា ។



តាមលក្ខណៈខាងលើ $y = 5-x$ ជាប់គ្រប់ $x \in (-1, 2)$ ហើយ $y = x^2-1$ ជាប់គ្រប់ $x \in (2, 3)$ ។

$$\lim_{x \to 2^-} g(x) = \lim_{x \to 2^-} (5-x) = 3$$

និង $\lim_{x \to 2^+} g(x) = \lim_{x \to 2^+} (x^2-1) = 3$

លីមីតទាំងពីរស្មើគ្នា ហើយ $\lim_{x \to 2} g(x) = g(2) = 3$ ។

ដូចនេះ g ជាអនុគមន៍ជាប់ត្រង់ $x = 2$ ។ គេថា g ជាប់លើចន្លោះបើក $(-1, 3)$ ហើយមាន

$\lim_{x \to -1^+} g(x) = \lim_{x \to -1^+} (5-x) = g(-1) = 6$ និង

$\lim_{x \to 3^-} g(x) = \lim_{x \to 3^-} (x^2-1) = g(3) = 8$ គេថា g ជាប់លើចន្លោះបិទ $[-1, 3]$ ។

និយមន័យ :

- អនុគមន៍ f ជាប់លើចន្លោះបើក $(a,\ b)$ លុះត្រាតែ f ជាប់ចំពោះគ្រប់តម្លៃ x នៃចន្លោះបើកនោះ ។

- អនុគមន៍ f ជាប់លើចន្លោះបិទ $[a,\ b]$ លុះត្រាតែ f ជាប់លើចន្លោះបើក $(a,\ b)$ និងមានលីមីត $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = f(a)$ និង $\lim\limits_{x \to b^-} f(x) = f(b)$ ។

(អនុគមន៍ f ជាប់ត្រង់ a ខាងស្តាំ ជាប់ត្រង់ b ខាងឆ្វេង)

លំហាត់គំរូ 1 : សិក្សាភាពជាប់នៃអនុគមន៍ $f(x) = \dfrac{x+2}{x-3}$ លើចន្លោះ $(-2,\ 3)$ និង $[-2,\ 3]$ ។

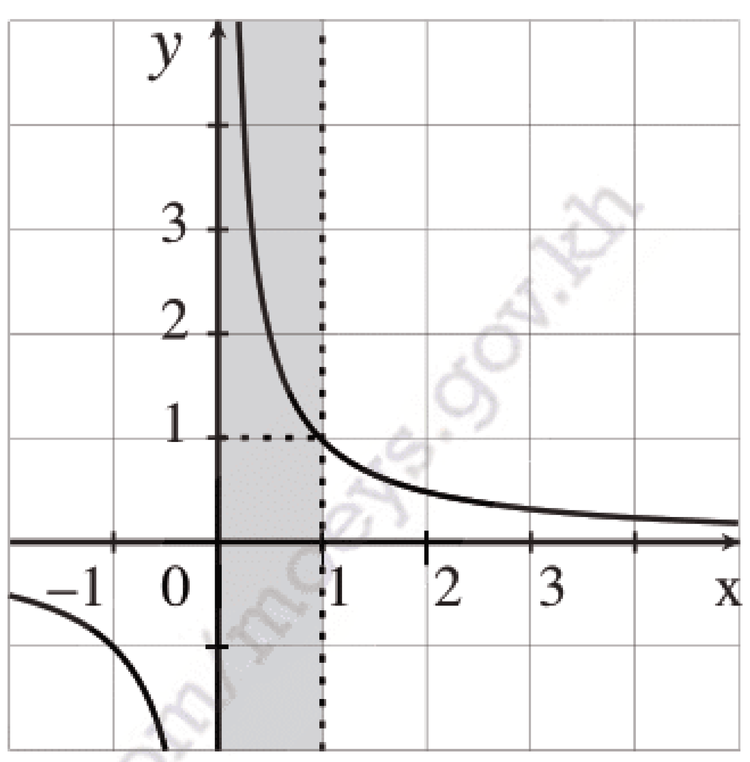
ចម្លើយ : គេបានអនុគមន៍ $f(x) = \dfrac{x+2}{x-3}$ ជាអនុគមន៍សនិទាន នាំឱ្យ $f(x)$ ជាប់គ្រប់តម្លៃ x លើកលែងតែ $x = 3$ ។

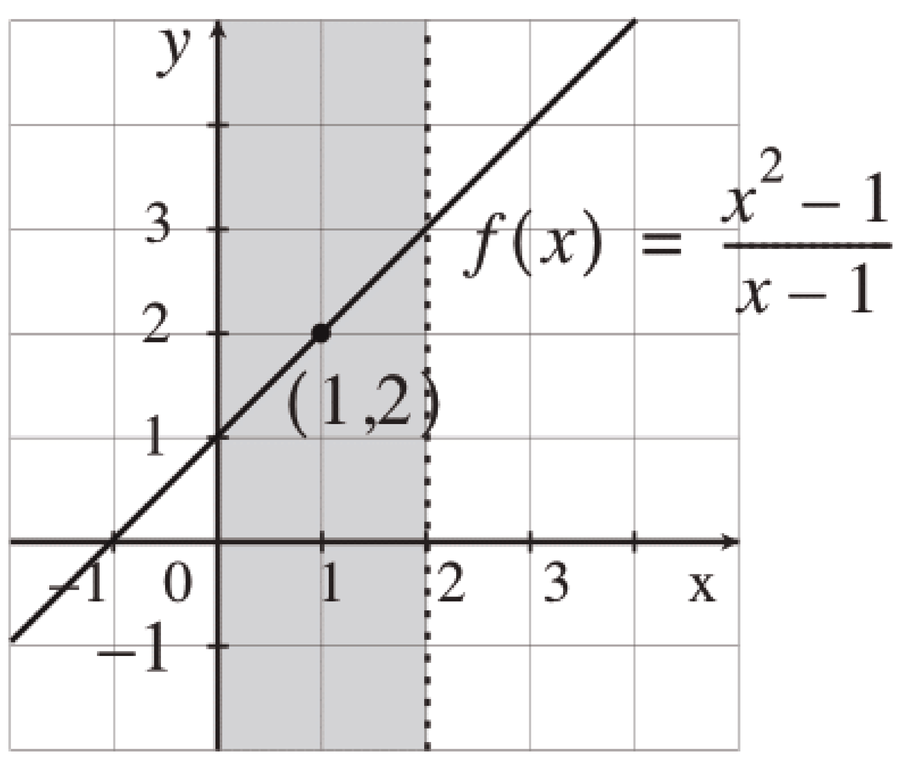
ដូចនេះ គេថាអនុគមន៍ f ជាប់លើចន្លោះបើក $(-2,\ 3)$ ប៉ុន្តែមិនជាប់លើចន្លោះបិទ $[-2,\ 3]$ ទេ ព្រោះអនុគមន៍មិនកំណត់ត្រង់ $x = 3$ ។

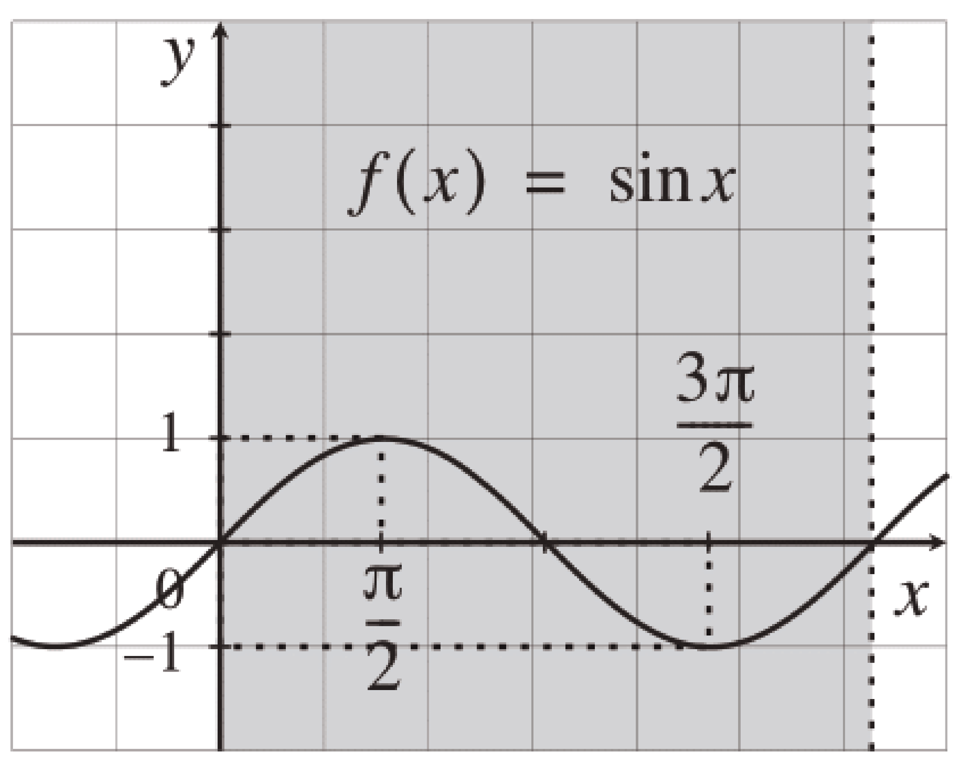
លំហាត់គំរូ 2 : សង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ទាំងបីខាងក្រោម រួចបញ្ជាក់ភាពជាប់លើចន្លោះដែលឱ្យ ។

ក. $f(x) = \dfrac{1}{x}$; $(0,\ 1)$ ខ. $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x-1}$; $(0,\ 2)$ គ. $f(x) = \sin x$; $[0,\ 2\pi]$

ចម្លើយ :







ក. ដោយ f ជាអនុគមន៍សនិទាន មានភាគបែងខុសពី 0 ក្នុងចន្លោះបើក $(0,1)$ ដូចនេះអនុគមន៍ f ជាប់លើចន្លោះ $(0,\ 1)$ ។

ខ. ដោយ f មិនកំណត់ត្រង់ $x = 1$ នោះអនុគមន៍ f មិនជាប់ត្រង់ $x = 1$ ។ ដូចនេះអនុគមន៍មិនជាប់ចំពោះគ្រប់តម្លៃ x ក្នុងចន្លោះ $(0,\ 2)$ ។

គ. ដោយអនុគមន៍ $y = \sin x$ កំណត់ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិតនោះ តាមលក្ខណៈនៃភាពជាប់គេថា អនុគមន៍ f ជាប់លើចន្លោះ $(0,\ 2\pi)$ ។

ម្យ៉ាងទៀត $\lim\limits_{x\to 0^+} \sin x = \sin 0 = f(0) = 0$ និង $\lim\limits_{x\to(2\pi)} \sin x = \sin 2\pi = 0 = f(2\pi)$ ។

ដូចនេះ f ជាប់លើចន្លោះ $[0,\ 2\pi]$ ។

ប្រតិបត្តិ **:** គេមានអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x) = \sqrt{\dfrac{2-x}{3+x}}$ ។ តើ f ជាអនុគមន៍ជាប់លើចន្លោះ$(-3,\ 2)$, $(-3,\ 2]$ ឬទេ ?

5. ភាពជាប់នៃអនុគមន៍បណ្តាក់

ឧទាហរណ៍ : គេមាន $h(x) = \cos\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)$ ។ តាង $f(x) = \cos x$ និង $g(x) = x+\dfrac{\pi}{3}$ ។ g ជាអនុគមន៍ជាប់ត្រង់ $x = 0$ ។ f ជាអនុគមន៍ជាប់ត្រង់ $g(0) = \dfrac{\pi}{3}$ ។ ដូចនេះ $h = fog$ ជាប់ត្រង់ $x = 0$ ។

ជាទូទៅ **:** បើអនុគមន៍ g ជាប់ត្រង់ c និងអនុគមន៍ f ជាប់ត្រង់ $g(c)$ នោះអនុគមន៍បណ្តាក់ $(fog)(x) = f[g(x)]$ ជាប់ត្រង់ c ។

លំហាត់គំរូ 1 : សិក្សាភាពជាប់នៃអនុគមន៍ $h(x) = \left|\dfrac{x\sin x}{x^2+2}\right|$ ត្រង់ $x = 0$ ។

ចម្លើយ : តាង $f(x) = \dfrac{x\sin x}{x^2+2}$ ជាអនុគមន៍សនិទានជាប់ត្រង់ $x = 0$ ហើយនិង $g(x) = |x|$ ជាប់ត្រង់ $x = 0$ នាំឱ្យអនុគមន៍ $h = (g\circ f)(x)$ ជាប់ត្រង់ $x = 0$ ។

លំហាត់គំរូ 2 : គេមាន $f(x) = \sqrt{\dfrac{x+4}{x-4}}$ ។ តើអនុគមន៍ f ជាប់នៅលើចន្លោះណាខ្លះ ?

តាង $g(x) = \sqrt{x}$ មានន័យចំពោះ $x \geq 0$ និង $h(x) = \dfrac{x+4}{x-4}$ ជាប់លើចន្លោះ $(-\infty,\ 4)\cup(4,\ +\infty)$ ។ បើ $g(x) = \sqrt{x}$ ជាប់ចំពោះគ្រប់ $x > 0$ នោះនាំឱ្យ $f(x)$ ជាប់ចំពោះ $x\in(-\infty,\ -4)\cup(4,\ +\infty)$ ។

ម្យ៉ាងទៀត $\lim\limits_{x\to 4}\sqrt{\dfrac{x+4}{x-4}} = 0 = f(-4)$ នាំឱ្យអនុគមន៍ f ជាប់នៅលើចន្លោះ $x\in(-\infty,\ -4)\cup(4,\ +\infty)$ ។

ប្រតិបត្តិ **:** កំណត់តម្លៃ x ដែលធ្វើឱ្យអនុគមន៍ខាងក្រោមជាអនុគមន៍ជាប់

ក. $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ ខ. $g(x) = |x^2-1|$ គ. $f(x) = \sqrt{\dfrac{2x}{x-2}}$ ។

6. អនុវត្តន៍ : អនុគមន៍បន្លាយតាមភាពជាប់

ឧទាហរណ៍ 1 **:** គេមានអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x-1}$ ។ តើ f ជាអនុគមន៍ជាប់ត្រង់ $x = 1$ ឬទេ ?

គេសង្កេតឃើញថា $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x+1)(x-1)}{x-1}$

$= \lim\limits_{x\to 1}(x+1) = 2$

ប៉ុន្តែ f មិនកំណត់ត្រង់ $x = 1$ ទេ នាំឱ្យអនុគមន៍ f មិនជាប់ត្រង់ $x = 1$ ទេ ។

ដូចនេះ បើគេយក g ជាអនុគមន៍កំណត់ដោយ $g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x-1} & \text{បើ } x \neq 1 \\ 2 & \text{បើ } x = 1 \end{cases}$ ។

គេថា g ជាបន្លាយនៃអនុគមន៍ f តាមភាពជាប់ត្រង់ 1 ។

ឧទាហរណ៍ 2 **:** គេមានអនុគមន៍ $f(x) = \dfrac{1-\cos x}{x^2}$ ។ តើ f អាចមានអនុគមន៍បន្លាយតាមភាពជាប់ត្រង់ 0 ឬទេ ?

អនុគមន៍ f មានន័យកាលណា $x^2 \neq 0 \;\Leftrightarrow\; x \neq 0$ ។ ដែនកំណត់នៃ f គឺ $D = R - \{0\}$ ។

គេបាន $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2} = \dfrac{2}{4}\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)\left(\dfrac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right) = \dfrac{2}{4}\times 1\times 1 = \dfrac{1}{2}$ ។

បើគេយក g ជាអនុគមន៍កំណត់ដោយ

$g(x) = \begin{cases} \dfrac{1-\cos x}{x^2} & \text{បើ } x \neq 0 \\ \dfrac{1}{2} & \text{បើ } x = 0 \end{cases}$ នោះ g ជាអនុគមន៍ជាប់ត្រង់ $x = 0$ ។

គេថា g ជាបន្លាយនៃអនុគមន៍ f តាមភាពជាប់ត្រង់ 0 ។

ជាទូទៅ **:** បើ f ជាអនុគមន៍មិនកំណត់ត្រង់ $x = a$ និងមានលីមីត $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$ នោះអនុគមន៍បន្លាយនៃ f តាមភាពជាប់ត្រង់ $x = a$

កំណត់ដោយ $g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{បើ } x \neq a \\ \ell & \text{បើ } x = a \end{cases}$ ។

7. ទ្រឹស្ដីបទតម្លៃកណ្ដាល

ឧទាហរណ៍ 1 : បូផាមានកម្ពស់ $1.30m$ នៅពេលខួបកំណើតគម្រប់អាយុ 13 ឆ្នាំ និងមានកម្ពស់ $1.50m$ នៅពេលខួបកំណើតគម្រប់អាយុ 14 ឆ្នាំ។

ដូចនេះត្រូវមានរយៈពេល t មួយ $13 < t < 14$ ដែលកម្ពស់ស្មើ h ហើយ $1.30\ m < h < 1.50\ m$ ។

ឧទាហរណ៍ 2 : គេមាន $f(x) = x^2 - 2$ ។ លើចន្លោះ $[0, 2]$ f ជាប់និងកើន។

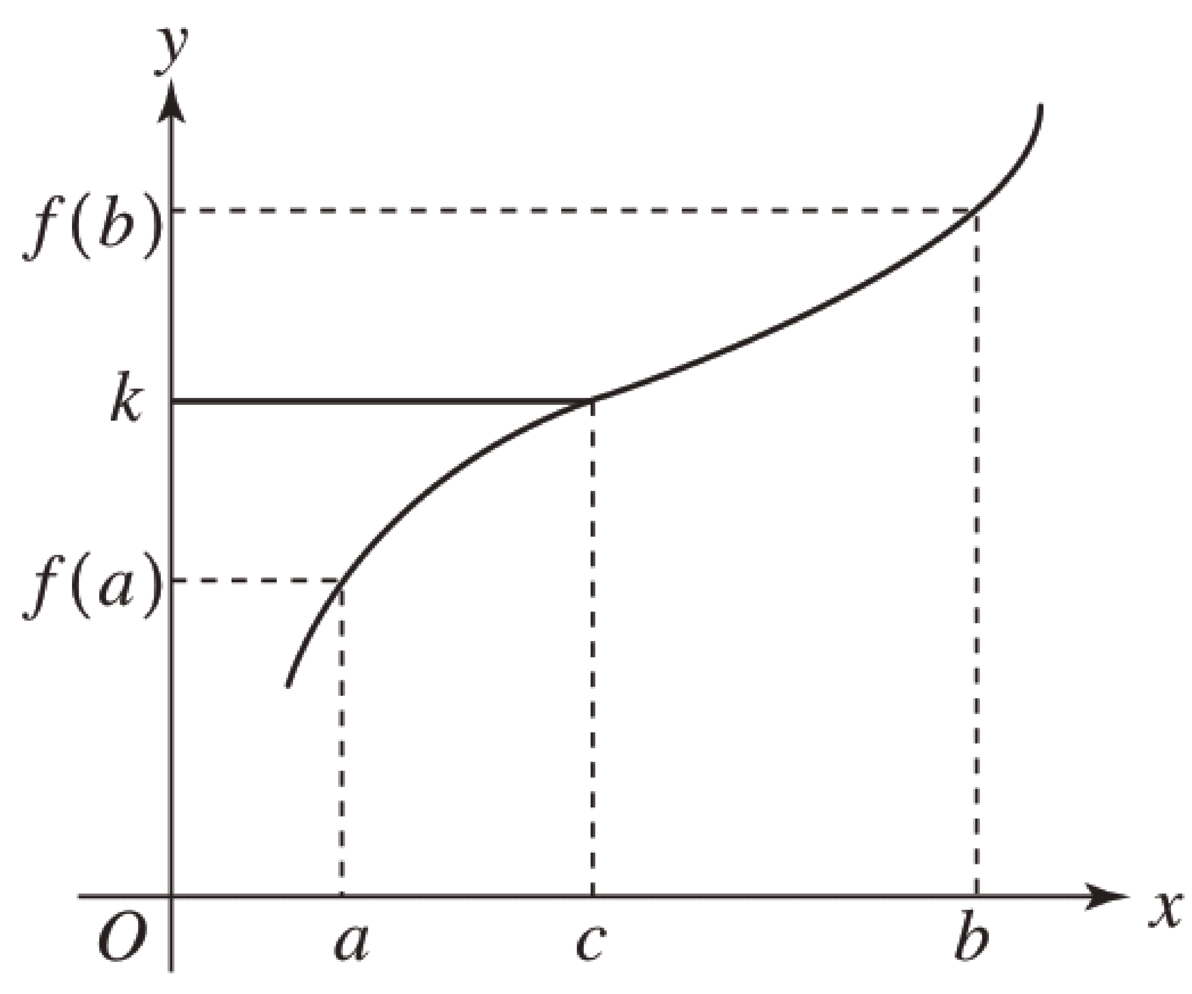
គេបាន $f(0) = -2$ និង $f(2) = 2$ ។

យក k , $f(0) \le k \le f(2)$ សមីការ $x^2 - 2 = k$ សរសេរជា $x^2 = k + 2$ ។ ដោយ $-2 \le k \le 2$ នោះ $k + 2 \ge 0$ ។ ដូចនេះលើចន្លោះ $[0, 2]$ គេបាន $x = \sqrt{k+2}$ ។ គ្រប់ k ដែល $f(0) \le k \le f(2)$ សមីការ $x^2 - 2 = k$ មានឫស $x = c$ មួយដែល $0 \le c \le 2$ ។

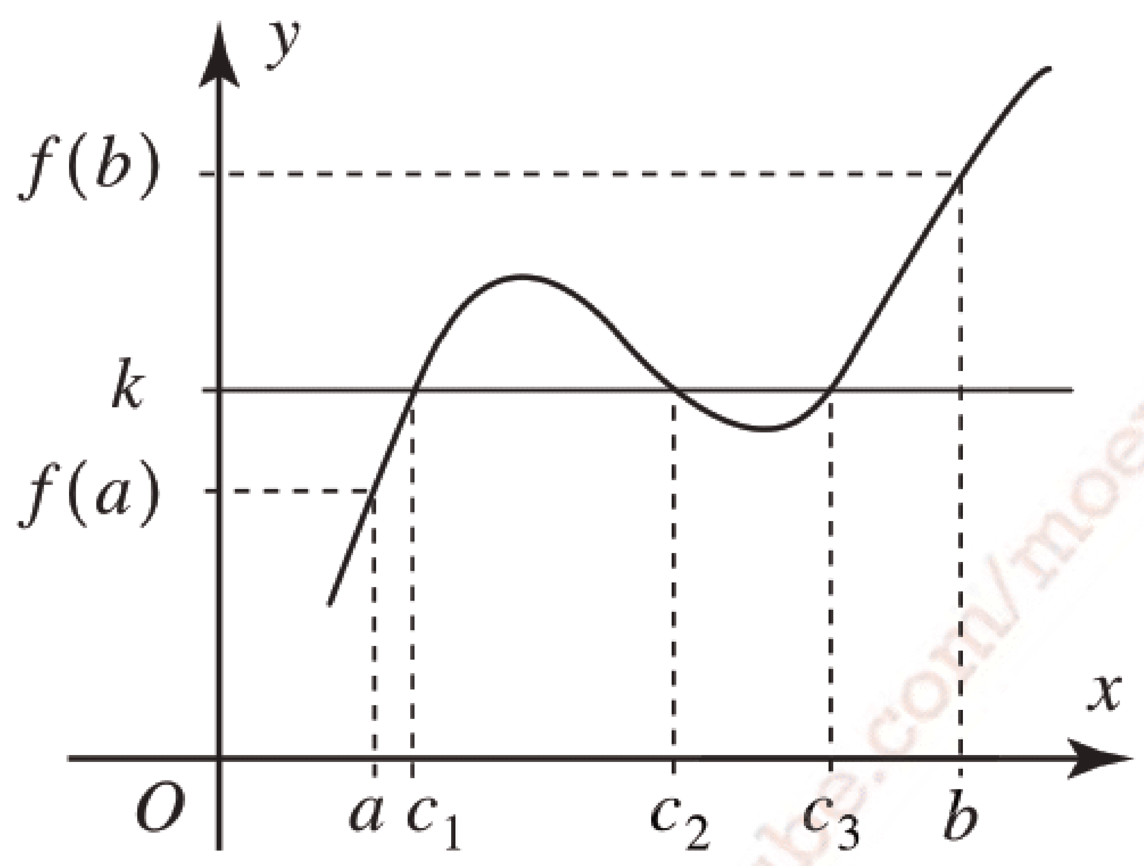
> ***ទ្រឹស្ដីបទ :*** បើអនុគមន៍ f ជាប់លើចន្លោះបិទ $[a, b]$ និង k ជាចំនួនមួយនៅចន្លោះ $f(a)$ និង $f(b)$ នោះមានចំនួនពិត c មួយយ៉ាងតិចក្នុងចន្លោះបិទ $[a, b]$ ដែល $f(c) = k$ ។

វិបាក : បើអនុគមន៍ f ជាប់ ហើយកើនដាច់ខាត ឬក៏ចុះដាច់ខាតលើចន្លោះបិទ $[a, b]$ នោះចំពោះគ្រប់ចំនួន k នៅចន្លោះ $f(a)$ និង $f(b)$ សមីការ $f(x) = k$ មានចម្លើយតែមួយគត់ក្នុងចន្លោះ $[a, b]$ ។

សម្រាយបញ្ជាក់ : អនុគមន៍ f ជាប់និងកើនដាច់ខាត លើចន្លោះបិទ $[a, b]$ ។ f កើនដាច់ខាតមានន័យថា បើ x និង x' ជាពីរចំនួននៅក្នុងចន្លោះ $[a, b]$ ដែល $x < x'$ នោះ $f(x) < f(x')$ ។ ឱ្យចំនួន k នៅចន្លោះ $f(a)$ និង $f(b)$, $(f(a) < k < f(b))$ និង f ជាអនុគមន៍ជាប់តាមទ្រឹស្ដីបទបញ្ជាក់ថាមានចំនួន c មួយនៅចន្លោះ a និង b ដែល $f(c) = k$ ។ ឧបមាថាមានចំនួនមួយទៀត c' ខុសពី c ផ្ទៀងផ្ទាត់គ្នា $f(c') = k$ នោះ $f(c) = f(c')$ ជាករណីផ្ទុយពីសម្មតិកម្មដែលថា f កើនដាច់ខាត។ ដូចនេះមានចំនួន c មួយគត់ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $f(c) = k$ គឺសមីការ $f(x) = k$ មានចម្លើយតែមួយគត់។

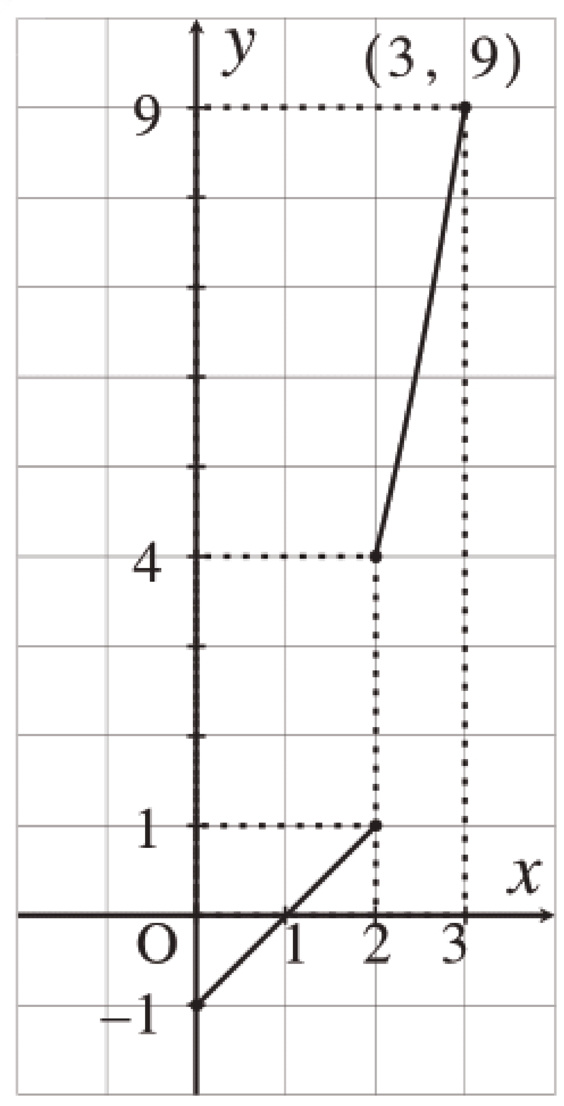


គេឃើញថាចំពោះតម្លៃ k អាចមានតម្លៃ c ច្រើនជាងមួយ ។ ទ្រឹស្តីបទបញ្ជាក់ថាយ៉ាងហោចណាស់មានចំនួន c មួយ ប៉ុន្តែមិនមែនតែមួយគត់ទេ (ដូចរូបខាងស្តាំ) បង្ហាញថាមានតម្លៃ c បី (c_1, c_2, c_3) ។



លំហាត់គំរូ 1 : គេមានអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x) = \begin{cases} x-1 & 0 \le x \le 2 \\ x^2 & 2 < x \le 3 \end{cases}$ ។ តើគ្រប់ $-1 \le k \le 9$ មាន c ដែល $f(c) = k$ ឬទេ ?

ចម្លើយ : តាមក្រាបនៃអនុគមន៍បង្ហាញថា f ជាអនុគមន៍ដាច់ត្រង់ 2 ដែលស្ថិតក្នុងចន្លោះ $[0, 3]$ ។ គេបាន $f(0) = -1$ និង $f(3) = 9$ ។



បើ k ជាចំនួនណាមួយនៅចន្លោះ 1 និង 4 នោះគ្មានតម្លៃ c ដែល $f(c) = k$ ព្រោះគ្មានតម្លៃអនុគមន៍ចន្លោះ 1 និង 4 ។

សម្គាល់ : ទ្រឹស្តីបទតម្លៃកណ្តាលអាចប្រើបានចំពោះ $k = 0$ ជាពិសេសបើអនុគមន៍ f ជាប់លើចន្លោះបិទ $[a, b]$ និង $f(a)$ និង $f(b)$ មានសញ្ញាផ្ទុយគ្នា នោះ $(f(a) \cdot f(b) < 0)$ មានចំនួន c មួយយ៉ាងតិចក្នុងចន្លោះបិទ $[a, b]$ ដែល $f(c) = 0$ ។

លំហាត់គំរូ 2 : ដោយប្រើទ្រឹស្តីបទតម្លៃកណ្តាល ចូរបង្ហាញថាចំពោះអនុគមន៍ពហុធា $f(x) = x^3 + 2x - 1$ មានចំនួនពិត c នៅក្នុងចន្លោះ $[0, 1]$ ដែល $f(c) = 0$ ។

ចម្លើយ : ដោយ $f(0) = 0^2 + 2(0) - 1 = -1$ និង $f(1) = 1^2 + 2(1) - 1 = 2$, $f(0) \cdot f(1) = (-1)(2) = -2 < 0$ ។

តាមទ្រឹស្តីបទតម្លៃកណ្តាលដោយ $f(0) \cdot f(1) < 0$ មានចំនួន c មួយយ៉ាងតិចក្នុងចន្លោះបិទ $[0, 1]$ ដែល $f(c) = 0$ ។

លំហាត់គំរូ 3 : គេឱ្យអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x) = 4 + 3x - x^2$ ដែល $2 \le x \le 5$ ។ ប្រើទ្រឹស្តីបទតម្លៃកណ្តាលរកតម្លៃ c បើ $k = 1$ ។

ចម្លើយ : គេបាន $f(2) = 6$, $f(5) = -6$ ។ ដើម្បីរក c គេមាន $f(c) = k = 1$ ។ $4 + 3c - c^2 = 1$, $c^2 - 3c - 3 = 0$ គេបាន $c = \dfrac{3 \pm \sqrt{21}}{2}$; $c \in [2, 5]$ នោះ $c = \dfrac{3 + \sqrt{21}}{2}$ ។

ប្រតិបត្តិ : ប្រើទ្រឹស្តីបទតម្លៃកណ្តាលបង្ហាញថាសមីការ $x^5 - 3x - 1 = 0$ មានឫសយ៉ាងតិចមួយក្នុងចន្លោះ $(1, 2)$ ។

មេរៀនសង្ខេប

- **ភាពជាប់ត្រង់មួយចំណុច**

អនុគមន៍ $y = f(x)$ ជាប់ត្រង់ចំណុច $x = c$ កាលណា f បំពេញលក្ខខណ្ឌទាំងបីដូចខាងក្រោម ៖

1. f កំណត់ចំពោះ $x = c$
2. f មានលីមីតកាលណា $x \to c$
3. $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$ ។

សម្គាល់ : បើអនុគមន៍ $y = f(x)$ មិនជាប់ត្រង់ $x = c$ គេថា f ជាអនុគមន៍ដាច់ត្រង់ $x = c$ ។ អនុគមន៍ f ដាច់ត្រង់ចំណុច $x = c$ បើ f មិនបានបំពេញលក្ខខណ្ឌណាមួយក្នុងចំណោមលក្ខខណ្ឌទាំងបីខាងលើ ។

- **លក្ខណៈភាពជាប់នៃអនុគមន៍**

បើអនុគមន៍ f និង g ជាប់ត្រង់ $x = c$ នោះ

1. $f(x)+g(x)$ ជាប់ត្រង់ $x = c$
2. $f(x)-g(x)$ ជាប់ត្រង់ $x = c$
3. $f(x)\cdot g(x)$ ជាប់ត្រង់ $x = c$
4. $kf(x)$ ជាប់ត្រង់ c (ដែល k ជាចំនួនថេរ)
5. $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ ជាប់ត្រង់ $x = c$ ដែល $g(c) \neq 0$

- អនុគមន៍លីនេអ៊ែជាអនុគមន៍ជាប់ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត ។
- អនុគមន៍ពហុធា P ដែលមានដឺក្រេ n : $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_n$ ដែល $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ ជាចំនួនថេរនិង $a_0 \neq 0$ ជាអនុគមន៍ជាប់គ្រប់តម្លៃ x ។
- អនុគមន៍សនិទាន $R(x) = \dfrac{P(x)}{q(x)}$, $q(x) \neq 0$ ជាប់គ្រប់តម្លៃ x ដែល $q(x) \neq 0$ ។
- អនុគមន៍រ៉ាឌីកាល់ $f(x) = \sqrt[n]{x}$ ជាអនុគមន៍ជាប់គ្រប់តម្លៃ x ក្នុងដែនកំណត់ ។
- អនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រ $y = \sin x$, $y = \cos x$ ជាអនុគមន៍ជាប់ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត ។

$y = \tan x$ ជាអនុគមន៍ជាប់ ចំពោះ $x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

$y = \cot x$ ជាអនុគមន៍ជាប់ ចំពោះ $x \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ ។

- **ភាពជាប់លើចន្លោះ**

  - អនុគមន៍ f ជាប់លើចន្លោះបើក (a, b) លុះត្រាតែ f ជាប់ចំពោះគ្រប់តម្លៃ x នៃចន្លោះបើកនោះ ។

  - អនុគមន៍ f ជាប់លើចន្លោះបិទ $[a, b]$ លុះត្រាតែ f ជាប់លើចន្លោះ (a, b) និងមានលីមីត $\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$ និង $\lim_{x \to b^-} f(x) = f(b)$ ។
  (អនុគមន៍ f ជាប់ត្រង់ a ខាងស្ដាំ និងជាប់ត្រង់ b ខាងឆ្វេង)

- **ភាពជាប់នៃអនុគមន៍បណ្ដាក់**

បើអនុគមន៍ g ជាប់ត្រង់ c និងអនុគមន៍ f ជាប់ត្រង់ $g(c)$ នោះអនុគមន៍បណ្ដាក់ $(f \circ g)(x) = f[g(x)]$ ជាប់ត្រង់ c ។

- **អនុគមន៍បន្លាយតាមភាពជាប់**

ជាទូទៅ : បើ f ជាអនុគមន៍មិនកំណត់ត្រង់ $x = a$ និងមានលីមីត $\lim_{x \to a} f(x) = \ell$ នោះអនុគមន៍បន្លាយនៃ f តាមភាពជាប់ត្រង់ $x = a$ កំណត់ដោយ

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{បើ } x \neq a \\ \ell & \text{បើ } x = a \end{cases} \text{ ។}$$

- **ទ្រឹស្ដីបទតម្លៃកណ្ដាល**

ទ្រឹស្ដីបទ : បើអនុគមន៍ f ជាប់លើចន្លោះបិទ $[a, b]$ និង k ជាចំនួនមួយនៃចន្លោះ $f(a)$ និង $f(b)$ នោះមានចំនួន c មួយយ៉ាងតិចក្នុងចន្លោះបិទ $[a, b]$ ដែល $f(c) = k$ ។

វិបាក : បើអនុគមន៍ f ជាប់ ហើយកើនដាច់ខាត ឬក៏ចុះដាច់ខាតលើចន្លោះបិទ $[a, b]$ នោះចំពោះគ្រប់ចំនួន k នៅចន្លោះ $f(a)$ និង $f(b)$ សមីការ $f(x) = k$ មានចម្លើយតែមួយគត់ក្នុងចន្លោះ $[a, b]$ ។

? លំហាត់

1. បញ្ជាក់ថា តើអនុគមន៍ខាងក្រោមជាប់ត្រង់តម្លៃ x ដែលឱ្យឬទេ ?

ក. $f(x) = 5x^2 - 6x + 1 \ , \ x = 2$

ខ. $f(x) = \dfrac{x+2}{x+1} \ , \ x = 1$

គ. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}-2}{x-4} \ , \ x = 4$

ឃ. $f(x) = \dfrac{|x+2|}{x+2} \ , \ x = -2$

ង. $f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{បើ } x \le 2 \\ 2 & \text{បើ } x > 2 \end{cases} \ , \ x = 2$

ច. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x+1} & \text{បើ } x < -1 \\ x^2 - 3 & \text{បើ } x \ge -1 \end{cases} \ , \ x = -1$ ។

2. រកតម្លៃ x ដែលធ្វើឱ្យអនុគមន៍ខាងក្រោមជាអនុគមន៍ដាច់ ។

ក. $f(x) = \dfrac{3x-1}{2x-6}$

ខ. $f(x) = \dfrac{x}{x^2+4x-5}$

គ. $f(x) = \dfrac{x^2-2x+1}{x^2-x-2}$

ឃ. $f(x) = \dfrac{3x-2}{x^2-3x-18}$

ង. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{2}+1 & \text{បើ } x \le 2 \\ 3-x & \text{បើ } x > 2 \end{cases}$

ច. $f(x) = \begin{cases} -x+1 & \text{បើ } x \le -1 \\ 2 & \text{បើ } -1 < x < 1 \\ -x+3 & \text{បើ } x > 1 \end{cases}$ ។

3. សិក្សាភាពជាប់នៃអនុគមន៍ខាងក្រោមលើចន្លោះដែលឱ្យ ។

ក. $f(x) = \dfrac{x-3}{4+x}$ លើចន្លោះ $(0, \ 1)$ និង $[-4, \ 1]$ ។

ខ. $f(x) = x\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$ លើចន្លោះ $(0, \ 1)$ និង $[0, \ 1]$ ។

គ. $f(x) = \begin{cases} x(x-1) & \text{បើ } x \le 3 \\ \dfrac{x^2-9}{x-3} & \text{បើ } x \ge 3 \end{cases}$ លើចន្លោះ $(0, \ 3)$ និង $[0, \ 3]$ ។

4. រកតម្លៃ A ដែលធ្វើឱ្យអនុគមន៍ $f(x)$ ជាប់គ្រប់តម្លៃ x

ក. $f(x) = \begin{cases} Ax-3 & \text{បើ } x < 2 \\ 3-x+2x^2 & \text{បើ } x \ge 2 \end{cases}$ ។

ខ. $f(x) = \begin{cases} 1-3x & \text{បើ } x < 4 \\ Ax^2+2x-3 & \text{បើ } x \ge 4 \end{cases}$ ។

5. រកតម្លៃ A និង B ដែលធ្វើឱ្យអនុគមន៍កំណត់ដោយ

$$f(x) = \begin{cases} Ax^2+5x-9 & \text{បើ } x<1 \\ B & \text{បើ } x=1 \\ (3-x)(A-2x) & \text{បើ } x>1 \end{cases}$$ ជាប់គ្រប់តម្លៃ x ។

6. ក្នុងបណ្តាអនុគមន៍ខាងក្រោម តើ f អាចមានបន្លាយតាមភាពជាប់ត្រង់ a ឬទេ ?

ក. $f(x) = \dfrac{x^2-9}{x-3}$, $a = 3$ ។

ខ. $f(x) = \dfrac{x^2+3x-10}{x-2}$, $a = 2$ ។

គ. $f(x) = \dfrac{x^3-1}{x-1}$, $a = 1$ ។

ឃ. $f(x) = \dfrac{x^2-16}{x^2-3x+4}$, $a = 4$ ។

7. ប្រើទ្រឹស្តីបទតម្លៃកណ្តាលបង្ហាញថា អនុគមន៍ខាងក្រោមមានចំនួន c ក្នុងចន្លោះដែលឱ្យ :

ក. $f(x) = x^2+x-1$, $[0,\ 5]$, $f(c) = 11$ ។

ខ. $f(x) = x^2-6x+8$, $[0,\ 3]$, $f(c) = 0$ ។

គ. $f(x) = x^3-x^2+x-2$, $[0,\ 3]$, $f(c) = 4$ ។

ឃ. $f(x) = \dfrac{x^2+x}{x-1}$, $\left[\dfrac{5}{2},\ 4\right]$, $f(c) = 6$ ។

8. គេឱ្យអនុគមន៍និងចន្លោះបិទដូចខាងក្រោម ។ ប្រើទ្រឹស្តីបទតម្លៃកណ្តាល រកតម្លៃ c បើគេស្គាល់តម្លៃ k ។

ក. $f(x) = 2+x-x^2$, $[0,\ 3]$, $k = 1$ ។

ខ. $f(x) = \sqrt{25-x^2}$, $[-4.5,\ 3]$, $k = 3$ ។

9. ក. ស្រាយបញ្ជាក់ថាសមីការ $x\tan x = \cos x$ យ៉ាងហោចណាស់មានឫសពិតមួយចន្លោះ $\left[0,\ \dfrac{\pi}{4}\right]$ ។

ខ. ស្រាយបញ្ជាក់ថា សមីការ $(x^n-1)\cos x+\sqrt{2}\sin x-1 = 0$ យ៉ាងហោចណាស់មានឫសពិតមួយចន្លោះ $(0,\ 1)$ ។

លំហាត់ជំពូក 1

1. គណនាលីមីតខាងក្រោម ៖

ក. $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{4x^2+x+2} - \sqrt{x^2-x+3}$ ខ. $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x^2+x+2} - \sqrt{x^2-x+3}$

គ. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 - x\sin x}{x - \sin^2 x}$ ឃ. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2x - \sin x}{\sqrt{1-\cos x}}$ ។

2. កំណត់តម្លៃ a ដែលបំពេញលក្ខខណ្ឌ $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1+ax-\sqrt{1+x}}{x} = \dfrac{1}{8}$

3. គណនាលីមីតខាងក្រោម ៖

ក. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt[n]{x}-1}{\sqrt[m]{x}-1}$ ខ. $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\sqrt{x-b}-\sqrt{a-b}}{x^2-a^2}$ $(a>0$ និង $b<0)$ ។

4. គេមានអនុគមន៍ $y = f(x)$ កំណត់លើចន្លោះ $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$ ដែល

$$f(x) = \begin{cases} \sin x + \dfrac{\sqrt{1-\cos 2x}}{\sin x} & \text{បើ } x \neq 0 \\ \sqrt{2} & \text{បើ } x = 0 \end{cases}$$

តើ $f(x)$ ជាប់ត្រង់ $x = 0$ ឬទេ ?

5. កំណត់តម្លៃ a ដើម្បីឱ្យអនុគមន៍ខាងក្រោមជាប់លើ $\mathbb{R}$

ក. $f(x) = \begin{cases} -2x+a & \text{បើ } x \leq 1 \\ \log_3 x & \text{បើ } x > 1 \end{cases}$ ខ. $f(x) = \begin{cases} a & \text{បើ } x \leq 0 \\ x\sin\dfrac{1}{x} & \text{បើ } x > 0 \end{cases}$ ។

6. ស្រាយបញ្ជាក់ថា សមីការខាងក្រោមមានឫសយ៉ាងតិចមួយនៅចន្លោះដែលឱ្យ ៖

ក. $\sin x = x - 1$, $(0, \pi)$ ខ. $20\ \log_{10} x - x = 0$, $(1, 10)$

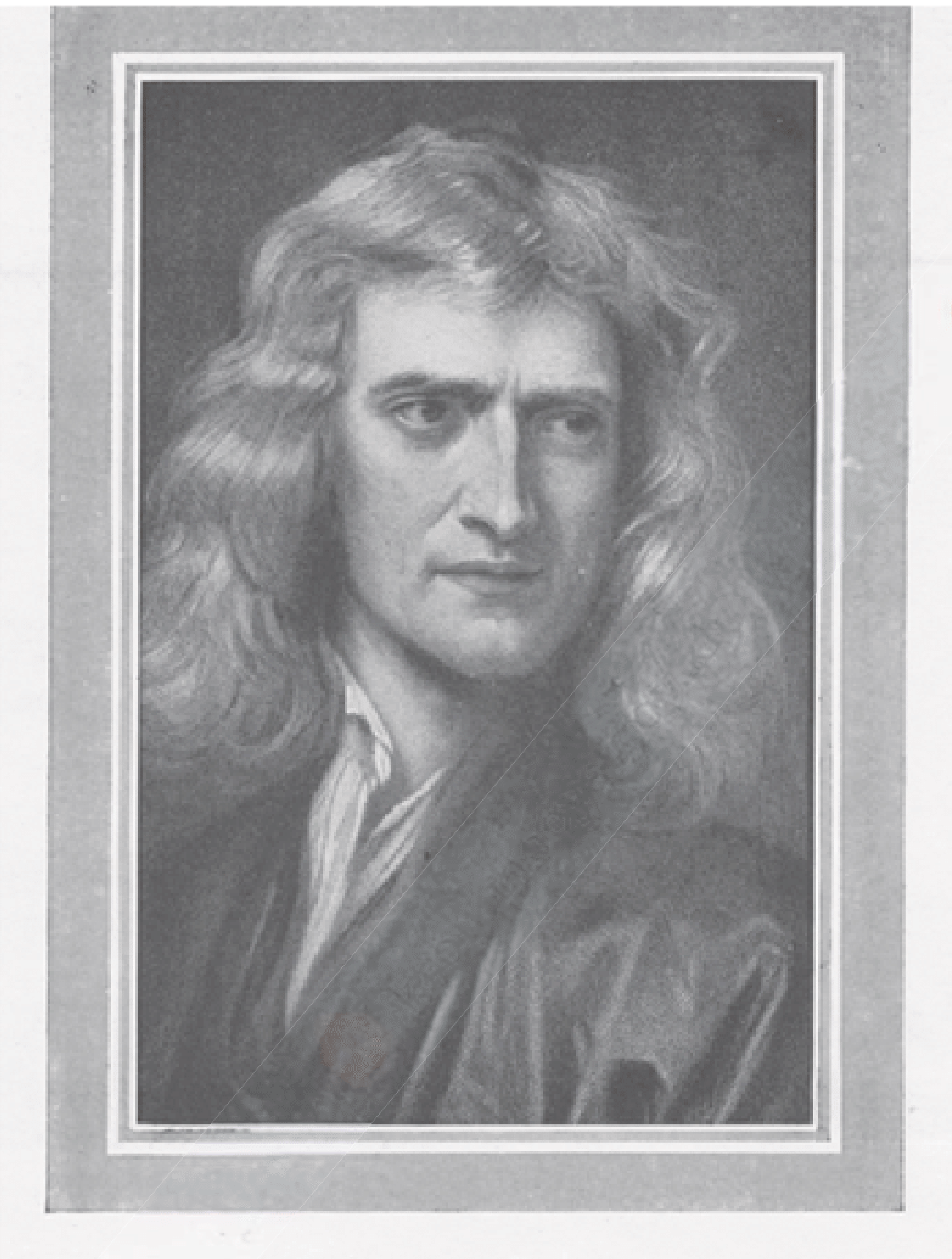
7. គេឱ្យសមីការដឺក្រេទីពីរ $ax^2+bx+c = 0$ $(a \neq 0)$ មានលេខមេគុណ a, b, c បំពេញលក្ខខណ្ឌ $2a+3b+6c = 0$ ។ បង្ហាញថា សមីការនេះមានឫសយ៉ាងតិចមួយនៅចន្លោះ $\left[0, \dfrac{2}{3}\right]$ ។

8. គេឱ្យអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ បើ $x \neq 0$, $f(x) = \dfrac{|x|+2x^2}{x}$ បើ $x = 0$, $f(0) = 1$

ក. តើអនុគមន៍ f ជាប់ត្រង់ $x = 0$ ឬទេ

ខ. សង់ក្រាបតាងអនុគមន៍ f ។

ជំពូក 2 ដេរីវេនៃអនុគមន៍



Sir Isaac Newton

នៅក្នុងជំពូកនេះ ប្រើចំណេះដឹងនិងបំណិននៃដេរីវេដែលបានសិក្សានៅថ្នាក់ទី11 ក្នុងការគណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ អនុគមន៍បណ្តាក់ អនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រ លើសពីនេះទៀត គេអាចប្រើចំណេះដឹងនិងបំណិនទាំងអស់នេះក្នុងការអនុវត្ត ដើម្បីដោះស្រាយចំណោទបញ្ហាដែលពួកគេនឹងជួបប្រទះដូចជា ការគណនាតម្លៃអតិបរមានិងតម្លៃអប្បបរមា ការគណនាល្បឿននិងសំទុះនៃចលនា ។

សរុបសេចក្តីមក ការសិក្សាដេរីវេបានផ្តល់អត្ថប្រយោជន៍យ៉ាងច្រើនសម្រាប់ដោះស្រាយចំណោទបញ្ហាដែលជួបប្រទះប្រចាំថ្ងៃក្នុងការលើកស្ទួយសេដ្ឋកិច្ចគ្រួសារនិងសេដ្ឋកិច្ចជាតិ ។

មេរៀនទី

1 ដេរីវេនៃអនុគមន៍

វត្ថុបំណង

- ❑ គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍
- ❑ គណនាដេរីវេទី 2 និងដេរីវេលំដាប់ខ្ពស់នៃអនុគមន៍ ។

1. ដេរីវេនៃអនុគមន៍ត្រង់ x_0

ដេរីវេត្រង់ x_0 នៃអនុគមន៍ $y = f(x)$ ជាលីមីត (បើមាន) នៃផលធៀបកំណើន $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ កាលណា Δx ខិតទៅជិត 0 ។

គេសរសេរ : $y'_0 = f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ ។

ឧទាហរណ៍ : រកដេរីវេត្រង់ $x_0 = 2$ នៃអនុគមន៍ $y = x^2 - 1$ ។

គេបាន $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \frac{(2+h)^2 - 1 - (2^2 - 1)}{h} = h + 4$

ដូចនេះ $f'(2) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{h \to 0} (h + 4) = 4$ ។

2. ដេរីវេនៃអនុគមន៍បណ្ដាក់

ឧទាហរណ៍ : សហគ្រាសផលិតសម្ភារៈប្រើប្រាស់មួយ បានចំណាយប្រាក់ចំនួន 18 ពាន់រៀល ក្នុងការផលិតសម្ភារៈមួយគ្រឿង ហើយរយៈពេល $1h$ សហគ្រាសផលិតសម្ភារៈបានចំនួន 40 គ្រឿង ។

គេបានអត្រាបម្រែបម្រួលនៃប្រាក់ចំណាយសរុបក្នុងរយៈពេល $1h$ គឺ (18 ពាន់រៀលក្នុង 1 គ្រឿង) $\times$ (40 គ្រឿងក្នុង $1h$) = 720 ពាន់រៀល ។

ដូចនេះ បម្រែបម្រួលនៃប្រាក់ចំណាយមានអត្រា 720 ពាន់រៀលក្នុង $1h$ ។

បើ x ជាបរិមាណសម្ភារៈដែលបានផលិត ហើយ t ជារយៈពេលគិតជាម៉ោង នោះក្នុងករណីខាងលើគេបានប្រាក់ចំណាយជាអនុគមន៍នៃបរិមាណសម្ភារៈ $y = f(x)$ និងបរិមាណសម្ភារៈជាអនុគមន៍នៃរយៈពេល $x = g(t)$ ។

គេបាន $\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \times \frac{dx}{dt}$ ដែល $\frac{dy}{dt}$ ជាអត្រាបម្រែបម្រួលនៃប្រាក់ចំណាយក្នុង $1h$

$\frac{dy}{dx}$ ជាអត្រាបម្រែបម្រួលនៃប្រាក់ចំណាយក្នុង 1 គ្រឿង

$\frac{dx}{dt}$ ជាអត្រាបម្រែបម្រួលនៃបរិមាណសម្ភារៈផលិតបានក្នុង $1h$ ។

ជាទូទៅ : បើ $y = f(u)$ និង $u = g(x)$ នោះ $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$ ឬ $\frac{d}{dx}f[u(x)] = f'(u) \times u'(x)$ ដែលត្រូវមាន $\frac{dy}{du}$ និង $\frac{du}{dx}$ ។

សម្រាយបញ្ជាក់: គេឱ្យ $F(x) = f[g(x)]$ ដោយប្រើភាពមានដេរីវេត្រង់ $x = c$

គេត្រូវបង្ហាញថា $F'(c) = f'[g(c)] \times g'(c)$

តាមនិយមន័យ $F'(c) = \lim\limits_{x \to c} \frac{f[g(x)] - f[g(c)]}{x - c}$

$$= \lim_{x \to c} \left[\frac{f[g(x)] - f[g(c)]}{g(x) - g(c)} \times \frac{g(x) - g(c)}{x - c} \right] \ , \ g(x) \neq g(c)$$

$$= \lim_{x \to c} \frac{f[g(x)] - f[g(c)]}{g(x) - g(c)} \times \lim_{x \to c} \frac{g(x) - g(c)}{x - c}$$

$$= f'[g(c)] \times g'(c) \text{ ។}$$

លំហាត់គំរូ : គេឱ្យអនុគមន៍ $y = (5x+1)^3$ ។ គណនា $\frac{dy}{dx}$

ចម្លើយ: តាង $u = 5x + 1$ នោះ $y = u^3$

គេបាន $\frac{du}{dx} = 5$ និង $\frac{dy}{du} = 3u^2$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx} = 3u^2 \times 5 = 15u^2$$

ជំនួស $u = 5x + 1$ គេបាន $\frac{dy}{dx} = 15(5x+1)^2$ ។

ប្រតិបត្តិ : គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម :

ក. $y = \sqrt{x^2 - 1}$ ខ. $y = \frac{1}{(x^2 + 3x + 1)^2}$

ឧទាហរណ៍ : គេឱ្យអនុគមន៍ $y = (3x^2 + 5x - 2)^3$

តាង $u = 3x^2 + 5x - 2$ នោះ $y = u^3$

គេបាន $\frac{du}{dx} = 6x + 5$ និង $\frac{dy}{du} = 3u^2$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx} = 3u^2 \times (6x+5) = 3(3x^2 + 5x - 2)^2(6x+5)$$

ដូចនេះ $\frac{dy}{dx} = 3(3x^2 + 5x - 2)^2(6x + 5)$ ។

ជាទូទៅ : បើ $y = u^n$ ដែល u ជាអនុគមន៍នៃ x នោះ $\frac{dy}{dx} = nu^{n-1} \times \frac{du}{dx} = nu^{n-1} \times u'$ ។

សម្រាយបញ្ជាក់ : គេមាន $y = u^n$

គេបាន $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx} = \frac{d}{du}(u^n) \times \frac{du}{dx} = nu^{n-1} \times \frac{du}{dx}$ ។

វិបាក : ករណី $n = \frac{1}{2}$ គេបាន $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}u^{\frac{1}{2}-1} \times u' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$ ដូចនេះ $\frac{dy}{dx} = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$ ។

លំហាត់គំរូ1 : គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ $y = (x^2 - 4x)^6$

ចម្លើយ : តាង $u = x^2 - 4x$ នោះ $y = u^6$

គេបាន $y' = 6u^5 \times u' = 6(x^2 - 4x)^5 \times (x^2 - 4x)'$

$$= 6(x^2 - 4x)^5 \times (2x - 4) = 12(x - 2)(x^2 - 4x)^5 \text{ ។}$$

លំហាត់គំរូ2 : គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ $y = 3\sqrt[3]{x^2 - 3x + 1}$

ចម្លើយ : គេអាចសរសេរ $y = 3\sqrt[3]{x^2 - 3x + 1} = 3(x^2 - 3x + 1)^{\frac{1}{3}}$

តាង $u = x^2 - 3x + 1$ នោះ $y = 3u^{\frac{1}{3}}$

គេបាន $y' = 3 \times \frac{1}{3}u^{-\frac{2}{3}} \times u' = (x^2 - 3x + 1)^{-\frac{2}{3}} \times (x^2 - 3x + 1)'$

$$= (x^2 - 3x + 1)^{-\frac{2}{3}} \times (2x - 3) = \frac{2x - 3}{(x^2 - 3x + 1)^{\frac{2}{3}}}$$

ដូចនេះ $y' = \frac{2x - 3}{\sqrt[3]{(x^2 - 3x + 1)^2}}$ ។

ប្រតិបត្តិ : គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ :

ក. $f(x) = (x^2 + 8x)^{10}$ ខ. $f(x) = 6\sqrt[3]{2x + 5}$ គ. $f(x) = (3x^4 - 1)^5$ ។

3. ដេរីវេនៃអនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រ

3.1. ដេរីវេនៃអនុគមន៍ស៊ីនុសនិងកូស៊ីនុស

ឧទាហរណ៍ 1 : គេឱ្យអនុគមន៍ $y = \sin x$ កំណត់ចំពោះគ្រប់ $x \in \mathbb{R}$

គេបាន $y' = \lim_{h \to 0} \frac{\sin(x + h) - \sin x}{h}$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{2\sin\frac{h}{2}\cos\left(x + \frac{h}{2}\right)}{h} = \lim_{h \to 0} \left[\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\cos\left(x + \frac{h}{2}\right)\right] = 1 \times \cos x = \cos x$$

ដូចនេះ $y' = \cos x$ ។

ឧទាហរណ៍ 2 : គេឱ្យ $f(x) = \cos x$ កំណត់ចំពោះគ្រប់ $x \in \mathbb{R}$ ។

គេបាន $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\cos(x+h) - \cos x}{h}$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-2\sin\frac{h}{2}\sin\left(x+\frac{h}{2}\right)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \left[\frac{-\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\sin\left(x+\frac{h}{2}\right)\right]$$

$$= -1 \times \sin x = -\sin x$$

ដូចនេះ $f'(x) = -\sin x$ ។

ឧទាហរណ៍ 3 : គេឱ្យ $y = \sin(x^2 - 3)$

តាង $u = x^2 - 3$ នោះ $y = \sin u$

គេបាន $\dfrac{du}{dx} = 2x$ និង $\dfrac{dy}{du} = \cos u$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx} = 2x \times \cos u = 2x\cos(x^2 - 3)$$

ដូចនេះ $y' = 2x\cos(x^2 - 3)$ ។

ជាទូទៅ : បើ $y = \sin x$ នោះ $y' = \cos x$

បើ $y = \cos x$ នោះ $y' = -\sin x$

បើ $y = \sin u$ នោះ $y' = u'\cos u$

បើ $y = \cos u$ នោះ $y' = -u'\sin u$ ។

លំហាត់គំរូ1 : គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ចំពោះគ្រប់ $x \in \mathbb{R}$

ក. $f(x) = \sin x - x\cos x$ ខ. $f(x) = \cos^2 x + x\sin x$ ។

ចម្លើយ :

ក. $f(x) = \sin x - x\cos x$ ដោយ $(u+v)' = u' + v'$

$$(uv)' = u'v + v'u$$

គេបាន $f'(x) = \cos x - [(x)'\cos x + x(\cos x)'] = \cos x - (\cos x - x\sin x) = x\sin x$

ដូចនេះ $f'(x) = x\sin x$ ។

ខ. $f(x) = \cos^2 x + x\sin x$

តាមរូបមន្ត $(u^n)' = nu^{n-1} \times u'$, $(u+v)' = u' + v'$, $(uv)' = u'v + v'u$

គេបាន $f'(x) = 2\cos x(\cos x)' + [(x)'\sin x + x(\sin x)']$

$= -2\cos x\sin x + (\sin x + x\cos x)$

$= -\sin 2x + \sin x + x\cos x$

ដូចនេះ $f'(x) = -\sin 2x + \sin x + x\cos x$ ។

លំហាត់គំរូ2 : គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម :

ក. $f(x) = -3x^4 + \sin(2x^3 - 1)$ ខ. $f(x) = x^2\cos(3x+1)$ ។

ចម្លើយ :

ក. $f(x) = -3x^4 + \sin(2x^3 - 1)$

តាមរូបមន្ត $(x^n)' = nx^{n-1}$, $(\sin u)' = u'\cos u$

គេបាន $f'(x) = -12x^3 + (2x^3 - 1)'\cos(2x^3 - 1)$

$= -12x^3 + 6x^2\cos(2x^3 - 1)$

ដូចនេះ $f'(x) = -12x^3 + 6x^2\cos(2x^3 - 1)$ ។

ខ. $f(x) = x^2\cos(3x+1)$

តាមរូបមន្ត $(uv)' = u'v + v'u$, $(\cos u)' = -u'\sin u$

គេបាន $f'(x) = (x^2)'\cos(3x+1) + x^2[\cos(3x+1)]'$

$= 2x\cos(3x+1) + x^2 \times [-3\sin(3x+1)]$

$= 2x\cos(3x+1) - 3x^2\sin(3x+1)$ ។

ប្រតិបត្តិ : គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម :

ក. $f(x) = x^3\cos x + 2\sin x$

ខ. $f(x) = \cos(5x^4 - 3) + x\sin 2x$ ។

3.2. ដេរីវេនៃអនុគមន៍តង់សង់និងកូតង់សង់

ឧទាហរណ៍ 1 : គេឱ្យ $y = \tan x$ ចំពោះ $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ ។

គេអាចសរសេរ $y = \frac{\sin x}{\cos x}$

គេបាន $$y' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)'\cos x - (\cos x)'\sin x}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\cos x \cos x - (-\sin x)\sin x}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$$

ដូចនេះ $y' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$ ។

ឧទាហរណ៍ 2 : គេឱ្យ $f(x) = \cot x$ ចំពោះ $x \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ ។

គេអាចសរសេរ $f(x) = \frac{\cos x}{\sin x}$

គេបាន $$f'(x) = \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = \frac{(\cos x)'\sin x - (\sin x)'\cos x}{\sin^2 x}$$

$$= \frac{-\sin x \sin x - \cos x \cos x}{\sin^2 x}$$

$$= \frac{-(\sin^2 x + \cos^2 x)}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

$$= -(1 + \cot^2 x)$$

ដូចនេះ $f'(x) = -\frac{1}{\sin^2 x} = -(1 + \cot^2 x)$ ។

ឧទាហរណ៍ 3 : គេឱ្យ $y = \tan(3x^2 - 5)$

តាង $u = 3x^2 - 5$ នោះ $y = \tan u$

គេបាន $\frac{du}{dx} = 6x$ និង $\frac{dy}{du} = \frac{1}{\cos^2 u} = 1 + \tan^2 u$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx} = 6x \times \frac{1}{\cos^2 u} = 6x \times \frac{1}{\cos^2(3x^2 - 5)}$$ ។

ជាទូទៅ : បើ $y = \tan x$ នោះ $y' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$

បើ $y = \cot x$ នោះ $y' = -\frac{1}{\sin^2 x} = -(1 + \cot^2 x)$

បើ $y = \tan u$ នោះ $y' = \frac{u'}{\cos^2 u} = u'(1 + \tan^2 u)$

បើ $y = \cot u$ នោះ $y' = -\frac{u'}{\sin^2 u} = -u'(1 + \cot^2 u)$ ។

លំហាត់គំរូ1 : រកដេរីវេនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម :

ក. $f(x) = x^3\tan x$ ខ. $f(x) = (2+\cot x)^3$

ចម្លើយ :

ក. $f(x) = x^3\tan x$ តាមរូបមន្ត $(uv)' = u'v + v'u$

គេបាន $f'(x) = (x^3)'\tan x + x^3(\tan x)' = 3x^2\tan x + \dfrac{x^3}{\cos^2 x}$

ដូចនេះ $f'(x) = 3x^2\tan x + \dfrac{x^3}{\cos^2 x}$ ។

ខ. $f(x) = (2+\cot x)^3$ តាមរូបមន្ត $(u^n)' = nu^{n-1}\times u'$

គេបាន $f'(x) = 3(2+\cot x)^2(2+\cot x)'$

$= 3(2+\cot x)^2\left(-\dfrac{1}{\sin^2 x}\right)$

ដូចនេះ $f'(x) = -\dfrac{3(2+\cot x)^2}{\sin^2 x}$ ។

លំហាត់គំរូ2 : គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម :

ក. $f(x) = 3x^2 + \tan(x^3-1)$ ខ. $f(x) = x\cot(5x^3+7)$

ចម្លើយ:

ក. $f(x) = 3x^2 + \tan(x^3-1)$ តាមរូបមន្ត $(\tan u)' = \dfrac{u'}{\cos^2 u}$

គេបាន $f'(x) = 6x + \dfrac{(x^3-1)'}{\cos^2(x^3-1)} = 6x + \dfrac{3x^2}{\cos^2(x^3-1)}$ ។

ដូចនេះ $f'(x) = 6x + \dfrac{3x^2}{\cos^2(x^3-1)}$ ។

ខ. $f(x) = x\cot(5x^3+7)$ តាមរូបមន្ត $(uv)' = u'v + v'u$, $(\cot u)' = -\dfrac{u'}{\sin^2 u}$

គេបាន $f'(x) = \cot(5x^3+7) + x[\cot(5x^3+7)]'$

$= \cot(5x^3+7) + x\times\left[-\dfrac{15x^2}{\sin^2(5x^3+7)}\right]$

ដូចនេះ $f'(x) = \cot(5x^3+7) - \dfrac{15x^3}{\sin^2(5x^3+7)}$ ។

ប្រតិបត្តិ : រកដេរីវេនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម :

ក. $f(x) = 3x^2\tan^3 x$ ខ. $f(x) = (1+\tan x)^2$

គ. $f(x) = 3\cot(x^4-3)$ ឃ. $f(x) = x\tan(2x^2-3)$ ។

4. ដេរីវេលំដាប់ខ្ពស់

4.1. ដេរីវេទី 2នៃអនុគមន៍

ឧទាហរណ៍ 1 : គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x) = x^4 - 3x^2 + 1$

គេបាន $f'(x) = 4x^3 - 6x$

$$[f'(x)]' = f''(x) = 12x^2 - 6 \text{ ។}$$

ឧទាហរណ៍ 2 : គេឱ្យ $y = x^3 + 3\sin 2x$

គេបាន $y' = 3x^2 + 6\cos 2x$

$$[y']' = 6x - 12\sin 2x = 6(x - 2\sin 2x) \text{ ។}$$

ជាទូទៅ : ដេរីវេទី2 នៃអនុគមន៍ $y = f(x)$ កំណត់តាងដោយ y'' ឬ $f''(x)$ ឬ $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ ។

លំហាត់គំរូ1 : គណនា $f'(x)$ និង $f''(x)$ នៃអនុគមន៍ខាងក្រោម :

ក. $f(x) = x^3 - 12x + 1$ ខ. $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 - 9}$

ចម្លើយ :

ក. $f(x) = x^3 - 12x + 1$ គេបាន $f'(x) = 3x^2 - 12$ នោះ $f''(x) = 6x$ ។

ខ. $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 - 9}$ គេបាន $f'(x) = \dfrac{2x(x^2-9) - x^2 \times 2x}{(x^2-9)^2} = \dfrac{-18x}{(x^2-9)^2}$

$$f''(x) = \frac{-18(x^2-9)^2 + 18x \times 2(x^2-9) \times 2x}{(x^2-9)^4}$$

$$= \frac{-18(x^2-9)(x^2-9-4x^2)}{(x^2-9)^4} = \frac{54(x^2+3)}{(x^2-9)^3} \text{ ។}$$

លំហាត់គំរូ2 : រក y' និង y'' ជាអនុគមន៍នៃ x និង y

ក. $x^2 + y^2 = 4$ ខ. $xy + y^2 - x^2 = 5$

ចម្លើយ :

ក. រក y' នៃ $x^2 + y^2 = 4$

ដេរីវេអង្គទាំងពីរ $\dfrac{d}{dx}[x^2 + y^2] = \dfrac{d}{dx}[4]$

$$\frac{d}{dx}[x^2] + \frac{d}{dx}[y^2] = \frac{d}{dx}[4]$$

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

$2x+2yy' = 0 \quad (1)$

ដូចនេះ $y' = -\frac{x}{y}$ បើ $y \neq 0$ ។

រក y'' នៃ $x^2+y^2 = 4$

តាម (1) : $x+yy' = 0$

គេបាន $1+y'y'+yy'' = 0$ នោះ $y'' = \frac{-1-(y')^2}{y}$

ដោយ $y' = -\frac{x}{y}$ ដូចនេះ $y'' = -\frac{x^2+y^2}{y^3}$ ។

ខ. រក y' នៃ $xy+y^2-x^2 = 5$

ដេរីវេអង្គទាំងពីរ

គេបាន $\frac{d}{dx}[xy+y^2-x^2] = \frac{d}{dx}[5]$

$\frac{d}{dx}[xy]+\frac{d}{dx}[y^2]-\frac{d}{dx}[x^2] = 0$

$(y+xy')+2yy'-2x = 0 \quad (1)$

$y+(x+2y)y'-2x = 0$

ដូចនេះ $y' = \frac{2x-y}{x+2y}$ ។

រក y'' នៃ $xy+y^2-x^2 = 5$

តាម (1) គេបាន $y'+y'+xy''+2y'y'+2yy''-2 = 0$

$$(x+2y)y'' = 2-2y'-2(y')^2$$

$$y'' = \frac{2-2y'-2(y')^2}{x+2y}$$

ដោយ $y' = \frac{2x-y}{x+2y}$ នោះ $y'' = \frac{2(x+2y)^2-2(2x-y)(x+2y)-2(2x-y)^2}{(x+2y)^3}$

$$= \frac{10(xy+y^2-x^2)}{(x+2y)^3} = \frac{50}{(x+2y)^3}$$ ។

ប្រតិបត្តិ1 : គណនាដេរីវេទី 2 នៃអនុគមន៍ខាងក្រោម :

ក. $y = x^4-3x^2+x^{-2}$ ខ. $f(x) = \sin 3x^2+1$ ។

ប្រតិបត្តិ2 : រក y' និង y'' ជាអនុគមន៍នៃ x និង y

ក. $xy+yx^2 = 2$ ខ. $4xy = x^2+y^2$ ។

4.2. ដេរីវេលំដាប់ខ្ពស់

ឧទាហរណ៍ : គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x) = 3x^5 - 7x^3 + x - 10$

គេបាន $f'(x) = 15x^4 - 21x^2 + 1$

$f''(x) = 60x^3 - 42x$, $f'''(x) = 180x^2 - 42$

$f^{(4)}(x) = 360x$, $f^{(5)}(x) = 360$, $f^{(6)}(x) = 0$ ។

ជាទូទៅ : ដេរីវេនៃអនុគមន៍ $y = f(x)$ អាចមានដេរីវេខ្លួនឯងទៀត គេហៅ ដេរីវេបន្តបន្ទាប់ថា ដេរីវេទី 1 , ទី 2 , ... , ទី n គេតាងដោយ $f', f'', f''',...,$ $f^{(n)}$ ។

ចំណាំ : គេប្រើទំរង់ $f^{(n)}$ ចាប់ពី $n = 4$ តទៅ ។

លំហាត់គំរូ1 : គណនាដេរីវេទី 4 នៃ $f(x) = x^4 + 3x$

ចម្លើយ: គេបាន $f'(x) = 4x^3 + 3$, $f''(x) = 12x^2$

$f'''(x) = 24x$, $f^{(4)}(x) = 24$ ។

លំហាត់គំរូ2 : គណនាដេរីវេទី 100 នៃ $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$

ចម្លើយ: គេមាន $f(x) = \dfrac{1}{x^2} = x^{-2}$

គេបាន $f'(x) = -2x^{-3} = (-1)^1 2x^{-3}$

$f''(x) = (-1)^1(2) \times (-3)x^{-4} = (-1)^2(2)(3)x^{-4}$

$f'''(x) = (-1)^2(2)(3)(-4)x^{-5} = (-1)^3(2)(3)(4)x^{-5}$

$f^{(4)}(x) = (-1)^3(2)(3)(4)(-5)x^{-6} = (-1)^4(2)(3)(4)(5)x^{-6}$

....

....

$f^{(100)}(x) = (-1)^{100}101!x^{-102} = 101!x^{-102}$

ដូចនេះ $f^{(100)}(x) = \dfrac{101!}{x^{102}}$ ។

ប្រតិបត្តិ : គណនាដេរីវេទី 5 នៃអនុគមន៍ខាងក្រោម :

ក. $f(x) = \cos 3x - 5x^7$ ខ. $f(x) = 2x^4 - \sin 4x$ ។

មេរៀនសង្ខេប

- បើ $y = f(u)$ និង $u = g(x)$ នោះ $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du} \times \dfrac{du}{dx}$

ឬ $\dfrac{d}{dx} f[g(x)] = f'[g(x)] \times g'(x)$

- បើ $y = u^n$ ដែល u ជាអនុគមន៍នៃ x នោះ $y' = nu^{n-1} \times u'$
- បើ $f(x) = \sin x$ នោះ $f'(x) = \cos x$
- បើ $f(x) = \cos x$ នោះ $f'(x) = -\sin x$
- បើ $f(x) = \tan x$ នោះ $f'(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$
- បើ $f(x) = \cot x$ នោះ $f'(x) = -\dfrac{1}{\sin^2 x} = -(1 + \cot^2 x)$
- បើ $f(x) = \sin u$ នោះ $f'(x) = u' \cos u$
- បើ $f(x) = \cos u$ នោះ $f'(x) = -u' \sin u$
- បើ $f(x) = \tan u$ នោះ $f'(x) = u'(1 + \tan^2 u) = \dfrac{u'}{\cos^2 u}$
- បើ $f(x) = \cot u$ នោះ $f'(x) = -u'(1 + \cot^2 u) = -\dfrac{u'}{\sin^2 u}$
- បើ $f(x)$ មានដេរីវេបន្តបន្ទាប់រហូតដល់លំដាប់ n កំណត់តាងដោយ $f^{(n)}(x)$ ដែល $f^{(n)}(x) = [f^{(n-1)}(x)]'$ ។

? លំហាត់

1. គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម ៖

ក. $f(x) = (2x+1)^4$ ខ. $f(x) = \sqrt{5x^6 - 12}$ គ. $f(x) = (x^5 - 4x^2 + 8)^8$

ឃ. $f(x) = (3x^4 - 7x^2 + 9)^5$ ង. $f(x) = \dfrac{1}{5x^2 - 6x + 2}$ ច. $f(x) = \dfrac{2}{(6x^2 + 5x + 1)^2}$ ។

2. គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម ៖

ក. $y = \dfrac{1}{\sqrt{4x^2 + 1}}$ ខ. $y = \dfrac{1}{\sqrt{5x^3 + 2}}$ គ. $y = \sqrt{\dfrac{3x+1}{2x-1}}$

ឃ. $y = \left(\dfrac{x+2}{2-x}\right)^3$ ង. $y = (x+2)^3(2x-1)^5$ ច. $y = 2(3x+1)^4(5x-3)^2$ ។

3. គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ $f(x)$ តាមវិធីពីរយ៉ាងគឺ តាមរូបមន្តដេរីវេនៃផលគុណ និងដេរីវេនៃស្វ័យគុណ រួចបង្ហាញថាវិធីទាំងពីរមានលទ្ធផលដូចគ្នា ៖

ក. $f(x) = (3x+5)^2$ ខ. $f(x) = (7-4x)^2$ ។

4. គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម ៖

ក. $y = \sin^2 x + \cos^2 x$ ខ. $y = 5x^3 - 2\sin x\cos x$ គ. $y = (2x - \sin x)^3$

ឃ. $y = \sin x - x^2\cos x$ ង. $y = x^2 - \tan^2 x$ ច. $y = 3x\cot^2 x$ ។

5. គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម ៖

ក. $f(x) = \sin^2 x^2$ ខ. $f(x) = x^3 - \cos^2 5x$ គ. $f(x) = \dfrac{\tan 2x}{1 - \cos x}$

ឃ. $f(x) = x^3 - \sin(x^2 - 5x)$ ង. $f(x) = \sin 3x + \cos(x^3 - 1)$ ច. $f(x) = \tan(2x^3 - 5x)$ ។

6. គណនាដេរីវេទី 2 នៃអនុគមន៍ ៖

ក. $y = 3x^2 - \sin 2x$ ខ. $y = -3x^4 + 2x^2$ គ. $y = x + \dfrac{1}{x}$

ឃ. $g(x) = \dfrac{x^2}{x+1}$ ង. $g(x) = (x^2 + 4)^3$ ច. $g(x) = (x^3 - 1)^4$ ។

7. រក y' ជាអនុគមន៍នៃ x និង y

ក. $x = \tan y$ ខ. $x = \sin y$ គ. $xy + \sin y = 0$

ឃ. $x + \sin y = xy$ ង. $x + \tan(xy) = 0$ ច. $y^2 = \sin^4 2x + \cos^4 2x$ ។

8. រក y' និង y'' ជាអនុគមន៍នៃ x និង y ៖

ក. $2x^2 + y^2 = 4$ ខ. $2x^3 + y^3 = 8$ គ. $x^2 + xy + y^2 = -1$

ឃ. $x^3 + 2xy - y^2 = 3$ ង. $x^3 + y^3 = 3xy$ ច. $x^3y + xy^3 = 3x^2$ ។

9. គណនា ៖

ក. $f^{(4)}(x)$ បើ $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$ ខ. $f^{(6)}(x)$ បើ $f(x) = \frac{1}{7}x^7 - \sin 2x$

គ. $f^{(8)}(x)$ បើ $f(x) = x^8 - 5x^2 + \cos x$ ឃ. $f^{(10)}(x)$ បើ $f(x) = \dfrac{120}{x^6}$ ។

មេរៀនទី

2 អនុវត្តន៍នៃដេរីវេ

វត្ថុបំណង

- ❑ ប្រើដេរីវេក្នុងការគណនាតម្លៃបរមា
- ❑ ដោះស្រាយចំណោទដែលជួបប្រទះក្នុងការរស់នៅប្រចាំថ្ងៃ
- ❑ កំណត់ល្បឿននិងសំទុះនៃចលនាមួយ ។

1. អនុវត្តន៍ក្នុងការគណនាតម្លៃបរមា

លំហាត់គំរូ 1: ក្រុមហ៊ុនផលិតសម្ភារៈប្រើប្រាស់មួយបានចំណាយប្រាក់ចំនួន 2 ពាន់រៀល សម្រាប់ផលិតសម្ភារៈ 1 គ្រឿង ។ គេដឹងថាបើក្រុមហ៊ុនលក់សម្ភារៈ 1 គ្រឿងតម្លៃ 5 ពាន់រៀល នោះក្នុងមួយខែលក់អស់ 4000 គ្រឿង ។ អ្នកគ្រប់គ្រងក្រុមហ៊ុនបានសង្កេតឃើញថា កាលណាតម្លៃសម្ភារៈកើនឡើងម្តង 1 ពាន់រៀល នោះបរិមាណសម្ភារៈលក់ចេញក្នុង 1 ខែថយចុះម្តង 400 គ្រឿង ។ កំណត់តម្លៃសម្ភារៈ 1 គ្រឿង ដែលក្រុមហ៊ុនត្រូវលក់ ដើម្បីទទួលបានប្រាក់ចំណេញជាអតិបរមា ។

ចម្លើយ : តាង x ជាតម្លៃលក់សម្ភារៈ 1 គ្រឿងនិង $P(x)$ ជាអនុគមន៍ប្រាក់ចំណេញសរុប ។

ប្រាក់ចំណេញសរុប = (**ប្រាក់ចំណេញក្នុង** 1 គ្រឿង) × (បរិមាណសម្ភារៈ)

តាមសម្មតិកម្ម គេបាន

ប្រាក់ចំណេញក្នុង 1 គ្រឿង $= x-2$ ពាន់រៀល ។

បរិមាណសម្ភារៈលក់បានក្នុង 1 ខែ $= 4000-400(x-5)$ ។

គេបាន $P(x) = (x-2)\,[4000-400(x-5)]$

$= 400(x-2)(10-x+5) = 400(x-2)(15-x)$ ។

$P'(x) = 400(15-x)-400(x-2)$

$= 400(15-x-x+2) = 400(17-2x)$ ។

$P'(x) = 0$ សមមូល $17-2x = 0$ នាំឱ្យ $x = \dfrac{17}{2} = 8.5$

$$P(8.5) = 400(8.5-2)(15-8.5)$$

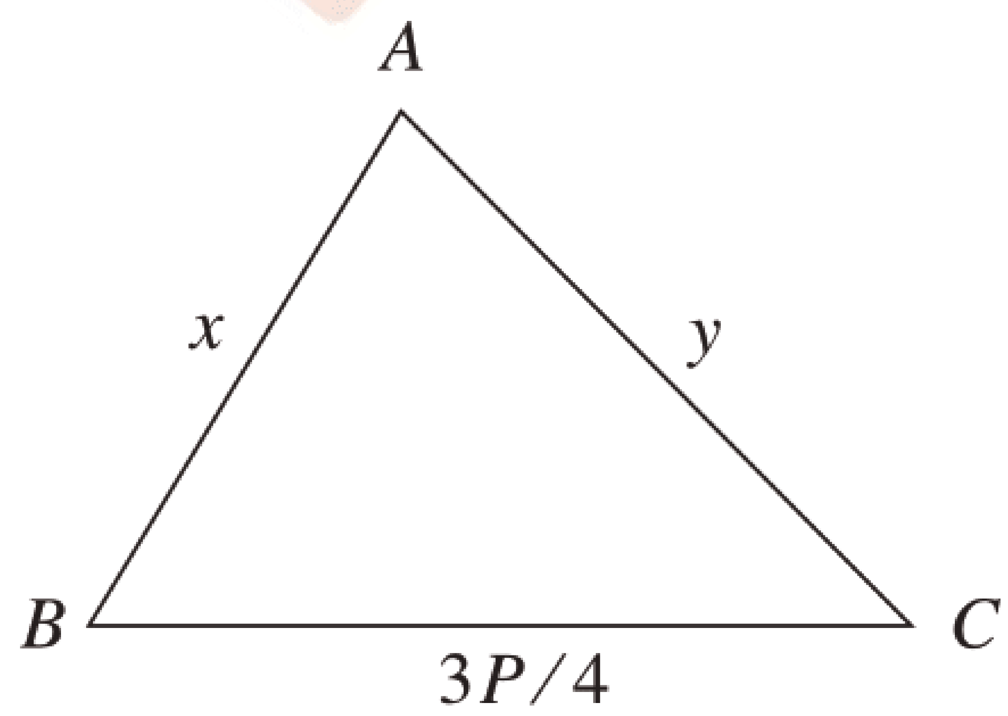
$$= 16900 \text{ ពាន់រៀល ។}$$

x		8.5	
$P'(x)$	+	0	−
$P(x)$	$\nearrow$	អតិបរមា	$\searrow$

ដូចនេះ ដើម្បីឱ្យក្រុមហ៊ុនចំណេញបានជាអតិបរមាចំនួន 16900 ពាន់រៀល ក្រុមហ៊ុនត្រូវលក់សម្ភារៈ 1 គ្រឿងតម្លៃ 8500 ៛ ។

លំហាត់គំរូ 2 : ត្រីកោណមួយមានបរិមាត្រស្មើនឹង $2p$ និងជ្រុងមួយមានរង្វាស់ $\frac{3p}{4}$ ។ គណនារង្វាស់ជ្រុងពីរទៀត ដើម្បីឱ្យផ្ទៃក្រឡារបស់ត្រីកោណធំបំផុត រួចអនុវត្តជាលេខកាលណា $P = 40m$ ។

ចម្លើយ : តាង ABC ជាត្រីកោណដែលមានបរិមាត្រ $2p$



ដោយ $BC = \frac{3P}{4}$, $AB = x$, $AC = y$, $x > 0$, $y > 0$

គេបាន $x + y + \frac{3P}{4} = 2P \quad (1)$

$$y = 2p - \frac{3P}{4} - x = \frac{5P-4x}{4} \text{ ។}$$

ដោយ $5P - 4x > 0$ នាំឱ្យ $4x < 5P$ នាំឱ្យ $x < \frac{5P}{4}$ ។

តាមលក្ខខណ្ឌ $\frac{P}{4} < x < P$

តាមរូបមន្តហេរុង គេបានផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណ :

$$S(x) = \sqrt{P(P-x)\left(P-\frac{3P}{4}\right)\left(P-\frac{5P-4x}{4}\right)}$$

$$= \sqrt{\frac{P^2}{16}(P-x)(4x-P)} = \frac{P}{4}\sqrt{-4x^2+5xp-P^2} \text{ ។}$$

$$S'(x) = \frac{P}{4} \times \frac{-8x+5p}{2\sqrt{-4x^2+5xp-p^2}}$$

$S'(x) = 0$ សមមូល $-8x + 5p = 0$ នាំឱ្យ $x = \frac{5p}{8}$ ។

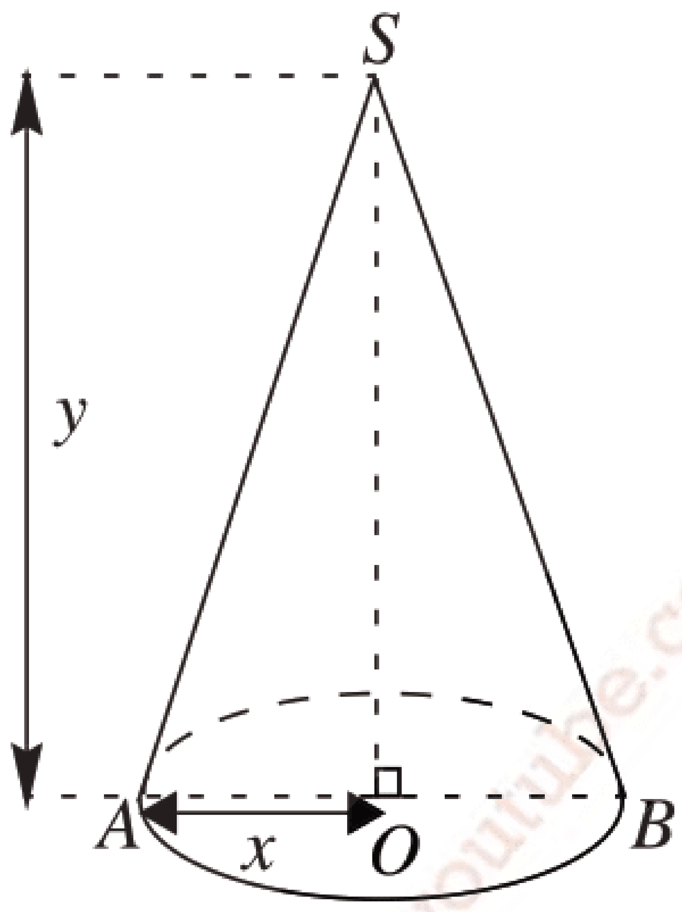
ជំនួស $x = \frac{5p}{8}$ ក្នុង (1) គេបាន $\frac{5p}{8} + y + \frac{3p}{4} = 2p$ នាំឱ្យ $y = \frac{5p}{8}$ ។

ដូចនេះ ត្រីកោណ ABC មានផ្ទៃក្រឡាធំបំផុត លុះត្រាតែ $BC = \frac{3p}{4}$, $AB = AC = \frac{5p}{8}$ ។

បើ $P = 40m$ នោះ $BC = \frac{3\times 40}{4} = 30m$, $AB = AC = \frac{5\times 40}{8} = 25m$ ។

លំហាត់គំរូ 3 : គេសង់ជម្រកមួយរាងកោនបរិវត្តន៍ ដែលមានមាឌ V ។ គណនាផលធៀបរង្វាស់កម្ពស់នៃកោននិងកាំថាសបាត ដើម្បីឱ្យជម្រកនោះមានផ្ទៃក្រឡាខាងអប្បបរមា ។

ចម្លើយ : តាង $SO = y$, $y > 0$, $OA = OB = x$, $x > 0$



គេមាន $V = \frac{1}{3}\pi x^2 y$ នោះ $y = \frac{3V}{\pi x^2}$ ។

គណនា SA និង SB ដោយ $SA = SB$

ត្រីកោណ SOA កែងត្រង់ O គេបាន

$$SA^2 = SO^2 + OA^2 = \frac{9V^2}{\pi^2 x^4} + x^2 = \frac{9V^2 + \pi^2 x^6}{\pi^2 x^4}$$

$SA = \frac{\sqrt{9V^2 + \pi^2 x^6}}{\pi x^2}$ ដោយ $P = 2\pi x$ បរិមាត្របាតកោន ។

បើ $S(x)$ ជាផ្ទៃក្រឡាខាងនៃកោន គេបាន

$$S(x) = \frac{1}{2}P \times SA = \frac{1}{2} \times 2\pi x \times \frac{\sqrt{9V^2 + \pi^2 x^6}}{\pi x^2} = \frac{\sqrt{9V^2 + \pi^2 x^6}}{x}$$ ។

$$S'(x) = \frac{3\pi^2 x^6 - 9V^2 - \pi^2 x^6}{x^2\sqrt{9V^2 + \pi^2 x^6}} = \frac{2\pi^2 x^6 - 9V^2}{x^2\sqrt{9V^2 - \pi^2 x^6}}$$

$S'(x) = 0$ នោះ $2\pi^2 x^6 - 9V^2 = 0$, $x^6 = \frac{9V^2}{2\pi^2}$ នាំឱ្យ $x = \sqrt[6]{\frac{9V^2}{2\pi^2}}$ ។

x	0		$\sqrt[6]{\frac{9V^2}{2\pi^2}}$		
$S'(x)$		$-$	0	$+$	
$S(x)$	$\searrow$		អប្បបរមា		$\nearrow$

ផលធៀប $\frac{y}{x} = \frac{3V}{\pi x^3} = \frac{3V}{\pi\sqrt{\frac{9V^2}{2\pi^2}}} = \sqrt{2}$ ។

ដូចនេះ ដើម្បីឱ្យផ្ទៃក្រឡាខាងនៃជម្រកអប្បបរមា លុះត្រាតែផលធៀបកម្ពស់និងកាំថាសបាតនៃជម្រកស្មើនឹង $\sqrt{2}$ ។

ប្រតិបត្តិ : គេយកស័ង្កសីមួយផ្ទាំងមានរាងជាចតុកោណកែងមានបណ្ដោយ $180cm$ និងទទឹង $120cm$ មកធ្វើហិបមួយរាងប្រលេពីប៉ែតកែងដែលគ្មានគម្រប ។ តើគេត្រូវធ្វើហិបនោះកម្ពស់ប៉ុន្មាន ដើម្បីឱ្យហិបនោះមានមាឌអតិបរមា ?

2. ល្បឿននិងសំទុះនៃចលនា

2.1. ល្បឿននៃចលនា

ល្បឿននៃចលនាមួយនៅខណៈ t គឺ $V(t) = S'(t) = \frac{dS}{dt}$ ដែល $S(t)$ ជាចម្ងាយចរនៅខណៈ t ។

លំហាត់គំរូ : គេទម្លាក់វត្ថុមួយដោយសេរីពីយន្តហោះ ដែលខណៈ t វិនាទី វត្ថុនោះធ្លាក់បានចម្ងាយ $S(t) = 16t^2\ (m)$ ។ កំណត់ល្បឿននៃវត្ថុខណៈពេល $t = 3$ វិនាទី ។

ចម្លើយ : គេបាន $V(t) = \frac{dS}{dt} = S'(t) = 32t$, $V(3) = 32 \times 3 = 96$

ដូចនេះ ល្បឿននៃវត្ថុខណៈពេល $t = 3s$ គឺ $96m/s$ ។

ប្រតិបត្តិ : កីឡាករម្នាក់លោតទឹកពីកម្ពស់ $3.2m$ ។ ទីតាំងនៃកីឡាករនៅខណៈពេល t វិនាទីឱ្យតាមអនុគមន៍ $S(t) = -1.6t^2 + 1.6t + 3.2$ (S គិតជា m) ។

ក. កំណត់រយៈពេលដែលកីឡាករធ្លាក់ដល់ទឹក

ខ. រកល្បឿនរបស់កីឡាករនៅខណៈពេលនោះ ។

2.2. សំទុះនៃចលនា

ឧទាហរណ៍ : រថយន្តមួយចាប់ផ្តើមផ្លាស់ទីដោយល្បឿន V បន្ទាប់ពីរយៈពេល t វិនាទីក្រោយមកគេបាន V ជាអនុគមន៍នៃ t គឺ $V(t)$ ។ សំទុះនៃរថយន្តពីខណៈ t ទៅ $t + \Delta t$ កំណត់តាងដោយ

$$\frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{V(t+\Delta t) - V(t)}{\Delta t}$$

បើ $\Delta(t) \to 0$ នោះ $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta V}{\Delta t} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{V(t+\Delta t) - V(t)}{\Delta t} = V'(t)$

$V'(t)$ ហៅថា សំទុះនៃចលនាមួយនៅខណៈ t តាងដោយ $a(t)$ ។

ជាទូទៅ : **សំទុះនៃចលនានៅខណៈ t គឺ $a(t) = \frac{dV}{dt} = V'(t)$ ដែល $V(t)$ ជាល្បឿននៃចលនានៅខណៈ t ។**

លំហាត់គំរូ **:** រថយន្តមួយផ្ដើមចេញដំណើរដោយល្បឿនដែលបកស្រាយដោយអនុគមន៍ $V(t) = \dfrac{80t}{t+5}$ m/s ។ គូសតារាងប្រៀបធៀបល្បឿននិងសំទុះរបស់រថយន្តខណៈ $t = 0$, $t = 5$, $t = 10$, $t = 15,\ldots,$ $t = 60s$ ។

ចម្លើយ **:** គេមាន $V(t) = \dfrac{80t}{t+5}$

គេបាន $a(t) = V'(t) = \dfrac{80(t+5) - 80t}{(t+5)^2} = \dfrac{400}{(t+5)^2}$

តារាងប្រៀបធៀបល្បឿននិងសំទុះរបស់រថយន្តខណៈពេល t

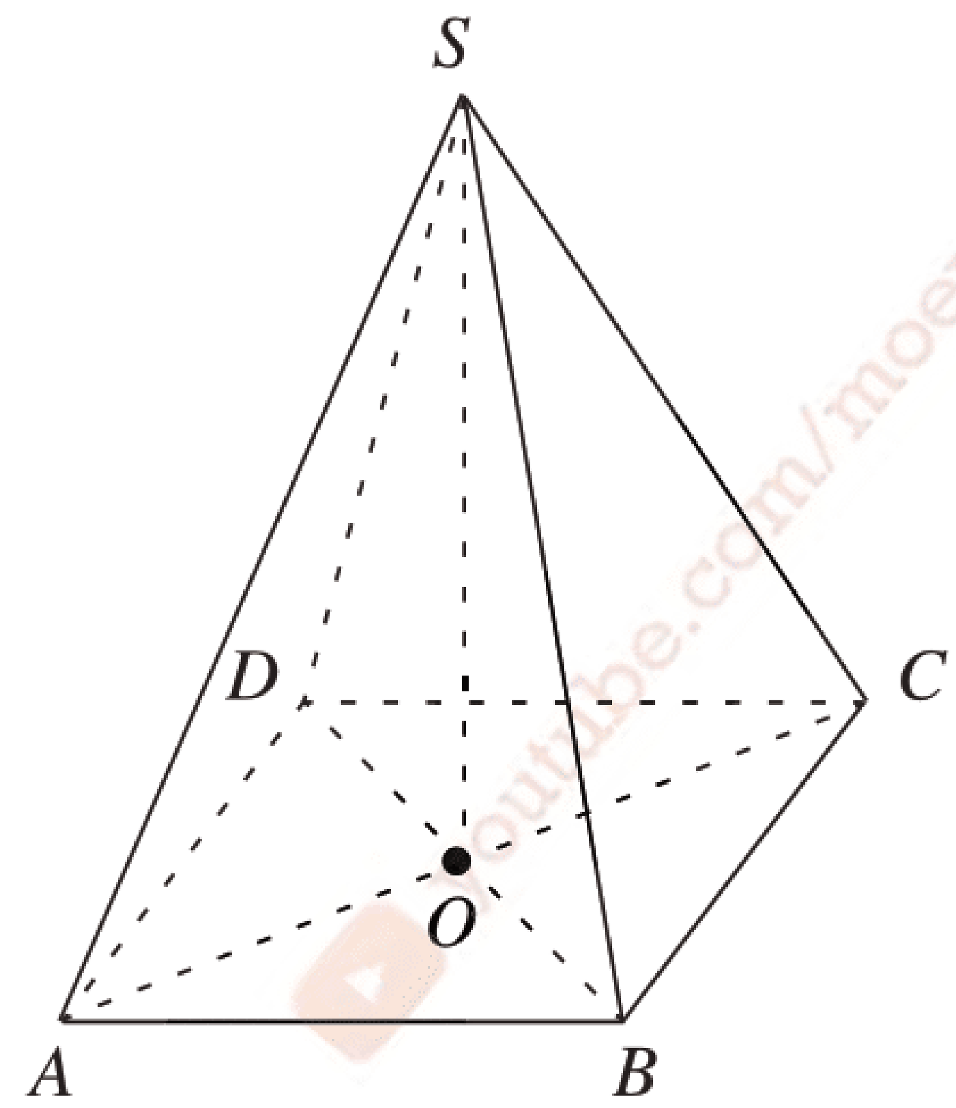
t	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60
V	0	40	53.3	60	64	66.7	68.6	70	71.1	72	72.7	73.3	73.8
a	16	4	1.78	1	0.64	0.44	0.33	0.25	0.2	0.16	0.13	0.11	0

ប្រតិបត្តិ **:** គេទម្លាក់វត្ថុមួយដោយសេរីពីយន្តហោះ ។ នៅខណៈពេល t វិនាទី វត្ថុនោះធ្លាក់បានចម្ងាយដោយអនុគមន៍ $S(t) = 4.905t^2 + 30.94 \ (m)$ ។ កំណត់ល្បឿននិងសំទុះនៃវត្ថុខណៈពេល $t = 2(s)$ ។

មេរៀនសង្ខេប

- ល្បឿននៃចលនាមួយនៅខណៈ t គឺ $V(t) = \dfrac{dS}{dt} = S'(t)$ ដែល $S(t)$ ជាចម្ងាយចរនៅខណៈ t ។
- សំទុះនៃចលនាមួយនៅខណៈ t គឺ $a(t) = \dfrac{dV}{dt} = V'(t)$ ដែល $V(t)$ ជាល្បឿននៃចលនាមួយនៅខណៈ t ។

? លំហាត់



1. ពីរ៉ាមីតចតុមុខនិយ័ត $SABCD$ មានផ្ទៃក្រឡាខាង S_ℓ ។ គណនាផលធៀបរង្វាស់កម្ពស់ SO និងជ្រុងមួយនៃបាត ដើម្បីឱ្យមាឌពីរ៉ាមីតចតុមុខនិយ័តមានតម្លៃអតិបរមា ។

2. ផលបូកបរិមាត្រការេមួយនិងរង្វង់មួយមានប្រវែង ℓ ។ គណនាផលធៀបរវាងរង្វាស់កាំរង្វង់និងជ្រុងការេ ដើម្បីឱ្យផលបូកផ្ទៃក្រឡាការេនិងរង្វង់មានតម្លៃអប្បបរមា ។

3. ប្រអប់ត្រង់មួយមានគម្របលើនិងបាតក្រោមជាការេ ហើយមានមាឌ $250cm^3$ ។ សម្ភារៈសម្រាប់ធ្វើគម្របលើនិងបាតក្រោមតម្លៃ $2000៛/cm^2$ ហើយសម្ភារៈសម្រាប់ធ្វើផ្ទៃខាងតម្លៃ $1000៛/cm^2$ ។ កំណត់រង្វាស់ទ្រនុងនៃប្រអប់ដើម្បីឱ្យប្រាក់ចំណាយលើសម្ភារៈមានតម្លៃអប្បបរមា រួចគណនាប្រាក់ចំណាយអប្បបរមានោះ ។

4. ទូកមួយចាប់ផ្តើមចេញដំណើរពីចំណុចត្រួតពិនិត្យ ដែលរយៈពេល t នាទីក្រោយមក ទូកនោះមានចម្ងាយពីចំណុចត្រួតពិនិត្យដែលតាងដោយអនុគមន៍ $S(t) = t^3 + 60t$ គិតជាម៉ែត្រ ។

   ក. រកល្បឿននៃទូកត្រង់ចំណុចចាប់ផ្តើម

   ខ. កំណត់ល្បឿននៃទូកខណៈ $t = 3mn$ ។

5. រថយន្តមួយចាប់ផ្តើមចេញដំណើរដោយល្បឿនដែលតាងដោយអនុគមន៍ $V(t) = \dfrac{100t}{t+15}\ m/s$ ។ កំណត់សំទុះនៃរថយន្តខណៈពេល ៖

   ក. $t = 5s$ ខ. $t = 10s$ គ. $t = 20s$ ។

6. រថយន្តមួយផ្តើមចេញដំណើរដោយល្បឿនដែល t វិនាទីតាងដោយអនុគមន៍ $V(t) = \dfrac{22t}{0.44t+3.3}$ ម៉ែត្រក្នុងមួយវិនាទី ។ កំណត់សំទុះរបស់រថយន្តនៅខណៈពេល ៖

   ក. 5 វិនាទី ខ. 10 វិនាទី គ. 20 វិនាទី ឃ. 30 វិនាទី ។

លំហាត់ជំពូក 2

1. គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ ៖

ក. $f(x) = (7x+2)^2$ ខ. $g(x) = (x^2-8)^{-1}$ គ. $y = (4x^2+9x-3)^3$

ឃ. $f(x) = \sqrt[3]{5x^3-4}$ ង. $g(x) = x(4-3x^2)^2$ ច. $y = \dfrac{\sqrt{5x-2}}{x^3}$ ។

2. គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ ៖

ក. $y = x^3 \sin 2x$ ខ. $y = 3x^3 - x\cos 3x$ គ. $y = -x\cos(4-3x^2)$

ឃ. $f(x) = \dfrac{\sin^2 3x}{x^2}$ ង. $f(x) = \dfrac{\tan 2x}{x^2-1}$ ច. $f(x) = \cos(\sin^2 3x)$ ។

3. គណនាដេរីវេទី 2 នៃអនុគមន៍ ៖

ក. $f(x) = x^3 - 4x^2 - x + 8$ ខ. $f(x) = x^4 + 6x^{\frac{3}{2}} - 9$ គ. $f(x) = (2x^2+7)^{\frac{2}{3}}$

ឃ. $f(x) = 5x + \dfrac{2}{x+1}$ ង. $f(x) = x^2 - \dfrac{14}{x-2}$ ច. $f(x) = \dfrac{7x+2}{x^3}$ ។

4. រក y' ជាអនុគមន៍នៃ x និង y ៖

ក. $x^3 + y^3 = 5$ ខ. $xy^2 = -1$ គ. $x - \sqrt{y} = 2$

ឃ. $2y + \sqrt{xy} = 5x^2$ ង. $x^2 + 4(y+3)^2 = 9$ ច. $x^3y + xy^3 = 3x^3$ ។

5. រក y' និង y'' ជាអនុគមន៍នៃ x និង y ៖

ក. $x^2 + xy = 5$ ខ. $x^2y^2 - 2x = 3$ គ. $x^2 - y^2 = 16$

ឃ. $1 - xy = x - y$ ង. $y^2 = x^3$ ច. $y^2 = 4x$ ។

6. ត្រីកោណសមបាត ABC មួយមានបរិមាត្រ $2p$ វិលជុំវិញកម្ពស់ដែលគូសចេញពីកំពូល A កំណត់បានសូលីតមួយមានមាឌធំបំផុត ។ គណនារង្វាស់ជ្រុងនិងកម្ពស់នៃត្រីកោណសមបាតនោះ ។

7. រថយន្តមួយចាប់ផ្តើមចេញដំណើរពីចំណុចត្រួតពិនិត្យមួយ ។ នៅខណៈ t វិនាទីរថយន្តនោះឃ្លាតពីចំណុចត្រួតពិនិត្យដែលតាងដោយអនុគមន៍ចម្ងាយចរ $S(t) = 4.4t^2$ គិតជាម៉ែត្រ ហើយ $0 \le t \le 10$ ។ ប្រើអនុគមន៍ខាងលើ រួចបំពេញតារាងខាងក្រោម ៖

t	0	2	4	6	8	10
$S(t)$						
$V(t)$						
$a(t)$						

ជំពូក 3 សិក្សាអថេរភាពនិងសង់ក្រាប

នៅក្នុងជំពូកនេះ គេនឹងសិក្សាអំពីអថេរភាពនិងក្រាបតាងអនុគមន៍ សនិទាន អនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែលនិងអនុគមន៍លោការីត ។ បន្ទាប់ពីសិក្សាមេរៀន សិក្សាអថេរភាពនិងសង់ក្រាបអនុគមន៍ សនិទាន អនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែលនិងអនុគមន៍លោការីត សិស្សអាចយកចំណេះដឹងនិងបំណិនទៅដោះស្រាយសមីការ ឬចំណោទបញ្ហាផ្សេងៗដែលទាក់ទងនឹងការប្រើប្រាស់ក្រាប ។

មេរៀនទី

1 អនុគមន៍សនិទាន

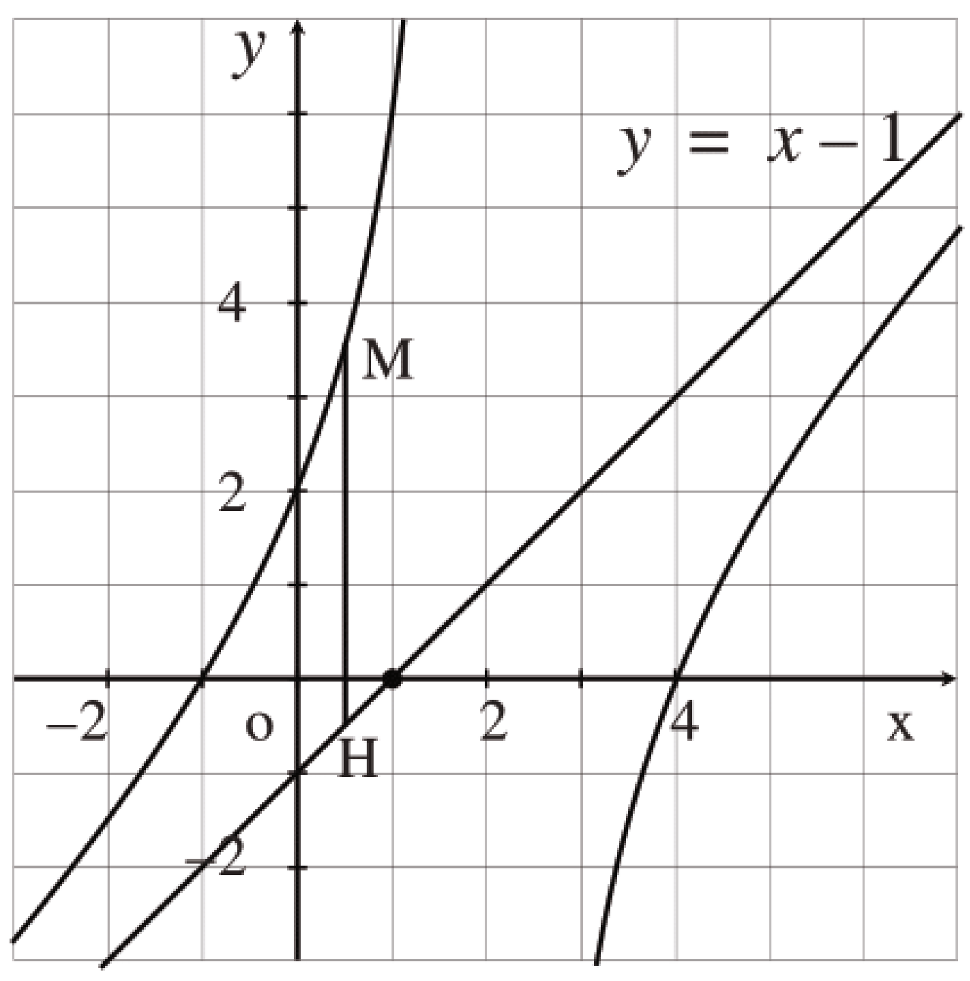
វត្ថុបំណង

- រកអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាបតាងអនុគមន៍សនិទាន
- សិក្សាអថេរភាពនិងសង់ក្រាបតាងអនុគមន៍សនិទាន
- ដោះស្រាយវិសមីការដោយប្រើក្រាប
- ពិភាក្សាអត្ថិភាពនិងសញ្ញាឫសនៃសមីការដឺក្រេទី 2 មានប៉ារ៉ាម៉ែត្រដោយប្រើក្រាប ។

1. អនុគមន៍ $y = \dfrac{ax^2 + bx + c}{px + q}$

1.1. អាស៊ីមតូតទ្រេត

ឧទាហរណ៍ 1: គេឲ្យអនុគមន៍ $f(x) = x - 1 + \dfrac{-6}{x-2}$ ដែលមានក្រាប C ។ បន្ទាត់មួយស្របនឹងអ័ក្សអរដោនេកាត់ក្រាប C ត្រង់ M និងកាត់បន្ទាត់ $y = x - 1$ ត្រង់ H ដែល $\overline{HM} = f(x) - (x-1)$ គេបាន $[f(x) - (x-1)] = \dfrac{-6}{x-2}$ ។



គេសង្កេតឃើញថា $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-6}{x-2} = 0$ និង $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{-6}{x-2} = 0$ ។

ដូចនេះ $\overline{HM}$ កាន់តែតូចទៅៗ ហើយខិតទៅជិត 0 កាលណា $x \to \pm\infty$ ។ គេថា ក្រាប C និងបន្ទាត់ $y = x - 1$ ខិតទៅជិតគ្នាកាលណា $x \to \pm\infty$ ។ បន្ទាត់នេះហៅថាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាបរបស់ $f(x) = x - 1 - \dfrac{6}{x-2}$ ។

ឧទាហរណ៍ 2: អនុគមន៍ $f(x) = \dfrac{x^2 - 3}{2x - 4}$ មានដឺក្រេនៃភាគយកធំជាងដឺក្រេនៃភាគបែងមួយដឺក្រេ ។ ដោយចែក $x^2 - 3$ នឹង $2x - 4$ គេបាន :

$$\begin{array}{r|l} & \frac{x}{2}+1 \\ \hline 2x-4 & x^2+0x-3 \\ & -x^2+2x \\ \hline & 0+2x-3 \\ & -2x+4 \\ \hline & 0+1 \end{array}$$

$f(x) = \dfrac{x^2-3}{2x-4} = \dfrac{x}{2}+1+\dfrac{1}{2x-4}$ ហើយ

$f(x)-\left(\dfrac{x}{2}+1\right) = \dfrac{1}{2x-4}$ កាលណា $x \to \pm\infty$ នោះ $\dfrac{1}{2x-4}$ ខិតទៅជិត 0 ។ ដូចនេះ បន្ទាត់ដែលមានសមីការ $y = \dfrac{x}{2}+1$ ខិតទៅជិតក្រាបនៃ f កាលណា x ខិតទៅរកអនន្ត ។

គេថា បន្ទាត់ $y = \dfrac{x}{2}+1$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាបតាងអនុគមន៍ f ។

និយមន័យ **:** បន្ទាត់ដែលមានសមីការ $y = ax+b$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាបរបស់ f កាលណា $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-(ax+b)] = 0$ ឬ $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(ax+b)] = 0$ ។

សម្គាល់ **:** តាមនិយមន័យគេបាន $f(x)-(ax+b) = \varepsilon(x)$ ដែល $\lim\limits_{x\to+\infty}\varepsilon(x) = 0$ ឬ $\lim\limits_{x\to-\infty}\varepsilon(x) = 0$ ។

គេសរសេរ : $\dfrac{f(x)}{x}-\dfrac{(ax+b)}{x} = \dfrac{\varepsilon(x)}{x}$

$\left(\dfrac{f(x)}{x} = a+\dfrac{b}{x}+\dfrac{\varepsilon(x)}{x}\right) \to a$ កាលណា x ខិតជិតអនន្ត ។

ម្យ៉ាងទៀត $f(x)-ax = b+\varepsilon(x) \to b$ កាលណា x ខិតជិតអនន្ត ។

ដូចនេះ បើ $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{f(x)}{x} = a$ និង $\lim\limits_{x\to\pm\infty}[f(x)-ax] = b$ នោះបន្ទាត់មាន សមីការ $y = ax+b$ ***ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាបតាង*** f ។

លំហាត់គំរូ 1 : រកអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាបតាងអនុគមន៍ $y = \dfrac{x^2+2x+3}{x+1}$ ។

ចម្លើយ : ដើម្បីរកអាស៊ីមតូតទ្រេត គេចែក x^2+2x+3 និង $x+1$

$$\begin{array}{r|l} & x+1 \\ \hline x+1 & x^2+2x+3 \\ & -x^2-x \\ \hline & 0+\ x+3 \\ & -x-1 \\ \hline & 0+2 \end{array}$$

$y = \dfrac{x^2+2x+3}{x+1} = x+1+\dfrac{2}{x+1}$

$y-(x+1) = \dfrac{2}{x+1}$

គេបាន $\lim\limits_{x\to\pm\infty}[y-(x+1)] = \lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{2}{x+1} = 0$ ។

ដូចនេះ តាមនិយមន័យ បន្ទាត់ $y = x+1$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេត ។

លំហាត់គំរូ2 : រកអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃអនុគមន៍ $y = \sqrt{4x^2+x+5}$ ។

ចម្លើយ : រកមេគុណនៃបន្ទាត់ $y = ax+b$

គេបាន $a = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{4x^2+x+5}}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x\sqrt{4+\left(\frac{1}{x}\right)+\frac{5}{x^2}}}{x} = 2$

$$b = \lim_{x\to+\infty}[f(x)-ax] = \lim_{x\to+\infty}(\sqrt{4x^2+x+5}-2x)$$

$$= \lim_{x\to+\infty}(\sqrt{4x^2+x+5}-2x)\times\frac{(\sqrt{4x^2+x+5}+2x)}{\sqrt{4x^2+x+5}+2x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(1+\frac{5}{x}\right)}{x\left(\sqrt{4+\frac{1}{x}+\frac{5}{x^2}}+2\right)} = \frac{1}{4} \text{ ។}$$

ដូចនេះ អនុគមន៍ខាងលើមានអាស៊ីមតូតទ្រេត $y = 2x+\frac{1}{4}$ ។

ប្រតិបត្តិ : រកអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាបតាងអនុគមន៍ខាងក្រោម ក្នុងករណី x ខិតទៅរក $+\infty$, $-\infty$ ៖

ក. $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x}$ ខ. $g(x) = \dfrac{x^2-5x+7}{x-2}$ គ. $h(x) = \sqrt{x^2+x+1}$ ។

1.2. សិក្សាអនុគមន៍ $y = \dfrac{ax^2+bx+c}{px+q}$

ឧទាហរណ៍ 1 : សិក្សា អថេរភាពនិងសង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ $f(x) = \dfrac{x^2-5x+7}{x-2}$ ។

- ដែនកំណត់ : $D = \mathbb{R}-\{2\}$ ។
- សរសេរជារាងកាណូនិច $f(x) = \dfrac{x^2-5x+7}{x-2} = x-3+\dfrac{1}{x-2}$ ។
- ទិសដៅអថេរភាព

- ដេរីវេ $f'(x) = \left(x-3+\dfrac{1}{x-2}\right)' = 1-\dfrac{1}{(x-2)^2} = \dfrac{x^2-4x+3}{(x-2)^2}$

$f'(x) = 0$ គេបាន $x^2-4x+3 = 0$ នាំឱ្យ $x = 1$, $x = 3$ ។

- បរមានៃ f

ចំពោះ $x = 1$ អនុគមន៍មានតម្លៃអតិបរមាធៀប $f(1) = \dfrac{1^2-5(1)+7}{1-2} = -3$

ចំពោះ $x = 3$ អនុគមន៍មានតម្លៃអប្បបរមាធៀប $f(3) = \dfrac{3^2-5(3)+7}{3-2} = 1$ ។

- គណនាលីមីត

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(x-3+\frac{1}{x-2}\right) = \lim_{x\to+\infty}(x) = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(x-3+\frac{1}{x-2}\right) = \lim_{x\to-\infty}(x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-}\left(x-3+\frac{1}{x-2}\right) = \lim_{x\to 2^-}\frac{1}{x-2} = -\infty$$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+}\left(x-3+\frac{1}{x-2}\right) = \lim_{x\to 2^+}\frac{1}{x-2} = +\infty \text{ ។}$$

- អាស៊ីមតូត : ដោយ $\lim_{x\to 2}\left(x-3+\frac{1}{x-2}\right) = \infty$ នោះបន្ទាត់សមីការ $x = 2$ ជាអាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាប ។

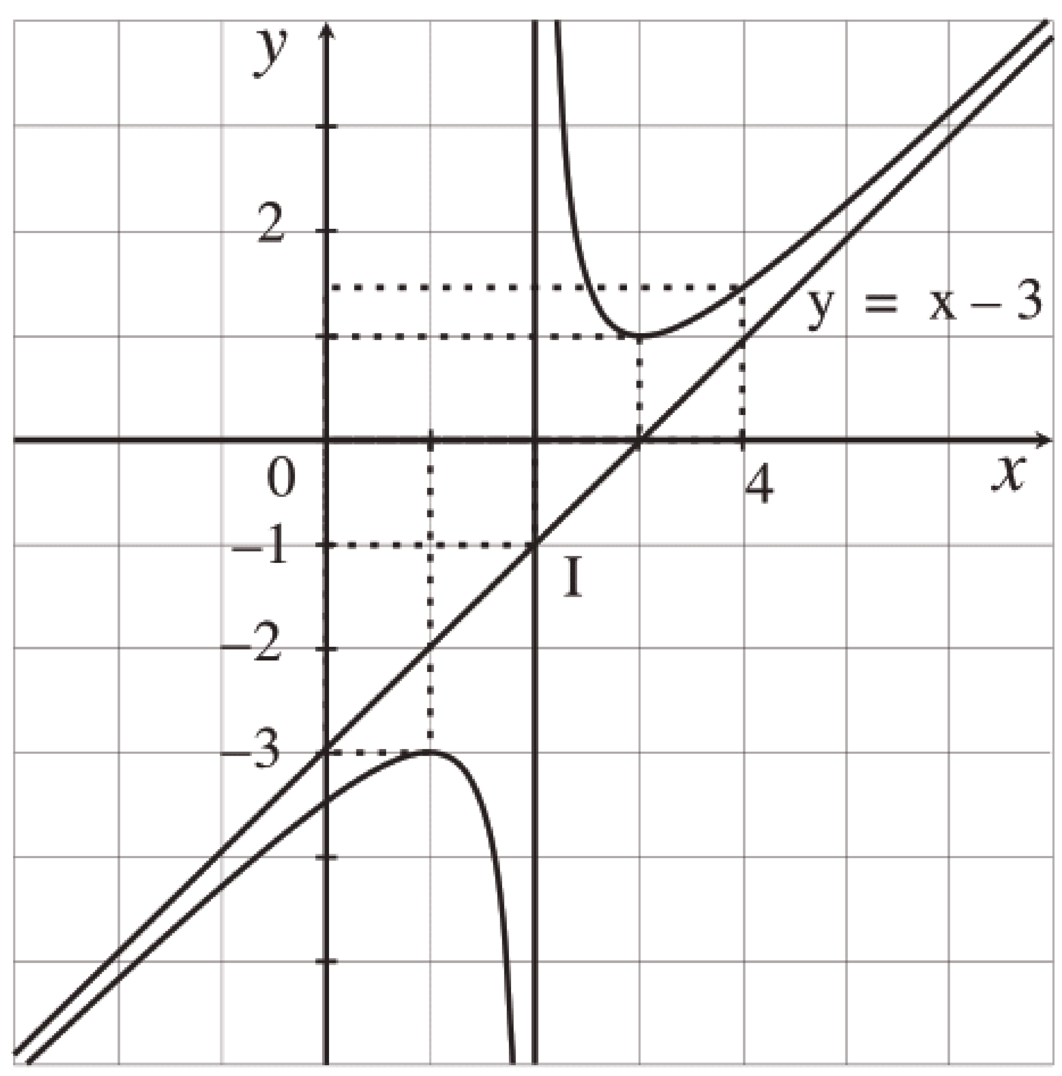
  ម្យ៉ាងទៀត $y = x-3+\frac{1}{x-2}$ ហើយ $\lim_{x\to\pm\infty}[f(x)-(x-3)] = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x-2} = 0$ ។

  ដូចនេះ បន្ទាត់ដែលមានសមីការ $y = x-3$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប ។

- តារាងអថេរភាព

x	$-\infty$		1		2		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-3	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

• សំណង់ក្រាប



- ចំណុចប្រសព្វរវាងក្រាបនិងអ័ក្ស $(x'ox)$:

  $y = 0$ សមមូល $\frac{x^2-5x+7}{x-2} = 0$ ។

  $x^2-5x+7 = 0$ មាន $\Delta = 25-28 = -3 < 0$

  សមីការគ្មានឬស ។ ក្រាបមិនកាត់អ័ក្ស $(x'ox)$ ទេ ។

- ចំណុចប្រសព្វរវាងក្រាបនិងអ័ក្ស $(y'oy)$:

  $x = 0$ សមមូល $f(0) = -\frac{7}{2}$ ។

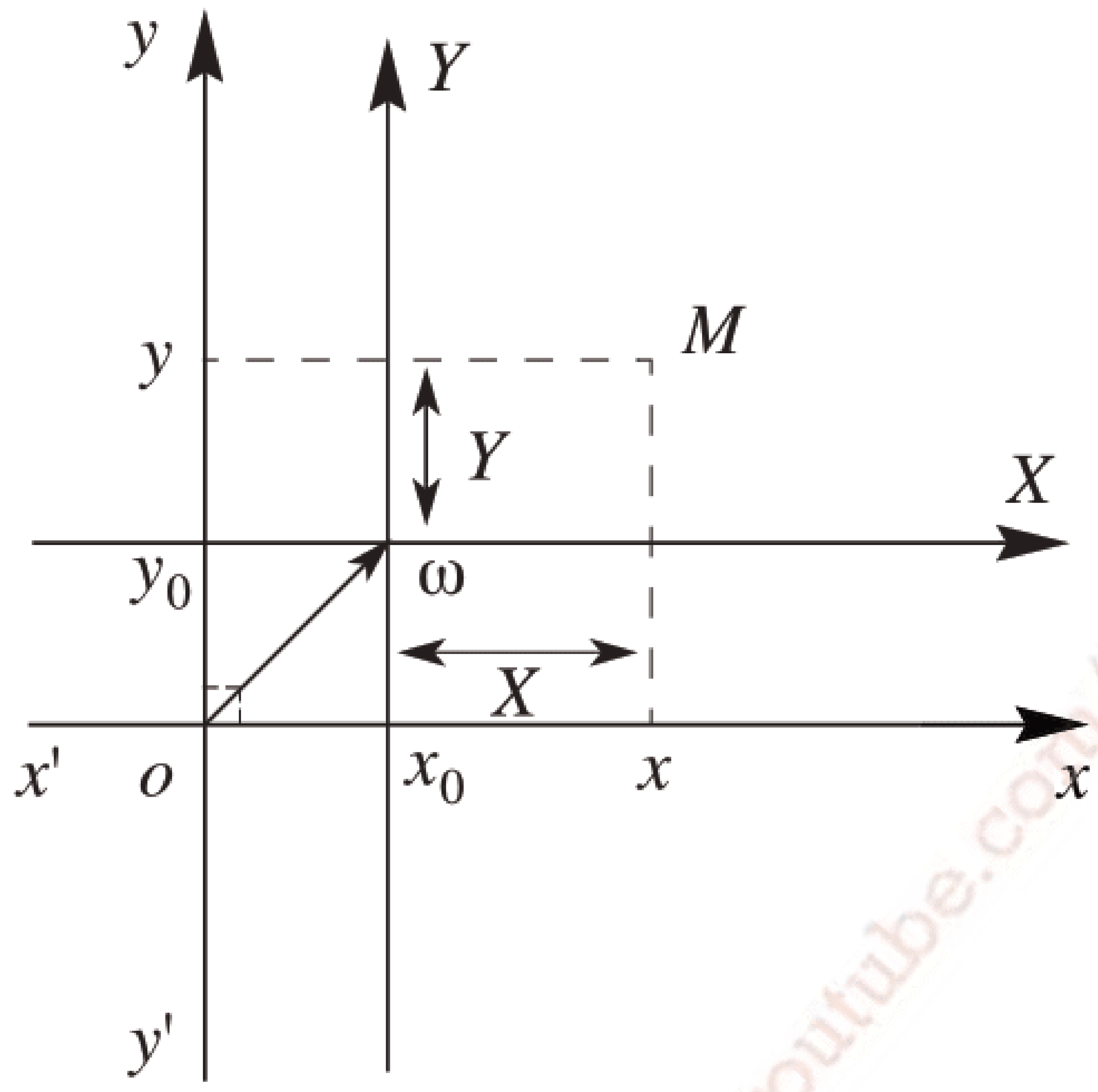
- ផ្ចិតឆ្លុះ : អាស៊ីមតូតឈរ $x = 2$ និងអាស៊ីមតូតទ្រេត $y = x-3$ កាត់គ្នាត្រង់ចំណុច $\mathrm{I}(2,\ -1)$ ។

  ដូចនេះ $f(4-x)+f(x) = -2 = 2b$ នាំឱ្យ $I(2,\ -1)$ ជាផ្ចិតឆ្លុះនៃក្រាប ។

សម្គាល់ : ចំពោះការរកផ្ចិតឆ្លុះ ឬអ័ក្សឆ្លុះនៃក្រាប គេប្រើរូបមន្តបំលែងកិលអ័ក្សក៏បានដែរ ។

យក $M(x,\ y)$ នៅក្នុងតម្រុយកែង $(ox,\ oy)$ ។ រំកិល o ទៅត្រង់ចំណុច $\omega(x_0,\ y_0)$ នោះអ័ក្ស $(x'x)$ រំកិលទៅរក (ωX) និង $(y'y)$ រំកិលទៅរក (ωY) ។

ដូចនេះកូអរដោនេនៃចំណុច M ធៀបនឹងតម្រុយថ្មី $(\omega X,\ \omega Y)$ គឺ $M(X,\ Y)$ ។



គេបាន $\begin{cases} x = x_0 + X \\ y = y_0 + Y \end{cases}$ ហៅថា រូបមន្តបំលែងកិលអ័ក្ស ។

បើគេរំកិលអ័ក្សកូអរដោនេ គេបាន $\begin{cases} x = 2 + X \\ y = -1 + Y \end{cases}$ ហើយ $y = \dfrac{x^2 - 5x + 7}{x - 2} = x - 3 + \dfrac{1}{x - 2}$

សមីការខ្សែកោង អាចសរសេរ

$Y - 1 = X + 2 - 3 + \dfrac{1}{2 + X - 2} = X - 1 + \dfrac{1}{X}$ នាំឱ្យ $Y = X + \dfrac{1}{X}$

តាង $Y = F(X) = X + \dfrac{1}{X}$

គ្រប់ $X \neq 0$, $F(-X) = -X + \dfrac{1}{-X} = -\left(X + \dfrac{1}{X}\right) = -F(X)$

$F(-X) = -F(X)$ នាំឱ្យ F ជាអនុគមន៍សេស ។

ដូចនេះ ខ្សែកោងមានចំនុច $I(2,\ -1)$ ជាផ្ចិតឆ្លុះ ។

ឧទាហរណ៍ 2 : សិក្សាអថេរភាព និង សង់ក្រាប C នៃអនុគមន៍ $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 1}$ ។

• ដែនកំណត់ $D = \mathbb{R} - \{1\}$

• សរសេរ $f(x)$ ជារាងកាណូនិច ដោយចែកភាគយក និងភាគបែង

គេបាន $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 1} = x + 1 - \dfrac{3}{x - 1}$ ។

• ទិសដៅអថេរភាព

- ដេរីវេ $f'(x) = \left(x + 1 - \dfrac{3}{x - 1}\right)' = 1 + \dfrac{3}{(x - 1)^2}$

  ដោយ $(x - 1)^2 > 0$ ចំពោះគ្រប់ $x \in D$ នោះ $f'(x) > 0$ ចំពោះគ្រប់ $x \in D$

  f ជាអនុគមន៍កើនលើ D ហើយ f គ្មានបរមាធៀបទេ ។

- គណនាលីមីត

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{3}{x - 1} = 0$ គេបាន $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} (x + 1) = +\infty$

និង $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} (x + 1) = -\infty$ ។

- អាស៊ីមតូត : ដោយ $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \pm\infty$ នោះគេបាន $x = 1$ ជាអាស៊ីមតូតឈរ ។

គេបាន $\lim\limits_{x \to \pm\infty} [f(x) - (x+1)] = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \left[\dfrac{3}{x-1}\right] = 0$

ដូចនេះ $y = x + 1$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប ។

- តារាងអថេរភាព

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$\|$	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty \; \| \; -\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

• សំណង់ក្រាប

- ចំណុចប្រសព្វរវាងក្រាប C និងអ័ក្ស ox : $y = 0$ សមមូល $\dfrac{x^2-4}{x-1} = 0$ ឬ $x^2 - 4 = 0$ ឬ $x^2 = 4$ នាំឱ្យ $x = -2$, $x = 2$ ។

- ចំណុចប្រសព្វរវាងក្រាប C និងអ័ក្ស oy : $x = 0$ នាំឱ្យ $f(0) = 4$ ។

- ផ្ចិតឆ្លុះ : អាស៊ីមតូតឈរ $x = 1$ និងអាស៊ីមតូតទ្រេត $y = x + 1$ កាត់គ្នាត្រង់ចំណុច $I(1,\ 2)$ ។ តាមរូបមន្តបំលែងកិលអ័ក្ស $\begin{cases} x = 1 + X \\ y = 2 + Y \end{cases}$ ហើយ $y = x + 1 - \dfrac{3}{x-1}$

គេបាន $2 + Y = 1 + X + 1 - \dfrac{3}{1 + X - 1} = X + 2 - \dfrac{3}{X}$

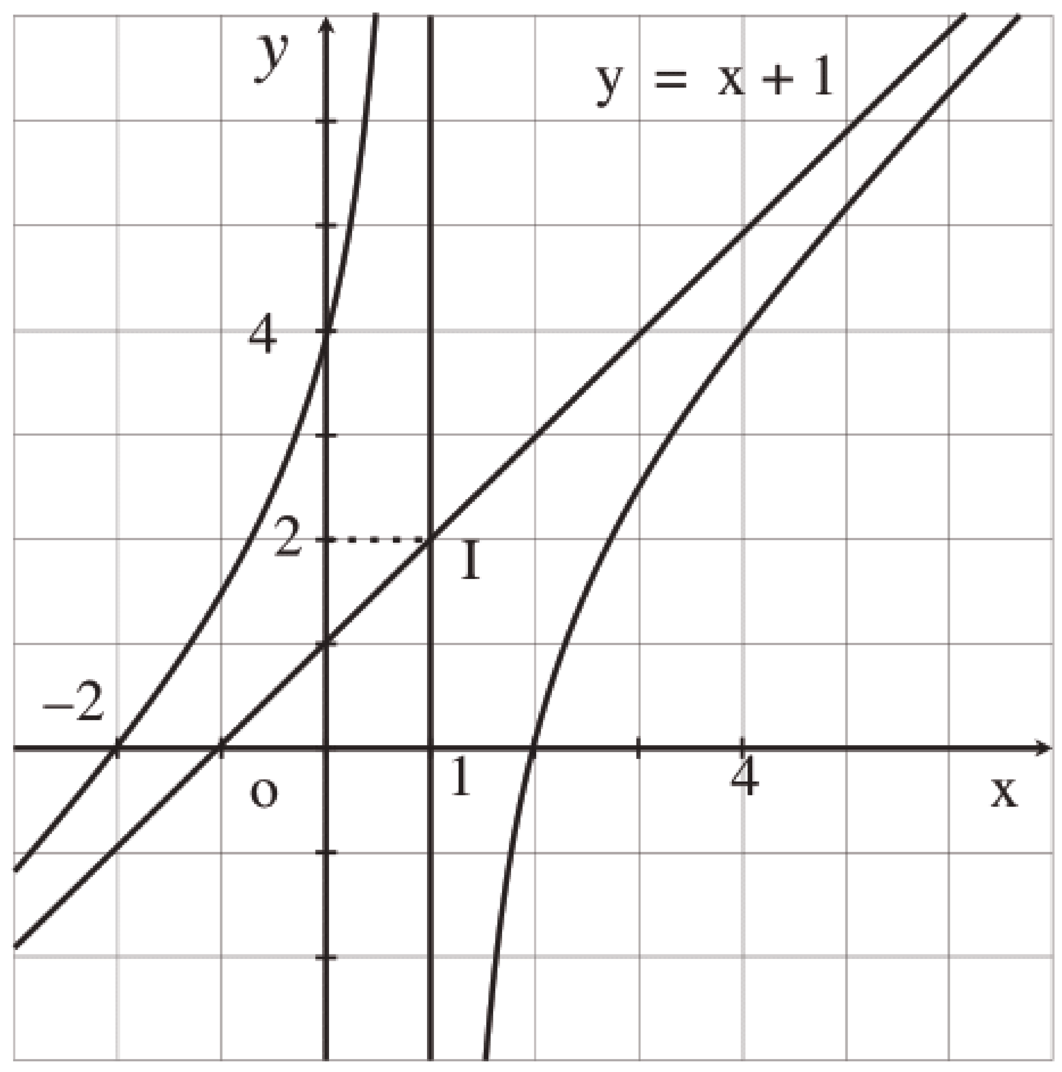
ដូចនេះ $Y = X + 2 - \dfrac{3}{X} - 2 = X - \dfrac{3}{X}$

$\forall x \in D$ គេបាន

$F(-X) = (-X) - \dfrac{3}{(-X)} = -\left(X - \dfrac{3}{X}\right) = -F(X)$

$F(-X) = -F(X)$ នាំឱ្យ $F(X)$ ជាអនុគមន៍សេស ។

ដូចនេះ $I(1,\ 2)$ ជាផ្ចិតឆ្លុះរបស់ក្រាប ។



ជាទូទៅ : មានអនុគមន៍ $y = \dfrac{ax^2 + bx + c}{px + q}$ ដែល $a \neq 0$, $p \neq 0$ និង $a{x_0}^2 + bx_0 + c \neq 0$ ចំពោះគ្រប់ $x_0 \neq -\dfrac{q}{p}$ ។

• ដែនកំណត់ : $D = \mathbb{R} - \left\{-\dfrac{q}{p}\right\}$

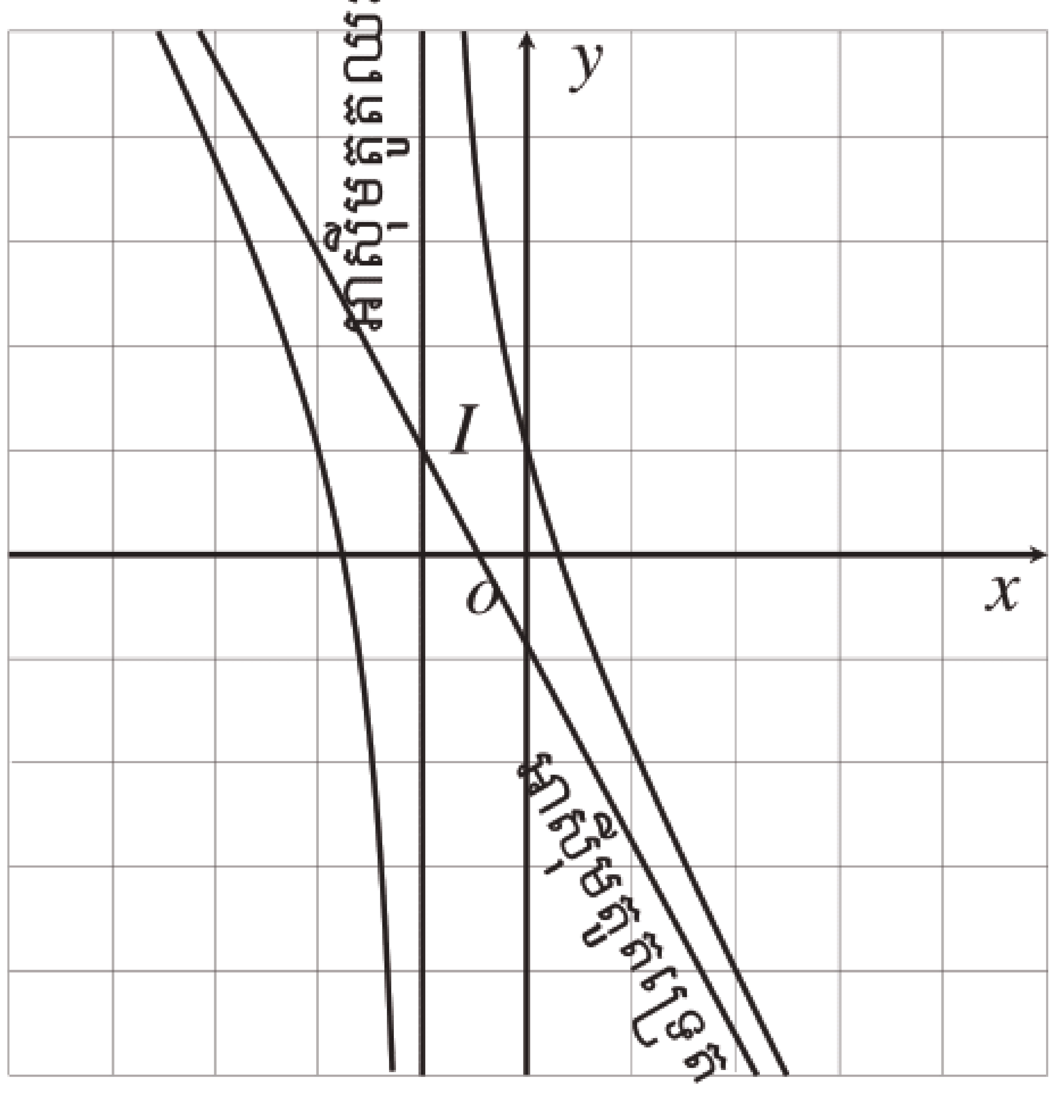
• ដេរីវេ : $y' = \dfrac{(ax^2 + bx + c)'(px + q) - (ax^2 + bx + c)(px + q)'}{(px + q)^2} = \dfrac{apx^2 + 2aqx + bq - cp}{(px + q)^2}$ ។

- បើ $y' = 0$ មានឬសពីរផ្សេងគ្នា នោះអនុគមន៍មានអតិបរមាមួយ និងអប្បបរមាមួយ ។
- បើ $y' = 0$ គ្មានឬស នោះអនុគមន៍គ្មានបរមាទេ ។
- បើ $y' = 0$ មានឬសឌុប នោះអនុគមន៍គ្មានបរមាទេ ។

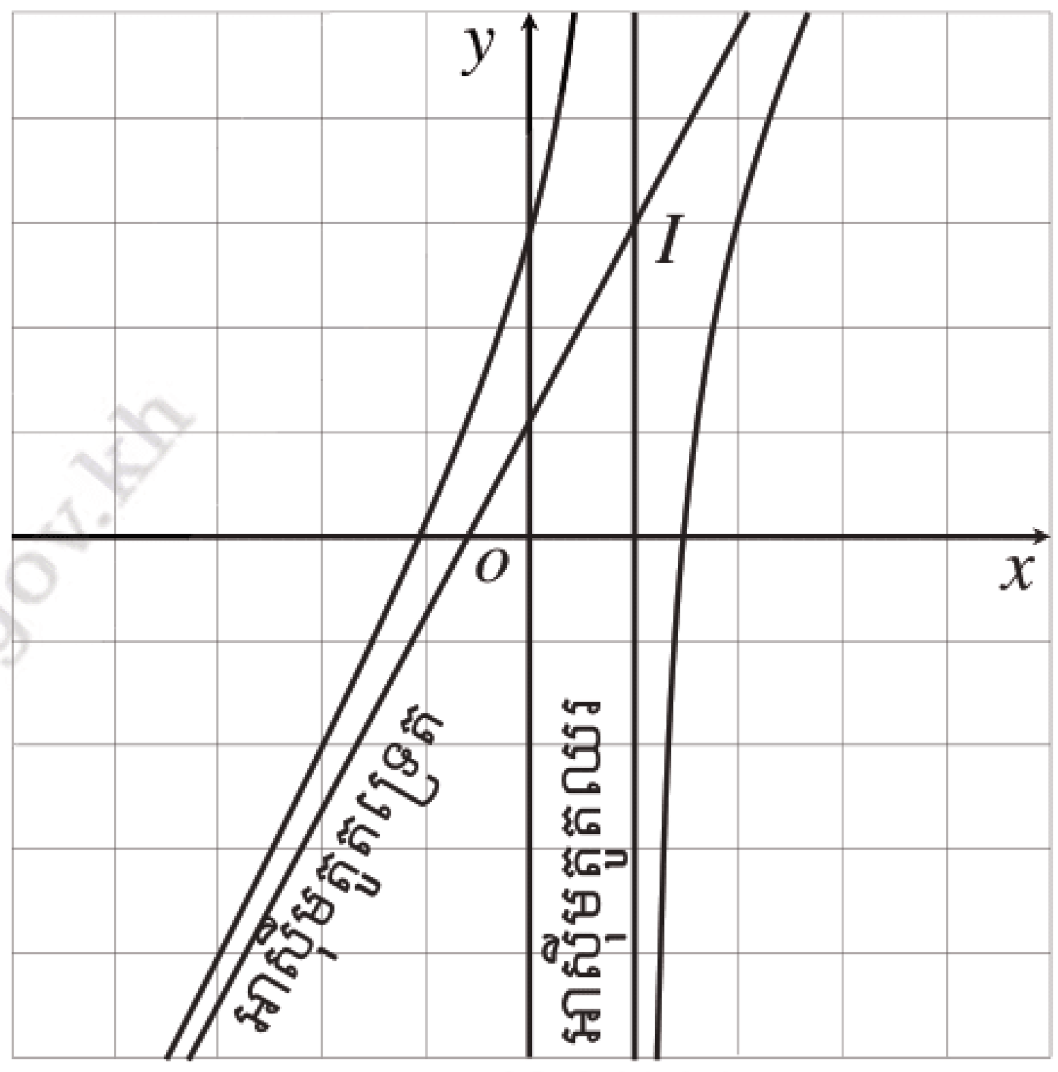
• អាស៊ីមតូត ៖ បន្ទាត់ $x = -\frac{q}{p}$ ជាអាស៊ីមតូតឈរ ។

- បើ $y = mx + n + \frac{k}{px+q}$ នោះបន្ទាត់ $y = mx + n$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេត ។
- ក្រាបជាអ៊ីពែរបូល ដែលផ្ចិតឆ្លុះជាចំណុចប្រសព្វរវាងអាស៊ីមតូតទាំងពីរ ។
- ក្រាបមានរាងទូទៅដូចខាងក្រោម ៖

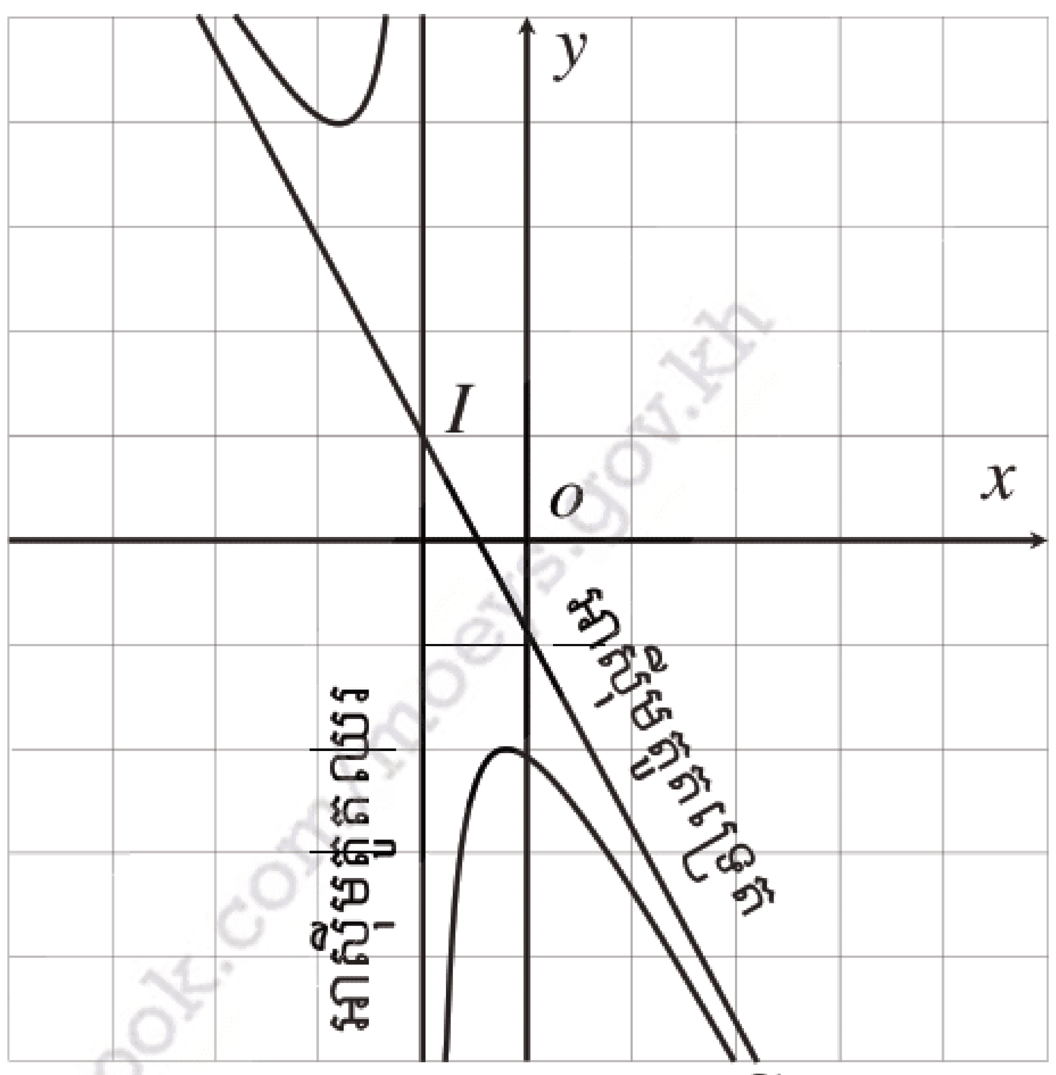
$$y = \frac{ax^2 + bx + c}{px + q}$$



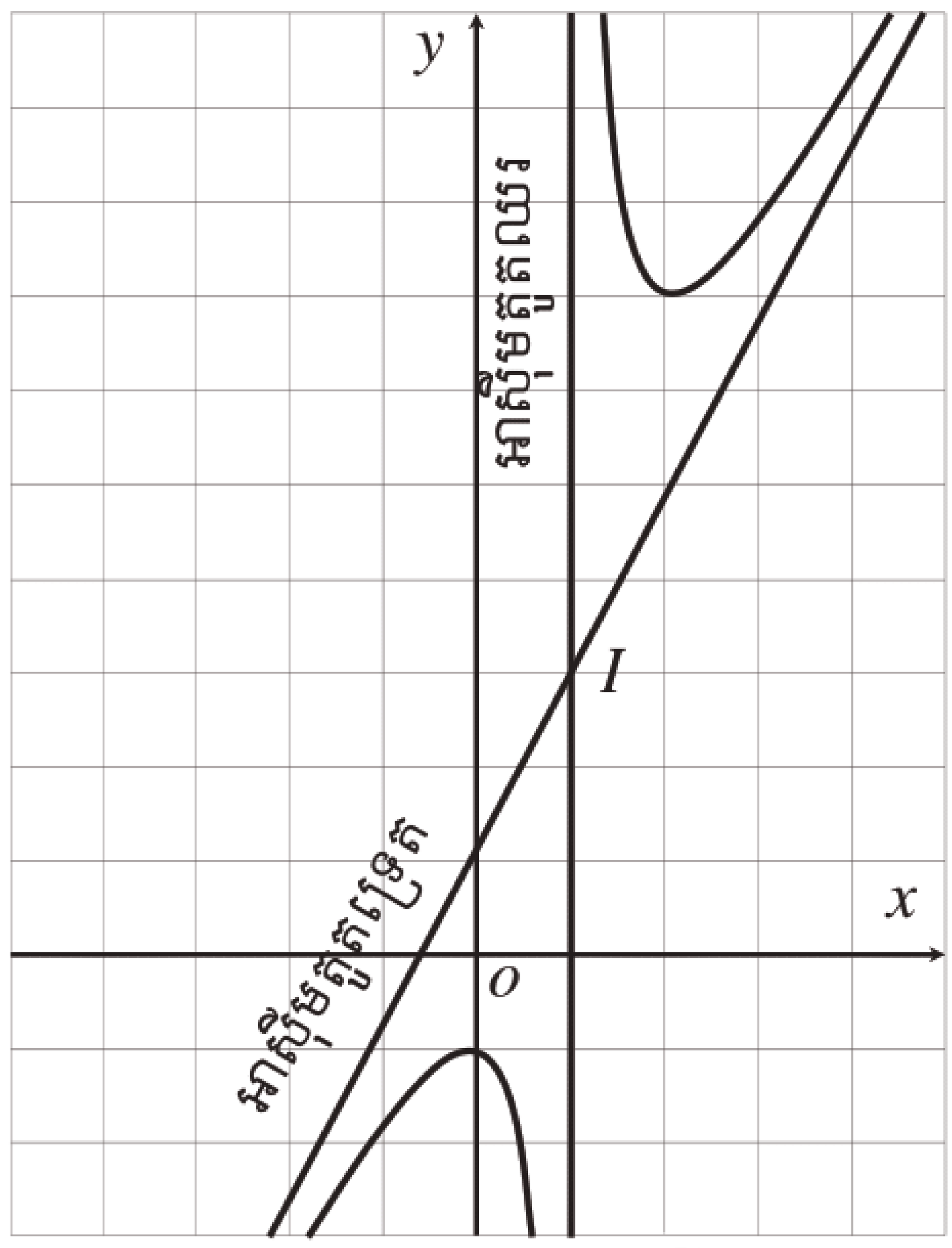
$a < 0,\ y' = 0$ គ្មានឬស



$a > 0,\ y = 0$ គ្មានឬស



$a < 0; y' = 0$ មានឬសពីរផ្សេងគ្នា



$a > 0; y' = 0$ មានឬសពីរផ្សេងគ្នា

ប្រតិបត្តិ : សិក្សាអថេរភាពនិងសង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម ៖

ក. $y = \frac{x^2 - x + 9}{x - 1}$ ខ. $y = \frac{x^2 - x - 2}{x - 1}$ ។

2. សិក្សាអនុគមន៍ $y = \dfrac{ax^2+bx+c}{px^2+qx+r}$

ឧទាហរណ៍ 1 : សិក្សាអថេរភាពនិងសង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ $f(x) = \dfrac{2x^2-9x+4}{x^2+x-12}$ ។

• ដែនកំណត់ : សមីការ $x^2+x-12 = 0$ មានឫសពីរគឺ $x = -4$ និង $x = 3$ ។

ដូចនេះ អនុគមន៍ $f(x)$ មានដែនកំនត់ $D = \mathbb{R}-\{-4,\ 3\}$ ។

• ទិសដៅអថេរភាព

• ដេរីវេ $f'(x) = \dfrac{(4x-9)(x^2+x-12)-(2x+1)(2x^2-9x+4)}{(x^2+x-12)^2} = \dfrac{11x^2-56x+104}{(x^2+x-12)^2}$

$f'(x) = 0$ គេបាន $11x^2-56x+104 = 0$ មាន $\Delta' = 28^2-(11\times 104) = 784-1144<0$

និង $a = 11>0$ ។ ដូចនេះ $f'(x)>0$ ចំពោះគ្រប់ $x\in D$ ។ អនុគមន៍ $f(x)$ កើនលើ D ។

- គណនាលីមីត $\lim\limits_{x\to -4^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -4^-}\dfrac{2x^2-9x+4}{x^2+x-12} = +\infty$

និង $\lim\limits_{x\to -4^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -4^+}\dfrac{2x^2-9x+4}{x^2+x-12} = -\infty$ ។

$\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{2x^2-9x+4}{x^2+x-12} = +\infty$

និង $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{2x^2-9x+4}{x^2+x-12} = -\infty$ ។

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x^2-9x+4}{x^2+x-12} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2\left(2-\frac{9}{x}+\frac{4}{x^2}\right)}{x^2\left(1+\frac{x}{2}-\frac{12}{x^2}\right)} = 2 \text{ ។}$$

- អាស៊ីមតូត : គេមាន $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 2$ គេបានបន្ទាត់ $y = 2$ ជាអាស៊ីមតូតដេកនៃក្រាប ។ $\lim\limits_{x\to -4} f(x) = \pm\infty$ និង $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = \pm\infty$ គេបានសមីការ $x = -4$ និងសមីការ $x = 3$ ជាអាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាប ។

- តារាងអថេរភាព

x	$-\infty$		-4		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$+$	‖	$+$	
$f(x)$	2	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	2

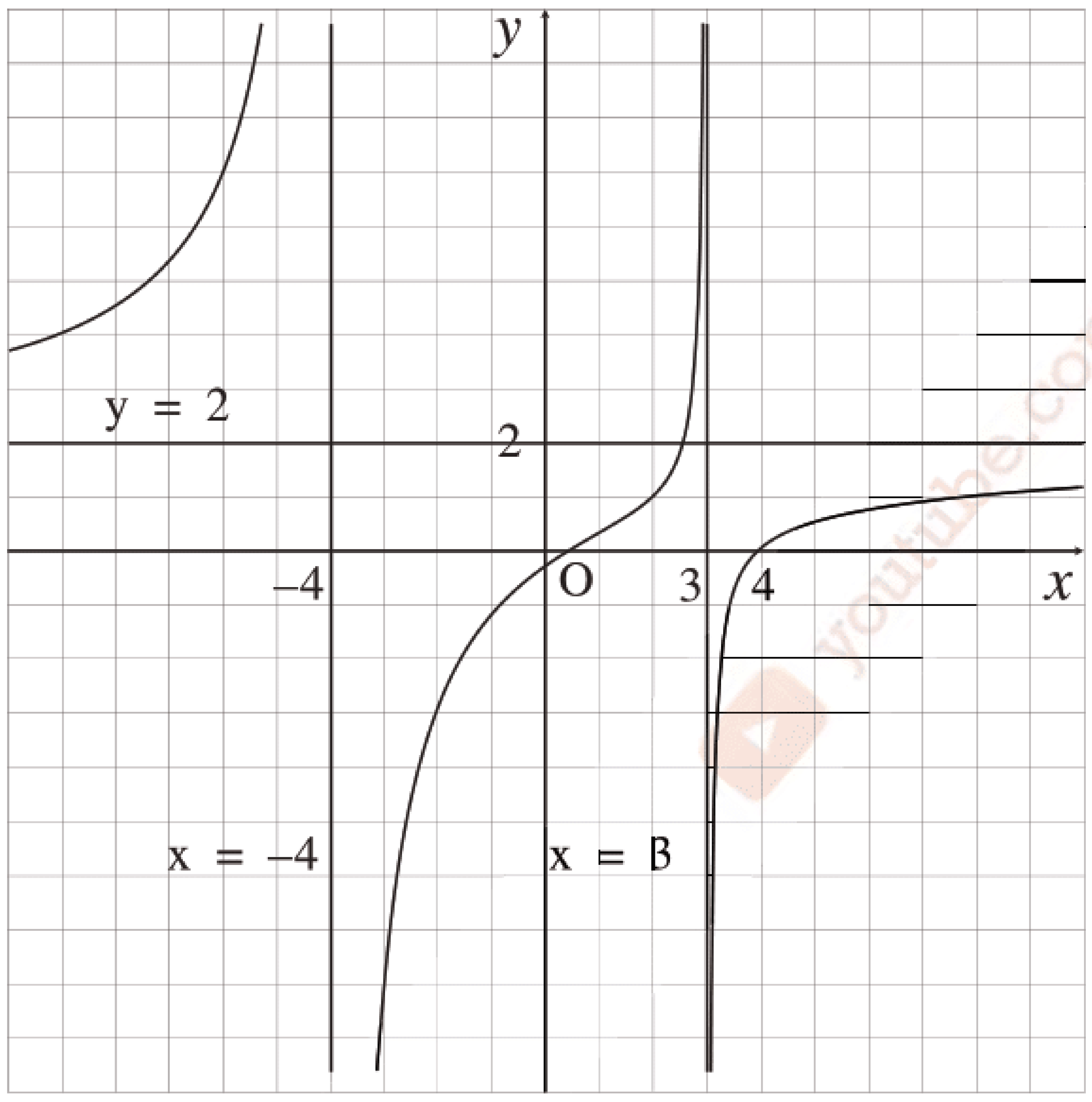
• សំណង់ក្រាប :

- ចំណុចប្រសព្វរវាងក្រាប C និងអ័ក្ស $x'ox$ គឺ $y = 0$ សមមូល $2x^2-9x+4 = 0$

មាន $\Delta = 81-32 = 49$ មានឫស $x' = \dfrac{9-7}{4} = \dfrac{1}{2}$ និង $x'' = \dfrac{9+7}{4} = 4$ ។

- ចំណុចប្រសព្វរវាងក្រាប C និងអ័ក្ស $y'oy$ គឺ $x = 0$ នាំឱ្យ $f(0) = -\frac{1}{3}$ ។
- ក្រាបកាត់អាស៊ីមតូត $y = 2$ ត្រង់ចំណុចដែលមានកូអរដោនេផ្ទៀងផ្ទាត់

$$\begin{cases} y = 2 \\ y = \dfrac{2x^2 - 9x + 4}{x^2 + x - 12} \end{cases}$$



ឬ $2 = \dfrac{2x^2 - 9x + 4}{x^2 + x - 12}$ ឬ

$2(x^2 + x - 12) = 2x^2 - 9x + 4$

ឬ $2x^2 + 2x - 24 = 2x^2 - 9x + 4$

$11x = 28$ នាំឱ្យ $x = \frac{28}{11}$ ។

ដូចនេះ ក្រាបកាត់អាស៊ីមតូត $y = 2$ ត្រង់ចំនុច $x = \frac{28}{11}$ ។

ឧទាហរណ៍ 2: សិក្សាអថេរភាពនិងសង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ $y = f(x) = \dfrac{3x^2 - 18x + 25}{x^2 - 6x + 8}$

- ដែនកំណត់ : សមីការ $x^2 - 6x + 8 = 0$ មានឫសពីរគឺ $x = 2$ និង $x = 4$ ។ ដូចនេះ អនុគមន៍ខាងលើ មានដែនកំណត់ $D = \mathbb{R} - \{2,\ 4\}$ ។
- ទិសដៅអថេរភាព
  - ដេរីវេ

$$f'(x) = \frac{(3x^2 - 18x + 25)'(x^2 - 6x + 8) - (3x^2 - 18x + 25)(x^2 - 6x + 8)'}{(x^2 - 6x + 8)^2}$$

$$= \frac{(6x - 18)(x^2 - 6x + 8) - (3x^2 - 18x + 25)(2x - 6)}{(x^2 - 6x + 8)^2}$$

$$= \frac{-2x + 6}{(x^2 - 6x + 8)^2} \quad ។$$

$f'(x) = 0$ នាំឱ្យ $x = 3$

ចំពោះ $x = 3$ នាំឱ្យ $f(3) = \dfrac{3(3)^2 - 18(3) + 25}{3^2 - 6(3) + 8} = \dfrac{27 - 54 + 25}{9 - 18 + 8} = 2$ ។

អនុគមន៍មានតម្លៃអតិបរមាធៀបស្មើនឹង 2 ត្រង់ $x = 3$ ។

- គណនាលីមីត $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{3x^2 - 18x + 25}{x^2 - 6x + 8} = 3$ ។

- អាស៊ីមតូត

ដោយ $\lim_{x \to 2} f(x) = \pm\infty$ និង $\lim_{x \to 4} f(x) = \pm\infty$ នោះគេបានបន្ទាត់ $x = 2$ និង $x = 4$ ជាអាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាប ។

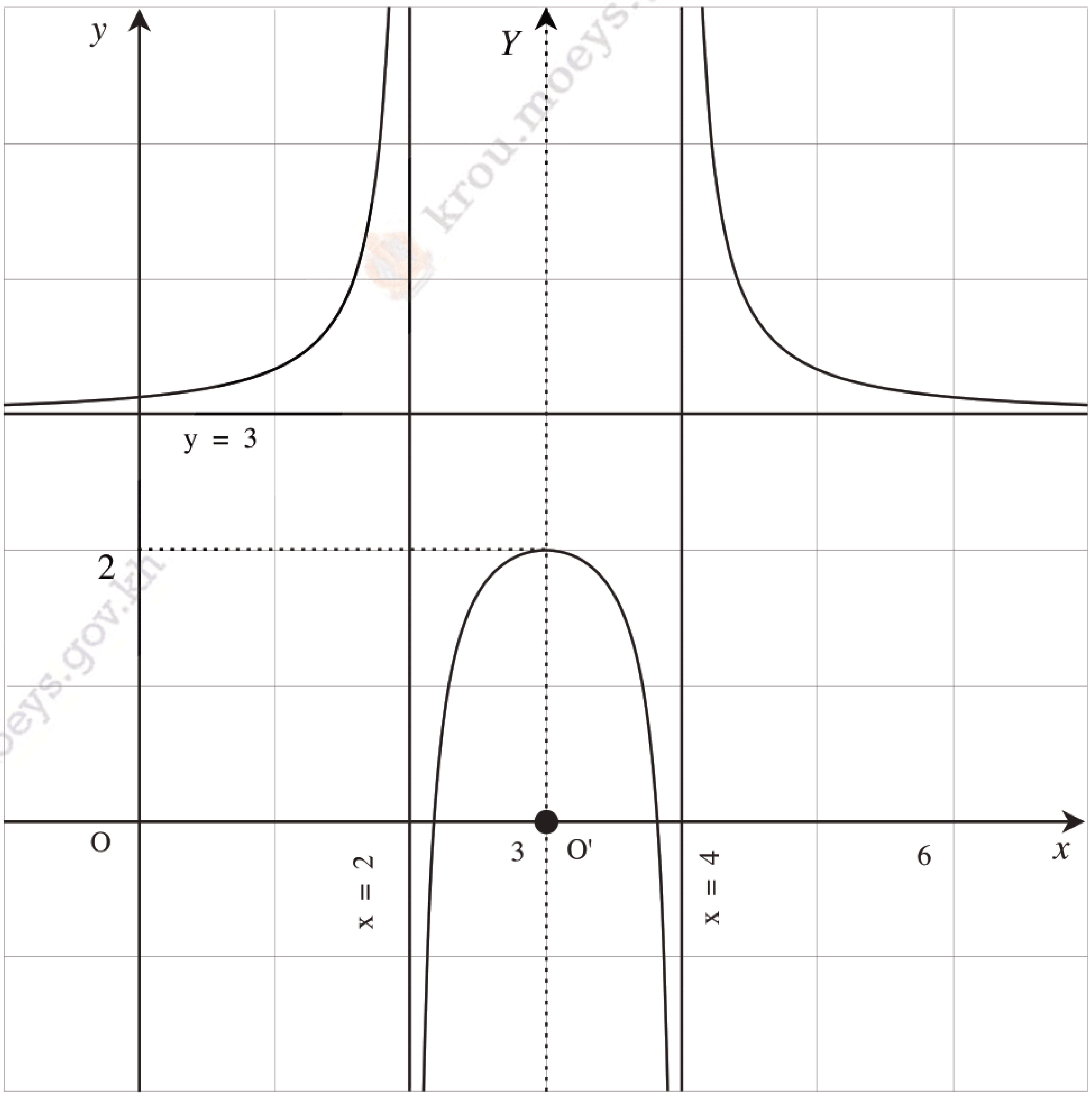
ដោយ $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 3$ នោះបន្ទាត់ $y = 3$ ជាអាស៊ីមតូតដេកនៃក្រាប ។

• តារាងអថេរភាព

x	$-\infty$		2		3		4		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$+$	0	$-$	‖	$-$	
$f(x)$	3	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	2	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	3

• សំណង់ក្រាប

- ចំណុចប្រសព្វរវាងក្រាប C នឹងអ័ក្ស $x'ox$ គឺ $y = 0$ សមមូល $\frac{3x^2 - 18x + 25}{x^2 - 6x + 8} = 0$ ឬ $3x^2 - 18x + 25 = 0$ នាំឱ្យ $x = \frac{9 - \sqrt{6}}{3}$ និង $x = \frac{9 + \sqrt{6}}{3}$ ។
- ចំណុចប្រសព្វរវាងក្រាប C នឹងអ័ក្ស $y'oy$ គឺ $x = 0$ នាំឱ្យ $f(0) = \frac{25}{8}$ ។

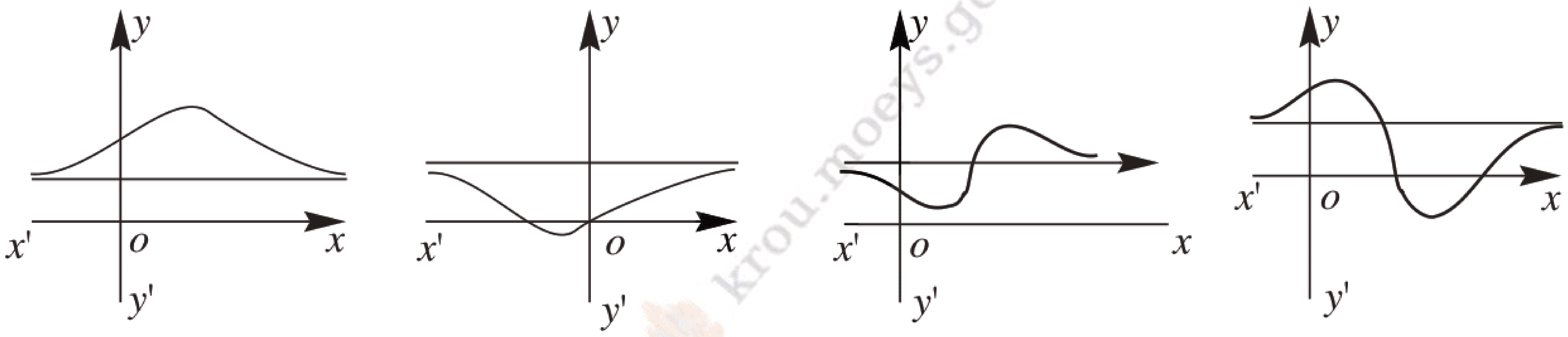


ជាទូទៅ **:** អនុគមន៍ $y=\dfrac{ax^2+bx+c}{px^2+qx+r}$ ដែល a , b , c ខុសពីសូន្យ និង $p\neq 0$ អនុគមន៍មានលក្ខណៈមួយចំនួនដូចខាងក្រោម ៖

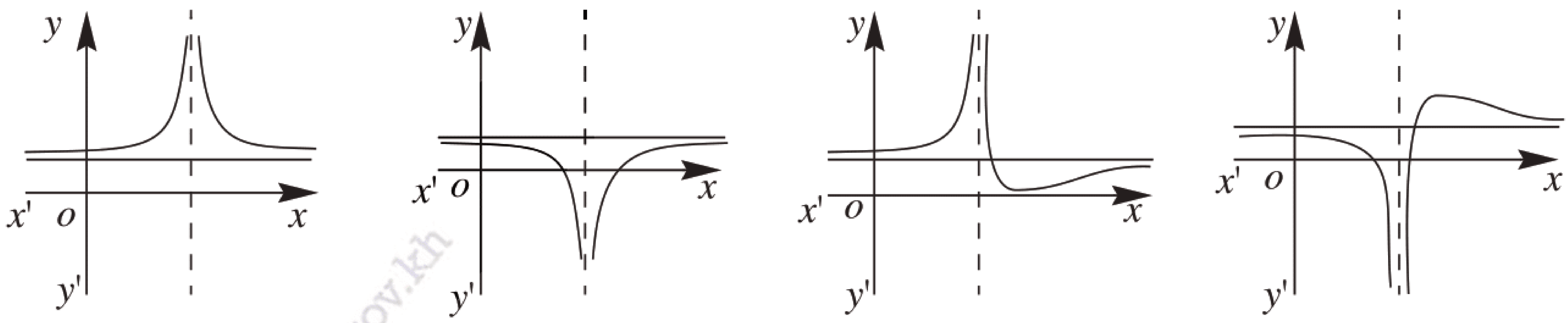
- គ្រប់ក្រាបតាងអនុគមន៍នេះ មានអាស៊ីមតូតដេកមួយជានិច្ច ។
- ចំនួនអាស៊ីមតូតឈរគឺអាស្រ័យនឹងឫសសមីការ $px^2+qx+r=0$ ។
  - បើ $\Delta=q^2-4pr<0$ គ្មានអាស៊ីមតូតឈរទេ និងក្រាបមានមែកតែមួយ ។
  - បើ $\Delta=q^2-4pr=0$ មានអាស៊ីមតូតឈរមួយ $x=-\dfrac{q}{2p}$ និងក្រាបមានមែកពីរដាច់គ្នា ។
  - បើ $\Delta=q^2-4pr>0$ មានអាស៊ីមតូតឈរពីរ $x=\dfrac{-q\pm\sqrt{\Delta}}{2p}$ និងក្រាបមានមែកបីដាច់គ្នា ។

ក្រាបនៃអនុគមន៍ $y=\dfrac{ax^2+bx+c}{px^2+qx+r}$ មានរាងដូចខាងក្រោម :

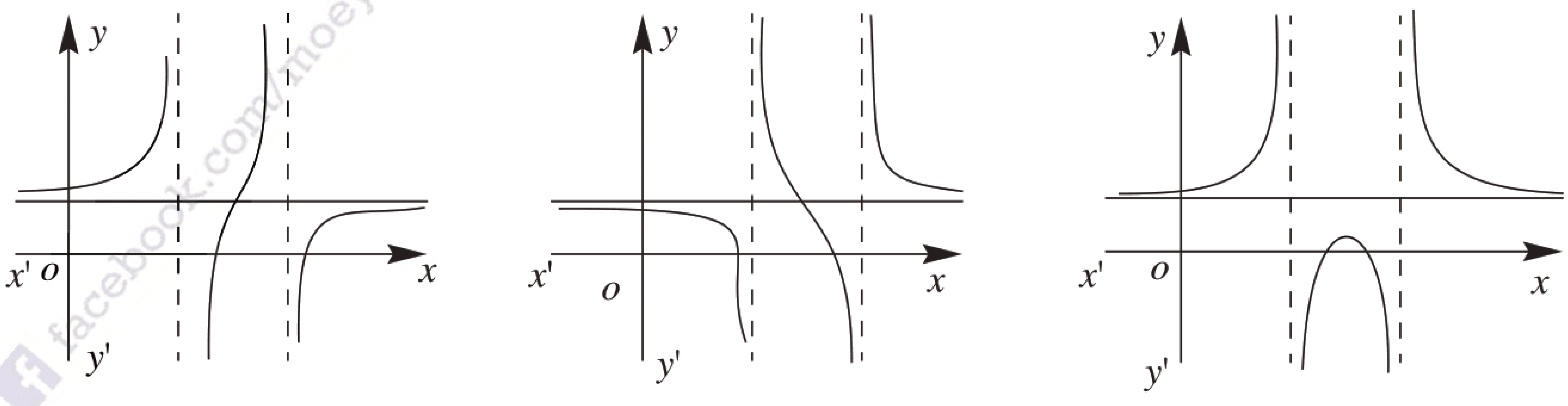
1. $\Delta<0$

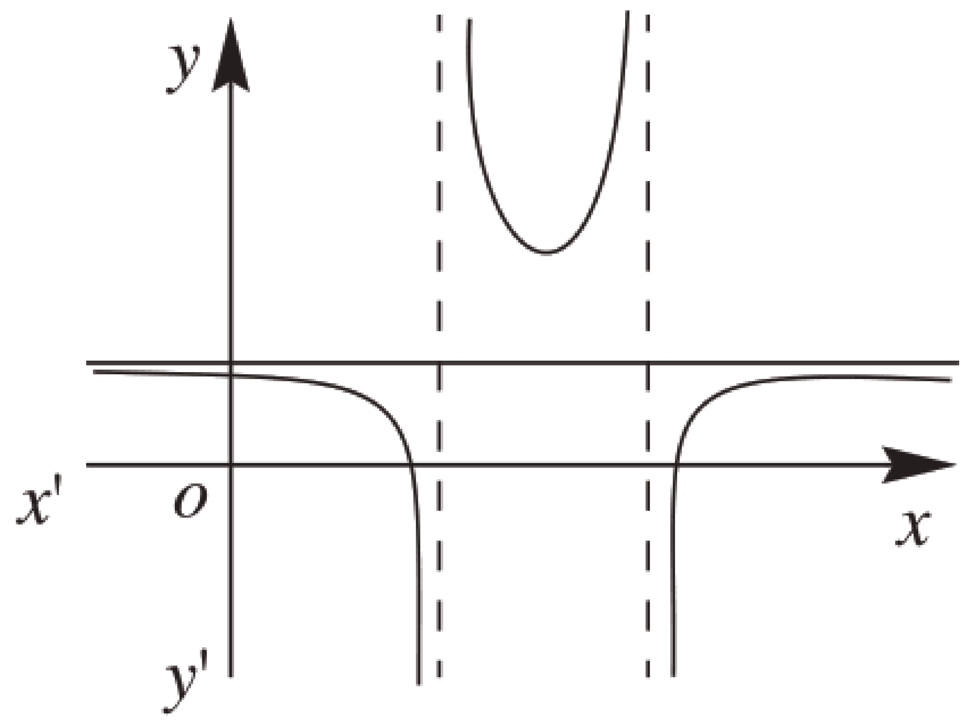


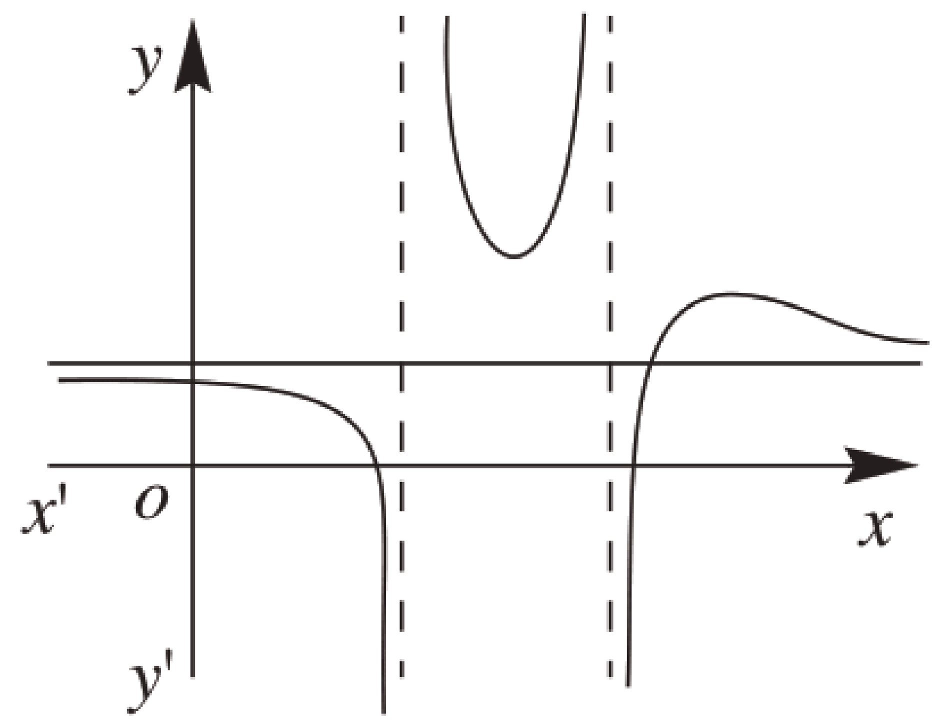
2. $\Delta=0$

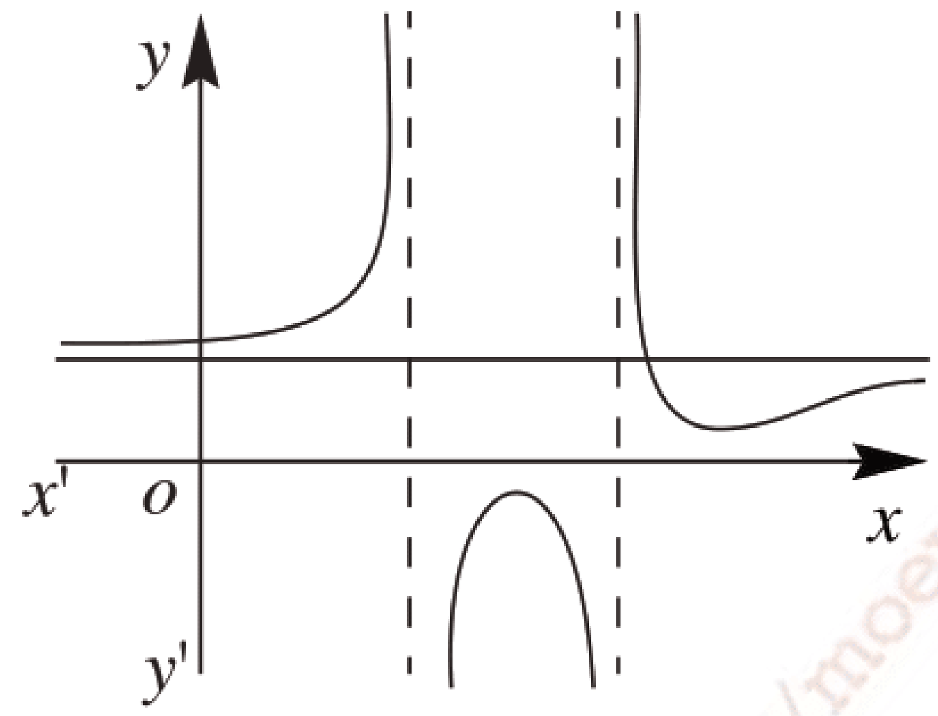


3. $\Delta>0$









លំហាត់គំរូ : សិក្សាអថេរភាពនិងសង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម ៖

ក. $y = f(x) = \dfrac{x^2+2x}{x^2+4}$ ខ. $y = g(x) = \dfrac{x^2-1}{(x+2)^2}$ ។

ចម្លើយ : សិក្សាអថេរភាពនិងសង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម ៖

ក. $y = \dfrac{x^2+2x}{x^2+4}$

- ដែនកំណត់ $D = \mathbb{R}$ ។
- ទិសដៅអថេរភាព

– ដេរីវេ $f'(x) = \dfrac{(2x+2)(x^2+4)-(x^2+2x)2x}{(x^2+4)^2} = \dfrac{-2x^2+8x+8}{(x^2+4)^2}$

$f'(x) = 0$ គេបាន $-2x^2+8x+8 = 0$ ឬ $x^2-4x-4 = 0$ មានឫសពីរ $x = 2\pm2\sqrt{2}$ ។ បើ $x = 2+2\sqrt{2}$ នាំឱ្យ $f(2+2\sqrt{2}) = \dfrac{1+\sqrt{2}}{2}$ និង $x = 2-2\sqrt{2}$ នាំឱ្យ $f(2-2\sqrt{2}) = \dfrac{1-\sqrt{2}}{2}$ ។ អនុគមន៍មានតម្លៃអប្បបរមាធៀបស្មើនឹង $\dfrac{1-\sqrt{2}}{2}$ ត្រង់ $x = 2-2\sqrt{2}$ និង មានតម្លៃអតិបរមាធៀបស្មើនឹង $\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}$ ត្រង់ $x = 2+2\sqrt{2}$ ។

– គណនាលីមីត $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x^2\left(1+\frac{2}{x}\right)}{x^2\left(1+\frac{4}{x^2}\right)} = 1$ ។

– អាស៊ីមតូត

ដោយ $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 1$ គេបានសមីការបន្ទាត់ $y = 1$ ជាអាស៊ីមតូតដេកនៃក្រាប ។

– តារាងអថេរភាព

x	$-\infty$		$2-2\sqrt{2}$		$2+2\sqrt{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	1	$\searrow$	$\dfrac{1-\sqrt{2}}{2}$	$\nearrow$	$\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}$	$\searrow$	1

• សំណង់ក្រាប : ចំនុចប្រសព្វរវាងក្រាប C នឹង

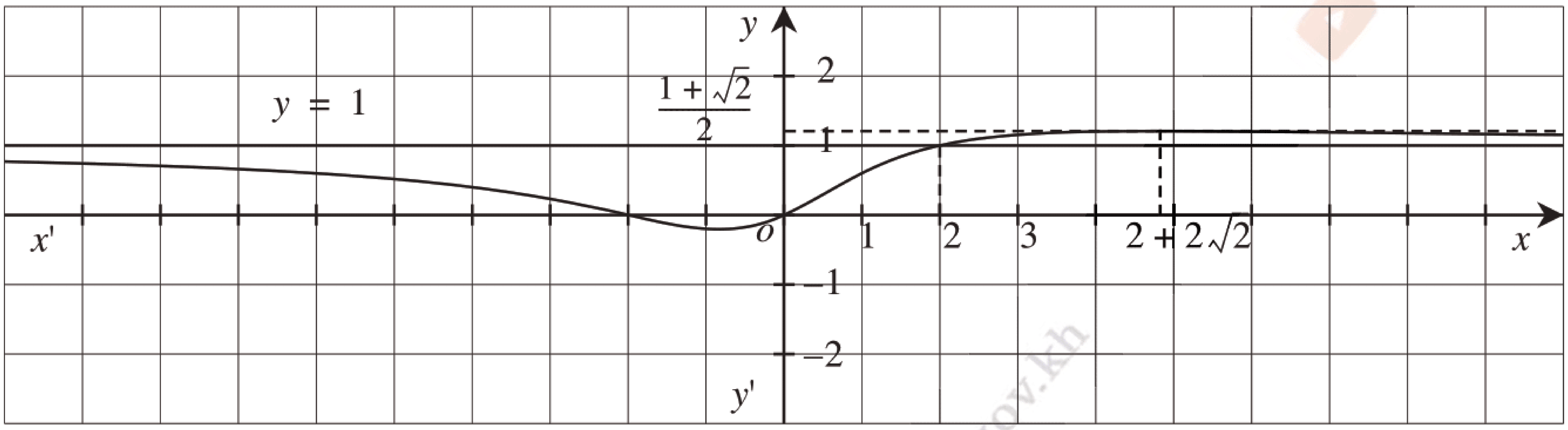
- អ័ក្ស $x'ox$ គឺ $y = 0$ សមមូល $\frac{x^2+2x}{x^2+4} = 0$ នាំឱ្យ $x = 0$, $x = -2$

- អ័ក្ស $y'oy$ គឺ $x = 0$ នាំឱ្យ $f(0) = 0$ ។

- ក្រាបកាត់អាស៊ីមតូត $y = 1$ ត្រង់ចំណុចដែលមានកូអរដោនេផ្ទៀងផ្ទាត់ $\begin{cases} y = 1 \\ y = \frac{x^2+2x}{x^2+4} \end{cases}$

ឬ $1 = \frac{x^2+2x}{x^2+4}$ ឬ $x^2+4 = x^2+2x$ នាំឱ្យ $x = 2$ ។

ដូចនេះ ក្រាបកាត់អាស៊ីមតូត $y = 1$ ត្រង់ចំណុច $x = 2$ ។



២. $y = f(x) = \frac{x^2-1}{(x+2)^2}$

• ដែនកំណត់ : សមីការ $(x+2)^2 = 0$ មានឫសឌុបគឺ $x = -2$ ។

ដូចនេះ អនុគមន៍ f មានដែនកំណត់ $D = \mathbb{R} - \{-2\}$ ។

• ទិសដៅអថេរភាព

- ដេរីវេ $f'(x) = \frac{(2x)(x+2)^2 - 2(x^2-1)(x+2)}{(x+2)^4} = \frac{2(2x+1)}{(x+2)^3}$

$f'(x) = 0$ គេបាន $\frac{2(2x+1)}{(x+2)^3} = 0$ ឬ $2x+1 = 0$ នាំឱ្យ $x = -\frac{1}{2}$ ។

ចំពោះ $x = -\frac{1}{2}$ នាំឱ្យ $f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 1}{\left(-\frac{1}{2}+2\right)^2} = \frac{-\frac{3}{4}}{\frac{9}{4}} = -\frac{1}{3}$

អនុគមន៍មានតម្លៃអប្បបរមាធៀបស្មើនឹង $-\frac{1}{3}$ ត្រង់ $x = -\frac{1}{2}$ ។

- គណនាលីមីត : $\lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = +\infty$ និង $\lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = +\infty$ ។

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2-1}{(x+2)^2} = 1 \text{ ។}$$

- អាស៊ីមតូត : គេមាន $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 1$ គេបានសមីការបន្ទាត់ $y = 1$ ជាអាស៊ីមតូតដេកនៃក្រាប ។ $\lim_{x \to -2} f(x) = +\infty$ គេបាន សមីការ $x = -2$ ជាអាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាប ។

• តារាងអថេរភាព

x	$-\infty$		-2		$-1/2$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	1	↗ $+\infty$	‖	$+\infty$ ↘	$-1/3$	↗	1

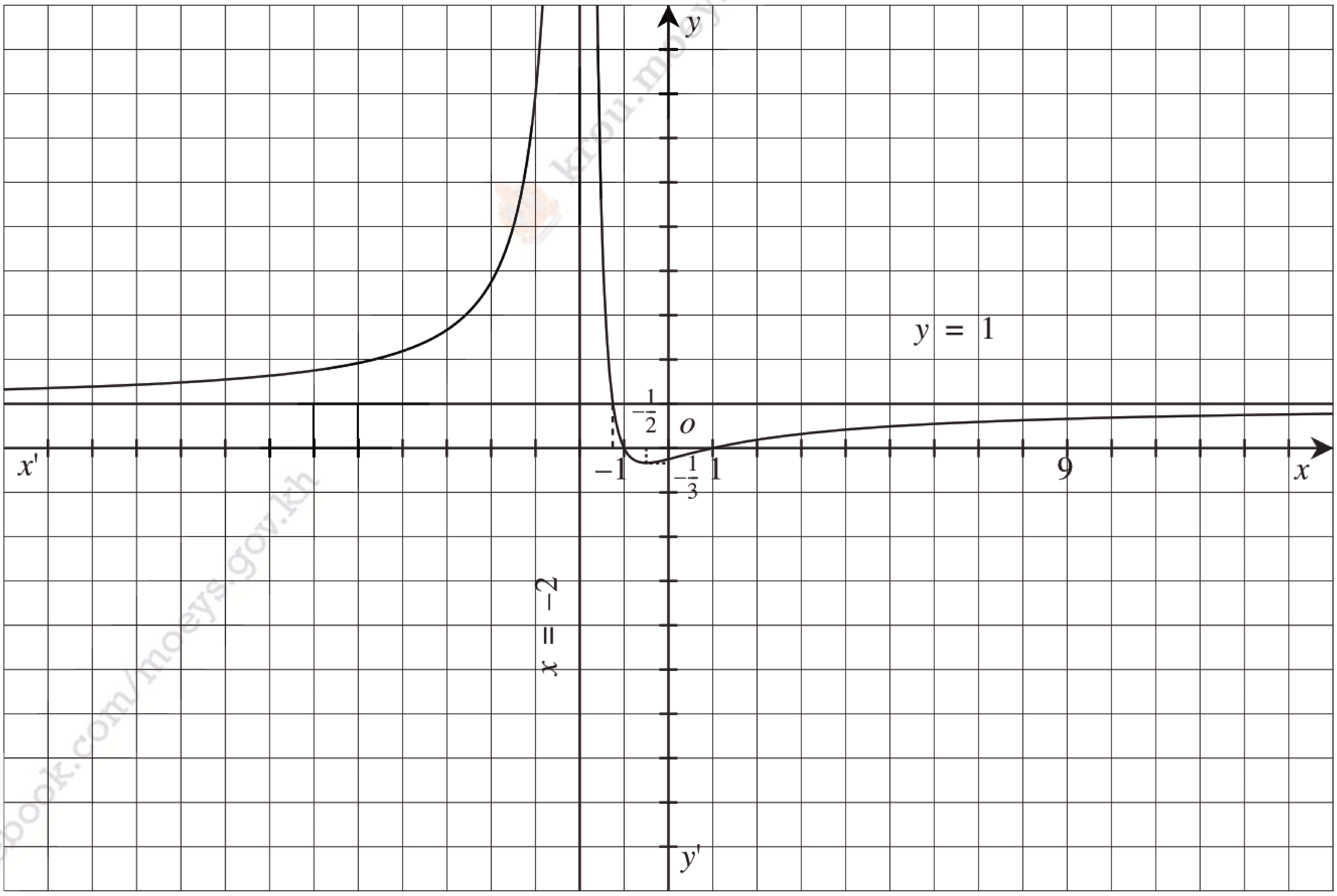
• សំណង់ក្រាប

- ចំណុចប្រសព្វរវាងក្រាប C នឹងអ័ក្ស ox : $y = 0$ សមមូល $x^2 - 1 = 0$ មានឫស $x' = -1$ និង $x'' = 1$ ។

- ចំណុចប្រសព្វរវាងក្រាប C នឹងអ័ក្ស oy : $x = 0$ នាំឱ្យ $f(0) = \dfrac{0-1}{(0+2)^2} = -\dfrac{1}{4}$ ។

- ក្រាបកាត់អាស៊ីមតូត $y = 1$ ត្រង់ចំណុចដែលមានកូអរដោនេផ្ទៀងផ្ទាត់ $\begin{cases} y = 1 \\ y = \dfrac{x^2-1}{(x+2)^2} \end{cases}$

$x^2 - 1 = (x+2)^2$ ឬ $x^2 - 1 = x^2 + 4x + 4$ នាំឱ្យ $x = -\dfrac{5}{4}$ ។



ប្រតិបត្តិ: សិក្សាអថេរភាពនិងសង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម ៖

ក. $y = \dfrac{-x^2-2x+3}{x^2+3x+2}$ ខ. $y = \dfrac{6x^2+x+7}{x^2-15x+20}$ គ. $y = \dfrac{x^2-9x+14}{x^2-15x+50}$ ។

3. អនុវត្តន៍

លំហាត់គំរូ1 : គេឱ្យអនុគមន៍ $y = \dfrac{mx^2+1}{x}$ ដែលមានក្រាប C_m

ក. សិក្សាអថេរភាពនិងសង់ក្រាប ចំពោះ $m = 1$ ។

ខ. កំណត់តម្លៃ m ដើម្បីឱ្យអនុគមន៍កើនក្នុងចន្លោះ $\left[\dfrac{1}{2} \quad +\infty\right)$ ។

គ. តើមានចំណុចនឹង ដែលស្ថិតនៅលើក្រាប C_m ចំពោះគ្រប់ m ឬទេ ?

ឃ. ដោយប្រើក្រាប C_1 កំណត់តម្លៃ a ដើម្បីឱ្យ $x^2 - ax + 1 > 0$ ចំពោះគ្រប់ $x > 0$ ។

ចម្លើយ :

ក. សិក្សាអថេរភាព និងសង់ក្រាប ចំពោះ $m = 1$ នោះ $C_1 \ : y = \dfrac{x^2+1}{x}$ ។

• ដែនកំណត់ $D = \mathbb{R} - \{0\}$ ។

• ទិសដៅអថេរភាព

- ដេរីវេ $f'(x) = \dfrac{(x^2+1)'x - (x^2+1)(x)'}{x^2} = \dfrac{x^2-1}{x^2}$

  $f'(x) = 0$ គេបាន $x^2 - 1 = 0$ នាំឱ្យ $x = -1$, $x = 1$ ។

- ចំណុចបរមា

  ចំពោះ $x = -1$ អនុគមន៍មានតម្លៃអតិបរមាធៀប $f(-1) = \dfrac{(-1)^2+1}{(-1)} = -2$

  ចំពោះ $x = 1$ អនុគមន៍មានតម្លៃអប្បបរមាធៀប $f(1) = \dfrac{1^2+1}{1} = 2$ ។

- គណនាលីមីត

  $$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} x = \pm\infty \text{ និង } \lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{1}{x} = \pm\infty \text{ ។}$$

- អាស៊ីមតូត : ដោយ $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \pm\infty$ នោះ $x = 0$ ជាអាស៊ីមតូតឈរ ។

  អនុគមន៍ $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$ មាន $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ គេបាន $\lim\limits_{x \to \pm\infty} [f(x) - x] = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \left(\dfrac{1}{x}\right) = 0$

  នាំឱ្យ $y = x$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេត នៃក្រាប ។

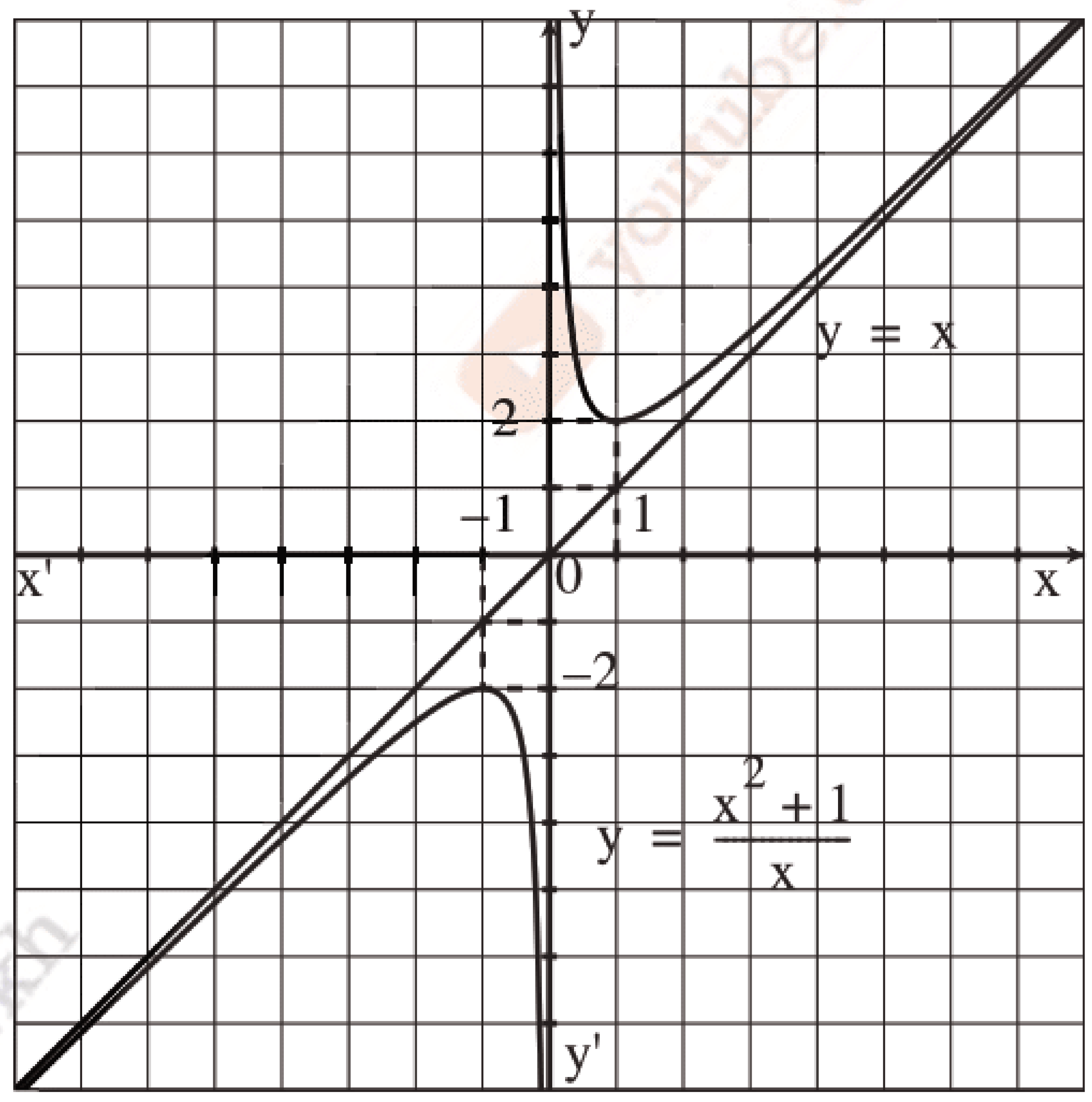
• តារាងអថេរភាព

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-2	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

• សំណង់ក្រាប

- កាត់អ័ក្ស ox គឺ $y = 0$ សមមូល $\frac{x^2+1}{x} = 0$ ឬ $x^2+1 = 0$ សមីការគ្មានឫស ក្រាបមិនកាត់អ័ក្ស ox និង $x \neq 0$ ក្រាបមិនកាត់អ័ក្ស oy ទេ ។

- ផ្ចិតឆ្លុះៈ អាស៊ីមតូតឈរ $x = 0$ និងអាស៊ីមតូតទ្រេត $y = x$ កាត់គ្នាត្រង់ចំណុច $O(0,\ 0)$ ។



ខ. គេត្រូវរកតម្លៃ m ដើម្បីឱ្យ $y' > 0$ ក្នុងចន្លោះ $\left[\frac{1}{2};\ +\infty\right)$

$$y' = \frac{2mx^2 - mx - 1}{x^2} = \frac{mx^2 - 1}{x^2}$$

- បើ $m \leq 0$ នោះ $y' < 0$: y ជាអនុគមន៍ចុះនៅលើ $R - \{0\}$ ។

- បើ $m > 0$ y មានតម្លៃបរមា

$mx^2 - 1 = 0$ នាំឱ្យ $x = \sqrt{\frac{1}{m}}$; $x = -\sqrt{\frac{1}{m}}$

ដើម្បីឱ្យ y កើនក្នុងចន្លោះ លុះត្រាតែ $\sqrt{\frac{1}{m}} \leq \frac{1}{2}$; $m \geq 4$ ។

x		$-\sqrt{1/m}$		$\sqrt{1/m}$	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$

គ. រកចំណុចនឹងដែលក្រាប C_m ទាំងអស់កាត់តាមចំណុចនោះ

តាង $A(x_A,\ y_A)$ ជាចំណុចដែលក្រាប C_m ទាំងអស់កាត់តាម

គេបាន $y_A = \frac{m{x_A}^2 + 1}{x_A}$ ចំពោះគ្រប់ $m \in \mathbb{R}$ និង $x_A \neq 0$

$x_A y_A = m{x_A}^2 + 1$ ឬ $m{x_A}^2 + 1 - x_A y_A = 0$ ចំពោះគ្រប់ $m \in R$ និង $x \neq 0$ ។

បើ C_m កាត់តាម $A(x_A,\ y_A)$ ចំពោះគ្រប់ $m \in \mathbb{R}$ នោះ $\begin{cases} x_A^2 = 0 \\ 1 - x_A y_A = 0 \end{cases}$ គ្មានឫស ។

ដូច្នេះ គ្មានចំណុចនឹង $A(x_A,\ y_A)$ ណាដែលក្រាប C_m ទាំងអស់កាត់ទេ ។

ឃ. កំណត់ a ដើម្បីឱ្យ $x^2 - ax + 1 > 0$ ចំពោះគ្រប់ $x > 0$

គេមាន $x^2 - ax + 1 > 0$, គ្រប់ $x > 0$ គេបាន $\frac{x^2+1}{x} > a$, គ្រប់ $x > 0$

តាមក្រាប គេឃើញថា $\frac{x^2+1}{x} > a$ ចំពោះគ្រប់ $x > 0$ កាលណា $a < 2$ ។

លំហាត់គំរូ2 : គេឱ្យអនុគមន៍ $f \ : y = \dfrac{x^2-x+2}{x-1}$ ។

ក. សិក្សាអថេរភាពនិងសង់ក្រាប C នៃអនុគមន៍ f ។

ខ. ដោយប្រើក្រាប C ទាញរកក្រាបរបស់អនុគមន៍ $y = \left|\dfrac{x^2-x+2}{x-1}\right|$ ។

គ. ដោយប្រើក្រាប C សិក្សាទៅតាមតម្លៃ m នូវចំនួនឫសនៃសមីការ

$x^2-|x|+2 = m(|x|-1)$ ។

ចម្លើយ :

ក. សិក្សាអថេរភាពនិងសង់ក្រាប C : $y = \dfrac{x^2-x+2}{x-1} = x+\dfrac{2}{x-1}$ ។

• ដែនកំណត់ $D = \mathbb{R}-\{1\}$ ។

• ទិសដៅអថេរភាព

- ដេរីវេ $f'(x) = \dfrac{x^2-2x-1}{(x-1)^2}$

$f'(x) = 0$ គេបាន $\dfrac{x^2-2x-1}{(x-1)^2} = 0$ នាំឱ្យ $x = 1+\sqrt{2}$, $x = 1-\sqrt{2}$ ។

- ចំណុចអតិបរមា

ចំពោះ $x = 1-\sqrt{2}$ អនុគមន៍មានតម្លៃអតិបរមាធៀប

$f(1-\sqrt{2}) = \dfrac{(1-\sqrt{2})^2-(1-\sqrt{2})+2}{1-\sqrt{2}-1} = 1-2\sqrt{2}$ ។

ចំពោះ $x = 1+\sqrt{2}$ អនុគមន៍មានតម្លៃអប្បរមា

$f(1+\sqrt{2}) = \dfrac{(1+\sqrt{2})^2-(1+\sqrt{2})+2}{1+\sqrt{2}-1} = 2\sqrt{2}+1$ ។

- គណនាលីមីត

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(x+\dfrac{2}{x-1}\right) = \pm\infty$ និង $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2}{x-1} = \pm\infty$ ។

- អាស៊ីមតូត : ដោយ $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \pm\infty$ នោះ $x = 1$ ជាអាស៊ីមតូតឈរ ។

អនុគមន៍ $f(x) = x+\dfrac{2}{x-1}$ គេបាន $\lim\limits_{x\to\pm\infty}[f(x)-x] = \lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{2}{x-1} = 0$ នាំឱ្យ $y = x$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប ។

• តារាងអថេរភាព

x	$-\infty$		$1-\sqrt{2}$		1		$1+\sqrt{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$1-2\sqrt{2}$	$\searrow$	$-\infty \Vert +\infty$	$\searrow$	$1+2\sqrt{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

• សំណង់ក្រាប

- បើ $y = 0$ នោះ $\frac{x^2-x+2}{x-1} = 0$ ឬ $x^2-x+2 = 0$ សមីការគ្មានឬសក្រាបមិនកាត់អ័ក្ស ox ទេ ។

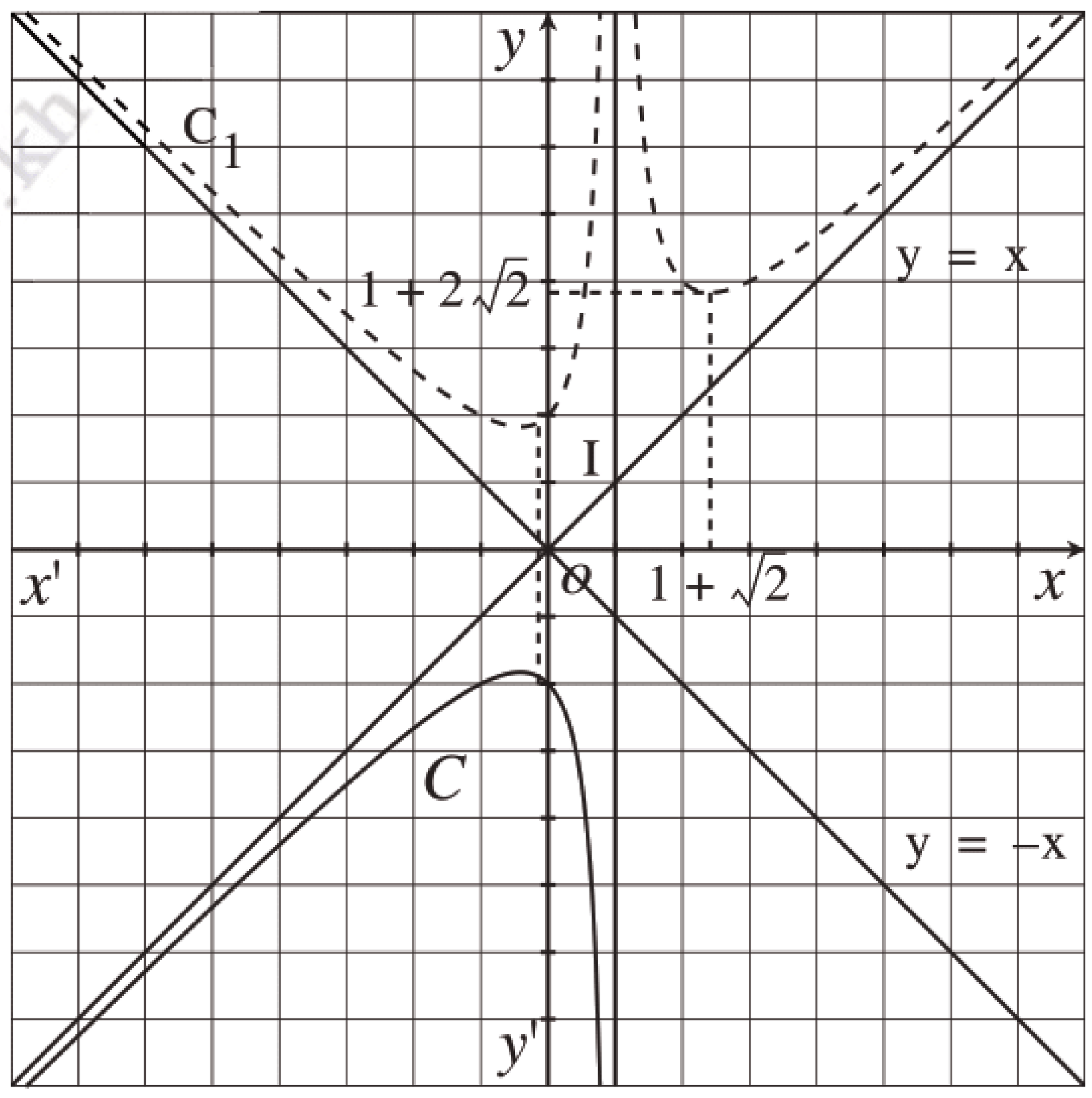
- បើ $x = 0$ នោះ $y = \frac{0^2-0+2}{0-1} = -2$ ។

- ផ្ចិតឆ្លុះ : អាស៊ីមតូតឈរ $x = 1$ និងអាស៊ីមតូតទ្រេត $y = x$ កាត់គ្នាត្រង់ចំណុច $I(1,\ 1)$ ។

តាមរូបមន្តបំលែងកិលអ័ក្ស $\begin{cases} x = 1+X \\ y = 1+Y \end{cases}$ គេបាន $Y = 1+X+\frac{2}{1+X-1}-1 = X+\frac{2}{X}$

$F(-X) = -X+\frac{2}{-X} = -\left(X+\frac{4}{X}\right) = -F(X)$ នាំឱ្យ $F(X)$ ជាអនុគមន៍សេស ។

ដូចនេះ $I(1,\ 1)$ ជាផ្ចិតឆ្លុះរបស់ក្រាប C ។



២. ទាញរកក្រាបរបស់អនុគមន៍ $y = \left|\frac{x^2-x+2}{x-1}\right|$

គេមាន $y = \left|\frac{x^2-x+2}{x-1}\right|$

សញ្ញានៃ $\frac{x^2-x+2}{x-1}$, $x^2-x+2>0$

ចំពោះគ្រប់ $x\in\mathbb{R}$ ព្រោះ $\Delta = 1-8<0$ ។

ដូចនេះ ប្រភាគមានសញ្ញាដូច $x-1$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$\frac{x^2-x+2}{x-1}$		$-$	‖	$+$	

- បើ $x>1$, $\frac{x^2-x+2}{x-1}>0$, $y = \left|\frac{x^2-x+2}{x-1}\right| = \frac{x^2-x+2}{x-1}$ ។

មែកនៃ $y = \left|\frac{x^2-x+2}{x-1}\right|$ ជាមែកនៃ $y = \frac{x^2-x+2}{x-1}$ ។

- បើ $x<1$, $\frac{x^2-x+2}{x-1}<0$, $y = \left|\frac{x^2-x+2}{x-1}\right| = -\left(\frac{x^2-x+2}{x-1}\right)$ ។

មែកនៃ $y = \left|\frac{x^2-x+2}{x-1}\right|$ ឆ្លុះគ្នានឹងមែកនៃ $y = \frac{x^2-x+2}{x-1}$ ធៀបនឹងអ័ក្សអាប់ស៊ីស ។

ដូចនេះក្រាប $y = \left|\dfrac{x^2-x+2}{x-1}\right|$ ជាប្រជុំនៃមែកនៅខាងលើអ័ក្សអាប់ស៊ីសដែលមែកមួយជាមែករបស់ $y = \dfrac{x^2-x+2}{x-1}$ និងមែកមួយទៀតបានដោយបំលែងឆ្លុះធៀបនឹងអ័ក្សអាប់ស៊ីសនៃមែករបស់ $y = \dfrac{x^2-x+2}{x-1}$ ដែលត្រូវនឹង $x<1$ ។

គ. ពិភាក្សាតាមតម្លៃ m : $x^2-|x|+2 = m(|x|-1)$ សមមូល $\dfrac{x^2-|x|+2}{|x|-1} = m$

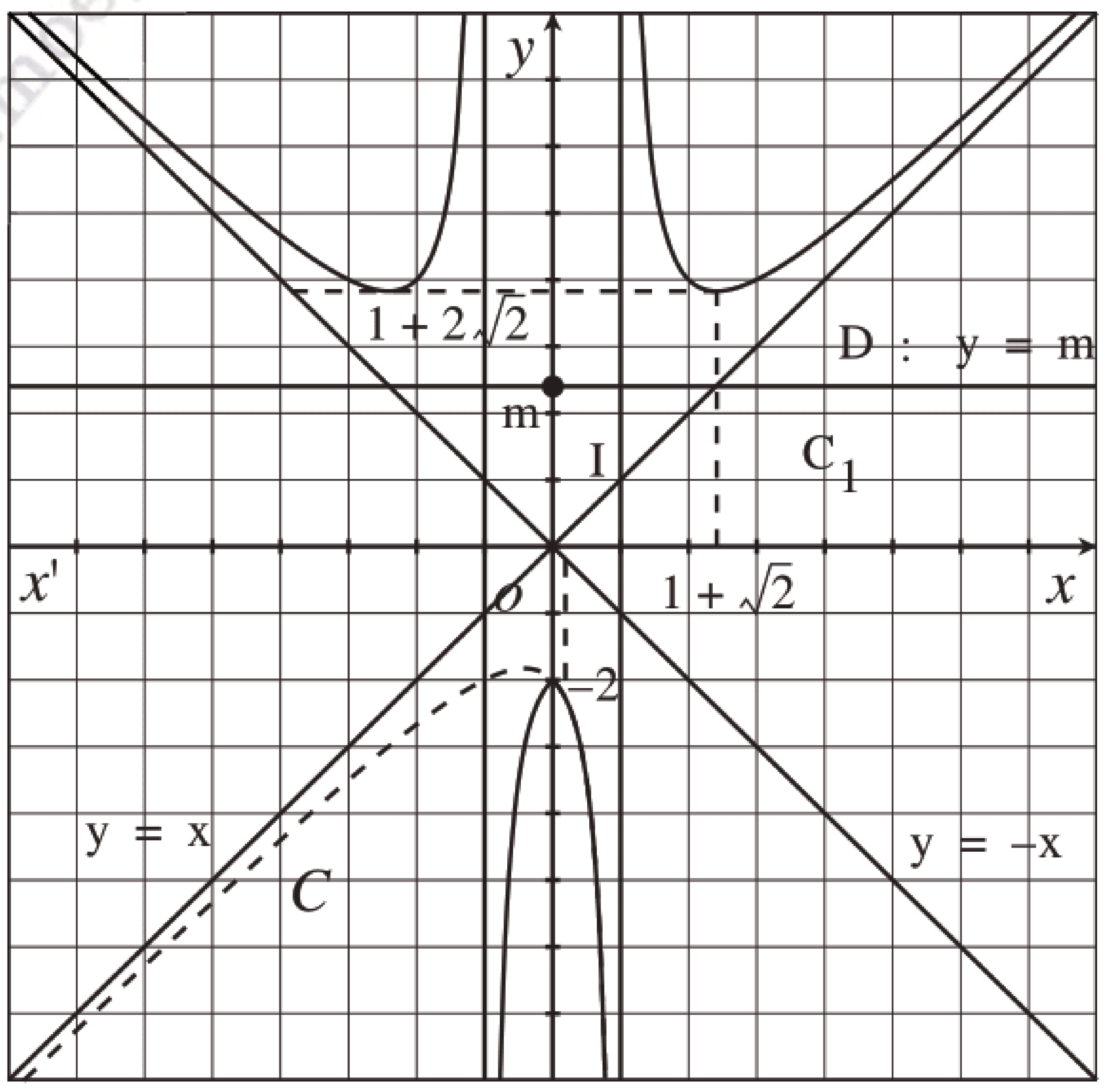
អង្គខាងឆ្វេងជាក្រាប C_2 : $y = \dfrac{x^2-|x|+2}{|x|-1}$

គេមាន $y = \dfrac{x^2-|x|+2}{|x|-1} = \begin{cases} \dfrac{x^2-x+2}{x-1} & \text{បើ } x \ge 0 \\ \dfrac{x^2+x+2}{-x-1} & \text{បើ } x<0 \end{cases}$ ។

ដូចនេះ ក្រាប C_2 : $y = \dfrac{x^2-|x|+2}{|x|-1}$ មានក្រាបមួយផ្នែកជារបស់ $y = \dfrac{x^2-x+2}{x-1}$ ។ ផ្នែក $x \ge 0$ (មិនយកផ្នែក $x<0$ ទេ)ហើយមួយផ្នែកទៀតជាក្រាបឆ្លុះរបស់ $y = \dfrac{x^2-x+2}{x-1}$ ផ្នែក $x \ge 0$ ធៀបនឹងអ័ក្ស oy ។

គូសបន្ទាត់ D : $y = m$ គេឃើញថា ៖

- បើ $m<-2$: មានឫសពីរផ្សេងគ្នា ។
- បើ $m=-2$: មានឫសឌុបមួយ ។
- បើ $-2<m<2\sqrt{2}+1$: គ្មានឫស ។
- បើ $m = 2\sqrt{2}+1$: មានឫសឌុបពីរ ។
- បើ $m>2\sqrt{2}+1$: មានឫសបួន ។



ប្រតិបត្តិ : គេឱ្យអនុគមន៍ $y = \dfrac{x^2+4x+3}{x^2-4x+3}$ ។

ក. សិក្សាអថេរភាពនិងសង់ក្រាប C នៃអនុគមន៍ f

ខ. ដោយប្រើក្រាប C ពិភាក្សាតាមតម្លៃ k នូវចំនួនឫសរបស់សមីការ

$(k-1)x^2-4(k+1)x+3(k-1) = 0 \quad (1)$

រួចប្រៀបធៀបឫសរបស់ (1) ទៅនឹងចំនួន -3 , $-\sqrt{3}$, -1 , 0 , 1 , $\sqrt{3}$ និង 3 ។

មេរៀនសង្ខេប

1. អនុគមន៍ $y = \dfrac{ax^2+bx+c}{px+q}$ ដែល $p \neq 0$, $a \neq 0$ និង $a{x_0}^2 + bx_0 + c \neq 0$ ចំពោះ $x_0 \neq -\dfrac{q}{p}$

- ដែនកំណត់ $D = \mathbb{R} - \left\{-\dfrac{q}{p}\right\}$ ។
- ទិសដៅអថេរភាព
  - ដេរីវេ : $y' = \dfrac{apx^2 + 2aqx + bq - cp}{(px+q)^2}$
  - បើ $y' = 0$ មានឫសពីរខុសគ្នា នោះអនុគមន៍មានអតិបរមាធៀបមួយ និងអប្បបរមាធៀបមួយ
  - បើ $y' = 0$ គ្មានឫស នោះអនុគមន៍គ្មានបរមាទេ
  - បើ $y' = 0$ មានឫសឌុប នោះអនុគមន៍ក្លាយជាជីក្រេទីមួយ ។
- អាស៊ីមតូត
  - បន្ទាត់ $x = -\dfrac{q}{p}$ ជាអាស៊ីមតូតឈរ
  - អនុគមន៍ $y = ax + b + \dfrac{k}{px+q}$ មានបន្ទាត់ $y = ax + b$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេត ។
- មានក្រាបជាអ៊ីពែរបូល ដែលមានផ្ចិតឆ្លុះជាចំណុចប្រសព្វរបស់អាស៊ីមតូតទាំងពីរ

2. អនុគមន៍ $y = \dfrac{ax^2+bx+c}{px^2+qx+r}$ ដែល a , b , c ខុសពីសូន្យ នឹង $p \neq 0$

- មានអាស៊ីមតូតដេកមួយជានិច្ច
- ចំនួនអាស៊ីមតូតឈរគឺអាស្រ័យនឹងឫសសមីការ $px^2 + qx + r = 0$
  - បើ $\Delta = q^2 - 4pr < 0$ គ្មានអាស៊ីមតូតឈរទេ និងក្រាបមានមែកតែមួយ ។
  - បើ $\Delta = q^2 - 4pr = 0$ មានអាស៊ីមតូតឈរមួយ $x = -\dfrac{q}{2p}$ និងក្រាបមានមែកពីរ ។
  - បើ $\Delta = q^2 - 4pr > 0$ មានអាស៊ីមតូតឈរពីរ $x = \dfrac{-q \pm \sqrt{\Delta}}{2p}$ និងក្រាបមានមែកបី ។

លំហាត់

1. រកអាស៊ីមតូតនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម ៖

ក. $y = \dfrac{x^2+4x+1}{x+2}$ ខ. $y = \dfrac{x^2+3x+1}{x^2-1}$ គ. $y = -x+3+\dfrac{3}{x-1}$ ។

2. សិក្សាអថេរភាពនិងសង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម ៖

ក. $y = \dfrac{x^2-2x+6}{2x+2}$ ខ. $y = \dfrac{x^2-4x+3}{x^2-3x+2}$ គ. $y = \dfrac{x^2-9}{4-x^2}$ ។

3. ក. សិក្សាអថេរភាពនិងសង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ $y = \dfrac{x^2-4x+8}{x-2}$ ។

ខ. សិក្សាទៅតាមតម្លៃ m អត្ថិភាពនិងសញ្ញានៃឫសសមីការ $x^2-(m+4)x+2m+8 = 0$ ដោយប្រើក្រាបតាង y ។

4. កំណត់តម្លៃ a ដើម្បីឱ្យអនុគមន៍ $y = \dfrac{x^2-2ax+3a^2}{x-2a}$ កើនលើចន្លោះ $(1, +\infty)$ ។

5. គេឱ្យអនុគមន៍ $y = \dfrac{mx^2+3mx+2m+1}{x+2}$ ។

ក. ស្រាយបញ្ជាក់ថា អាស៊ីមតូតទ្រេតកាត់តាមចំណុចនឹងមួយចំពោះគ្រប់ប៉ារ៉ាម៉ែត m ដែលត្រូវកំណត់កូអរដោនេ ។

ខ. រកតម្លៃ m ដើម្បីឱ្យបន្ទាត់ $y = m$ ប៉ះនឹងក្រាប ។

គ. សិក្សាអថេរភាពនិងសង់ក្រាប ចំពោះ $m = -1$ ។

6. គេឱ្យអនុគមន៍ $y = \dfrac{x^2+2(m+1)x+2}{x+1}$ ។

ក. ចំពោះ $m = 0$ សិក្សាអថេរភាពនិងសង់ក្រាប C របស់អនុគមន៍ខាងលើ រួចរកតម្លៃរបស់ a ដើម្បីឱ្យក្រាប C ប៉ះនឹងបន្ទាត់ $p : y = -x+a$ ។

ខ. រកតម្លៃ m ដើម្បីឱ្យអនុគមន៍កើនលើចន្លោះ $[0, +\infty)$ ។

7. ចូររកតម្លៃបរមាធៀបរបស់អនុគមន៍ $y = \dfrac{20x^2+10x+3}{3x^2+2x+1}$ ។

8. រកតម្លៃបរមាធៀបរបស់អនុគមន៍ $y = x^2 + 2x + 1 + \dfrac{a^2}{(x+1)^2}$ ដែល a ជាប៉ារ៉ាម៉ែតខុសពី សូន្យ ។

9. សិក្សាអថេរភាពនិងសង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ $y = x + 1 + \dfrac{1}{x+1}$ ។

10. គេឱ្យ C_m ជាក្រាបតាងអនុគមន៍ $y = x + 1 + \dfrac{4}{(x+m)^2}$ ។

ក. តើមានក្រាប C_m ចំនួនប៉ុន្មាន ដែលកាត់តាមចំណុច $A(1, 3)$ ។

ខ. ស្រាយបញ្ជាក់ថា បន្ទាត់ប៉ះក្រាប C_m ត្រង់ចំណុចមានអាប់ស៊ីស $x = 2 - m$ ស្របនឹងអ័ក្ស Ox ។

មេរៀនទី

2 អនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែល

វត្ថុបំណង

- ❑ រកចំនួន e
- ❑ រកលីមីតសំខាន់ៗនៃអនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែលគោល e
- ❑ រកដេរីវេនៃអនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែលគោល e
- ❑ សិក្សាអថេរភាពនិងសង់ក្រាបដែលទាក់ទងនឹងអនុគមន៍ $y = e^x$ ។

1. ចំនួន e

គណនាកន្សោម $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ កាលណា n យកតម្លៃធំឡើងៗ ។ គេសង្កេតឃើញថា បើ n យកតម្លៃកាន់តែធំទៅៗនោះកន្សោម $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ ខិតទៅរកតម្លៃលីមីតមួយស្មើ 2.718281 ។ លីមីត $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ កាលណា n ខិតទៅរក $+\infty$ ហៅថា ចំនួន e ។

គេបាន $e = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \approx 2.7182$ តម្លៃនេះ ជាតម្លៃដែលគេនិយមប្រើប្រាស់ ។

គេបានតារាង

n	$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$
1	2.000 000 00
10	2.593 742 46
100	2.704 813 83
1 000	2.716 923 93
10 000	2.718 145 93
100 000	2.718 268 24
1 000 000	2.718 280 47
10 000 000	2.718 281 69
100 000 000	2.718 281 81
1 000 000 000	2.718 281 83

2. អនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែល

2.1. និយមន័យ និងលក្ខណៈគ្រឹះ

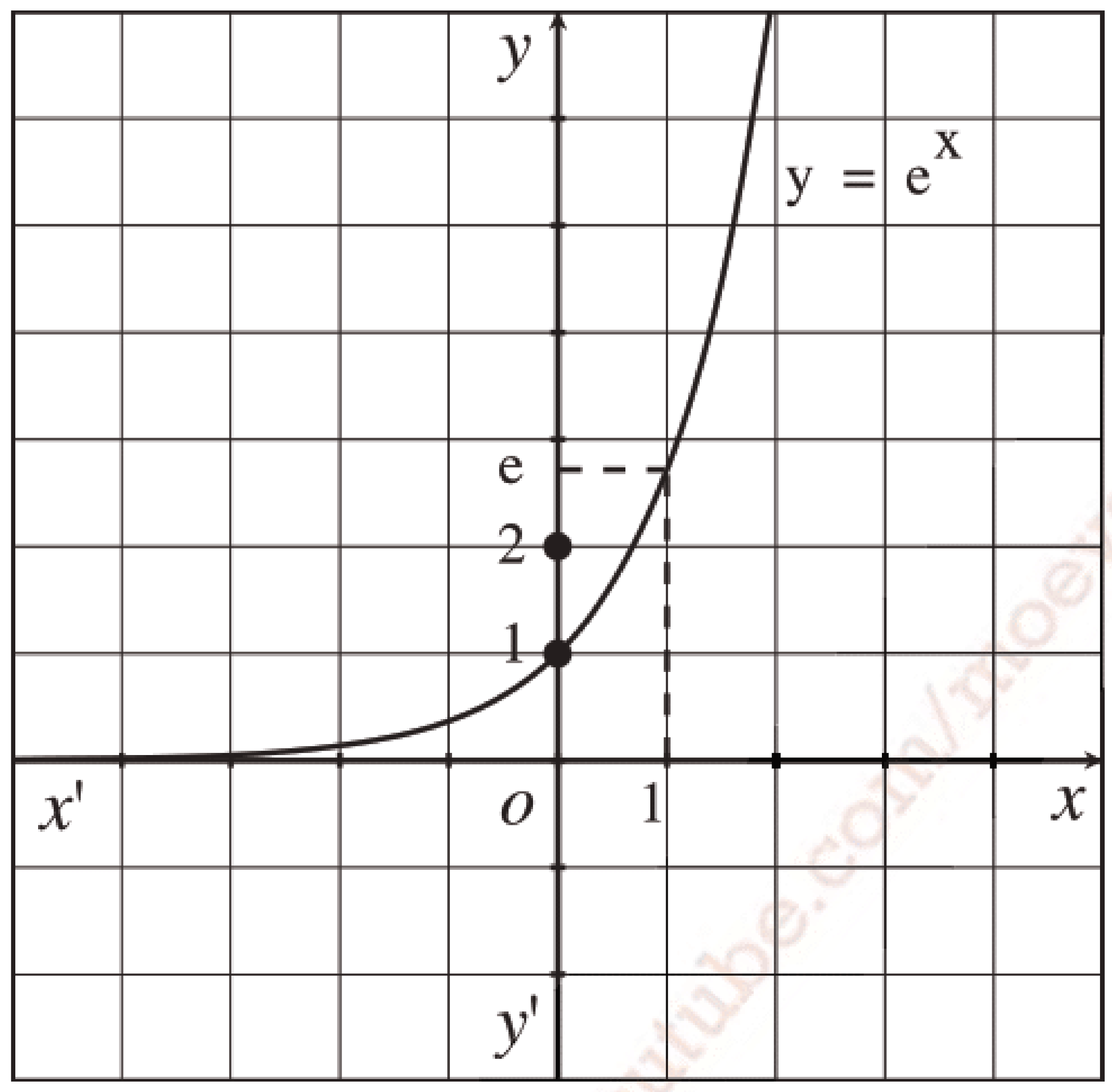
ក. និយមន័យ

ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត x អនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x) = e^x$ ហៅថា អនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែលគោល e ឬអនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែល ។

ខ. ក្រាប

សង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ $y = e^x$

x	$y = e^x$
-1	$y = \frac{1}{e} = 0.36$
0	$y = e^0 = 1$
1	$y = e^1 = 2.71$



ដោយគោល $e = 2.7182$ នោះអនុគមន៍ អិចស្ប៉ូណង់ស្យែលជាអនុគមន៍កើនលើ $\mathbb{R}$

គ. លក្ខណៈ

ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត m , n គេបាន

ក. $e^{m+n} = e^m \cdot e^n$ ខ. $e^{-n} = \frac{1}{e^n}$

គ. $e^{m-n} = \frac{e^m}{e^n}$ ឃ. $(e^m)^n = e^{mn}$ ។

ឧទាហរណ៍ : ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត x គេបាន $\frac{e^{4x-1}}{e^{x+3}} = e^{4x-1-x-3} = e^{3x-4}$ ។

2.2. ដេរីវេនៃអនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែល

ឧទាហរណ៍ 1 : គេមានអនុគមន៍ $H(x) = \frac{e^x - 1}{x}$ ។ គណនាតម្លៃលេខនៃអនុគមន៍ $H(x)$ ចំពោះ x ស្មើនឹង $0.1;\ 0.01;\ 0.001;\ 0.0001;\ 0.00001$ ។

គេបានតារាង

x	0.1	0.01	0.001	0.0001	0.00001
$H(x) = \frac{e^x - 1}{x}$	1.0516	1.0049	1.00047	1.00002	1

គេសង្កេតឃើញថា បើ $x \to 0$ នោះ $\frac{e^x - 1}{x} \to 1$ គេបាន $\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1}$ ។

ឧទាហរណ៍ 2 : គេមានអនុគមន៍ $y = e^x$ ។ រកដេរីវេនៃ y ត្រង់ x_0 ។

តាមនិយមន័យដេរីវេ គេបាន

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{(x_0 + \Delta x)} - e^{x_0}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{x_0} \cdot e^{\Delta x} - e^{x_0}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{x_0}(e^{\Delta x} - 1)}{\Delta x}$$

$= e^{x_0} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = e^{x_0}$ ។ ដូចនេះ ដេរីវេនៃអនុគមន៍ $y = e^x$ គឺអនុគមន៍ $y' = e^x$ ។

> ***ជាទូទៅ*** ៖ បើ $f(x) = e^x$ នោះ $f'(x) = e^x$ ។

ឧទាហរណ៍ 3 ៖ គណនាដេរីវេអនុគមន៍ $y = e^{2x}$ គេបាន $y' = (e^{2x})' = (2x)'e^{2x} = 2e^{2x}$

> ***ជាទូទៅ*** ៖ បើ $f(x) = e^{u(x)}$ នោះ $f'(x) = u'(x)\cdot e^{u(x)}$ ។

លំហាត់គំរូ1 ៖ គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍

ក. $y = e^{4x}$ ខ. $y = e^{x^2-3x+1}$ គ. $y = xe^x$ ។

ចម្លើយ ៖ ដេរីវេនៃអនុគមន៍

ក. $y' = (e^{4x})' = (4x)'e^{4x} = 4e^{4x}$

ខ. $y' = (e^{x^2-3x+1})' = (x^2-3x+1)'e^{x^2-3x+1} = (2x-3)e^{x^2-3x+1}$

គ. $y' = (xe^x)' = (x)'e^x + x(e^x)' = e^x + xe^x = (1+x)e^x$ ។

ប្រតិបត្តិ ៖ គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍

ក. $y = (x^2-3)e^x$

ខ. $y = x^2e^{-2x}$

គ. $y = \dfrac{\sqrt{x}}{e^x}$ ។

លំហាត់គំរូ2 ៖ សិក្សាអថេរភាពនិងសង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ $y = 4-2e^{-x}$ ។

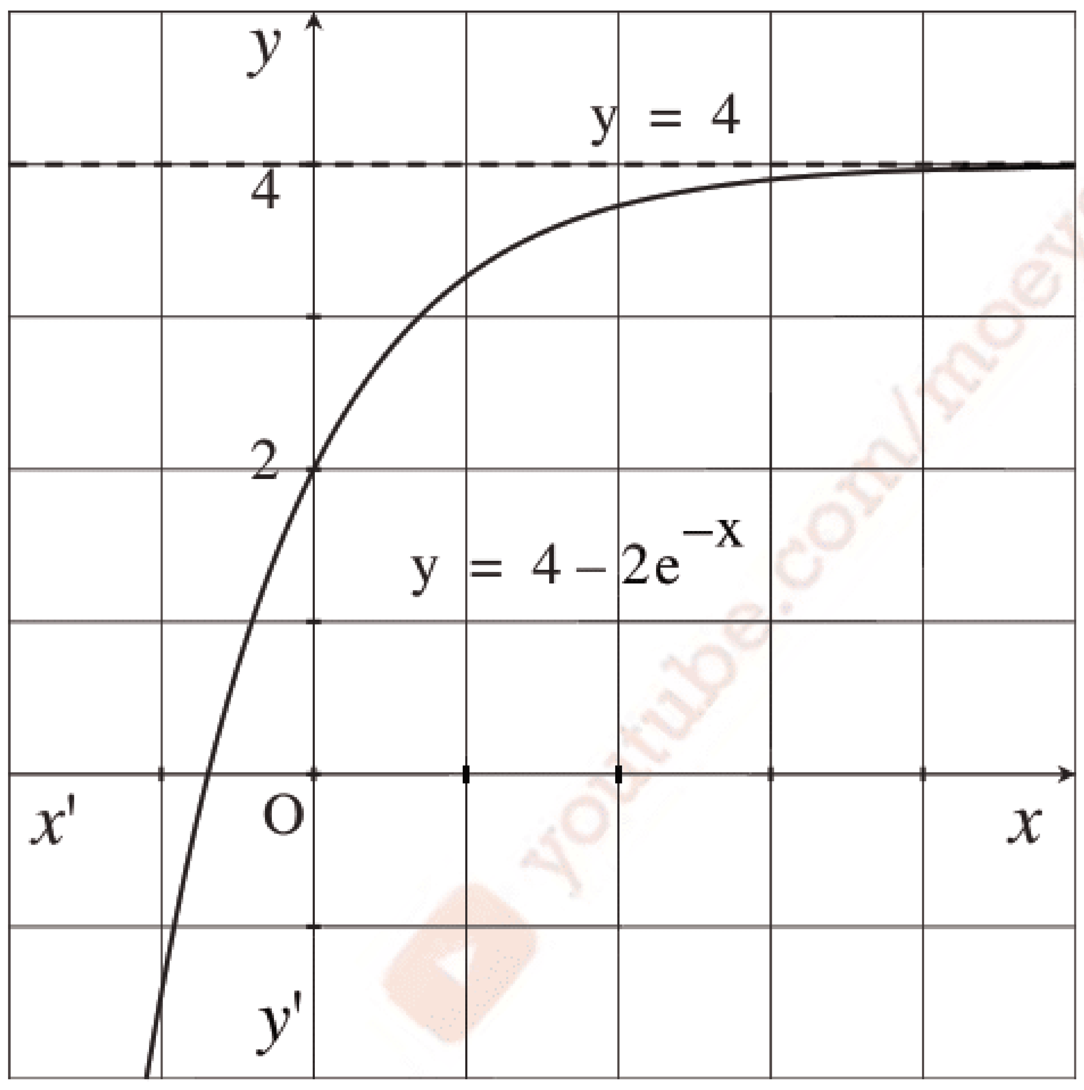
- ដែនកំណត់ $D = \mathbb{R}$
- ទិសដៅអថេរភាព
  - ដេរីវេ $y' = 2e^{-x}$, $y' > 0$ ចំពោះគ្រប់តម្លៃ $x \in D$
  - លីមីត $\lim\limits_{x\to-\infty}(4-2e^{-x}) = 4-2\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{1}{e^x}\right) = -\infty$

    $\lim\limits_{x\to+\infty}(4-2e^{-x}) = 4-2\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{e^x}\right) = 4$ ។

  ដូចនេះ សមីការបន្ទាត់ $y = 4$ ជាអាស៊ីមតូតដេកនៃក្រាប ។

• តារាងអថេរភាព

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		$+$		$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\nearrow$	4



• ក្រាបនៃអនុគមន៍ $y = 4 - 2e^{-x}$

- ចំណុចប្រសព្វរវាងក្រាបនឹងអ័ក្ស $y'oy$:

  $x = 0$ នាំឱ្យ $y = 2$ ។

- សង់ចំណុចបន្ថែម $x = -1$, $y = 4 - 2e = -1.4$ ។

លំហាត់គំរូ3 : សិក្សាអថេរភាពនិងសង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ $y = xe^{x}$ ។

ចម្លើយ :

• ដែនកំណត់អនុគមន៍ $D = \mathbb{R}$

• ទិសដៅអថេរភាព

- ដេរីវេ $y' = (x)'e^{x} + x(e^{x})' = e^{x}(1+x)$

  ដោយ $e^{x} > 0$ ចំពោះគ្រប់ $x \in \mathbb{R}$, y' មានសញ្ញាដូច $x+1$

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	

- ត្រង់ $x = -1$ អនុគមន៍ $y = f(x)$ មានតម្លៃអប្បបរមា $f(-1) = -e^{-1} \approx -0.36$

- លីមីត

  ដោយ $\lim\limits_{x \to -\infty} x = -\infty$ ហើយ $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{x} = 0$ គេបាន $-\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{-x}{e^{-x}} = 0$

  ដូចនេះ បន្ទាត់សមីការ $y = 0$ ជាអាស៊ីមតូតដេកនៃក្រាប ។

  ដោយ $\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$ ហើយ $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{x} = +\infty$ គេបាន $\lim\limits_{x \to +\infty} xe^{x} = +\infty$

• តារាងអថេរភាព

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
y'		$-$		$+$	
y	0	$\searrow$	$-e^{-1}$	$\nearrow$	$+\infty$

• ក្រាប $y = xe^x$

- ចំណុចប្រសព្វរវាងក្រាបនឹងអ័ក្ស $x'ox$:

$y = 0$ នាំឱ្យ $x = 0$ ។ ក្រាបកាត់តាមគល់ O ។

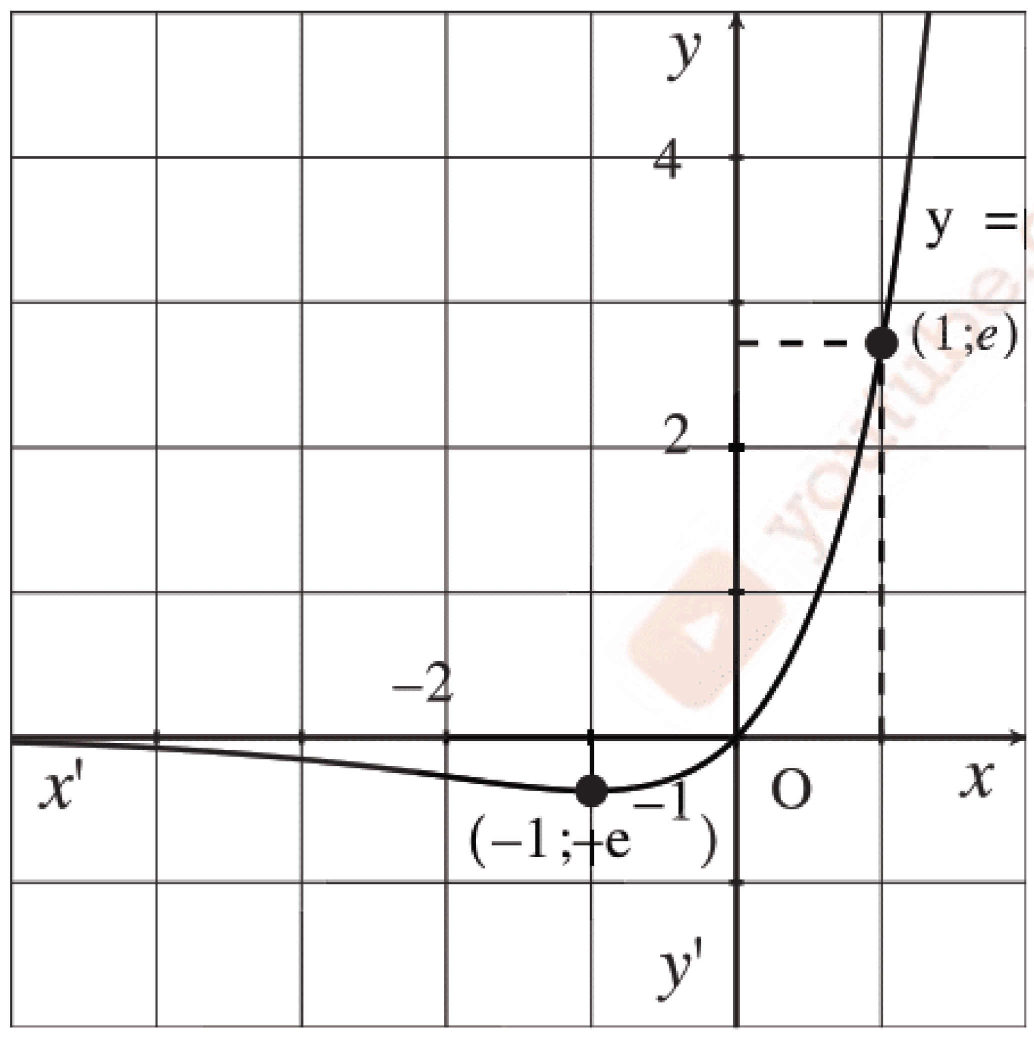
- ចំណុចរបត់ : $y'' = (x+2)e^x$

ដោយ $e^x > 0$, y'' មានសញ្ញាដូច $x+2$

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
y''	$-$	0	$+$

ដូចនេះ អនុគមន៍មានចំណុចរបត់មួយគឺ

$I(-2, -2e^{-2})$ ឬ $I(-2, -0.27)$ ។



ប្រតិបត្តិ : សិក្សាអថេរភាពនិងសង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម ៖

ក. $y = x + e^x$ ខ. $f(x) = \dfrac{3}{1+2e^{-5x}}$ គ. $y = \dfrac{x}{e^x}$ ។

3. អនុវត្តន៍

គេប្រើអនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែលគោល e សម្រាប់គណនាកំណើន និងតំហយចុះ ។

លំហាត់គំរូ1 : ជំងឺអាសន្នរោគកើតឡើងដោយបាក់តេរីក្នុងពោះវៀនដែលបំបែកខ្លួនតាមរូបមន្ត អិចស្ប៉ូណង់ស្យែល $N = N_0e^{1.386t}$, N ជាចំនួនបាក់តេរីក្រោយពេល t ម៉ោង ហើយ N_0 ជាចំនួនបាក់តេរីនៅខណៈ $t = 0$ ។ បើបាក់តេរីចាប់ផ្តើមពីចំនួន1 តើមានបាក់តេរីប៉ុន្មាននៅរយៈពេល :

ក. 5 ម៉ោង ? ខ. 12 ម៉ោង ?

ចម្លើយ:

ក. បើ $N_0 = 1$ និង $t = 5$ នោះ $N = N_0e^{1.386t}$ ឬ $N = e^{1.386(5)} = 1\ 022$

ខ. បើ $N_0 = 1$ និង $t = 12$ នោះ $N = N_0e^{1.386t}$ ឬ $N = e^{1.386(12)} = 16718057$ ។

រូបមន្តការប្រាក់សមាស $A = p\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt}$ ដែល p ជាប្រាក់ដើម r អត្រាការប្រាក់ប្រចាំឆ្នាំ n ជាចំនួនដងនៃការទូទាត់ការប្រាក់ក្នុងមួយឆ្នាំ ហើយ A ជាចំនួនប្រាក់សរុបក្នុងរយៈពេល t ឆ្នាំ ។

ឧបមាថា $p = 100$, $r = 8\%$, $t = 2$ ជាតម្លៃនឹងមួយ ហើយ n កើនធំឡើងៗ តើប្រាក់សរុប A មានតម្លៃដូចម្តេច ? គេបាន $A = 100\left(1+\frac{0.08}{n}\right)^{2n}$ ។ គេសង្កេតឃើញថា បើ n កើន

នោះចំនួនប្រាក់សរុប A កើនទៅរកតម្លៃ ដូចតារាងខាងក្រោម ៖

ចំនួនដងនៃការទូទាត់ក្នុងមួយឆ្នាំ	n	$A = 100\left(1+\frac{0.08}{n}\right)^{2n}$
ប្រចាំឆ្នាំ	1	116.6400
ប្រចាំឆមាស	2	116.9859
ប្រចាំត្រីមាស	4	117.1659
ប្រចាំសប្តាហ៍	52	117.3367
ប្រចាំថ្ងៃ	365	117.3490
ប្រចាំម៉ោង	8760	117.3501

តាមតារាងយើងសង្កេតឃើញថា បើ n កើន នោះ $100\left(1+\frac{0.08}{n}\right)^{2n}$ កើនយឺតៗទៅរកតម្លៃលីមីតមួយគឺ 117.3501 ។ ដូចនេះ A គឺជាលីមីតនៃ $100\left(1+\frac{0.08}{n}\right)^{2n}$ កាលណា n ខិតទៅរក ∞

ជាទូទៅ $A = p\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt} = p\left(1+\frac{1}{\frac{n}{r}}\right)^{\left(\frac{n}{r}\right)rt}$

$= p\left[\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m}\right]^{rt}$ (តាង $m = \frac{n}{r}$)

តែ $\lim_{m\to+\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m} = e$ (តាមចំនួន e ខាងលើ) ។

ដូចនេះ $A = \lim_{n\to+\infty} p\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt} = pe^{rt}$

បើចំនួនដងនៃការទូទាត់ច្រើនអនន្ត ឬការទូទាត់ជាបន្តបន្ទាប់ នោះរូបមន្តការប្រាក់សមាសកំណត់ដោយ $\boxed{A = pe^{rt}}$ ដែលក្នុងនោះ A ជាប្រាក់សរុប p ជាប្រាក់ដើម r អត្រាការប្រាក់សមាស និង t ជាចំនួនឆ្នាំដាក់ប្រាក់ ។

លំហាត់គំរូ 2 : បើគេយកប្រាក់ 100 ដុល្លារទៅធ្វើវិនិយោគដោយទទួលបានអត្រាការប្រាក់សមាស 8 % ក្នុងមួយឆ្នាំ។ តើគេបានប្រាក់សរុបប៉ុន្មាន បើគេដាក់ប្រាក់រយៈពេល 2 ឆ្នាំ ហើយចំនួនដងនៃការទូទាត់ច្រើនអនន្ត ?

ចម្លើយ : តាមរូបមន្តការប្រាក់សមាស $A = pe^{rt}$ ដែល $p = 100$, $r = 0.08$, $t = 2$ ។ គេបាន $A = pe^{rt} = 100e^{0.08(2)}$

$= 117.35$ លទ្ធផលនេះ ផ្ទៀងផ្ទាត់ទៅនឹងតារាងតម្លៃខាងលើ ។

លំហាត់គំរូ3 : តម្លៃនៅសល់របស់ម៉ាស៊ីនមួយកំណត់ដោយ $f(x) = 100000e^{-0.1t}$ ។

ក. រកថ្លៃដើមដំបូង (ថ្លៃទិញ) របស់ម៉ាស៊ីន

ខ. រកថ្លៃនៅសល់របស់ម៉ាស៊ីនបន្ទាប់ពីប្រើប្រាស់ 5 ឆ្នាំ។

ចម្លើយ :

ក. ថ្លៃដើមដំបូងរបស់ម៉ាស៊ីន ជាថ្លៃដែលត្រូវនឹង $t = 0$

គេបាន$f(0) = 100000e^{-0.1(0)} = 100000$ ។ដូចនេះថ្លៃដើមរបស់ម៉ាស៊ីនគឺ 100000 ដុល្លារ ។

ខ. តម្លៃនៅសល់របស់ម៉ាស៊ីនបន្ទាប់ពីប្រើប្រាស់ 5 ឆ្នាំ ជាតម្លៃដែលត្រូវនឹង $t = 5$

គេបាន $f(5) = 100000e^{-0.1(5)} = 60650$ ។ ដូចនេះ តម្លៃនៅសល់របស់ម៉ាស៊ីនបន្ទាប់ពីប្រើប្រាស់ 5 ឆ្នាំ គឺ 60650 ដុល្លា ។

ប្រតិបត្តិ :

ក. សង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ដែលមានសមីការ $N = e^{1.386t}$ ចំពោះ $0 \le t \le 5$ ។

ខ. គេយកប្រាក់ 100 ដុល្លាទៅចងការរយៈពេល 9 ឆ្នាំដោយទទួលបានអត្រាការប្រាក់សមាស 12 % ក្នុងមួយឆ្នាំ។ តើគេបានប្រាក់សរុបប៉ុន្មាន បើគេទូទាត់ 1 ឆ្នាំម្តង ? មួយត្រីមាសម្តង ? ជាបន្តបន្ទាប់ ?

គ. នៅឆ្នាំ 1970 ទីក្រុងមួយមានចំនួនប្រជាជន 30000 នាក់ និងមាន 40500 នាក់ នៅឆ្នាំ 1980 ។ ប្រសិនបើរូបមន្ត $p(t) = p_0e^{kt}$ (p_0 ជាចំនួនប្រជាជននៅដើមគ្រា ហើយ k ជាអត្រាកំណើនមធ្យម) ត្រូវបានគេយកមក ប្រើដើម្បីរកចំនួនប្រជាជននៅក្នុងទីក្រុងនេះ តើឆ្នាំ 2008 ទីក្រុងនេះមានប្រជាជនចំនួនប៉ុន្មាននាក់ ?

មេរៀនសង្ខេប

- **គោល** e : គោល e ដែលគេនិយមប្រើមានតម្លៃ $e = 2.718281$ ។

  អនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែលគោល e : ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត x អនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x) = e^x$ ហៅថា អនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែលគោល e ។
- **ដេរីវេ** : $(e^x)' = e^x$, $(e^{u(x)})' = u'(x) \cdot e^{u(x)}$ ។
- **រូបមន្តការប្រាក់សមាស** : $A = p\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$ ដែល p ជាប្រាក់ដើម r អត្រាការប្រាក់ប្រចាំឆ្នាំ n ជាចំនួនដងនៃការទូទាត់ការប្រាក់ក្នុងមួយឆ្នាំ ហើយ A ជាចំនួនប្រាក់សរុបក្នុងរយៈពេល t ឆ្នាំ។ បើចំនួនដងនៃការទូទាត់ច្រើនអនន្តឬការទូទាត់ជាបន្តបន្ទាប់ នោះរូបមន្តនៃការប្រាក់សមាស កំណត់ដោយ $A = pe^{rt}$ ដែលក្នុងនោះ A ជាប្រាក់សរុប p ជាប្រាក់ដើម r ជាអត្រាការប្រាក់សមាសនិង t ជាចំនួនឆ្នាំដាក់ប្រាក់ ។

លំហាត់

1. គណនាលីមីតខាងក្រោម ៖

ក. $\lim_{x \to +\infty} e^{3x}$ ខ. $\lim_{x \to -\infty} e^{5x}$ គ. $\lim_{x \to +\infty} 6e^{2x}$ ។

2. គណនាលីមីតខាងក្រោម ៖

ក. $\lim_{x \to +\infty} xe^{x+1}$ ខ. $\lim_{x \to -\infty} x^2 e^{4x}$ គ. $\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{n}{x}\right)^x$ ។

3. គណនាលីមីតនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម ៖

ក. $\lim_{x \to +\infty} \frac{3e^{x-2}}{x^3}$ ខ. $\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x+3}{x-1}\right)^{x+2}$ គ. $\lim_{x \to 0} \left(\frac{e^x - e^{-x}}{x}\right)$ ។

4. គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម ៖

ក. $y = xe^{-x}$ ខ. $f(x) = x^2 e^x$ គ. $g(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ ។

5. គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម ៖

ក. $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ ខ. $f(x) = \frac{e^x(1 + \cos x)}{1 - \cos x}$ គ. $g(x) = e^{\frac{x-1}{x+1}}$ ។

6. សិក្សាអថេរភាពនិងស្រង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម ៖

ក. $y = x^2 e^{-x}$ ខ. $y = 5 + 2e^{-x}$ គ. $g(x) = e^x - x^2$ ។

7. សិក្សាអថេរភាពនិងស្រង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម ៖

ក. $f(x) = \frac{1}{2 - e^{-x}}$ ខ. $g(x) = \frac{e^x}{x^2}$ គ. $g(x) = \frac{x}{e^x}$ ។

8. រកប្រាក់សរុបនៃប្រាក់ដើមចំនួន 2000 ដុល្លា ដែលគេបានធ្វើវិនិយោគក្នុងរយៈពេល 4 ឆ្នាំ ដោយទទួលអត្រាការប្រាក់ 6 % តាមរយៈពេលកំណត់ដូចខាងក្រោម ៖

ក. គិតជាឆ្នាំ ខ. គិតជាឆមាស គ. គិតជាត្រីមាស ឃ. គិតជាខែ ។

9. ឧបមាថា គេយកប្រាក់ 5000 ដុល្លា ទៅផ្ញើនៅធនាគារមួយដោយទទួលបានអត្រាការប្រាក់សមាស 11 % ក្នុងមួយឆ្នាំ។ បើគេផ្ញើប្រាក់រយៈពេល 10 ឆ្នាំ។ តើគេទទួលបានប្រាក់សរុបទាំងអស់ចំនួនប៉ុន្មាន បើការទូទាត់ច្រើនដងក្នុងមួយឆ្នាំ ?

10. ឧបមាថា បើគេយកប្រាក់ទៅផ្ញើនៅធនាគារមួយដោយទទួលបានអត្រាការសមាស 7 % ។ តើប៉ុន្មានឆ្នាំ ទើបគេទទួលបានប្រាក់សរុបស្មើនឹងបីដងនៃប្រាក់ដើម បើការទូទាត់ច្រើនដងក្នុងមួយឆ្នាំ ? (ចម្លើយគិតជាឆ្នាំ) ។

មេរៀនទី

3 អនុគមន៍លោការីត

វត្ថុបំណង

- ❑ រកលោការីតនេពែរនៃ e
- ❑ រកលីមីតនៃអនុគមន៍លោការីតនេពែរ
- ❑ រកដេរីវេនៃអនុគមន៍លោការីតនេពែរ
- ❑ សិក្សាអថេរភាពនិងសង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ដែលទាក់ទងនឹងលោការីតនេពែរ ។

1. លោការីតនេពែរ

ឧទាហរណ៍ 1 : រកតម្លៃ x ដោយដឹងថា $e^x = 1$

តាមដំណោះស្រាយសមីការអិចស្ប៉ូណង់ស្យែល

គេបាន $e^x = e^0$ ឬ $x = 0$ ។

គេថា $x = 0$ ជាលោការីតនេពែរនៃ 1 ហើយគេកំណត់សរសេរ $0 = \ln 1$ ។

ឧទាហរណ៍ 2 : ដោះស្រាយសមីការ $e^x = e$ ។ គេបាន $e^x = e^1$ ហើយ $x = 1$ ។

គេថា $x = 1$ ជាលោការីតនេពែរនៃ e ហើយគេកំណត់សរសេរ $1 = \ln e$ ។

និយមន័យ : លោការីតនេពែរនៃចំនួនវិជ្ជមាន k គឺជានិទស្សន្ត x នៃ e^x ដែល $e^x = k$ ។

គេកំណត់សរសេរ $x = \ln k$ ។ គេបាន $x = \ln k$ សមមូល $e^x = k$ ។

សម្គាល់ : ដោយ $x = \ln k$ និង $e^x = k$ នោះគេបាន $e^{\ln k} = k$ និង $\ln e^x = k$ ចំពោះគ្រប់ $k > 0$ ។

លំហាត់គំរូ 1 : គណនាតម្លៃនៃកន្សោមខាងក្រោម ៖

ក. $e^{\ln 5}$ ខ. $\ln e^{3x+4}$ ។

ចម្លើយ : ក. $e^{\ln 5} = 5$ ខ. $\ln e^{3x+4} = 3x + 4$

លំហាត់គំរូ 2 : សំយកប្រាក់ 1000 ដុល្លារទៅផ្ញើនៅធនាគារមួយ ដោយទទួលបានអត្រាការប្រាក់សមាសប្រចាំឆ្នាំ 5 % ។

ក. បើសំទុកប្រាក់នៅធនាគាររយៈពេល 10 ឆ្នាំ តើសំទទួលបានប្រាក់សរុបចំនួនប៉ុន្មាន ?

ខ. តើសំត្រូវទុកប្រាក់នៅធនាគារប៉ុន្មានឆ្នាំ ទើបចំនួនប្រាក់សរុបកើនដល់ 1500 ដុល្លារ ?

ចម្លើយ :

ក. ចំនួនប្រាក់របស់សំនៅធនាគារ

គេមាន $A = pe^{rt}$ រូបមន្តការប្រាក់សមាស ដែល $p = 1000$ ជាប្រាក់ដើម

$r = \frac{5}{100} = 0.05$ ជាអត្រាការប្រាក់សមាស និង $t = 10$ ជាចំនួនឆ្នាំ

គេបាន $A = 1000e^{(0.05)(10)} = 1648.72$

ដូចនេះ 10 ឆ្នាំក្រោយ សំមានប្រាក់សរុបចំនួន 1648.72 ដុល្លារ ។

ខ. រយៈពេលដើម្បីឱ្យចំនួនប្រាក់កើនដល់ 1500 ដុល្លារ

គេដឹងថា $A = 1500$ សមមូល $1000e^{(0.05)t} = 1500$

សមមូល $e^{0.05t} = 1.5$

សមមូល $e^{0.05t} = e^{\ell n 1.5}$

សមមូល $0.05t = \ell n 1.5$

សមមូល $t = \frac{\ln 1.5}{0.05}$ នាំឱ្យ $t = 8.11$ ។

ដូចនេះ ដើម្បីបានប្រាក់ 1500 ដុល្លារ សំត្រូវផ្ញើប្រាក់នៅធនាគារចំនួន 8.11 ឆ្នាំ ។

ប្រតិបត្តិ : គណនាតម្លៃនៃកន្សោមខាងក្រោម ៖

ក. $e^{\ln 0.2}$ ខ. $\ln e^{-4x}$ ។

2. អនុគមន៍លោការីតនេពែរ

2.1. និយមន័យ

គេមាន $e^x = 3$ គេបាន $x = \ell n 3$ ។

គេមានអនុគមន៍ $y = e^x$ ដែល $x \in \mathbb{R}$ ។

គេបាន $y = e^x$ សមមូល $x = \ell n y$ ។ អនុគមន៍នេះមាន x ជាអថេរ ហើយ y ជារូបភាពនៃ x តាម ℓn គេប្តូរ x ជា y និង y ជា x គេបាន $y = \ell n x$ ជាអនុគមន៍ច្រាសនៃអនុគមន៍

$y = e^x$ ។ អនុគមន៍ដែលកំណត់ដោយ $y = \ell nx$ ហៅថាអនុគមន៍លោការីតនេពែរ ។

និយមន័យ : បើ $x > 0$ អនុគមន៍លោការីតនេពែរនៃ x ដែលកំណត់ដោយ $y = \ell nx$ ជាអនុគមន៍ច្រាសនៃអនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែល $y = e^x$ ។

2.2. ក្រាបនៃអនុគមន៍លោការីតនេពែរ

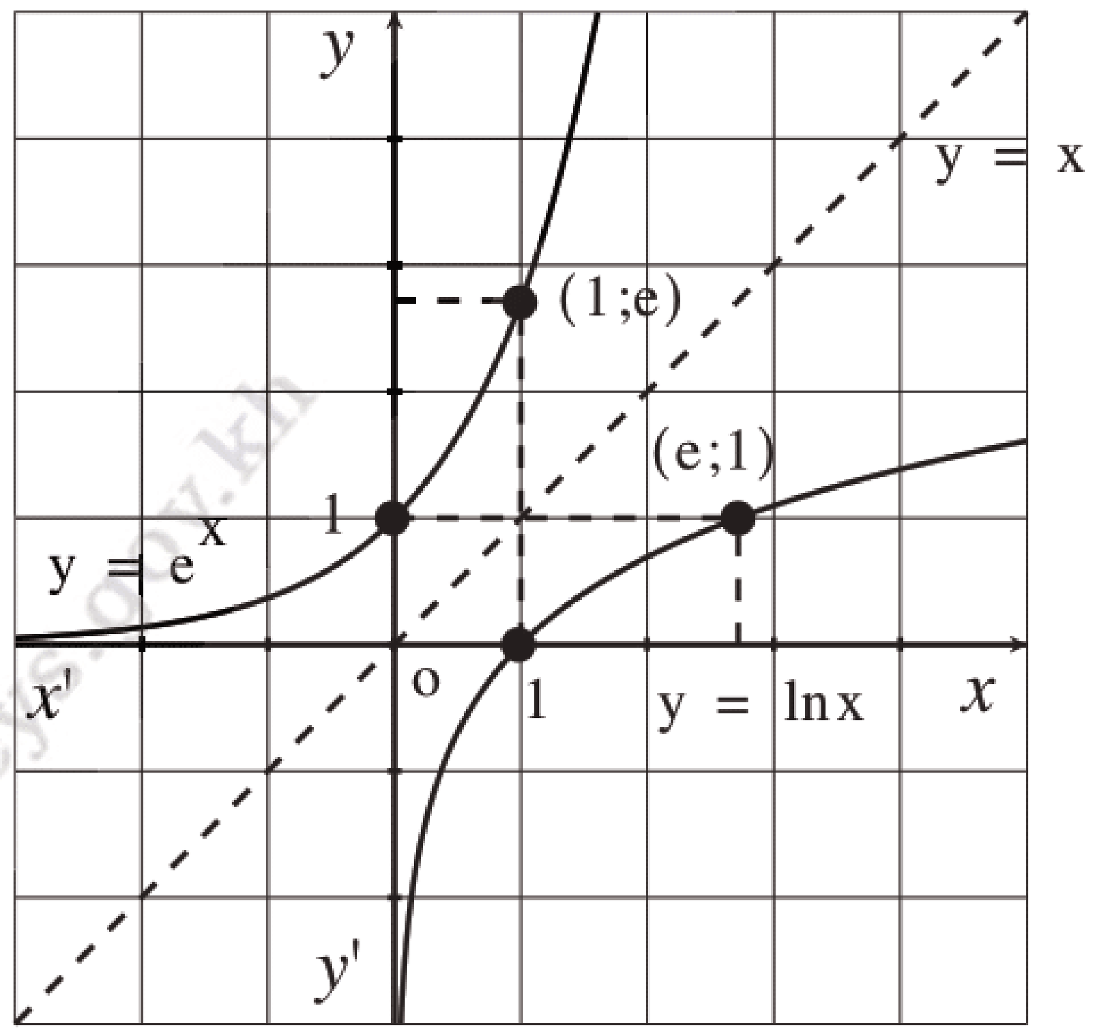
ឧទាហរណ៍ : សង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ $y = e^x$ និង $y = \ell nx$ ។

ដោយអនុគមន៍ $y = \ell nx$ ជាអនុគមន៍ច្រាសនៃ $y = e^x$ នោះក្រាបនៃអនុគមន៍ទាំងពីរឆ្លុះគ្នាធៀបនឹងបន្ទាត់ $y = x$ ។

តារាងតម្លៃលេខ

x	-1	0	1
$y = e^x$	$\frac{1}{e}$	1	e

x	$\frac{1}{e}$	1	e
$y = \ln x$	-1	0	1



ប្រតិបត្តិ : សង់ក្រាបនៃអនុគមន៍

ក. $y = 2 + \ell nx$ ខ. $y = \ell n(x-2)$ ។

2.3. ដេរីវេអនុគមន៍លោការីតនេពែរ

ក. ដេរីវេនៃ $y = \ell nx$

គេមានអនុគមន៍ $y = \ell nx$ សមមូល $e^y = x$ សមមូល $(e^{\ell nx})' = (x)'$

សមមូល $(\ell nx)' \cdot e^{\ln x} = 1$ សមមូល $(\ell nx)' = \frac{1}{e^{\ln x}} = \frac{1}{x}$

ដូចនេះ $(\ell nx)' = \frac{1}{x}$ ។

ជាទូទៅ : បើ $f(x) = \ell nx$ នោះ $f'(x) = \frac{1}{x}$ ដែល $x > 0$ ។

លំហាត់គំរូ : គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម ៖

ក. $y = x^3 + \ell nx$ ខ. $y = x^2 \ell nx$ ។

ចម្លើយ : ដេរីវេនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម ៖

ក. $y = x^2 \ell nx$ គេបាន $y' = (x^2 \ell nx)' = (x^2)' \ell nx + x^2(\ell nx)' = 2x\ell nx + x$

ខ. $y = x^3 + \ell nx$ គេបាន $y' = (x^3 + \ell nx)' = 3x^2 + \dfrac{1}{x}$ ។

ប្រតិបត្តិ : គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម ៖

ក. $y = x + 2\ell nx$ ខ. $y = x^4 \ell nx$ ។

ខ. ដេរីវេនៃ $y = \ell nU(x)$

គេមានអនុគមន៍ $y = \ell nU(x)$ សមមូល $e^y = U(x)$

$[e^{\ell nU(x)}]' = [U(x)]'$ សមមូល $[\ell nU(x)]' \cdot e^{\ell nU(x)} = U'(x)$

សមមូល $[\ell nU(x)]' = \dfrac{U'(x)}{e^{\ell nU(x)}} = \dfrac{U'(x)}{U(x)}$

ដូចនេះ $[\ell nU(x)]' = \dfrac{U'(x)}{U(x)}$, $U(x) > 0$ ។

ជាទូទៅ : បើ $g(x) = \ell nU(x)$ នោះ $g'(x) = \dfrac{U'(x)}{U(x)}$ ដែល $U(x) > 0$ ។

លំហាត់គំរូ : គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ $f(x) = \dfrac{x^2\sqrt{5x+1}}{(3x-2)^3}$ ។

ចម្លើយ : ដើម្បីឱ្យងាយក្នុងការគណនាដេរីវេនៃ $f(x)$ គេអាចរកលោការីតនេពែរនៃអង្គទាំងពីរ ជាមុនសិន ។

$\ell nf(x) = \ell n\left[\dfrac{x^2\sqrt{5x+1}}{(3x-2)^3}\right]$ សមមូល $\ell nf(x) = \ell n(x^2\sqrt{5x+1}) - \ell n(3x-2)^3$

$\ell nf(x) = 2\ell nx + \dfrac{1}{2}\ell n(5x+1) - 3\ell n(3x-2)$

គេបាន $[\ell nf(x)]' = \left[2\ell nx + \dfrac{1}{2}\ell n(5x+1) - 3\ell n(3x-2)\right]'$

នាំឱ្យ $\dfrac{f'(x)}{f(x)} = \dfrac{2}{x} + \dfrac{5}{2(5x+1)} - \dfrac{9}{3x-2}$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{4(5x+1)(3x-2) + 5x(3x-2) - 18x(5x+1)}{2x(5x+1)(3x-2)}$$

$$f'(x) = \left[\frac{-15x^2 - 53x - 8}{2x(5x+1)}\right]\left[\frac{x^2\sqrt{5x+1}}{(3x-2)^3}\right]$$ ។

ប្រតិបត្តិ : គណនាដេរីវេអនុគមន៍ខាងក្រោម ៖

ក. $f(x) = \ell n(x^2 + 3x)$ ខ. $f(x) = \ell n(\cos x)$ គ. $y = \ell n(x^2 - 4)^3$ ។

3. សមីការនិងវិសមីការលោការីតនេពែរ

3.1. សមីការ

លំហាត់គំរូ1 : ដោះស្រាយសមីការក្នុង $\mathbb{R}$

$\ell n(x-2)+\ell n(x+2) = \ell n45$

ចម្លើយ : សមីការត្រូវបំពេញលក្ខខណ្ឌ $x-2>0$ និង $x+2>0$

$x>2$ ជាលក្ខខណ្ឌដែលធ្វើឱ្យសមីការមានន័យ :

$\ell n(x-2)(x+2) = \ell n45$

$(x-2)(x+2) = 45$ ឬ $x^2-49 = 0$

គេបាន $x = 7$, $x = -7$

តាមលក្ខខណ្ឌ $x>2$ សមីការមានឫសតែមួយគត់គឺ $x = 7$ ។

លំហាត់គំរូ2 : ដោះស្រាយសមីការក្នុង $\mathbb{R}$

$3e^{2x}+e^x-10 = 0$

ចម្លើយ : សមីការត្រូវបំពេញលក្ខខណ $e^x>0$

$3e^{2x}+e^x-10 = 0$, $3(e^x)^2+e^x-10 = 0$

តាង $t = e^x$: សមីការទៅជា $3t^2+t-10 = 0$

គេបាន $t = \frac{5}{3}$, $t = -2$

តាមលក្ខខណ្ឌ $e^x>0$ យើងមានតែ $e^x = \frac{5}{3}$, $x = \ell n\frac{5}{3}$ ។

ប្រតិបត្តិ : ដោះស្រាយសមីការខាងក្រោម ៖

ក. $\ell n(1-x)+\ell n(2x+3)-\ell n(x+1) = \ell n3$

ខ. $\frac{e^x-2}{e^x-3} = 4$ ។

3.2. វិសមីការ

លំហាត់គំរូ : ដោះស្រាយវិសមីការក្នុង $\mathbb{R}$ $\ell n(x+3)+\ell n(x+5)\le \ell n15$

ចម្លើយ : លក្ខខណ្ឌនៃវិសមីការគឺ $x>-3$

វិសមីការសរសេរ $\ell n(x+3)(x+5)\le \ell n15$

ដោយ $e > 1$ វិសមីការមិនប្តូរទិសដៅ $(x+3)(x+5) \le 15$ ឬ $x^2 + 8x \le 0$

ដោះស្រាយវិសមីការ $-8 \le x \le 0$

តាមលក្ខខណ្ឌ $x > -3$ វិសមីការមានចម្លើយត្រឹមតែ $-3 < x \le 0$ ។

ប្រតិបត្តិ : ដោះស្រាយវិសមីការខាងក្រោម

ក. $\ell n(x^2 - 4e^2) < 1 + \ell n 3x$ ខ. $3e^x - 10e^{-x} + 1 \ge 0$ ។

៣.៣. ប្រព័ន្ធសមីការ

លំហាត់គំរូ : ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការក្នុង $\mathbb{R}$

$$\begin{cases} \ell ny = \ell nx + 2 \\ xy = 9e^2 \end{cases}$$

ចម្លើយ : លក្ខខណ្ឌនៃប្រព័ន្ធគឺ $x > 0$ និង $y > 0$

ប្រព័ន្ធសមីការអាចសរសេរ $\begin{cases} \ell n\dfrac{y}{x} = 2 \\ xy = 9e^2 \end{cases}$ ឬ $\begin{cases} \ell n\dfrac{y}{x} = \ell ne^2 \\ xy = 9e^2 \end{cases}$

គេបាន $\begin{cases} \dfrac{y}{x} = e^2 \\ xy = 9e^2 \end{cases}$ ដោះស្រាយប្រព័ន្ធ $x = \pm 3$

ដោយ $x > 0$: នោះ $x = 3$ ហើយ $y = 3e^2$ ។

ប្រតិបត្តិ : ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការខាងក្រោម ៖

ក. $\begin{cases} e^x + 2e^y = 1 \\ -3e^x + e^y = 4 \end{cases}$ ខ. $\begin{cases} x + y = 65 \\ \ell nx + \ell ny = \ell n1000 \end{cases}$ ។

៤. សិក្សាអនុគមន៍ដែលទាក់ទងនឹងអនុគមន៍លោការីតនេពែរ

លំហាត់គំរូ 1 : សិក្សាអថេរភាពនិងសង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម ៖

ក. $y = \dfrac{\ell nx}{x}$ ខ. $y = e^x \ell nx$ ។

ចម្លើយ : សិក្សាអថេរភាពនិងសង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម ៖

- ក. ដែនកំណត់អនុគមន៍ $D = (0;\ +\infty)$
- ទិសដៅអថេរភាព

- ដេរីវេទីមួយ $y' = \left(\dfrac{\ell nx}{x}\right)' = \dfrac{\left(\frac{1}{x}\right)x - \ell nx(x)'}{x^2} = \dfrac{1-\ell nx}{x^2}$

$y' = 0$ សមមូល $1-\ell nx = 0$ ឬ $x = e$ ។

- សញ្ញាដេរីវេទីមួយ

x	0		e		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	

ត្រង់ $x = e$, $y' = 0$ ហើយប្តូរសញ្ញាពី ($+$) ទៅ ($-$) នាំឱ្យអនុគមន៍ $y = \dfrac{\ell nx}{x}$ មានតម្លៃអតិបរមាធៀប ស្មើនឹង $f(e) = \dfrac{1}{e}$ ត្រង់ $x = e$ ។

- លីមីត $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ell nx}{x} = -\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ell nx}{x} = 0$ ។

$y'' = 0$ សមមូល $2\ell nx - 3 = 0$ នាំឱ្យ $x = e^{\frac{3}{2}}$

- តារាងអថេរភាព

x	0		e		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	$\dfrac{1}{e}$	$\searrow$	0

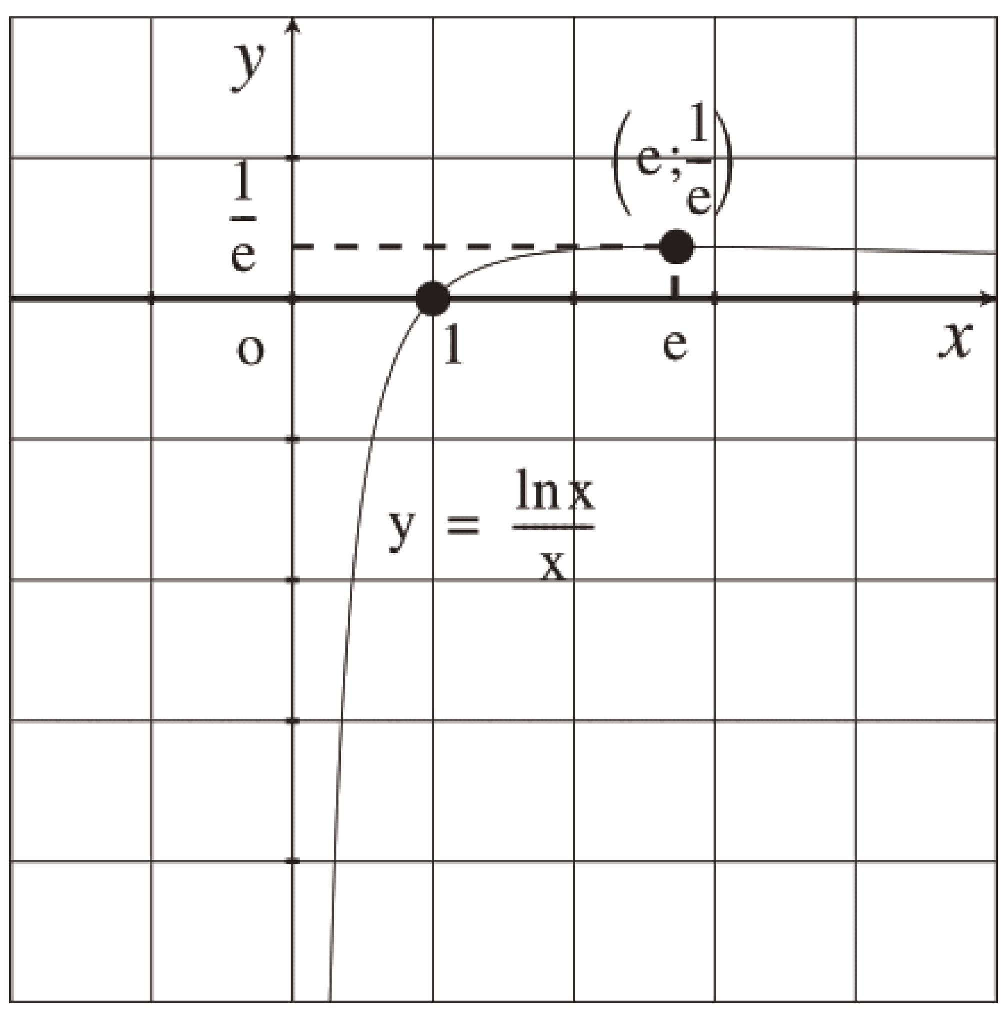
- ដេរីវេទីពីរ : ចំណុចរបត់

$y'' = \dfrac{-x-2x(1-\ell nx)}{x^4} = \dfrac{2\ell nx-3}{x^3}$

- ត្រង់ $x = e^{\frac{3}{2}}$, $y'' = 0$ ហើយប្តូរសញ្ញាពី ($-$) ទៅ ($+$) ។

x	0		$e^{\frac{3}{2}}$		$+\infty$
y''		$-$	0	$+$	

ដូចនេះ ចំណុច $I\left(e^{\frac{3}{2}}, \dfrac{3}{2e^{\frac{3}{2}}}\right)$ ជាចំណុចរបត់នៃក្រាប ។



- សំណង់ក្រាប : ចំណុចប្រសព្វរវាងក្រាប នឹងអ័ក្ស $x'ox$ គឺ $y = 0$ សមមូល $x = 1$ ។

- ខ. ដែនកំណត់អនុគមន៍ $D = (0, +\infty)$

- ទិសដៅអថេរភាព

- ដេរីវេទីមួយ $y' = (e^x \ell nx)' = (e^x)'\ell nx + e^x(\ell nx)' = e^x\left(\ell nx + \frac{1}{x}\right)$

តាង $g(x) = \ell nx + \frac{1}{x}$ នាំឱ្យ $g'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} = \frac{x-1}{x^2}$

គេបានតារាងអថេរភាពនៃ $g(x)$

គេទាញបាន $g(x) \geq 1$ ចំពោះគ្រប់ $x > 0$

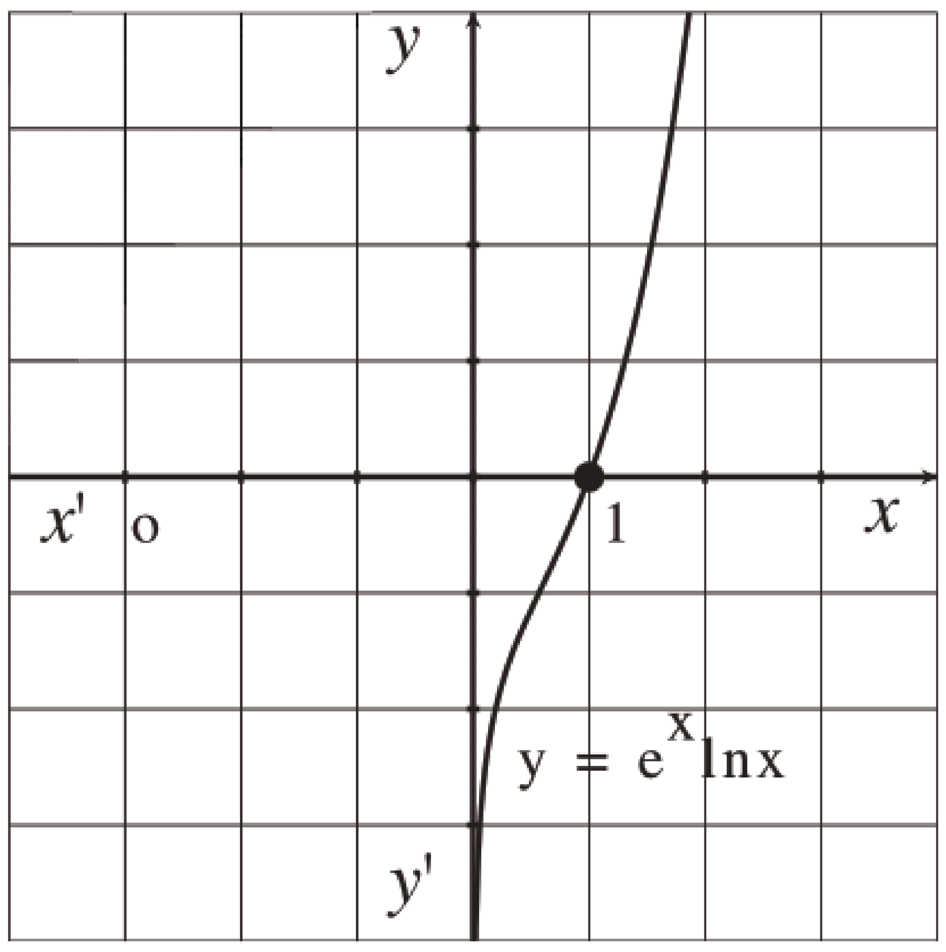
x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$		$\searrow$	1	$\nearrow$	

ដោយ $g(x) \geq 1$ នាំឱ្យ $e^x\left(\ell nx + \frac{1}{x}\right) > 0$ ចំពោះគ្រប់ $x \in D$

- លីមីត $\lim\limits_{x\to 0^+} e^x \ell nx = -\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x \ell nx = +\infty$ ។

• តារាងអថេរភាព

x	0		$+\infty$
y'		$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$



• សំណង់ក្រាប : ចំណុចប្រសព្វរវាងក្រាបនឹងអ័ក្ស $x'ox$ គឺ $y = 0$ សមមូល $x = 1$ ។

លំហាត់គំរូ 2 :

ក. សិក្សាអថេរភាពនិងសង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ $y = \ell n(x^2)$ ។

ខ. ចូរសរសេរសមីការបន្ទាត់ប៉ះនឹងក្រាប C ត្រង់ចំណុច A, B ដែល A មានអាប់ស៊ីស $x = e$ និង B មានអាប់ស៊ីស $x = -e$ ហើយសង់បន្ទាត់ប៉ះទាំងពីរនោះ ។

ចម្លើយ :

ក. សិក្សាអថេរភាពនិងសង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ $y = \ell n(x^2)$

• ដែនកំណត់អនុគមន៍ $D = \mathbb{R} - \{0\}$

• ទិសដៅអថេរភាព

- ដេរីវេទីមួយ $y' = [\ell n(x^2)]' = \frac{2x}{x^2} = \frac{2}{x}$

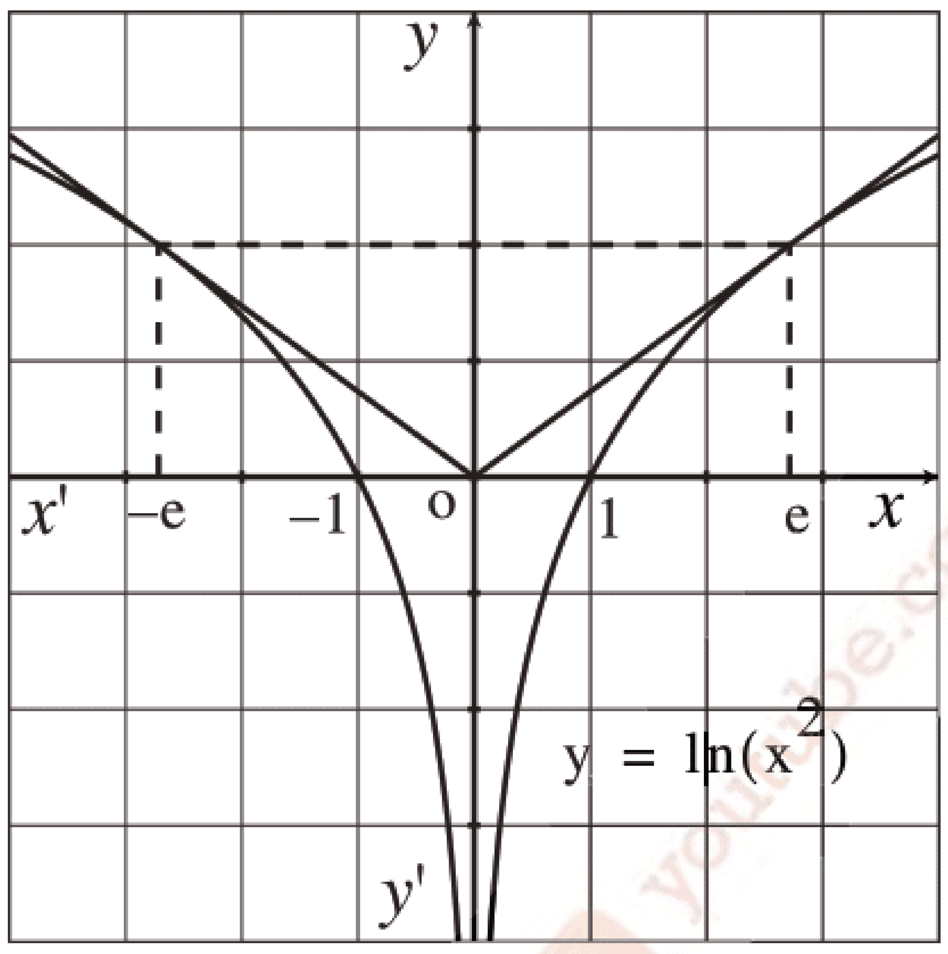
សញ្ញានៃដេរីវេទីមួយ

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		$-$	$\|$	$+$	

- លីមីត $\lim_{x \to 0^+} \ell n(x^2) = -\infty$; $\lim_{x \to +\infty} \ell n(x^2) = +\infty$

- តារាងអថេរភាព

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		$-$	‖	$+$	
y	$+\infty$	↘ $-\infty$	‖	$-\infty$ ↗	$+\infty$



- សំណង់ក្រាប : ចំណុចប្រសព្វរវាងក្រាបនឹងអ័ក្ស

  $x'0x$ គឺ $y = 0$ សមមូល $\ell n(x^2) = 0$ ឬ $x = \pm 1$

ខ. សមីការបន្ទាត់ប៉ះមានរាង $y - y_0 = y'_0(x - x_0)$

សមីការបន្ទាត់ប៉ះក្រាប C ត្រង់ A មាន $x_0 = e$, $y_0 = \ell n(x^2) = \ell ne^2 = 2$, $y'_0 = \frac{2}{e}$

គេបាន $y - 2 = \frac{2}{e}(x - e)$ ឬ $y = \frac{2}{e}x$ ។

សមីការបន្ទាត់ប៉ះក្រាប C ត្រង់ B មាន $x_0 = -e$, $y_0 = \ell n(x^2) = \ell ne^2 = 2$,

$y'_0 = \frac{2}{e}$

គេបាន $y + 2 = \left(-\frac{2}{e}\right)(x - e)$ ឬ $y = -\frac{2}{e}x$

ដូចនេះ បន្ទាត់ប៉ះទាំងពីរនោះកាត់តាមគល់ O ។

ប្រតិបត្តិ **:** សិក្សាអថេរភាពនិងសង់ក្រាបអនុគមន៍ខាងក្រោម ៖

ក. $f(x) = x^2 - 8\ell nx$

ខ. $y = x^2 \ell nx$

គ. $y = f(x) = \begin{cases} x(1 - \ell nx) & \text{បើ } x > 0 \\ 0 & \text{បើ } x = 0 \end{cases}$

ឃ. $y = g(x) = 2x + \frac{x}{\ell nx}$ ។

5. អនុវត្តន៍

លំហាត់គំរូ1 : តំហាយអិចស្ប៉ូណង់ស្យែលដែលមានទំរង់ $y = ae^{-kt}$ ធាតុវិទ្យុសកម្មនៃកាបូន $(C\text{–}14)$ មានការថយចុះជាបន្តបន្ទាប់ក្នុងអត្រាមួយថេរ ។ ពាក់កណ្តាល ជីវិតនៃកាបូន $(C\text{–}14)$ គឺ 5760 ឆ្នាំ ។ មានន័យថា 5760 ឆ្នាំកាបូន $(C\text{–}14)$ បានពុកផុយម៉ាស ចំនួនពាក់កណ្តាល ។

ក. រកតម្លៃអត្រាថយចុះ k នៃកាបូន $(C\text{–}14)$?

ខ. អ្នកវិទ្យាសាស្ត្រខាងបូរាណវិទ្យាបានត្រួតពិនិត្យឆ្អឹងសត្វមួយប្រភេទ ហើយប៉ាន់ស្មានថាមានធាតុកាបូន $(C\text{–}14)$ នៅសល់ចំនួន 3 % ។

តើសត្វនេះបានស្លាប់ប្រហែលប៉ុន្មានឆ្នាំហើយ ?

ចម្លើយ :

ក. តម្លៃអត្រាថយចុះ k នៃកាបូន $(C\text{–}14)$

គេមានរូបមន្តតំហាយអិចស្ប៉ូណង់ស្យែល $y = ae^{-kt}$ ដែល k ជាអត្រាថយចុះនៃកាបូន $(C\text{–}14)$ a ជាចំនួនចាប់ផ្តើម y ជាបរិមាណនៅសល់បន្ទាប់ពី $t = 5760$ ឆ្នាំនៃពាក់កណ្តាលជីវិតរបស់កាបូន $(C\text{–}14)$ គឺ $\frac{1}{2}a = 0.5a$ ។

គេបាន $y = ae^{-kt}$ សមមូល $0.5a = ae^{-k\,(5760)}$

សមមូល $0.5 = e^{-5760k}$ សមមូល $\ell n 0.5 = \ell n e^{-5760k}$

សមមូល $-5760k = \ln 0.5$ សមមូល $k = \dfrac{-\ln 0.5}{5760} = \dfrac{\ln 2}{5760} = 0.00012$

ដូចនេះ អត្រាថយចុះថេរនៃកាបូន $(C\text{–}14)$ គឺ 0.00012 ។

ខ. តាង a ជាបរិមាណដំបូងនៃកាបូន $(C\text{–}14)$ ក្នុងខ្លួនថនិកសត្វ

គេបាន $y = ae^{-0.00012t}$ សមមូល $0.03a = ae^{-0.00012t}$

សមមូល $0.03 = e^{-0.00012t}$ សមមូល $\ell n 0.03 = \ell n e^{-0.00012t}$

សមមូល $\ell n 0.03 = -0.00012t$ សមមូល $t = \dfrac{\ln 0.03}{-0.00012}$ នាំឱ្យ $t \approx 29221$

ដូចនេះ ថនិកសត្វនេះស្លាប់តាំងពី 29221 ឆ្នាំមុន ។

លំហាត់គំរូ2 : កំណើនអិចស្ប៉ូណង់ស្យែលដែលមានទំរង់ $y = ae^{kt}$

តាមការប៉ាន់ស្មានបានឱ្យដឹងថា នៅឆ្នាំ 2000 ប្រទេសចិនមានប្រជាជនប្រមាណ 1.26 ពាន់លាននាក់ ដែលជាចំនួនច្រើនបំផុតនៅលើពិភពលោក ហើយប្រទេសឥណ្ឌាមានប្រជាជន 1.01 ពាន់លាននាក់ ដែលជាចំនួនលំដាប់ទីពីរបន្ទាប់ពីប្រទេសចិន ។ ចំនួនប្រជាជននៃប្រទេសចិនកើនឡើងតាមសមីការ $C(t) = 1.26e^{0.009t}$ ហើយប្រជាជនឥណ្ឌាកើនឡើងតាមសមីការ $I(t) = 1.01e^{0.015t}$ ។ តាមសមីការនេះ តើប៉ុន្មានឆ្នាំទៀត ទើបប្រទេសឥណ្ឌាមានចំនួនប្រជាជនច្រើនជាងប្រទេសចិន ?

ចម្លើយ : គេមានវិសមីការ $I(t) > C(t)$

សមមូល $1.01e^{0.015t} > 1.26e^{0.009t}$

សមមូល $\ell n 1.01e^{0.015t} > \ell n 1.26e^{0.009t}$ សមមូល $\ell n 1.01 + \ell n e^{0.015t} > \ell n 1.26 + e^{0.009t}$

សមមូល $\ell n e^{0.015t} - e^{0.009t} > \ell n 1.26 - \ell n 1.01$ សមមូល $0.006t > \ell n 1.26 - \ell n 1.01$

សមមូល $t > \dfrac{\ell n 1.26 - \ell n 1.01}{0.006}$ នាំឱ្យ $t > 36.86$ ។

ដូចនេះ ប្រហែល 37 ឆ្នាំទៀត ប្រទេសឥណ្ឌានឹងមានប្រជាជនច្រើនជាងប្រទេសចិន ។

មេរៀនសង្ខេប

- **លោការីត** : លោការីតនេពែរនៃចំនួនវិជ្ជមាន k គឺជានិទស្សន្ត x នៃ e^x ដែល $e^x = k$

  គេកំណត់សរសេរ $x = \ell n k$ ហើយ $x = \ell n k$ សមមូល $e^x = k$ ។
- **អនុគមន៍លោការីត** : បើ $x > 0$ អនុគមន៍លោការីតនេពែរនៃ x កំណត់ដោយ $y = \ell n x$ ។
- **លីមីត : បើ** $n > 0,\ x > 0$ **នោះ** $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty,\ \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x^n} = 0$
- **ដេរីវេ** : - បើ $f(x) = \ell n x$ នោះ $f'(x) = \dfrac{1}{x}$ ដែល $x > 0$ ។

  - បើ $g(x) = \ell n U(x)$ នោះ $g'(x) = \dfrac{U'(x)}{U(x)}$ ដែល $U(x) > 0$ ។

លំហាត់

1. គណនាតម្លៃនៃកន្សោមខាងក្រោម ៖

ក. $e^{\ell n7}$

ខ. ℓne^{x-2}

គ. ℓne^{7x} ។

2. សង់ក្រាបនៃអនុគមន៍

ក. $y = 3 - \ln x$

ខ. $y = \ln(x-3)$

គ. $y = \ln(2+e^{x})$ ។

3. គណនាលីមីតនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម ៖

ក. $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{-5}\ln x$

ខ. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(1+\ln x)}{x^2}$

គ. $\lim\limits_{x\to 0}(x\ln x)$ ។

4. គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម ៖

ក. $y = \sqrt{x}\cdot\ln x$

ខ. $y = x\sqrt[3]{\ln x}$

គ. $y = \ln(x+\sqrt{1+x^2})$ ។

5. គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម ៖

ក. $y = \ln\dfrac{e^x}{e^x+1}$

ខ. $y = x\ln x - x$

គ. $y = x^2\ln\dfrac{1}{x^2}$ ។

6. សិក្សាអថេរភាពនិងសង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម ៖

ក. $y = \dfrac{x}{\ln x}$

ខ. $y = \ln x + e^x$

គ. $y = \ln^2 x + \dfrac{1}{\ln^2 x + 2}$ ។

7. សិក្សាអថេរភាពនិងសង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម ៖

ក. $y = 2x - x\ln x$

ខ. $f(x) = \begin{cases} x(1-\ln x) & \text{បើ } x > 0 \\ 0 & \text{បើ } x = 0 \end{cases}$

8. ក. សិក្សាអថេរភាពនិងសង់ក្រាប C របស់អនុគមន៍ $y = -2\ln|x| + x - 2$ ។

ខ. ក្រាប C កាត់ Ox ត្រង់បីចំណុច P , Q , R ដែលមានអាប់ស៊ីសរៀងគ្នា p , q , r ។ ចូរប្រៀបធៀប P , Q , R និងបណ្ដាចំនួន -1 , 0 , 1 , 5 , 6 ។

9. រោងចក្រឧស្សាហកម្មមួយបានទិញម៉ាស៊ីនហ្វាក់តម្លៃ 250 ដុល្លា ហើយមានអត្រាតម្លៃថយចុះ 25 % ក្នុងមួយឆ្នាំ ។ តើបីឆ្នាំក្រោយ ម៉ាស៊ីនហ្វាក់នេះនឹងមានតម្លៃប៉ុន្មាន ?

10. បាក់តេរីមួយប្រភេទបំបែកខ្លួនដោយមានមេគុណអត្រាកំណើន $k = 0.872$ ដែល t គិតជាថ្ងៃ ។ បើដើមដំបូងមានបាក់តេរីចំនួន 9 តើរយៈពេលប៉ុន្មានថ្ងៃ ទើបចំនួនបាក់តេរីកើនដល់ 738 ?

11. នៅទីក្រុងមួយកាលពី 10 ឆ្នាំមុន មានប្រជាជនចំនួន 45600 នាក់ ហើយចំនួនប្រជាជនមានការកើនឡើងដោយអត្រាមួយថេរជារៀងរាល់ឆ្នាំ។ បើបច្ចុប្បន្នមានប្រជាជនចំនួន 64800 នាក់ រកអត្រាកំណើននៃចំនួនប្រជាជនប្រចាំឆ្នាំក្នុងទីក្រុងនេះ ។

លំហាត់ជំពូក 3

1. រកដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ខាងក្រោម :

ក. $y = \sqrt{x^2 - 2\sqrt{x^2-1}} + \sqrt{x-3+2\sqrt{x-4}}$

ខ. $y = 1g\left(\dfrac{2^{1-x}-2x+1}{2^x-1}\right)$ ។

2. រកអាសីមតូតរបស់ក្រាបនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម ៖

ក. $y = \dfrac{4x-3}{2x+5}$

ខ. $y = \dfrac{3x^2-7x+15}{x-1}$

គ. $y = \dfrac{2x-1}{x^2-7x+10}$ ។

3. សិក្សាអថេរភាពនិងសង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម ៖

ក. $y = \dfrac{x^2+3x+3}{x+2}$

ខ. $y = \dfrac{x^2}{x-1}$

គ. $y = \dfrac{x-2}{x^2-2x+1}$ ។

4. គេឱ្យអនុគមន៍ f : $y = \dfrac{2x^2+x+1}{x+1}$ ។

ក. សិក្សាអថេរភាពនិងសង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ f ។

ខ. តាមក្រាបរកតម្លៃអតិបរមានិងអប្បបរមានៃ $A = \dfrac{2\cos^2 x + |\cos x| + 1}{|\cos x| + 1}$ ។

5. គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម ៖

ក. $y = \dfrac{e^x}{x-1}$

ខ. $y = e^{2x} - 2e^x$

គ. $y = \dfrac{e^x+1}{e^x-1}$ ។

6. គណនាដេរីវេអនុគមន៍ខាងក្រោម ៖

ក. $y = x - 1 - \ln x$

ខ. $y = \ln\left(\dfrac{x-3}{x+2}\right)$

គ. $y = x^2\ln x - \dfrac{x^2}{2}$ ។

7. សិក្សាអថេរភាពនិងសង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម ៖

ក. $y = \dfrac{e^x}{x-1}$

ខ. $y = e^{2x} - 2e^x$

គ. $y = \dfrac{e^x+1}{e^x-1}$ ។

8. សិក្សាអថេរភាពនិងសង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម ៖

ក. $y = x - 1 - \ln x$

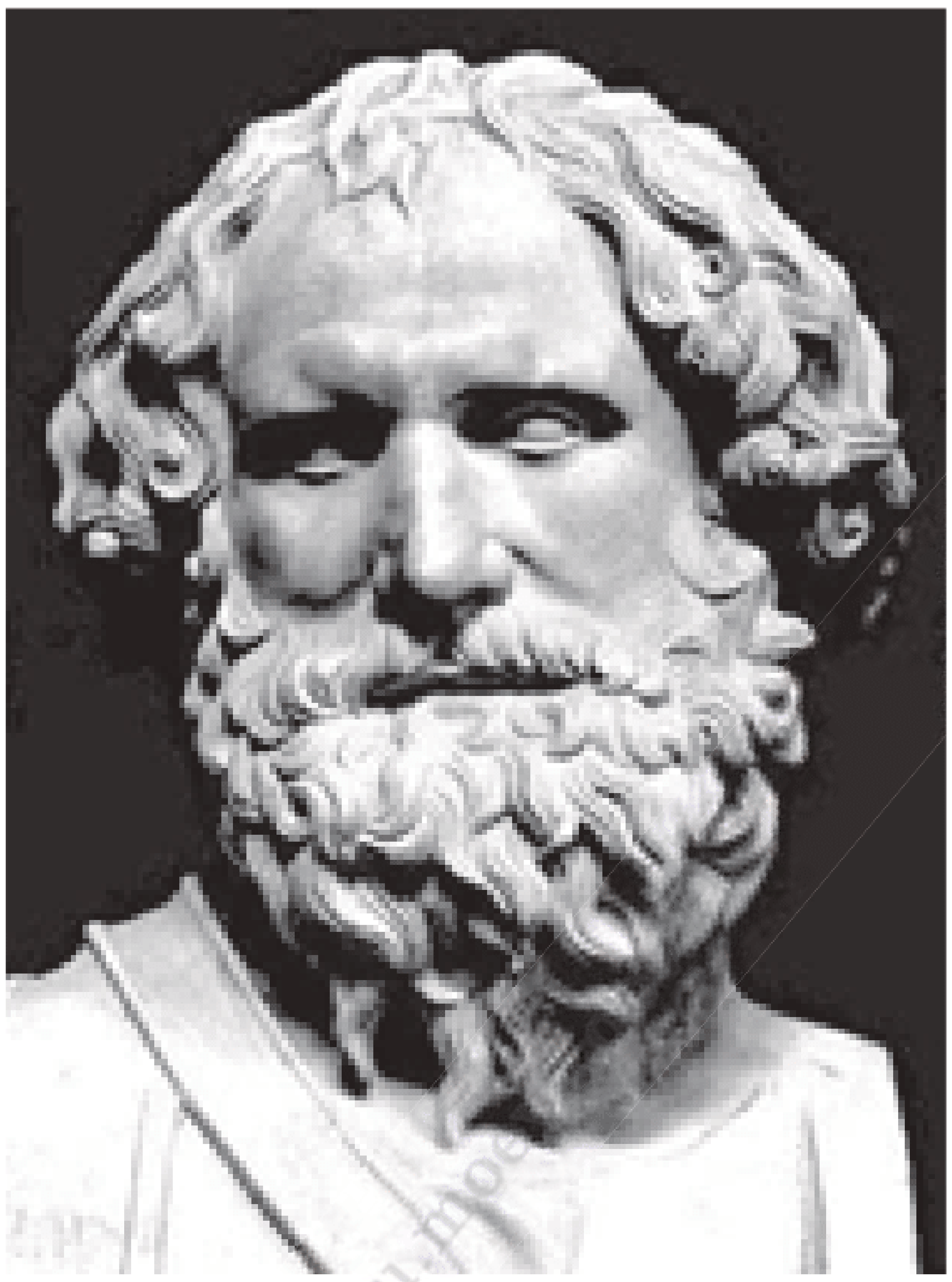
ខ. $y = \ln\left(\dfrac{x-3}{x+2}\right)$

គ. $y = x^2 \ln x - \dfrac{x^2}{2}$ ។

9. មន្ត្រីរាជការម្នាក់មានអាយុ 30 ឆ្នាំ បានយកប្រាក់ចំនួន 1000 ដុល្លារ ទៅផ្ញើនៅធនាគារមួយដោយទទួលបានអត្រាការប្រាក់សមាស 11 % ក្នុងមួយឆ្នាំ ។ ពេលចូលនិវត្តន៍អាយុ 60 ឆ្នាំ តើគាត់មានប្រាក់សរុបទាំងអស់ចំនួនប៉ុន្មាន បើធនាគារទូទាត់ការប្រាក់ជាបន្តបន្ទាប់ ?

10. នៅទីក្រុងមួយកាលពី 20 ឆ្នាំមុន មានប្រជាជនចំនួន 60000 នាក់ ហើយចំនួនប្រជាជនមានការកើនឡើងដោយអត្រាមួយថេរជារៀងរាល់ឆ្នាំ ។ បើបច្ចុប្បន្នមានប្រជាជនចំនួន 150000 នាក់ រកអត្រាកំណើននៃចំនួនប្រជាជនក្នុងទីក្រុងនេះ ។

ជំពូក 4 អាំងតេក្រាល



ក្នុងការគណនាអាំងតេក្រាលដែលមានដើមកំណើតមកពីការគណនាផ្ទៃក្រឡានៃផ្ទែកប្លង់ និងមាឌនៃសូលីត ។ កាលពីបុរាណកាល លោក EUDOXE (406 - 359 មុន គ.ស) និងលោក ARCHIMEDES (287 - 212 មុនគ.ស) បានប្រើវិធីអមផ្ទៃមួយដោយផ្ទៃពីរដែលមានរាងជាពហុកោណដើម្បីគណនាផ្ទៃក្រឡា ។

នៅដើមសតវត្សទី 17 JOHANNES KEPLER (1571 - 1630) និង BONAVENTURA CAVALIERI (1598 - 1647) បានបញ្ចូលធាតុសំខាន់ៗនៃនិយមន័យអាំងតេក្រាលតាមវិធីចតុកោណកែង ។ ដោយគិតថាការគណនាដេរីវេ និងអាំងតេក្រាលជាវិធីពីរច្រាសគ្នាទៅវិញទៅមក លោក Gottfried Wilhem von Leibniz (1646 - 1716) និង Newton (1642 - 1727) បានបញ្ចូលសញ្ញាណអាំងតេក្រាលកំណត់ ។

នៅសតវត្សទី ១៩ លោក AUGUSTIN LOUIS CAUCHY (1789 - 1847) បានបញ្ចូលនិមិត្តសញ្ញា $\int_a^b f(x)dx$ ជានិយមន័យអាំងតេក្រាលកំណត់នៃអនុគមន៍មួយដែលជាប់លើចន្លោះ $[a, b]$ ។

ក្នុងជំពូកនេះ គេសិក្សាតែលើព្រីមីទីវ អាំងតេក្រាលមិនកំណត់ និងអាំងតេក្រាលកំណត់ ។

មេរៀនទី

1 ព្រីមីទីវនិងអាំងតេក្រាលមិនកំណត់

វត្ថុបំណង

- ❑ កំណត់និយមន័យព្រីមីទីវនៃអនុគមន៍
- ❑ កំណត់និយមន័យអាំងតេក្រាលមិនកំណត់នៃអនុគមន៍
- ❑ គណនាអាំងតេក្រាលមិនកំណត់ដោយប្រើរូបមន្តគ្រឹះ
- ❑ គណនាអាំងតេក្រាលមិនកំណត់ដោយប្រើអថេរជំនួស និងអាំងតេក្រាលដោយផ្នែក ។

1. ព្រីមីទីវ

1.1. និយមន័យ

ឧទាហរណ៍ 1: គេទម្លាក់វត្ថុមួយពីទីដែលមានកម្ពស់ h មក ។ នៅខណៈពេល $t_0 = 0$ វត្ថុមានល្បឿន $V(0) = 0$ ។ ក្រោមចលនាទន្លាក់សេរីនៅខណៈពេល t អង្គធាតុផ្លាស់ទីដោយល្បឿន $V(t) = gt$ ដែល g ជាសំទុះនៃទន្លាក់សេរី ។

គណនាចម្ងាយចរនៃវត្ថុនៅខណៈពេល t ។

គេតាង $S(t)$ ជាចម្ងាយចរនៅខណៈពេល t ។

គេដឹងថា $V(t) = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta s}{\Delta t} = S'(t)$ ។

ដូចនេះគេត្រូវរក $S(t)$ ដែលមាន $S'(t) = V(t) = gt$ ។

គេបាន $S(t) = \frac{1}{2}gt^2$ ព្រោះ $S'(t) = gt$ ។

$S(t)$ ដែលគេរកបានជា ព្រីមីទីវនៃ $V(t) = gt$ ។

ឧទាហរណ៍ 2: រក $F(x)$ ដែល $F'(x) = 2x$ ។

គេបាន $F(x) = x^2$ ព្រោះ $F'(x) = (x^2)' = 2x$

គេថា $F(x) = x^2$ ជាព្រីមីទីវនៃ $F'(x) = 2x$ ។

និយមន័យ : $F(x)$ ជាព្រីមីទីវនៃ $f(x)$ កាលណា $F'(x) = f(x)$ ចំពោះគ្រប់តម្លៃ x ក្នុងដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ f ។

លំហាត់គំរូ : គេមាន $F(x) = x^3 + x^2 + x$ និង $f(x) = 3x^2 + 2x + 1$ កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ។ បង្ហាញថា $F(x)$ ជាព្រីមីទីវនៃ $f(x)$ ។

ចម្លើយ : $F'(x) = 3x^2 + 2x + 1 = f(x)$

ដូចនេះ $F(x)$ ជាព្រីមីទីវនៃ $f(x)$ លើ $\mathbb{R}$ ។

ប្រតិបត្តិ :

ក. រកព្រីមីទីវ $F(x)$ នៃ $f(x) = \sin x$ ចំពោះគ្រប់ $x \in \mathbb{R}$ ។

ខ. រកព្រីមីទីវ $G(x)$ នៃ $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ ចំពោះ $x \in (-\infty,\ 0) \cup (0,\ +\infty)$ ។

គ. អនុគមន៍ H កំណត់លើ $(0,\ +\infty)$ ដោយ $H(x) = (x+1)e^{-\frac{1}{x}}$ ។ បង្ហាញថា H ជាព្រីមីទីវមួយនៃ $h(x) = \dfrac{x^2+x+1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}$ ។

1.2. ទ្រឹស្តីបទ

ឧទាហរណ៍ : គេមានអនុគមន៍បីផ្សេងគ្នា $F(x) = x^2$, $G(x) = x^2 + 2008$ និង $H(x) = x^2 - 29$ ។ គេបាន $F'(x) = 2x$, $G'(x) = 2x$ និង $H'(x) = 2x$ ។ គេសង្កេតឃើញថា $F'(x) = G'(x) = H'(x) = 2x$ ដូចនេះ $F(x)$, $G(x)$, $H(x)$ សុទ្ធតែជាព្រីមីទីវនៃ $f(x) = 2x$ ។ គេថា $f(x) = 2x$ មានព្រីមីទីវច្រើនរាប់មិនអស់ ដែលខុសគ្នាត្រឹមតួជាចំនួនពិតថេរ ។

គេតាង ព្រីមីទីវនៃ $2x$ ដោយ $x^2 + c$ ដែល c ជាចំនួនពិតថេរ ។

ទ្រឹស្តីបទ : បើ $F(x)$ ជាព្រីមីទីវមួយនៃ $f(x)$ នោះព្រីមីទីវទាំងអស់នៃ f មានទម្រង់ទូទៅ $F(x) + c$ ដែល c ជាចំនួនពិតថេរ ។

សម្រាយបញ្ជាក់ : គេមានអនុគមន៍ $(F(x)+c)' = f(x)$ ព្រោះ $F(x)$ ជាព្រីមីទីវនៃ $f(x)$ ។

$(F(x)+c)' = F'(x) = f(x)$ ព្រោះ $F(x)$ ជាព្រីមីទីវនៃ $f(x)$ ។

លំហាត់គំរូ1 : រកព្រីមីទីវ $F(x)$ នៃ $f(x) = x^2$ ដែល $F(3) = 2$ ។

ចម្លើយ : ព្រីមីទីវនៃ $f(x) = x^2$ គឺ $F(x) = \frac{1}{3}x^3 + c$ ព្រោះ $F'(x) = x^2$

ដោយ $F(3) = 2$ គេបាន $2 = \frac{1}{3}3^3 + c$, $2 = 9 + c$, $c = -7$

ដូចនេះ $F(x) = \frac{1}{3}x^3 - 7$ ជាព្រីមីទីវនៃ $f(x) = x^2$ ។

សម្គាល់ : គេអាចគណនាចំនួនថេរ c បាន កាលណាគេស្គាល់តម្លៃនៃព្រីមីទីវចំពោះតម្លៃ x ណាមួយ ។

លំហាត់គំរូ2 :

ក. ដោយប្រើដេរីវេបង្ហាញថាអនុគមន៍ $G(x) = \frac{3}{2}x^2 + 4x$ ជាព្រីមីទីវនៃអនុគមន៍មួយដែលគេនឹងត្រូវកំណត់

ខ. ដោយប្រើលទ្ធផលនៅក្នុងសំណួរ ក. ចូរបង្ហាញថា $F(x) = \frac{1}{6}(3x+4)^2$ គឺជាព្រីមីទីវនៃអនុគមន៍ f ដែរ ។

ចម្លើយ :

ក. គេបាន $G'(x) = \frac{3}{2}(2x) + 4 = 3x + 4$ ។

ដូចនេះ $G(x)$ ជាព្រីមីទីវនៃ $f(x) = 3x + 4$ ។

ខ. គេមាន $F(x) = \frac{1}{6}(3x+4)^2 = \frac{1}{6}(9x^2 + 24x + 16) = \frac{3}{2}x^2 + 4x + \frac{8}{3} = G(x) + \frac{8}{3}$

ដោយ $G(x)$ ជាព្រីមីទីវនៃ $f(x) = 3x + 4$ នោះ $F(x)$ ក៏ជាព្រីមីទីវនៃ $f(x)$ ដែរ ។

ប្រតិបត្តិ :

ក. រកព្រីមីទីវ $F(x)$ នៃ $f(x) = \cos x + 1$ ដែល $F\left(\frac{\pi}{3}\right) = 3$ ។

ខ. បង្ហាញថាអនុគមន៍ $F(x) = \frac{x^2}{x^2 + 5x}$ និង $G(x) = \frac{-5}{x+5}$ ជាព្រីមីទីវនៃអនុគមន៍តែមួយ ។

2. អាំងតេក្រាលមិនកំណត់

2.1. និយមន័យ

ឧទាហរណ៍ 1 : គេមានអនុគមន៍ H, G និង F កំណត់ដោយ $H(x) = x^4 + x^3 + 7$, $G(x) = x^4 + x^3 + 2002$ និង $F(x) = x^4 + x^3 + c$ ដែល c ជាចំនួនពិតថេរ ។

តើ $H(x)$, $G(x)$ និង $F(x)$ ជាព្រីមីទីវនៃ $f(x) = 4x^3 + 3x^2$ ឬទេ ?

គេបាន $H'(x) = 4x^3 + 3x^2 = f(x)$

$G'(x) = 4x^3 + 3x^2 = f(x)$

និង $F'(x) = 4x^3 + 3x^2 = f(x)$

គេបាន $F'(x) = G'(x) = H'(x) = f(x) = 4x^3 + 3x^2$

ដូចនេះ $H(x)$, $G(x)$ និង $F(x)$ ជាព្រីមីទីវនៃ $f(x) = 4x^3 + 3x^2$ ។ ព្រីមីទីវទាំងនោះខុសគ្នាតែត្រឹមតួជាចំនួនថេរប៉ុណ្ណោះ ។

សំណុំព្រីមីទីវទាំងអស់នៃ $f(x)$ ហៅថា ***អាំងតេក្រាលមិនកំណត់នៃ*** $f(x)$ ។

គេកំណត់សរសេរ $\int f(x)dx = F(x) + c$ ដែល c ជាចំនួនថេរ ។

> ***និយមន័យ :*** បើ $F(x)$ ជាព្រីមីទីវមួយនៃ $f(x)$ នោះអាំងតេក្រាលមិនកំណត់នៃ $f(x)$ កំណត់ដោយ $\int f(x)dx = F(x) + c$ ដែល c ជាចំនួនពិតថេរ ។

$\int f(x)dx = F(x) + c$ អានថាអាំងតេក្រាលមិនកំណត់នៃ $f(x)$ ស្មើនឹង $F(x) + c$ ។

ឧទាហរណ៍ 2 : គេសំគាល់ឃើញថាព្រីមីទីវនៃអនុគមន៍ f ដែល $f(x) = 4x^3 + 3x^2$ គឺជាអនុគមន៍ F ដែលមានរាង $F(x) = x^4 + x^3 + c$ ដែល c ជាចំនួនពិតថេរ ។

ដូចនេះ $\int (4x^3 + 3x^2)dx = x^4 + x^3 + c$ ដែល c ជាចំនួនថេរ ។

ទំនាក់ទំនងរវាងដេរីវេ និងព្រីមីទីវអាចឱ្យគេបង្កើតបានជាវិធានក្នុងការគណនាអាំងតេក្រាល ។

2.2. រូបមន្តគ្រឹះនៃអាំងតេក្រាលមិនកំណត់

ឧទាហរណ៍ 1 : បើ $F(x) = 5x$ នោះ $F'(x) = 5$ ។ ដូចនេះ $\int 5dx = 5x + c$ ។

បើ $F(x) = -7x + 8$ នោះ $F'(x) = -7$ ។ ដូចនេះ $\int -7dx = -7x + c$ ។

> ***ជាទូទៅ :*** បើ $k \neq 0$ នោះ $\int kdx = kx + c$, $c \in \mathbb{R}$ ដែល c ជាចំនួនពិតថេរ ។

សម្រាយបញ្ជាក់ : ព្រោះថា $(kx + c)' = k$ ដូចនេះ $\int kdx = kx + c$

សំគាល់ : $\int dx = \int 1dx = x + c$ ដែល c ជាចំនួនថេរ ។

ឧទាហរណ៍ 2 : បើ $F(x) = -7\cos x$ នោះ $F'(x) = 7\sin x$

គេបាន $\int 7\sin x dx = 7(-\cos x)+c$ តែ $7\int \sin x dx = 7(-\cos x)+c$ ។

ដូចនេះ $\int 7\sin x dx = 7\int \sin x dx$ ។

ជាទូទៅ **:** បើ $k \neq 0$ នោះ $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$ ។

សម្រាយបញ្ជាក់ **:** ដោយប្រើ $\int f(x)dx = F(x)+c$ សមមូល $(F(x)+c)' = f(x)$

គេបាន $[k\int f(x)dx]' = k(\int f(x)dx)' = k(F(x)+c)' = kf(x)$

ឧទាហរណ៍ 3: បើ $\left(\frac{1}{2}x^2\right)' = \frac{1}{2}(2x) = x$ ។ ដូចនេះ $\int xdx = \frac{x^2}{2}+c = \frac{x^{1+1}}{1+1}+c$ ។

បើ $\left(\frac{1}{3}x^3\right)' = \frac{1}{3}(3x^2) = x^2$ ។ ដូចនេះ $\int x^2dx = \frac{x^3}{3}+c = \frac{x^{2+1}}{2+1}+c$ ។

បើ $\left(-\frac{1}{5}x^{-5}\right)' = -\frac{1}{5}\cdot(-5)x^{-6}$ ។

ដូចនេះ $\int x^{-6}dx = -\frac{1}{5}x^{-5}+c = \frac{x^{-6-1}}{-6+1}+c$, $c\in\mathbb{R}$ ។

ជាទូទៅ **:** បើ $n \neq -1$ នោះ $\int x^n\ dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}+c$, $c\in\mathbb{R}$ ។

សម្រាយបញ្ជាក់ **:** ដោយប្រើ $\int f(x)dx = F(x)+c$ សមមូល $(F(x)+c)' = f(x)$

គេបាន $\left[\frac{x^{n+1}}{n+1}+c\right]' = (n+1)\frac{x^n}{n+1} = x^n$

ដូចនេះ $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}+c$ ដែល $n\neq -1$ ។

ឧទាហរណ៍ 4: បើ $F(x) = \frac{-1}{x}$ នោះ $F'(x) = \frac{1}{x^2}$ ។

បើ $F(x) = \frac{-1}{x}+5$ នោះ $F'(x) = \frac{1}{x^2}$ ។

បើ $F(x) = \frac{-1}{x}+c$ នោះ $F'(x) = \frac{1}{x^2}$ ។

ដូចនេះ $\int \frac{1}{x^2}dx = \frac{-1}{x}+c$, $c\in\mathbb{R}$ ។

ជាទូទៅ **:** $\int \frac{1}{x^2}dx = \frac{-1}{x}+c$, $c\in\mathbb{R}$ ។

សម្រាយបញ្ជាក់ : ដោយប្រើ $\int f(x)dx = F(x)+c$ សមមូល $[F(x)+c]' = f(x)$

គេបាន $\left[\frac{-1}{x}+c\right]' = (-1)\left(\frac{-1}{x^2}\right) = \frac{1}{x^2}$

ដូចនេះ $\int \frac{1}{x^2}dx = \frac{-1}{x}+c$ ។

ឧទាហរណ៍ 5 : បើ $F(x) = 2\sqrt{x}$ នោះ $F'(x) = 2\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$

បើ $F(x) = 2\sqrt{x+7}$ នោះ $F'(x) = 2\cdot\frac{1}{2\sqrt{x+7}} = \frac{1}{\sqrt{x+7}}$

ជាទូទៅ : $\int \frac{1}{\sqrt{x}}dx = 2\sqrt{x}+c$, $c \in \mathbb{R}$ ។

សម្រាយបញ្ជាក់ : ដោយប្រើ $\int f(x)dx = F(x)+c$ សមមូល $[F(x)+c]' = f(x)$

គេបាន $[2\sqrt{x}+c]' = 2\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right) = \frac{1}{\sqrt{x}}$

ដូចនេះ $\int \frac{1}{\sqrt{x}}dx = 2\sqrt{x}+c$ ។

ឧទាហរណ៍ 6 : បើ $F(x) = \frac{1}{2}x^2+e^x-5$ នោះ $F'(x) = x+e^x$

ដូចនេះ $\int (x+e^x)dx = \frac{1}{2}x^2+e^x+c \quad c \in \mathbb{R}$ ។

ម្យ៉ាងទៀត $\int xdx+\int e^x dx = \frac{1}{2}x^2+c_1+e^x+c_2 = \frac{1}{2}x^2+e^x+c_1+c_2 = \frac{1}{2}x^2+e^x+c$,

$c = c_1+c_2$

គេសង្កេតឃើញថា $\int (x+e^x)dx = \int xdx+\int e^x dx$

ជាទូទៅ : $\int [f(x)\pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$ ។

សម្រាយបញ្ជាក់ : បើ $[F(x)+c] = f(x)$ នោះ $\int f(x)dx = F(x)+c$

គេបាន $[F(x)\pm G(x)+c] = F'(x)\pm G'(x) = f(x)\pm g(x)$

នោះ $\int (f(x)\pm g(x))dx = F(x)\pm G(x)+c$ ម្យ៉ាងទៀត

$$\int (f(x)\pm g(x))dx = [F(x)+c_1]\pm[G(x)+c_2] = F(x)\pm G(x)+(c_1+c_2)$$

$$= F(x)\pm G(x)+c \quad , \quad c = c_1+c_2$$

ដូចនេះ $\int (f(x)\pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$ ។

តាមលក្ខណៈខាងលើគេអាចពន្លាតរូបមន្តខាងលើឱ្យកាន់តែទូទៅ

> ***ជាទូទៅ*** **:** $\int[c_1f_1(x)+c_2f_2(x)+c_3f_3(x)+\ldots+c_nf_n(x)]dx$
> $= c_1\int f_1(x)dx + c_2\int(x)dx + c_3\int f_3(x)dx + \ldots + c_n\int f_n(x)dx$ ។

លំហាត់គំរូ **:** គណនាអាំងតេក្រាល $\int(7x^6-5x^3+2x^2+3)dx$

ចម្លើយ :

$$\int(7x^6-5x^3+2x^2+3)dx = \int 7x^6dx - \int 5x^3dx + \int 2x^2dx + \int 3dx$$
$$= 7\int x^6dx - 5\int x^3dx + 2\int x^2dx + 3\int dx$$
$$= 7\left(\frac{x^7}{7}\right) - 5\left(\frac{x^4}{4}\right) + 2\left(\frac{x^3}{3}\right) + 3x + c$$
$$= x^7 - \frac{5}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3 + 3x + c \quad , \quad c \in \mathbb{R}$$

ដូចនេះ $\int(7x^6-5x^3+2x^2+3)dx = x^7 - \frac{5}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3 + 3x + c \quad , \quad c \in \mathbb{R}$ ។

ប្រតិបត្តិ **:** គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម :

ក. $\int(7x^6+5x^4-4x^3-8)dx$ ខ. $\int\left(2x^2-\frac{1}{x^2}+\frac{2}{\sqrt{x}}+1\right)dx$ គ. $\int(x^2-2\sqrt{x})dx$ ។

2.3. អាំងតេក្រាលមិនកំណត់នៃ $y = e^x$ និង $y = \frac{1}{x}$

ឧទាហរណ៍ : បើ $x>0$, $F(x) = \ell nx$, $F'(x) = \frac{1}{x}$ ។

បើ $x<0$, $G(x) = \ell n(-x)$, $G'(x) = \frac{1}{-x}\cdot(-x)' = \frac{1}{x}$ ។

គេសង្កេតឃើញថា $F(x) = \ell nx$, $(x>0)$ និង $G(x) = \ell nx$, $(x<0)$ មាន $F'(x) = G'(x) = \frac{1}{x}$ ។ ដូចនេះ $\int\frac{1}{x}dx = \ell n|x| + c$, $c \in \mathbb{R}$ ។

> ***ជាទូទៅ*** **:** $\int\frac{1}{x}dx = \ell n|x| + c$, $c \in \mathbb{R}$ ដែល $x \neq 0$ ។

បើ $F(x) = e^x + 8$ នោះ $F'(x) = e^x$ ។

បើ $F(x) = e^x - 33$ នោះ $F'(x) = e^x$ ។

បើ $F(x) = e^x + c$ នោះ $F'(x) = e^x$ ដូចនេះ $\int e^xdx = e^x + c$, $c \in \mathbb{R}$ ។

> ***ជាទូទៅ*** **:** $\int e^xdx = e^x + c$, $c \in \mathbb{R}$ ។

ព្រោះថា $(e^x+c)' = e^x$ ។ ដូចនេះ $\int e^x dx = e^x + c$ ។

លំហាត់គំរូ **:** គណនាអាំងតេក្រាល $\int\left(2e^x - \frac{3}{x}\right)dx$

ចម្លើយ **:** $\int\left(2e^x - \frac{3}{x}\right)dx = 2\int e^x dx - 3\int \frac{1}{x}dx = 2e^x - 3\ell n|x| + c \ ,\ c \in \mathbb{R}$

ប្រតិបត្តិ **:** គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម :

ក. $\int\left(\frac{e^x}{2} + \frac{1}{x}\right)dx$ ខ. $\int\left(2e^x + \frac{6}{x} + \ell n5\right)dx$ ។

2.4. អាំងតេក្រាលមិនកំណត់នៃអនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រ

ឧទាហរណ៍ 1 : បើ $F(x) = -\cos x + 5$ នោះ $F'(x) = \sin x$ ។

បើ $F(x) = -\cos x - 7$ នោះ $F'(x) = \sin x$ ។

បើ $F(x) = -\cos x + c$ នោះ $F'(x) = \sin x$ ។

ដូចនេះ $\int \sin x dx = -\cos x + c \ ,\ c \in \mathbb{R}$ ។

ជាទូទៅ **:** $\int \sin x dx = -\cos x + c \ ,\ c \in \mathbb{R}$ ។

ព្រោះថា $(-\cos x + c)' = \sin x$ ។ ដូចនេះ $\int \sin x dx = -\cos x + c$ ។

ឧទាហរណ៍ 2 : បើ $F(x) = \sin x + 5$ នោះ $F'(x) = \cos x$ ។

បើ $F(x) = \sin x - 6$ នោះ $F'(x) = \cos x$ ។

បើ $F(x) = \sin x + c$ នោះ $F'(x) = \cos x$ ។

ដូចនេះ $\int \cos x dx = \sin x + c \ ,\ c \in \mathbb{R}$ ។

ជាទូទៅ **:** $\int \cos x dx = \sin x + c \ ,\ c \in \mathbb{R}$ ។

ព្រោះថា $(\sin x + c)' = \cos x$ ។ ដូចនេះ $\int \cos x dx = \sin x + c$ ។

ឧទាហរណ៍ 3 : បើ $F(x) = \tan x + 5$ នោះ $F'(x) = \tan^2 x + 1 = \frac{1}{\cos^2 x}$ ។

បើ $F(x) = \tan x - 8$ នោះ $F'(x) = \tan^2 x + 1 = \frac{1}{\cos^2 x}$ ។

បើ $F(x) = \tan x + c$ នោះ $F'(x) = \tan^2 x + 1 = \frac{1}{\cos^2 x}$ ។

ដូចនេះ $\int(\tan^2 x + 1)dx = \int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \tan x + c \ ,\ c \in \mathbb{R}$ ។

ជាទូទៅ : $\int(\tan^2 x+1)dx = \int\frac{1}{\cos^2 x}dx = \tan x + c \quad , c\in\mathbb{R}$ ។

ព្រោះថា $(\tan x + c)' = \tan^2 x + 1 = \frac{1}{\cos^2 x}$ ។

ឧទាហរណ៍ 4: បើ $F(x) = -\cot x + 5$ នោះ $F'(x) = 1+\cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$

បើ $F(x) = -\cot x - 4$ នោះ $F'(x) = 1+\cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$

បើ $F(x) = -\cot x + c$ នោះ $F'(x) = 1+\cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$

ដូចនេះ $\int(1+\cot^2 x)dx = \int\frac{1}{\sin^2 x}dx = -\cot x + c \quad , c\in\mathbb{R}$ ។

ជាទូទៅ : $\int(1+\cot^2 x)dx = \int\frac{1}{\sin^2 x}dx = -\cot x + c \quad , c\in\mathbb{R}$ ។

ព្រោះថា $(-\cot x + c)' = 1+\cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$ ។

លំហាត់គំរូ : គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម :

ក. $\int(5\sin x - 3\cos x)dx$ ខ. $\int\left(\frac{2}{\cos^2 x}+\frac{3}{\sin^2 x}\right)dx$ គ. $\int(\tan x + \cot x)^2 dx$ ។

ចម្លើយ :

ក. $\int(5\sin x - 3\cos x)dx = 5\int\sin x dx - 3\int\cos x dx = -5\cos x - 3\sin x + c \quad , c\in\mathbb{R}$ ។

ដូចនេះ $\int(5\sin x - 3\cos x)dx = -5\cos x - 3\sin x + c \quad , c\in\mathbb{R}$ ។

ខ. $\int\left(\frac{2}{\cos^2 x}+\frac{3}{\sin^2 x}\right)dx = 2\int\frac{1}{\cos^2 x}dx + 3\int\frac{1}{\sin^2 x}dx = 2\tan x - 3\cot x + c \quad , c\in\mathbb{R}$

ដូចនេះ $\int\left(\frac{2}{\cos^2 x}+\frac{3}{\sin^2 x}\right)dx = 2\tan x - 3\cot x + c \quad , c\in\mathbb{R}$ ។

គ. $\int(\tan x + \cot x)^2 dx = \int(\tan^2 x + 2\tan x\cdot\cot x + \cot^2 x)dx$

$= \int(\tan^2 x + 2 + \cot^2 x)dx = \int[(\tan^2 x + 1) + (\cot^2 x + 1)]dx$

$= \int(\tan^2 x + 1)dx + \int(\cot^2 x + 1)dx = \tan x - \cot x + c \quad , c\in\mathbb{R}$

ដូចនេះ $\int(\tan x + \cot x)^2 dx = \tan x - \cot x + c \quad , c\in\mathbb{R}$ ។

ប្រតិបត្តិ : គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម :

ក. $\int\left(\frac{2}{3}\cos x + \sin x\right)dx$ ខ. $\int(1+\cos x)dx$ គ. $\int\left(\frac{1}{\sin^2 x}+\frac{4}{\cos^2 x}-5\right)dx$ ។

2.5. ការគណនាអាំងតេក្រាលមិនកំណត់ដោយប្រើអថេរជំនួស និងអាំងតេក្រាលដោយផ្នែក

ក. ការគណនាអាំងតេក្រាលដោយប្រើអថេរជំនួស

ឧទាហរណ៍ : គណនាអាំងតេក្រាល $A = \int (x^2+1)^5 \cdot 2xdx$

តាង $t = x^2+1$, $dt = 2xdx$ ។

គេបាន $A = \int t^5 dt = \frac{1}{6}t^6 + c = \frac{1}{6}(x^2+1)^6 + c$, $c \in \mathbb{R}$

ដូចនេះ $A = \frac{1}{6}(x^2+1)^6 + c$, $c \in \mathbb{R}$

$B = \int \sin(2x+7)dx$

តាង $t = 2x+7$, $dt = 2dx \Rightarrow dx = \frac{1}{2}dt$ ។ គេបាន

$$B = \int \sin(2x+7)dx = \int \sin t \cdot \frac{1}{2}dt = \frac{1}{2}\int \sin t dt$$

$$= -\frac{1}{2}\cos t + c = -\frac{1}{2}\cos(2x+7) + c \ , \quad c \in \mathbb{R}$$

ដូចនេះ $B = -\frac{1}{2}\cos(2x+7) + c$, $c \in \mathbb{R}$

$C = \int sin^2 x \cos x dx$

តាង $t = \sin x$, $dt = \cos x dx$

គេបាន $C = \int \sin^2 x \cos x dx = \int t^2 dt = \frac{1}{3}t^3 + c = \frac{1}{3}(\sin x)^3 + c$, $c \in \mathbb{R}$

ដូចនេះ $C = \int \sin^2 x \cos x dx = \frac{1}{3}(\sin x)^3 + c$, $c \in \mathbb{R}$ ។

តាមឧទាហរណ៍ខាងលើ គេបានវិធានសម្រាប់គណនាអាំងតេក្រាលដោយប្រើអថេរជំនួស

- តាង $t = f(x)$ រួចរក $dt = f'(x)dx$
- ជំនួស $f(x)$ ដោយ t និង $f'(x)dx$ ដោយ dt
- រកចម្លើយអាំងតេក្រាល
- ជំនួស t ដោយ $f(x)$

ដូចនេះ គេបានចម្លើយអាំងតេក្រាលចុងក្រោយជាអនុគមន៍នៃ x ។

ជាទូទៅ **:** $\int kf'(x)dx = kf(x)+c \quad , \quad c\in\mathbb{R}$

$\int[f(x)]^n f'(x)dx = \frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1}+c \;,\; n\neq -1 \quad , \quad c\in\mathbb{R}$

$\int f'(x)e^{f(x)}dx = e^{f(x)}+c \quad , \quad c\in\mathbb{R}$

$\int\frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ell n|f(x)|+c \quad , \quad c\in\mathbb{R}$

$\int\frac{f'(x)}{[f(x)]^n}dx = \frac{-1}{(n-1)[f(x)]^{n-1}}+c \quad , \quad c\in\mathbb{R}$

$\int\frac{f'(x)}{[f(x)]^2}dx = \frac{-1}{f(x)}+c \quad , \quad c\in\mathbb{R}$

$\int\frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}dx = 2\sqrt{f(x)}+c \quad , \quad c\in\mathbb{R}$

$\int\sin[f(x)]f'(x)dx = -\cos[f(x)]+c \;,\; c\in\mathbb{R}$

$\int\cos[f(x)]f'(x)dx = \sin[f(x)]+c \;,\; c\in\mathbb{R}$

$\int[1+\tan^2[f(x)]]f'(x)dx = \int\frac{f'(x)}{\cos^2[f(x)]}dx = \tan[f(x)]+c \;,\; c\in\mathbb{R}$

$\int[1+\cot^2[f(x)]]f'(x)dx = \int\frac{f'(x)}{\sin^2[f(x)]}dx = -\cot[f(x)]+c \;,\; c\in\mathbb{R}$ ។

លំហាត់គំរូ1 **:** គណនាអាំងតេក្រាល $\int(x^2+3x-1)^4(2x+3)dx$

ចម្លើយ **:**

$$\int(x^2+3x-1)^4(2x+3)dx = \int(x^2+3x-1)^4(x^2+3x-1)'dx = \frac{1}{5}(x^2+3x-1)^5+c \;,\; c\in\mathbb{R}$$

ដូចនេះ $\int(x^2+3x-1)^4(2x+3)dx = \frac{1}{5}(x^2+3x-1)^5+c \;,\; c\in\mathbb{R}$ ។

លំហាត់គំរូ2 **:** គណនាអាំងតេក្រាល $\int 8x^3\sin x^4dx$

ចម្លើយ **:** $\int 8x^3\sin x^4dx = 2\int 4x^3\sin x^4dx = 2\int\sin x^4(x^4)'dx = -2\cos(x^4)+c \;,\; c\in\mathbb{R}$

ដូចនេះ $\int 8x^3\sin x^4dx = -2\cos(x^4)+c \;,\; c\in\mathbb{R}$ ។

ប្រតិបត្តិ **:** គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម :

ក. $\int\frac{x}{(x^2-3)^4}dx$ ខ. $\int\frac{e^x}{e^x+2}dx$ គ. $\int 8\sin x\cos^5 xdx$ ។

ខ. អាំងតេក្រាលដោយផ្នែក

គេមានអនុគមន៍ពីរ f និង g ដែលមានដេរីវេ f' និង g'

គេបាន : $(fg)' = f'g + fg'$

$$\int (fg)'dx = \int f'g dx + \int fg'dx$$

$$fg = \int gf'dx + \int fg'dx$$

គេទាញបាន $\int fg'dx = fg - \int gf'dx$ គឺជារូបមន្តអាំងតេក្រាលដោយផ្នែក ។

គេអាចសរសេរ : $\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int g(x)f'(x)dx$

លំហាត់គំរូ1 : ដោយប្រើអាំងតេក្រាលដោយផ្នែក ចូរគណនា $A = \int xe^x dx$ ។

ចម្លើយ : តាង $f(x) = x$, $f'(x) = 1$

តាង $g'(x) = e^x$, $g(x) = e^x$

តាមរូបមន្ត $\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int g(x)f'(x)dx$

$$\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + c = (x-1)e^x + c \ , \quad c \in \mathbb{R}$$

ដូចនេះ $\int xe^x dx = (x-1)e^x + c$, $c \in \mathbb{R}$ ។

លំហាត់គំរូ2 : ដោយប្រើអាំងតេក្រាលដោយផ្នែក ចូរគណនា $\int \ell nx dx$

តាង $f(x) = \ell nx$, $f'(x) = \frac{1}{x}$

តាង $g'(x) = 1$, $g(x) = x$

តាមរូបមន្ត $\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int g(x)f'(x)dx$

$$\int \ell nx dx = x\ell nx - \int x \cdot \frac{1}{x} = x\ell nx - \int dx = x\ell nx - x + c \ , \ c \in \mathbb{R}$$

ដូចនេះ $\int \ell nx dx = x\ell nx - x + c$, $c \in \mathbb{R}$ ។

កំណត់ចំណាំ : $\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int g(x)f'(x)dx$

បើ $P(x) \cdot \begin{bmatrix} \cos(ax+b) \\ \sin(ax+b) \\ e^{ax+b} \end{bmatrix}$ ដែល $P(x)$ ជាពហុធា នោះគេតាង $f(x) = P(x)$ ។

បើ $P(x) \cdot [\ell nx(ax+b)]$ ដែល $P(x)$ ជាពហុធា នោះគេតាង $g'(x) = P(x)$ ។

លំហាត់គំរូ3 : ដោយប្រើអាំងតេក្រាលដោយផ្នែកគណនា $\int (3x+2)\sin x dx$ ។

ចម្លើយ **:** តាង $f(x) = 3x+2$, $f'(x) = 3$

តាង $g'(x) = \sin x$, $g(x) = -\cos x$

តាមរូបមន្ត $\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int g(x)f'(x)dx$

$$\int (3x+2)\sin x = -(3x+2)\cos x - \int -3\cos x dx$$

$$= -(3x+2)\cos x + 3\int \cos x dx$$

$$= -(3x+2)\cos x + 3\sin x + c \quad , \; c \in \mathbb{R}$$

ដូចនេះ $\int (3x+2)\sin x dx = -(3x+2)\cos x + 3\sin x + c$, $c \in \mathbb{R}$ ។

លំហាត់គំរូ4 **:** ដោយប្រើអាំងតេក្រាលដោយផ្នែក ចូរគណនា $\int e^x \cos x dx$

ចម្លើយ **:** តាង $f(x) = e^x$, $f'(x) = e^x$

តាង $g'(x) = \cos x$, $g(x) = \sin x$

តាមរូបមន្ត $\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int g(x)f'(x)dx$

$$\int e^x \cos x dx = e^x \sin x - \int e^x \sin x dx \qquad (1)$$

គណនាអាំងតេក្រាលដោយផ្នែក $\int e^x \sin x dx$ ម្តងទៀត ។

តាង $f(x) = e^x$, $f'(x) = e^x$

តាង $g'(x) = \sin x$, $g(x) = -\cos x$

តាមរូបមន្ត $\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int g(x)f'(x)dx$

$\int e^x \sin x dx = -e^x \cos x + \int e^x \cos x dx$ យកទៅជំនួសក្នុង (1)

គេបាន $\int e^x \cos x dx = e^x \sin x - (-e^x \cos x + \int e^x \cos x dx) = e^x \sin x + e^x \cos x - \int e^x \cos x dx + c_1$

$$2\int e^x \cos x dx = e^x \sin x + e^x \cos x + c_1$$

$$\int e^x \cos x dx = \frac{1}{2}e^x \sin x + \frac{1}{2}e^x \cos x + c \quad , \; c = \frac{c_1}{2} \in \mathbb{R}$$

ដូចនេះ $\int e^x \cos x dx = \frac{1}{2}e^x \sin x + \frac{1}{2}e^x \cos x + c$, $c \in \mathbb{R}$ ។

ប្រតិបត្តិ **:** ដោយប្រើអាំងតេក្រាលដោយផ្នែក ចូរគណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម :

ក. $\int (-2x+1)\cos x dx$ ខ. $\int (5x-4)\,\ell n x dx$

គ. $\int x\sqrt{x+1}\,dx$ ឃ. $\int x^2 e^x dx$ ។

2.6. គណនាអាំងតេក្រាលនៃអនុគមន៍សនិទាន

ឧទាហរណ៍ 1 **:** គណនា

$$\frac{2}{x+1}+\frac{3}{x-3} = \frac{2(x-3)+3(x+1)}{(x+1)(x-3)} = \frac{2x-6+3x+3}{(x+1)(x-3)} = \frac{5x-3}{(x+1)(x-3)}$$

ដោយបូកប្រភាគនៅអង្គខាងឆ្វេង គេបានប្រភាគនៅអង្គខាងស្តាំ ។ ច្រាសមកវិញរកចំនួនពិតថេរ A និង B ដោយដឹងថា $\frac{5x-3}{(x+1)(x-3)} = \frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-3}$

$$\frac{5x-3}{(x+1)(x-3)} = \frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-3} = \frac{A(x-3)+B(x+1)}{(x+1)(x-3)} = \frac{(A+B)x-3A+B}{(x+1)(x-3)}$$

គេបាន $5x-3 = (A+B)x-3A+B$

ដោយផ្ទឹមលេខមេគុណ គេបាន $\begin{cases} A+B = 5 \\ -3A+B = -3 \end{cases}$

គេបាន $A = 2$, $B = 3$ ដូចនេះ $\frac{5x-3}{(x+1)(x-3)} = \frac{2}{x+1}+\frac{3}{x-3}$ ។

ឧទាហរណ៍ 2 **:** គណនាអាំងតេក្រាល $\int\frac{5x-3}{(x+1)(x-3)}dx$

ពីឧទាហរណ៍ 1 គេបាន $\int\frac{5x-3}{(x+1)(x-3)}dx = \int\left[\frac{2}{x+1}+\frac{3}{x-3}\right]dx = 2\int\frac{1}{x+1}dx+3\int\frac{1}{x-3}dx$

$$= 2\int\frac{(x+1)'}{x+1}dx+3\int\frac{(x-3)'}{x-3}dx = 2\,\ell n\,|x+1|+3\,\ell n\,|x-3|+c \quad , \; c\in\mathbb{R}$$ ។

ឧទាហរណ៍ 3 **:** ចូរសរសេរប្រភាគ $\frac{6x+7}{(x+2)^2}$ ជាផលបូកនៃប្រភាគងាយ រួចគណនា $\int\frac{6x+7}{(x+2)^2}dx$

គេមាន $\frac{6x+7}{(x+2)^2} = \frac{A}{x+2}+\frac{B}{(x+2)^2} = \frac{Ax+2A+B}{(x+2)^2}$

នោះ $6x+7 = Ax+2A+B$ ដោយផ្ទឹមលេខមេគុណ គេបាន $\begin{cases} A = 6 \\ 2A+B = 7 \end{cases}$

គេបាន $A = 6$, $B = -5$

$$\int\frac{6x+7}{(x+2)^2}dx = \int\left[\frac{6}{x+2}-\frac{5}{(x+2)^2}\right]dx = 6\int\frac{1}{x+2}dx-5\int\frac{1}{(x+2)^2}dx$$

$$= 6\int\frac{(x+2)'}{x+2}dx-5\int\frac{(x+2)'}{(x+2)^2}dx = 6\,\ell n\,|x+2|+\frac{5}{x+2}+c \quad , \; c\in\mathbb{R}$$ ។

ជាទូទៅ គេអាចបំបែកប្រភាគ $\frac{P(x)}{Q(x)}$ ជាប្រភាគងាយតាមករណី $Q(x)$ ដូចខាងក្រោម :

ក. ករណី $Q(x) = (ax+b)(cx+d)(ex+f)\ldots$

$\frac{P(x)}{Q(x)} = A(x)+\frac{A_1}{ax+b}+\frac{A_2}{cx+d}+\frac{A_3}{ex+f}+\ldots$ ដែលចំនួនថេរ A_1, A_2, $A_3\ldots$, A_n ត្រូវកំណត់ ។

បើដឺក្រេនៃ $P(x)$ ស្មើដឺក្រេនៃ $Q(x)$ នោះ $A(x)$ ជាចំនួនពិតថេរ

បើដឺក្រេនៃ $P(x)$ តូចជាងដឺក្រេនៃ $Q(x)$ នោះ $A(x) = 0$

បើដឺក្រេនៃ $P(x)$ ធំជាងដឺក្រេនៃ $Q(x)$ នោះ $A(x)$ ជាពហុធា ។

ខ. ករណី $Q(x) = (ax+b)^n$

$\dfrac{P(x)}{Q(x)} = A(x) + \dfrac{A_1}{ax+b} + \dfrac{A_2}{(ax+b)^2} + \ldots + \dfrac{A_n}{(ax+b)^n}$ ដែលចំនួនពិតថេរ $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ត្រូវកំណត់ ។

បើដឺក្រេនៃ $P(x)$ ស្មើដឺក្រេនៃ $Q(x)$ នោះ $A(x)$ ជាចំនួនពិតថេរ

បើដឺក្រេនៃ $P(x)$ តូចជាងដឺក្រេនៃ $Q(x)$ នោះ $A(x) = 0$

បើដឺក្រេនៃ $P(x)$ ធំជាងដឺក្រេនៃ $Q(x)$ នោះ $A(x)$ ជាពហុធា ។

លំហាត់គំរូ1 **:** គណនា $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+x-2}$ ។

គេមាន $\dfrac{1}{x^2+x-2} = \dfrac{1}{(x-1)(x+2)} = \dfrac{A_1}{x-1} + \dfrac{A_2}{x+2} = \dfrac{A_1(x+2)+A_2(x-1)}{(x-1)(x+2)}$

$$= \frac{(A_1+A_2)x+(2A_1-A_2)}{(x-1)(x+2)} \text{ ។}$$

នោះគេបាន $1 = (A_1+A_2)x+(2A_1-A_2)$ ដោយផ្ទឹមលេខមេគុណ គេបាន $\begin{cases} A_1+A_2 = 0 \\ 2A_1 - A_2 = 1 \end{cases}$

$3A_1 = 1$ នាំឱ្យ $A_1 = \dfrac{1}{3}$ និង $A_2 = -\dfrac{1}{3}$

នោះ $\dfrac{1}{x^2+x-2} = \dfrac{\frac{1}{3}}{x-1} + \dfrac{-\frac{1}{3}}{x+2}$

គេបាន $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+x-2}dx = \int \left[\frac{\frac{1}{3}}{x-1} + \frac{\frac{-1}{3}}{x+2}\right]dx = \frac{1}{3}\int \frac{1}{x-1}dx - \frac{1}{3}\int \frac{1}{x+2}dx$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{(x-1)'}{x-1}dx - \frac{1}{3}\int \frac{(x+2)'}{x+2}dx$$

$$= \frac{1}{3}\ell n\,|x-1| - \frac{1}{3}\ell n\,|x+2| + c \quad , \ c \in \mathbb{R} \text{ ។}$$

ដូចនេះ $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+x-2}dx = \frac{1}{3}\ell n\,|x-1| - \frac{1}{3}\ell n\,|x+2| + c \quad , \ c \in \mathbb{R}$ ។

លំហាត់គំរូ2 **:** គណនា $\displaystyle\int \frac{(2x+4)}{x^3-2x^2}dx$ ។

គេមាន $\dfrac{2x+4}{x^3-2x^2} = \dfrac{2x+4}{x^2(x-2)} = \dfrac{A}{x} + \dfrac{B}{x^2} + \dfrac{C}{x-2} = \dfrac{Ax(x-2)+B(x-2)+Cx^2}{x^2(x-2)}$

$$= \frac{(A+C)x^2 + (-2A+B)x - 2B}{x^2(x-2)} \text{ ។}$$

នោះគេបាន $2x+4 = (A+C)x^2 + (-2A+B)x - 2B$ ដោយផ្ទឹមលេខមេគុណ គេបាន

$$\begin{cases} A+C = 0 \\ -2A+B = 2 \\ -2B = 4 \end{cases} \text{ នាំឱ្យ } \begin{cases} C = 2 \\ A = -2 \\ B = -2 \end{cases} \text{ នោះ } \frac{2x+4}{x^3-2x^2} = \frac{-2}{x} + \frac{-2}{x^2} + \frac{2}{x-2}$$

គេបាន $\displaystyle\int \frac{2x+4}{x^3+2x^2}dx = \int\left[\frac{-2}{x} + \frac{-2}{x^2} + \frac{2}{x-2}\right]dx = -2\int\frac{1}{x}dx - 2\int\frac{1}{x^2}dx + 2\int\frac{1}{x-2}dx$

$$= -2\int\frac{1}{x}dx - 2\int\frac{1}{x^2}dx + 2\int\frac{(x-2)'}{x-2}dx$$

$$= -2\,\ell n\,|x| + \frac{2}{x} + 2\,\ell n\,|x-2| + c \quad , \ c \in \mathbb{R} \text{ ។}$$

ដូចនេះ $\displaystyle\int \frac{2x+4}{x^3+2x^2}dx = -2\ell n|x| + \frac{2}{x} + 2\ell n|x-2| + c \quad , \ c \in \mathbb{R}$ ។

លំហាត់គំរូ3 : គណនា $\displaystyle\int\left(\frac{x^3}{x^2+2x+1}\right)dx$ ។

គេមាន $\displaystyle\frac{x^3}{x^2+2x+1} = x-2+\frac{3x+2}{x^2+2x+1} = x-2+\frac{3x+2}{(x+1)^2} = x-2+\frac{A}{x+1}+\frac{B}{(x+1)^2}$

នោះ $\displaystyle\frac{3x+2}{(x+1)^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} = \frac{Ax+A+B}{(x+1)^2}$ ។

គេបាន $3x+2 = Ax+A+B$ ដោយផ្ទឹមលេខមេគុណ គេបាន $A = 3$, $B = -1$ នោះ

$\displaystyle\frac{x^3}{x^2+2x+1} = x-2+\frac{3}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2}$ គេបាន

$$\int\frac{x^3}{x^2+2x+1}dx = \int\left[x-2+\frac{3}{x+1}-\frac{1}{(x+1)^2}\right]dx = \int xdx - 2\int dx + 3\int\frac{1}{x+1}dx - \int\frac{1}{(x+1)^2}dx$$

$$= \frac{x^2}{2} - 2x + 3\,\ell n\,|x+1| + \frac{1}{x+1} + c \quad , \ c \in \mathbb{R} \text{ ។}$$

ដូចនេះ $\displaystyle\int\left(\frac{x^3}{x^2+2x+1}\right)dx = \frac{x^2}{2} - 2x + 3\,\ell n\,|x+1| + \frac{1}{x+1} + c \quad , \ c \in \mathbb{R}$ ។

ប្រតិបត្តិ : គណនាអាំងតេក្រាលនៃអនុគមន៍សនិទានខាងក្រោម :

ក. $\displaystyle\int\frac{1}{x^2+3x-4}dx$ ខ. $\displaystyle\int\frac{5x-13}{(x-3)(x-2)}dx$ គ. $\displaystyle\int\left(\frac{x^3}{x^2-2x+1}\right)dx$ ។

3. អនុវត្តន៍

ឧទាហរណ៍ 1 : ស្ថានីយវិទ្យុមួយកំពុងតែចាប់ផ្ដើមបង្កើនការផ្សព្វផ្សាយពាណិជ្ជកម្មដើម្បីបង្កើនចំនួនអ្នកស្ដាប់ប្រចាំថ្ងៃ ។ បច្ចុប្បន្ននេះ អ្នកស្ដាប់វិទ្យុនេះជាប្រចាំមានចំនួន 27 000 នាក់ ហើយគេសង្ឃឹមថាក្នុងមួយថ្ងៃចំនួនអ្នកស្ដាប់ $S(t)$ នឹងកើនឡើងតាមអត្រា $S'(t) = 60\sqrt{t}$ ដែល t ជាចំនួនថ្ងៃគិតពីថ្ងៃចាប់ផ្ដើមបង្កើនការផ្សព្វផ្សាយ ។ តើគេត្រូវប្រើរយៈពេលប៉ុន្មាន ប្រសិនបើស្ថានីយវិទ្យុនេះចង់ឱ្យចំនួនអ្នកស្ដាប់ប្រចាំថ្ងៃកើនឡើងរហូតដល់ 41 000 នាក់ ?

ចម្លើយ : គេត្រូវដោះស្រាយសមីការ $S(t) = 41,000$ ដើម្បី t

តាមបម្រាប់ គេមាន $S'(t) = 60\sqrt{t}$ និង $S(0) = 27,000$

បើ $S'(t) = 60\sqrt{t}$ នោះ $S(t) = \int S'(t)dt = \int 60t^{\frac{1}{2}}dt = \dfrac{60t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c = 40t^{\frac{3}{2}} + c$, c

ជាចំនួនពិតថេរ ។

ដោយ $S(0) = 27000$ នោះគេបាន $40 \times 0^{\frac{3}{2}} + c = 27000$

$c = 27000$ ។

ដូចនេះ $S(t) = 40t^{\frac{3}{2}} + 27000$ ។

តាមសមីការ $S(t) = 41\ 000$ គេបាន : $40t^{\frac{3}{2}} + 27,000 = 41000$

$40t^{\frac{3}{2}} = 14000$, $t^{\frac{3}{2}} = 350$, $t = 49.66 \approx 50$ ។

ដូចនេះ គេត្រូវប្រើពេល 50 ថ្ងៃ ។

ឧទាហរណ៍ 2 : វត្ថុមួយផ្លាស់ទីតាមទិសឈរ ។ រយៈពេល t វិនាទីក្រោយមកវត្ថុនោះផ្លាស់ទីដោយល្បឿន $V(t) = 96 - 32t(m/s)$ ។

ក. រកកម្ពស់ $S(t)$ ដោយដឹងថាវត្ថុនោះផ្លាស់ទីពីកម្ពស់ $S(0) = 18m$ ។

ខ. រកកម្ពស់ $S(t)$ រយៈពេល $t = 3$ វិនាទី ។

ចម្លើយ :

ក. រកកម្ពស់ $S(t)$ ដោយដឹងថាវត្ថុនោះផ្លាស់ទីពីកម្ពស់ $S(0) = 18m$ **រយៈពេល** t វិនាទីក្រោយមកវត្ថុនោះផ្លាស់ទីដោយល្បឿន $V(t) = 96 - 32t\ (m/s)$

គេបាន $v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = S'(t)$

នោះ $S(t) = \int v(t)dt = \int (96 - 32t)dt = 96t - 16t^2 + c \quad , \ c \in \mathbb{R}$

ដោយដឹងថាវត្ថុនោះផ្លាស់ទីពីកម្ពស់ $S(0) = 18m$ នោះគេបាន :

$96 \times 0 - 15 \times 0^2 + c = 18$ នាំឱ្យ $c = 18$ នោះ $S(t) = -16t^2 + 96t + 18$ ។

ដូចនេះ កម្ពស់ $S(t)$ នៃវត្ថុផ្លាស់ទីនៅរយៈពេល t វិនាទីក្រោយមក គឺ

$S(t) = -16t^2 + 96t + 18$ ។

ខ. រកកម្ពស់ $S(t)$ រយៈពេល $t = 3$ វិនាទី

ពេល $t = 3$ វិនាទី គេបានកម្ពស់នៃវត្ថុផ្លាស់ទីគឺ $S(3) = -16.3^2 + 96.3 + 18 = 162m$ ។

ដូចនេះ កម្ពស់នៃវត្ថុផ្លាស់ទីនៅរយៈពេល $t = 3$ វិនាទីស្មើ $162m$ ។

មេរៀនសង្ខេប

- បើ $k \neq 0$ នោះ $\int k dx = kx + c \quad , \quad c \in \mathbb{R}$
- បើ $k \neq 0$ នោះ $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$
- $\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$
- $\int [c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + c_3 f_3(x) + \ldots + c_n f_n(x)]dx$

  $= c_1\int f_1(x)dx + c_2\int f_2(x)dx + c_3\int f_3(x)dx + \ldots + c_n\int f_n(x)dx$

- $\int dx = x + c \quad , \ c \in \mathbb{R}$
- $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \quad , \ c \in \mathbb{R} \quad (n \neq -1)$
- $\int \frac{1}{x}dx = \ell n\,|x| + c \ , \ c \in \mathbb{R}$
- $\int \frac{1}{x^2}dx = -\frac{1}{x} + c \quad , \ c \in \mathbb{R}$
- $\int \frac{1}{\sqrt{x}}dx = 2\sqrt{x} + c \quad , \ c \in \mathbb{R}$
- $\int e^x dx = e^x + c \quad , \ c \in \mathbb{R}$
- $\int \sin x dx = -\cos x + c \quad , \ c \in \mathbb{R}$
- $\int \cos x dx = \sin x + c \quad , \ c \in \mathbb{R}$

- $\int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \int (1+\tan^2 x)dx = \tan x + c \quad , \; c \in \mathbb{R}$

- $\int \frac{1}{\sin^2 x}dx = \int (1+\cot x)dx = -\cot x + c \quad , \; c \in \mathbb{R}$

- $\int kf'(x)dx = kf(x) + c \quad , \; c \in \mathbb{R}$
- $\int [f(x)]^n f'(x)dx = \frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1} + c \quad , \; c \in \mathbb{R} \qquad n \neq -1$
- $\int f'(x)e^{f(x)}dx = e^{f(x)} + c \quad , \; c \in \mathbb{R}$
- $\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = ln|f(x)| + c \; , \; c \in \mathbb{R}$
- $\int \frac{f'(x)}{[f(x)]^n}dx = \frac{-1}{(n-1)[f(x)^{n-1}]} + c \qquad , \; c \in \mathbb{R}$
- $\int \frac{f'(x)}{[f(x)]^2}dx = \frac{-1}{f(x)} + c \; , \; c \in \mathbb{R}$
- $\int \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}dx = 2\sqrt{f(x)} + c \quad , \; c \in \mathbb{R}$
- $\int \sin[f(x)]f'(x)dx = -\cos[f(x)] + c \; , \; c \in \mathbb{R}$
- $\int \cos[f(x)]f'(x)dx = \sin[f(x)] + c \quad , \; c \in \mathbb{R}$
- $\int \frac{f'(x)}{\cos^2[f(x)]}dx = \int [1+\tan^2[f(x)]]f'(x)dx = \tan[f(x)] + c \quad , \; c \in \mathbb{R}$
- $\int \frac{f'(x)}{\sin^2[f(x)]}dx = \int [1+\cot^2[f(x)]]f'(x)dx = -\cot[f(x)] + c \quad , \; c \in \mathbb{R}$ ៗ

លំហាត់

1. បង្ហាញថា $F(x)$ ជាព្រីមីទីវនៃ $f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$ ដែល :

ក. $F(x) = -7x+4$ និង $f(x) = -7$

ខ. $F(x) = 3x^3-7x$ និង $f(x) = 9x^2-7$

គ. $F(x) = 3e^{x^2-1}-7$ និង $f(x) = 6xe^{x^2-1}$

ឃ. $F(x) = \ell n(e^{3x}-x)+\sqrt{11}$ និង $f(x) = \dfrac{3e^{3x}-1}{e^{3x}-x}$ ។

2. រកព្រីមីទីវ $F(x)$ នៃអនុគមន៍ $f(x)$ កំណត់ និងជាប់លើចន្លោះ I ដោយ :

ក. $f(x) = 5$, $I = \mathbb{R}$

ខ. $f(x) = -4x+3$, $I = \mathbb{R}$

គ. $f(x) = -x^2+3x+5$, $I = \mathbb{R}$

ឃ. $f(x) = \dfrac{2}{x}$, $I = (0,\ +\infty)$

ង. $f(x) = \dfrac{1}{3x+2}$, $I = \left(-\dfrac{2}{3},\ +\infty\right)$

ច. $f(x) = \dfrac{x}{x^2+5}$, $I = \mathbb{R}$

ឆ. $f(x) = e^{3x-2}$, $I = \mathbb{R}$

ជ. $f(x) = xe^{x^2}$, $I = \mathbb{R}$ ។

3. រកព្រីមីទីវ $F(x)$ នៃអនុគមន៍ f ដែលកំណត់ដោយ :

ក. $f(x) = \dfrac{3}{\cos^2 x}$ និង $F\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = -1$

ខ. $f(x) = x^2-x$ និង $F(0) = 1$

គ. $f(x) = x^2-e^x$ និង $F(0) = 1$

ឃ. $f(x) = x^2-xe^{x^2}$ និង $F(0) = 1$

4. រកព្រីមីទីវ $F(x)$ នៃអនុគមន៍ f ដែលកំណត់ដោយ :

ក. $f(x) = \sin x$ និង $F(0) = 3$

ខ. $f(x) = x-e^x$ និងថ $F(1) = 1-e$

គ. $f(x) = \dfrac{x}{(x^2-4)^3}$ និង $F(5) = 3$

ឃ. $f(x) = \sin x\cos^3 x$ និង $F\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 16$

5. គណនាអាំងតេក្រាលមិនកំណត់ខាងក្រោម :

ក. $\int(2x^3-5x^2+3x+1)dx$

ខ. $\int\left(5-\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)dx$

គ. $\int 2\sqrt[4]{x}dx$

ឃ. $\int\left(\dfrac{3}{x^4}+\dfrac{1}{x^5}\right)dx$

ង. $\int(x^2-1)\sqrt{x}dx$

ច. $\int\left(2e^x+\dfrac{6}{x}-\ell n5\right)dx$

ឆ. $\int\dfrac{4x^4-3x^5+1}{x^4}dx$

ជ. $\int\dfrac{3x^2-2x+1}{\sqrt{x}}dx$

ឈ. $\int(3\sin x+5\cos x)dx$

ញ. $\int\left(\dfrac{1}{\sin^2 x}+\dfrac{4}{\cos^2 x}-5\right)dx$

ដ. $\int\dfrac{e^{3x}+1}{e^x+1}dx$

ឋ. $\int(1-e^x)^2dx$

ឌ. $\int\frac{\cos 2x dx}{\sin^2 x\cos^2 x}$

ធ. $\int\frac{dx}{\sin^2 x\cos^2 x}$

6. គណនាអាំងតេក្រាលមិនកំណត់ខាងក្រោម ៖

ក. $\int 3e^{3x}dx$

ខ. $\int 2xe^{x^2}dx$

គ. $\int 5e^{4-5x}dx$

ឃ. $\int(6x-7)e^{3x^2-7x}dx$

ង. $\int(3x^2-2x+1)e^{x^3-x^2+x}dx$

ច. $\int\cos x e^{\sin x}dx$

ឆ $\int xe^{x^2}dx$

ជ. $\int 6x^2e^{x^3}dx$

ឈ. $\int(x+1)e^{x^2+2x}dx$

ញ. $\int\frac{2}{\sqrt{x}e^{\sqrt{x}}}dx$ ។

7. គណនាអាំងតេក្រាលមិនកំណត់ខាងក្រោម ៖

ក. $\int xe^{-x}dx$

ខ. $\int xe^{\frac{x}{2}}dx$

គ. $\int(1-x)e^{x}dx$

ឃ. $\int(3-2x)e^{-x}dx$

ង. $\int x\ell n2xdx$

ច. $\int x\ell nx^2dx$

ឆ. $\int xe^{\frac{-x}{5}}dx$

ជ. $\int xe^{0.1x}dx$

ឈ. $\int x\sqrt{x-6}dx$

ញ. $\int x\sqrt{1-x}dx$

ដ. $\int x(x+1)^8dx$

ឋ. $\int(x+1)(x+2)^6dx$

ឌ. $\int\frac{x}{\sqrt{x+2}}dx$

ឍ. $\int\frac{x}{\sqrt{2x+1}}dx$

ណ. $\int x^2e^{-x}dx$

ត. $\int x^2e^{3x}dx$

ថ. $\int x^3e^{x}dx$

ទ. $\int x^3e^{2x}dx$

ធ. $\int x^2\ell nxdx$

ន. $\int x(\ell nx)^2dx$

ប. $\int\frac{\ell nx}{x^2}dx$

ផ. $\int\frac{\ell nx}{x^3}dx$ ។

8. តម្លៃរបស់រថយន្តមានការថយចុះជារៀងរាល់ឆ្នាំស្របទៅនឹងអាយុកាលរបស់វា ។ បើអត្រាចុះកំណត់ដោយអនុគមន៍ $f'(t) = -100t(t+3)^{-2}$ (គិតជាម៉ឺនរៀល)ដែល t ជាអាយុកាលរបស់រថយន្តគិតជាឆ្នាំ ។ រកអនុគមន៍នៃតម្លៃរថយន្តក្នុងរយៈពេល t ឆ្នាំដោយដឹងថាតម្លៃរថយន្តពេលទើបផលិតថ្មី $F(0) = 1200$ (គិតជាម៉ឺនរៀល) ។

9. តម្លៃដីនៅតាមកសិដ្ឋានមានការកើនឡើងជារៀងរាល់ឆ្នាំ ដែលអត្រាកំណើននៃតម្លៃដីក្នុងមួយហិចតាកំណត់ដោយអនុគមន៍ $v'(x) = \dfrac{0.4x^3}{\sqrt{0.2x^4 + 8000}}$ (គិតជាម៉ឺនរៀល) ហើយ x ជាចំនួនឆ្នាំ។

បើគេដឹងថាតម្លៃដីពេលបច្ចុប្បន្ន 900 (គិតជាម៉ឺនរៀល) ក្នុងមួយហិចតា។

រកអនុគមន៍តម្លៃដីមួយហិចតានៅរយៈពេល 10 ឆ្នាំទៅមុខទៀត ។

10. អត្រាកំណើនប្រជាពលរដ្ឋក្នុងទីក្រុងមួយជាអនុគមន៍ $P'(x) = 5 + 4t^{\frac{1}{3}}$ នាក់ក្នុងមួយខែ ដែល t ជាចំនួនខែ ។ បើគេដឹងថាចំនួនប្រជាពលរដ្ឋបច្ចុប្បន្នមាន 2 000 000 នាក់ ។

រកអនុគមន៍នៃចំនួនប្រជាពលរដ្ឋនៅរយៈពេល 8 ខែទៅមុខទៀត ។

មេរៀនទី

2 អាំងតេក្រាលកំណត់

វត្ថុបំណង

- ❑ កំណត់និយមន័យអាំងតេក្រាលនៃអនុគមន៍ជាប់លើចន្លោះបិទមួយ
- ❑ គណនាអាំងតេក្រាលកំណត់តាមលក្ខណៈគ្រឹះ
- ❑ គណនាអាំងតេក្រាលកំណត់ដោយប្រើអថេរជំនួស
- ❑ គណនាអាំងតេក្រាលកំណត់ដោយផ្នែក
- ❑ កំណត់អនុគមន៍ដែលកំណត់តាមអាំងតេក្រាលកំណត់ ។

1. និយមន័យ

ចំណោទ 1 : តាមការសិក្សាស្រាវជ្រាវបានបង្ហាញឱ្យឃើញថាចំនួនប្រជាជននៅក្នុងសហគមន៍មួយកើនឡើងជារៀងរាល់ឆ្នាំដោយអត្រានៃ $t(x) = 5 + 3x$ ដែល x ជាចំនួនឆ្នាំ។

រកកំណើនប្រជាជននៅរយៈពេល 8 ឆ្នាំទៅមុខទៀត ។

តាង $T(x)$ ជាកំណើនប្រជាជន គេបាន $T(x)$ ជាអាំងតេក្រាលនៃ $t(x)$ គឺ

$T(x) = \int t(x)dx = \int(5+3x)dx = \int 5dx + 3\int xdx = 5x + \frac{3}{2}x^2 + c$ ។

ប្រជាជនក្នុងពេលបច្ចុប្បន្ន $T(0) = 5\times 0 + \frac{3}{2}\times 0^2 + c = 0$ ។

កំណើនប្រជាជនរយៈពេល 8 ឆ្នាំ $T(8) = 5\times 8 + \frac{3}{2}\times 8^2 + c = 40 + 96 + c = 136 + c$

ដូចនេះ កំណើនប្រជាជនរយៈពេល 8 ឆ្នាំទៅមុខទៀត

$T(8) - T(0) = 136 + c - c = 136$ នាក់

ផលដកនេះ ហៅថាអាំងតេក្រាលកំណត់ពី 0 ទៅ 8 នៃ $t(x)$ ។

ចំណោទ 2 : វត្ថុមួយផ្លាស់ទីតាមទិសដេកដោយល្បឿន $V(x) = 5 + 3t^2 m/mn$ ។ រកកំណើនចម្ងាយនៃវត្ថុដែលត្រូវនឹងកំណើនពេលពីខណៈ $t = 3mn$ ទៅដល់ខណៈ $t = 5mn$ ។

តាង $S(t)$ ជាចម្ងាយចរ នោះគេបាន $S'(t) = V(t)$

ដូចនេះ $S(t) = \int V(t)dt = \int(5+3t^2)dt = 5t + t^3 + c$

ចម្ងាយចរនៃវត្ថុនៅខណៈ $t = 3mn$ គឺ $S(3) = 5\times 3+3^3+c = 42+c$

ចម្ងាយចរនៃវត្ថុនៅខណៈ $t = 5mn$ គឺ $S(5) = 5\times 5+5^3+c = 150+c$

ដូចនេះ កំណើនចម្ងាយចរនៃវត្ថុនៅចន្លោះខណៈ $t = 3mn$ និង $t = 5mn$ គឺ $S(5)-S(3) = 150+c-42-c = 108m$ ។

ផលដកនេះហៅថា អាំងតេក្រាលកំណត់ពី 3 ទៅ 5 នៃ $V(t)$ ។

បើ $F(x)$ និង $G(x)$ ជាព្រីមីទីវនៃអនុគមន៍ $f(x)$

គេបាន $F(x) = G(x)+c$

បើ $x = a$ គេបាន $F(a) = G(a)+c$

បើ $x = b$ គេបាន $F(b) = G(b)+c$

គេបាន $F(b)-F(a) = G(b)-G(a)$ ។

គេសង្កេតឃើញថាកាលណា x កើនពី a ទៅ b នោះកំណើននៃព្រីមីទីវ $F(x)$ និង $G(x)$ ស្មើគ្នាហើយមិនទាក់ទងនឹងចំនួនថេរ c ទេ ។

ផលដក $F(b)-F(a)$ ហៅថាអាំងតេក្រាលកំណត់ពី a ទៅ b នៃអនុគមន៍ $y = f(x)$ គេកំណត់សរសេរ $\int_a^b f(x)dx$ ។

និយមន័យ : អាំងតេក្រាលកំណត់ពី a ទៅ b នៃអនុគមន៍ $y = f(x)$ គឺជាកំណើននៃអនុគមន៍ព្រីមីទីវ $F(x)$ ដែលត្រូវនឹងកំណើននៃ x ពី a ទៅ b ។

គេកំណត់សរសេរ $\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b)-F(a)$ ។

សម្គាល់ : ផលដក $f(b)-F(a)$ មិនទាក់ទងនឹងចំនួនថេរ c ទេ ។

លំហាត់គំរូ : គណនា

ក. $\int_1^3 x^2dx$ ខ. $\int_1^4 (2x^2-4x+5)dx$ គ. $\int_1^3\left(x^2+\frac{1}{x}-e^x\right)dx$ ។

ចម្លើយ:

ក. $\int_1^3 x^2dx = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_1^3 = \left(\frac{1}{3}\cdot 3^3\right)-\left(\frac{1}{3}\cdot 1^3\right) = 9-\frac{1}{3} = \frac{26}{3}$ ដូចនេះ $\int_1^3 x^2dx = \frac{26}{3}$ ។

ខ. $\int_1^4 (2x^2-4x+5)dx = \left[\left(\frac{2}{3}x^3-2x^2+5x\right)\right]_1^4 = \left(\frac{2}{3}\cdot 4^3-2\cdot 4^2+5\cdot 4\right)-\left(\frac{2}{3}\cdot 1^3-2\cdot 1^2+5\cdot 1\right)$

$$= \frac{128}{3} - 32 + 20 - \frac{2}{3} + 2 - 5 = 27$$

ដូចនេះ $\int_1^4 (2x^2 - 4x + 5)dx = 27$ ។

គ. $\int_1^3 \left(x^2 + \frac{1}{x} - e^x\right)dx = \left[\left(\frac{x^3}{3} + \ell n x - e^x\right)\right]_1^3 = \left(\frac{3^3}{3} + \ell n 3 - e^3\right) - \left(\frac{1^3}{3} + \ell n 1 - e^1\right)$

$$= \frac{26}{3} + \ell n 3 - e^3 + e$$

ដូចនេះ $\int_1^3 \left(x^2 + \frac{1}{x} - e^x\right)dx = \frac{26}{3} + \ell n 3 - e^3 + e$ ។

ប្រតិបត្តិ : គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម :

ក. $\int_1^0 (-3x^5 - 3x^2 + 2x + 5)dx$ ខ. $\int_1^0 \left(\sqrt{x} - \frac{4}{\sqrt{x}}\right)dx$ គ. $\int_1^0 \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)dx$ ។

2. លក្ខណៈ

ឧទាហរណ៍ : គេមានអនុគមន៍ $f(x) = 4x^3$

$\int_{-2}^1 4x^3 dx = [x^4]_{-2}^1 = 1^4 - (-2)^4 = -15$

$\int_1^{-2} 4x^3 dx = [x^4]_1^{-2} = (-2)^4 - 1^4 = 15$ ដូចនេះ $\int_{-2}^1 4x^3 dx = -\int_1^{-2} 4x^3 dx$ ។

ក. បើអនុគមន៍ f កំណត់ និងជាប់លើចន្លោះ $[a, b]$ នោះ $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$ ។

សម្រាយបញ្ជាក់ : $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = -[F(a) - F(b)] = -\int_b^a f(x)dx$

ដូចនេះ $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$ ។

ឧទាហរណ៍ : គណនា $\int_{10}^{10} e^x dx$

$\int_{10}^{10} e^x dx = [e^x]_{10}^{10} = e^{10} - e^{10} = 0$ ។

ខ. $\int_a^a f(x)dx = 0$ ។

សម្រាយបញ្ជាក់ : គណនា $\int_a^a f(x)dx = F(a) - F(a) = 0$

ឧទាហរណ៍ : បង្ហាញថា $\int_0^4 3e^x dx = \int_0^2 3e^x dx + \int_2^4 3e^x dx$

$\int_0^4 3e^x dx = [3e^x]_0^4 = 3e^4 - 3e^0 = 3e^4 - 3$

$\int_0^2 3e^x dx + \int_2^4 3e^x dx = [3e^x]_0^2 + [3e^x]_2^4 = 3e^2 - 3e^0 + 3e^4 - 3e^2 = 3e^4 - 3$

ដូចនេះ $\int_a^4 3e^x dx = \int_0^2 3e^x dx + \int_2^4 3e^x dx$ ។

គ. បើអនុគមន៍ f កំណត់និងជាប់លើចន្លោះ $[a, c]$ និង $a < b < c$,

$$\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$$ ។

សម្រាយបញ្ជាក់ :

$$\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = F(b) - F(a) + F(c) - F(b) = F(c) - F(a) = \int_a^c f(x)dx$$

ឧទាហរណ៍ : បង្ហាញថា $\int_0^{\frac{\pi}{3}} 3\sin x dx = 3\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin x dx$

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} 3\sin x dx = [-3\cos x]_0^{\frac{\pi}{3}} = -3\cos\frac{\pi}{3} + 3\cos 0 = \frac{-3}{2} + 3 = \frac{3}{2}$$

$$3\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin x dx = 3[-\cos x]_0^{\frac{\pi}{3}} = 3\left(-\cos\frac{\pi}{3} - \cos 0\right) = -\frac{3}{2} + 3 = \frac{3}{2}$$

ដូចនេះ $\int_0^{\frac{\pi}{3}} 3\sin x dx = 3\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin x dx$ ។

ឃ. $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx \ , k \in \mathbb{R}$ ។

សម្រាយបញ្ជាក់ : $k\int_a^b f(x)dx = k[F(b) - F(a)] = kF(b) - kF(a) = \int_a^b kf(x)dx$

ង. បើ $\int_a^b f(x)dx$ និង $\int_a^b g(x)dx$ មាននោះ

គេបាន $\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$ ។

សម្រាយបញ្ជាក់ :

$\int_a^b [f(x) - g(x)]dx = F(b) - G(b) - F(a) + G(a)$ (F, G ជាព្រីមីទីវរៀងគ្នានៃ f, g)

$$= [F(b) - F(a)] - [G(b) - G(a)]$$

$$= \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx$$

$\int_a^b [f(x) + g(x)]dx = F(b) + G(b) - F(a) - G(a)$ (F, G ជាព្រីមីទីវរៀងគ្នានៃ f, g)

$$= [F(b) - F(a)] + [G(b) - G(a)]$$

$$= \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$ ។

ឧទាហរណ៍ : គណនា $\int_2^4(4x-5)dx+\int_2^4(5-6x)dx$

$$\int_2^4(4x-5)dx+\int_2^4(5-6x)dx = \int_2^4[(4x-5)+(5-6x)]dx$$

$$= \int_2^4(-2x)dx = [-x^2]_2^4 = -16+4 = -12$$

ដូចនេះ $\int_2^4(4x-5)dx+\int_2^4(5-6x)dx = -12$ ។

ច. បើ $\int_a^b[\alpha f(x)+\beta g(x)]dx = \alpha\int_a^b f(x)dx+\beta\int_a^b g(x)dx$ ។

ឧទាហរណ៍ : គណនា $\int_2^4\left[\frac{3}{x^2}+\frac{1}{2}x\right]dx$

$$\int_2^4\left[\frac{3}{x^2}+\frac{1}{2}x\right]dx = \int_2^4\frac{3}{x^2}dx+\int_2^4\frac{1}{2}xdx = 3\int_2^4\frac{1}{x^2}dx+\frac{1}{2}\int_2^4 xdx$$

$$= \left[-\frac{3}{x}\right]_2^4+\left[\frac{1}{4}x^2\right]_2^4 = \frac{-3}{4}+\frac{3}{2}+\frac{1}{4}4^2-\frac{1}{4}2^2 = \frac{-3+6}{4}+3 = \frac{15}{4}$$ ។

3. គណនាអាំងតេក្រាលកំណត់ដោយប្តូរអថេរ

បើ $u = g(x)$ ជាប់និងមានដេរីវេលើ $[a,\ b]$ នោះ $\int_a^b f[g(x)]g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)}f(u)du$ ។

សម្រាយបញ្ជាក់ : តាង F ជាព្រីមីទីវនៃ f នោះ $F' = f$ និង

$$\int_a^b f[g(x)]g'(x)dx = \int_a^b F'(g(x))g'(x)dx = [F[g(x)]]_a^b$$

$$= F[g(b)]-F[g(a)] = \int_{g(a)}^{g(b)}f(u)du$$ ។

លំហាត់គំរូ : គណនា

ក. $\int_0^2 x(x^2+1)^3dx$

ខ. គណនា $\int_1^2\frac{3x^2}{(x^3+1)^2}dx$ ។

ចម្លើយ :

ក. គណនា $\int_0^2 x(x^2+1)^3dx$

តាង $u = x^2+1$, $du = 2xdx$ ឬ $\frac{1}{2}du = xdx$

បើ $x = 0$ នោះ $u = 1$

បើ $x = 2$ នោះ $u = 5$

គេបាន $\int_0^2 x(x^2+1)^3dx = \int_1^5 u^3\frac{1}{2}du = \frac{1}{2}\int_1^5 u^3du = \left[\frac{u^4}{8}\right]_1^5 = \frac{625}{8}-\frac{1}{8} = 78$

ដូចនេះ $\int_0^2 x(x^2+1)^3dx = 78$ ។

ខ. គណនា $\int_1^2 \frac{3x^2}{(x^3+1)^2}dx$ តាង $u = x^3+1$, $du = 3x^2dx$

បើ $x = 1$ នោះ $u = 2$

បើ $x = 2$ នោះ $u = 9$

គេបាន $\int_1^2 \frac{3x^2}{(x^3+1)^2}dx = \int_2^9 \frac{1}{u^2}du = \left[-\frac{1}{u}\right]_2^9 = -\frac{1}{9}+\frac{1}{2} = \frac{7}{18}$

ដូចនេះ $\int_1^2 \frac{3x^2}{(x^3+1)^2}dx = \frac{7}{18}$ ។

ប្រតិបត្តិ : គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម :

ក. $\int_0^4 \frac{x+1}{(x^2+2x+2)^3}dx$ ខ. $\int_1^2 \frac{x+2}{\sqrt{x^2+4x+1}}dx$ គ. $\int_1^4 \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$ ។

4. រូបមន្តអាំងតេក្រាលដោយផ្នែក

បើ f និង g ជាអនុគមន៍ជាប់លើចន្លោះ $[a,\ b]$ និងមានដេរីវេលើចន្លោះ $(a,\ b)$ នោះ

$\int_a^b f(x)\cdot g'(x)dx = [f(x)\cdot g(x)]_a^b - \int_a^b g(x)\cdot f'(x)dx$ ។

សម្រាយបញ្ជាក់ : គេបាន

$(f(x)\cdot g(x))' = f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)$

$\int_a^b (f(x)\cdot g(x))'dx = \int_a^b f(x)\cdot g'(x)dx + \int_a^b g(x)\cdot f'(x)dx$

$\int_a^b f(x)\cdot g'(x)dx + \int_a^b g(x)\cdot f'(x)dx = [f(x)\cdot g(x)]_a^b$

$\int_a^b f(x)\cdot g'(x)dx = [f(x)\cdot g(x)]_a^b - \int_a^b g(x)\cdot f'(x)dx$

លំហាត់គំរូ : គណនា $A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x dx$, $B = \int_0^4 xe^x dx$ ។

ចម្លើយ : គណនា $A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x dx$

តាង $f(x) = x$, $f'(x) = 1$

$g'(x) = \cos x$, $g(x) = \sin x$

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x dx = [x\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = \frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2} - 0 + [\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} + 0 - 1 = \frac{\pi}{2} - 1$$

ដូចនេះ $A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x dx = \frac{\pi}{2} - 1$ ។

គណនា $B = \int_0^1 xe^x dx$

តាង $f(x) = x$, $f'(x) = 1$

$g(x) = e^x$, $g'(x) = e^x$

$$B = \int_0^1 xe^x dx = [xe^x]_0^1 - \int_0^1 e^x dx = e - 0 - [xe^x]_0^1 = e - e + 1 = 1$$

ដូចនេះ $B = \int_0^1 xe^x dx = 1$ ។

ប្រតិបត្តិ : គណនា

ក. $A = \int_0^2 xe^{2x} dx$ ខ. $B = \int_0^{\frac{\pi}{3}} x\sin x dx$ គ. $C = \int_1^e x\ell n x dx$ ។

5. អនុវត្តន៍

ក្រុមហ៊ុនលក់រថយន្តមួយទទួលប្រាក់ចំណេញតាមបម្រែបម្រួលនៃចំនួនរថយន្តដែលបានលក់ ។ អត្រាប្រាក់ចំណេញបន្ថែមកំណត់ដោយអនុគមន៍ $P(x) = 30 - 0.28x$ ដែល x ជាចំនួនរថយន្ត និង $P(x)$ គិតជាសែនរៀល ។ រកបម្រែបម្រួលនៃប្រាក់ចំណេញពីការលក់រថយន្តចាប់ពីចំនួន 10 ទៅ 30 គ្រឿង ។

ចម្លើយ : បម្រែបម្រួលនៃប្រាក់ចំណេញពីការលក់រថយន្តចាប់ពីចំនួន 10 ទៅ 30 គ្រឿង អាចគណនាតាមអាំងតេក្រាលកំណត់នៃអនុគមន៍ប្រាក់ចំណេញបន្ថែម $P(x) = 30 - 0.28x$ ពី 10 ទៅ 30 គេបាន

$$\int_{10}^{30} P(x)dx = \int_{10}^{30}(30 - 0.28x)dx = \left[30x - \frac{0.28x^2}{2}\right]_{10}^{30}$$

$$= \left(30\cdot 30 - \frac{0.28\cdot 30^2}{2}\right) - \left(30\cdot 10 - \frac{0.28\cdot 10^2}{2}\right) = 488$$

ដូចនេះ បម្រែបម្រួលនៃប្រាក់ចំណេញពីការលក់រថយន្តចាប់ពីចំនួន 10 ទៅ 30 គ្រឿងគឺ 488 (គិតជាសែនរៀល) ឬ 48800 000 រៀល ។

មេរៀនសង្ខេប

- បើអនុគមន៍ f កំណត់ និងជាប់លើចន្លោះ $[a,\ b]$ នោះ $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$
- $\int_a^a f(x)dx = 0$
- បើអនុគមន៍ f កំណត់ និងជាប់លើចន្លោះ $[a,\ c]$ និង $a<b<c$,

  $\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$
- $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$, $k\in\mathbb{R}$
- បើ $\int_a^b f(x)dx$ និង $\int_a^b g(x)dx$ មាននោះ គេបាន

  $\int_a^b [f(x)\pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$
- បើ f និង g ជាអនុគមន៍ជាប់លើចន្លោះ $[a,\ b]$ និងមានដេរីវេលើចន្លោះ $[a,\ b]$ នោះ $\int_a^b f(x)\cdot g'(x)dx = [f(x)\cdot g(x)]_a^b - \int_a^b g(x)\cdot f'(x)dx$ ។

? លំហាត់

1. គណនាតម្លៃនៃ

ក. $\int_1^2 f(x)dx + \int_2^1 f(x)dx$ ខ. $\int_1^1 \frac{f(x)}{3}dx$ ។

2. គេមាន f និង g ជាអនុគមន៍ជាប់ហើយ $\int_1^2 f(x)dx = -4$, $\int_2^5 f(x)dx = 6$, $\int_1^5 g(x)dx = 8$ ។

គណនា

ក. $\int_1^5 f(x)dx$ ខ. $\int_5^1 [-4f(x)]dx$ គ. $\int_1^5 [4f(x)-2g(x)]dx$ ។

3. ចូរគណនាតម្លៃនៃ k បើ $\int_1^k \frac{1}{\sqrt{2x-1}}dx = 2$ ។

4. គណនា

ក. $\int_1^1 (3x^2+1)dx$ ខ. $\int_1^2 \left(\frac{1}{x^2}-3\right)dx$ គ. $\int_4^9 \frac{2}{\sqrt{x}}dx$ ឃ. $\int_2^4 \sqrt{x-2}dx$

ង. $\int_2^4 \sqrt[3]{x-2}dx$ ច. $\int_{-4}^0 \frac{1}{\sqrt{4-x}}dx$ ឆ. $\int_5^1 \frac{1}{\sqrt{3x+1}}dx$

ជ. $\int_1^3 5x(x^2-7)^3dx$ ឈ. $\int_0^2 3x^2\sqrt{x^3+1}\ dx$ ញ. $\int_1^2 \frac{x+2}{\sqrt{x^2+4x+1}}dx$

ដ. $\int_1^4 \left(\frac{3-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)dx$ ឋ. $\int_0^1 (3x^2-2x)^2dx$ ឌ. $\int_0^4 \left[\frac{x+1}{(x^2+2x+2)^3}\right]dx$ ។

5. គណនា

ក. $\int_1^2 3e^{4x}dx$ ខ. $\int_0^1 4x^3e^{2x^4}dx$ គ. $\int_1^4 \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$

ឃ. $\int_1^3 3e^{2x}(e^{-2x}-1)dx$ ង. $\int_0^1 \frac{dx}{2+3x}$ ។

6. គណនា

ក. $\int_0^1 \frac{2x^2}{1+2x^3}dx$ ខ. $\int_1^{\ell n2} \frac{e^x}{4e^x-2}dx$ គ. $\int_0^2 \frac{x}{(1+x^2)}dx$

ឃ. $\int_1^e \frac{(\ell nx)^2}{x}dx$ ង. $\int_0^1 xe^{2x^2}dx$ ច. $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan x dx$

ឆ. $\int_1^e \frac{(1+\ell nx)^2}{2x}dx$ ជ. $\int_e^{e^2} \frac{1}{x\ell nx}$ ។

7. សហគ្រាសមួយទទួលបានប្រាក់ចំណូលបន្ថែមពីការលក់ផលិតផលប្រើប្រាស់ចំនួន t គ្រឿង ។ បើអត្រានៃចំណូលបន្ថែមកំណត់ដោយអនុគមន៍ $R'(t) = 180+0.2t$ (គិតជាពាន់រៀល) ក្នុងមួយគ្រឿង ។ រកបម្រែបម្រួលនៃប្រាក់ចំណូលក្នុងការលក់កើនឡើងពីចំនួន 30 ទៅ 40 គ្រឿង ។

លំហាត់ជំពូក 4

1. គណនាអាំងតេក្រាលមិនកំណត់ខាងក្រោម :

ក. $\int 2xdx$ ខ. $\int 4dx$ គ. $\int (2x+3)dx$

ឃ. $\int (-2)dx$ ង. $\int (-5x+4)dx$ ច. $\int x^2dx$

ឆ. $\int 3x^2dx$ ជ. $\int (-4x^2+5x+7)dx$

ឈ. $\int (-4x^7-5x^4+7x^3-6x+8)dx$ ញ. $\int \frac{1}{x^2}dx$ ដ. $\int \frac{-5}{x^2}dx$

ឋ. $\int \left(4-\frac{7}{x^2}\right)dx$ ឌ. $\int \frac{3}{4}\sqrt{x}dx$ ឍ. $\int \left(4\sqrt{x}+\frac{4}{x^2}\right)dx$

ណ. $\int \frac{3}{4}\sqrt{2x+1}dx$ ត. $\int (3x-1)^2dx$ ថ. $\int 5(3x-1)^4dx$

ទ. $\int 5x(3x^2-1)^4dx$ ធ. $\int 2(2x^3+1)^4 6x^2dx$ ន. $\int 2x^2(2x^3+1)^4dx$ ។

2. គណនាអាំងតេក្រាលដោយប្រើអថេរជំនួស :

ក. $\int_{2}^{3} 2(2x+1)(x^2+x-3)dx$

ខ. $\int_{-\frac{1}{2}}^{0} (4x+1)e^{2x^2+x}dx$

គ. $\int_{2}^{3} \frac{2x+1}{x^2+x-1}dx$

ឃ. $\int_{0}^{1} xe^{x^2+1}dx$

ង. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \sin x\cos x dx$

ច. $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin x\cos^5 x dx$

ឆ. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \cos x(\sin x+\sin^3 x)dx$

ជ. $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos^3 x}dx$

ឈ. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin^2 x}dx$

ញ. $\int_{e}^{\sqrt{e}} \frac{\ell n x}{x}dx$

ដ. $\int_{1}^{2} \frac{10x+1}{\sqrt{5x^2+x+3}}dx$

ឋ. $\int_{1}^{2} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}dx$

ឌ. $\int_{1}^{e} \frac{\ell n x+1}{x}dx$

ឍ. $\int_{0}^{\pi} (\cos x)(1-3\sin^2 x)dx$ ។

3. គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោមដោយប្រើអាំងតេក្រាលដោយផ្នែក :

ក. $\int_{1}^{2} \frac{\ell n t}{t^2}dt$

ខ. $\int_{1}^{x} (t+1)\ell n t dt \ , (x>0)$

គ. $\int_{m}^{e} xe^x dx \ , \ (-1<m<0)$

ឃ. $\int_{0}^{\pi} e^{-x}\sin x dx$

ង. $\int_{0}^{\pi} (x-1)\sin 3x dx$

ច. $\int_{1}^{e} x^2 \ell n x dx$

ឆ. $\int_{1}^{2} x\sqrt{-x+3}dx$

ជ. $\int_{\ell n 2}^{\ell n 3} xe^x dx$

ឈ. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} x\cos 2x dx$

ញ. $\int_{5}^{10} \frac{x}{\sqrt{x-1}}dx$

ដ. $\int_{e}^{2e} x\ell n x^3 dx$

ឋ. $\int_{-1}^{0} (-2x+1)e^{-x}dx$

ឌ. $\int_{-1}^{0} (x+1)^2 e^{-x}dx$

ឍ. $\int_{0}^{1} x^2 e^x dx$

ណ. $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} e^x \cos x dx$

ត. $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x dx$

ថ. $\int_{1}^{5} x\sqrt{x-1} \ dx$

ទ. $\int_{2}^{4} 3x(2x-1)^{\frac{3}{2}}dx$ ។

4. គេមាន f និង h ជាអនុគមន៍ជាប់ហើយ $\int_1^7 f(x)dx = -1$, $\int_7^0 f(x)dx = 5$, $\int_7^0 h(x)dx = 4$ ។

គណនា

ក. $\int_1^0 [-2f(x)]dx$ ខ. $\int_7^0 [f(x)-h(x)]dx$

គ. $\int_0^7 f(x)dx$ ឃ. $\int_7^7 [f(x)+h(x)]dx$

5. ក. គណនាចំនួនពិត $A,\ B$ ដែលចំពោះគ្រប់ $x\in\mathbb{R}-\{-1,-2\}$,

$$\frac{x}{(x+1)(x+2)} = \frac{A}{x+1}+\frac{B}{x+2}$$ ។

ខ. គណនាអាំងតេក្រាល : $\int_3^4 \frac{x}{(x+1)(x+2)}dx$ ។

6. ក. គណនាចំនួនពិត $A,\ B,\ C$ ដែលចំពោះគ្រប់ $x\in\mathbb{R}-\{-2\}$, $\frac{x^2+3x}{x+2} = Ax+B+\frac{C}{x+2}$ ។

ខ. គណនាអាំងតេក្រាល $\int_1^2 \frac{x^2+3x}{x+2}dx$ ។

7. f ជាអនុគមន៍កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ដោយ : $f(x) = |(x-1)(x-2)|$ ។ គណនា $J = \int_0^2 f(x)dx$ ។

8. f ជាអនុគមន៍កំណត់លើ $(2,\ +\infty)$ ដោយ : $f(x) = \frac{x^2-4x+4}{(2x-3)(x-1)^2}$ ។

ក. គណនា $a,\ b$ ដែល $f(x) = \frac{a}{(x-1)^2}+\frac{b}{2x-3}$ ។

ខ. រកព្រីមីទីវនៃអនុគមន៍ $g(x) = \frac{-1}{(x-1)^2}$, $h(x) = \frac{1}{2x-3}$ ។

គ. ទាញរក $J = \int_2^3 f(x)dx$ ។

9. h ជាអនុគមន៍កំណត់លើ $(0,\ +\infty)$ ដោយ : $h(x) = (x+1)e^{-\frac{1}{x}}$ ។ បង្ហាញថា h ជាព្រីមីទីវមួយនៃ $x\longmapsto \frac{x^2+x+1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}$ ។

10. ក. ដោយធ្វើអាំងតេក្រាលដោយផ្នែកពីរដង គណនា $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\cos 2x dx$ ។

ខ. គេយក $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\cos^2 x dx$ និង $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\sin^2 x dx$ ។

(i). គណនា $I+J$ (ii). គណនា $I-J$. ទាញរក I និង J ។

11. ឧបមាថា $\int_0^1 f(x)dx = 3$ ។ គណនា $\int_{-1}^0 f(x)dx$

បើ ក. f ជាអនុគមន៍សេស

ខ. f ជាអនុគមន៍គូ ។

12. ឧបមាថាអនុគមន៍ $h(x)$ ជាអនុគមន៍គូ និងជាប់ចំពោះគ្រប់ $x \in \mathbb{R}$

ក. បង្ហាញថា ផលគុណ $h(x)\sin x$ ជាអនុគមន៍សេស

ខ. បង្ហាញថា ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិតa , $\int_{-a}^{0} h(x)\sin x dx = -\int_{0}^{a} h(x)\sin x dx$ (តាង $u = -x$)

គ. ប្រើលទ្ធផលក្នុងសំណួរ ខ. បង្ហាញថា $\int_{-a}^{a} h(x)\sin x dx = 0$ ។

13. គេមាន $\int_{-1}^{1} f(x)dx = 4$ និង $\int_{-1}^{1} \frac{f(x)}{2}dx + \int_{-1}^{1} kdx = 5$ ។ គណនាតម្លៃនៃ k ។

14. បើ $\int_{0}^{k}(x-1)dx = 0$ ។ គណនាតម្លៃនៃ k ។

15. កំណត់សមីការនៃខ្សែកោង បើ $\frac{dy}{dx} = \frac{e^{\sqrt{x+1}}}{\sqrt{x+1}}$ ហើយខ្សែកោងកាត់តាមចំណុច $(0,\ 1)$ ។

16. បង្ហាញថា $\frac{d(x^2e^{x^2})}{dx} = 2xe^{x^2} + 2x^3e^{x^2}$

17. គណនា $I = \int_{0}^{2\pi}(|\sin x| + |\cos x|)dx$

18. គេឱ្យ $f(x) = e^x$ ។ បង្ហាញថា $\int_{0}^{b}\frac{f(x)}{f(x)+f(b-x)}dx = \frac{b}{2}$ ។

19. គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម :

ក. $\int \sin^2 x dx$ ខ. $\int \sin^4 x \sin 2x dx$ គ. $\int \frac{\ln x}{x}dx$

ឃ. $\int \frac{e^x}{1+e^x}dx$ ង. $\int xe^{2x}dx$ ច. $\int e^{-x}\sin x dx$ ។

20. គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោមដោយប្រើអាំងតេក្រាលដោយផ្នែក :

ក. $\int_{1}^{2} x\ell n x dx$ ខ. $\int_{0}^{1} \ell n(x+1)dx$ គ. $\int_{0}^{\pi} x\sin 2x dx$

ឃ. $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} x^2\sin 2x dx$ ង. $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} x\cos x dx$ ច. $\int_{0}^{1} x^2e^x dx$ ។

21. គណនាអាំងតេក្រាលដោយប្រើអថេរជំនួស :

ក. $\int_{0}^{1} \frac{2x}{1+x^2}dx$ ខ. $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin x}\cos x dx$ គ. $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin x}dx$

ឃ. $\int_{0}^{1} \frac{x}{1+x}dx$ ង. $\int_{0}^{1} \frac{x^2}{1+x}dx$ ច. $\int_{0}^{\ln 2} \frac{e^x}{1+e^x}dx$

ឆ. $\int_{1}^{2} \frac{(\ln x)^2}{x}dx$ ជ. $\int_{e}^{2} \frac{1}{x\ln x}dx$ ឈ. $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+2\cos x}dx$ ញ. $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx$ ។

22. គណនាអាំងតេក្រាលនៃអនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រខាងក្រោម ៖

ក. $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}} \cos^2 x dx$ ខ. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x dx$

គ. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x dx$ ឃ. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \sin^2(2x) dx$

ង. $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} \sin^4 x \cos^3 x dx$ ច. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \sin^2 x \cos^2 x dx$ ឆ. $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin 2x \cos 4x dx$ ។

23. ការចែកចាយប្រចាំខែរបស់ទស្សនាវដ្ដីមួយគឺ 640 000 ច្បាប់ ។ ដោយមានការប្រកួតប្រជែងពីទស្សនាវដ្ដីមួយទៀតដែលមានមុខជំនាញដូចគ្នា ការចែកចាយប្រចាំខែរបស់ទស្សនាវដ្ដីនេះមានការធ្លាក់ចុះតាមអត្រា $C'(t) = -6000t^{\frac{1}{3}}$ ជារៀងរាល់ខែដែល t ជាចំនួនខែ ចាប់ពីទស្សនាវដ្ដីចាប់ផ្ដើមបោះពុម្ពផ្សាយ ។ តើក្នុងរយៈពេលប៉ុន្មានខែទៀតដែលការចែកចាយរបស់ទស្សនាវដ្ដីនេះនឹងធ្លាក់ចុះដល់ 460 000 ច្បាប់ ?

ជំពូក 5 ស្ថិតិពីរអថេរ

ការសិក្សាស្ថិតិនៃមួយអថេរត្រឹមតែឱ្យគេដឹងនូវមធ្យមភាគនៃរថយន្តដែលបានលក់ជារៀងរាល់ឆ្នាំប៉ុណ្ណោះ ។ ដើម្បីអាចឱ្យគេព្យាករបាននូវចំនួនរថយន្តដែលត្រូវលក់នៅឆ្នាំបន្តបន្ទាប់នៅខាងមុខ គេត្រូវសិក្សាទំនាក់ទំនងរវាងចំនួនរថយន្តនិងចំនួនឆ្នាំហៅថា ***ការសិក្សាស្ថិតិនៃពីរអថេរ*** ។

មេរៀនទី

1 ស្ថិតិមានពីរអថេរ

វត្ថុបំណង

- ❑ កំណត់និយមន័យនៃស្ថិតិមានពីរអថេរ
- ❑ បកស្រាយស្ថិតិមានពីរអថេរជាចំណុច
- ❑ រកចំណុចមធ្យមនៃស្ថិតិមានពីរអថេរ
- ❑ រកសមីការបន្ទាត់មួយ ដែលនៅជិតចំណុចទិន្នន័យ ។

1. សញ្ញាណស្ថិតិមានពីរអថេរ

1.1. ឧទាហរណ៍

ឧទាហរណ៍ 1 **:** តារាងខាងក្រោមបង្ហាញពីម៉ាសនិងកម្ពស់ទារកម្នាក់ៗក្នុងចំណោមទារក 8 នាក់ក្នុងមន្ទីរពេទ្យមួយ ។

ម៉ាសទារក គិតជា kg	2.8	2.9	3.8	3.6	3	3.7
កម្ពស់ទារក គិតជា cm	38	38	42	39	40	43

ការបកស្រាយតារាងទិន្នន័យ

- ទារកដែលមានម៉ាស $2.8kg$ មា នកម្ពស់ $38cm$
- ទារកដែលមានម៉ាស $2.9kg$ មានកម្ពស់ $38cm$
- ទារកដែលមានម៉ាស $3.8kg$ មានកម្ពស់ $42cm$
- ទារកដែលមានម៉ាស $3.6kg$ មានកម្ពស់ $39cm$
- ទារកដែលមានម៉ាស $3kg$ មានកម្ពស់ $40cm$
- ទារកដែលមានម៉ាស $3.7kg$ មានកម្ពស់ $43cm$ ។

តាមតារាងទិន្នន័យខាងលើ គេសង្កេតឃើញថាទារកម្នាក់ត្រូវបានកំណត់ដោយទិន្នន័យពីរគឺម៉ាសនិងកម្ពស់ ហើយម៉ាសរបស់ទារកមានទំនាក់ទំនងទៅនឹងកម្ពស់របស់វា ស្ថិតិបែបនេះហៅថាស្ថិតិមានពីរអថេរ ។

ឧទាហរណ៍ 2 : តារាងខាងក្រោម ជាតារាងចំនួនសៀវភៅដែលរោងពុម្ពមួយបានបោះពុម្ពទៅតាមឆ្នាំនីមួយៗ (ចំនួនសៀវភៅជាម៉ឺនក្បាល)។

ឆ្នាំបោះពុម្ព	1	2	3	4	5	6
ចំនួនសៀវភៅបោះពុម្ព (គិតជាម៉ឺនក្បាល)	48	48.4	49.5	48.9	49.3	48.7

ការបកស្រាយតារាងទិន្នន័យ

- នៅឆ្នាំទី 1 រោងពុម្ពបានបោះពុម្ពសៀវភៅចំនួន 48 ម៉ឺនក្បាល
- នៅឆ្នាំទី 2 រោងពុម្ពបានបោះពុម្ពសៀវភៅចំនួន 48.4 ម៉ឺនក្បាល
- នៅឆ្នាំទី 3 រោងពុម្ពបានបោះពុម្ពសៀវភៅចំនួន 49.5 ម៉ឺនក្បាល
- នៅឆ្នាំទី 4 រោងពុម្ពបានបោះពុម្ពសៀវភៅចំនួន 48.9 ម៉ឺនក្បាល
- នៅឆ្នាំទី 5 រោងពុម្ពបានបោះពុម្ពសៀវភៅចំនួន 49.3 ម៉ឺនក្បាល
- នៅឆ្នាំទី 6 រោងពុម្ពបានបោះពុម្ពសៀវភៅចំនួន 48.7 ម៉ឺនក្បាល ។

តាមតារាងទិន្នន័យខាងលើ គេសង្កេតឃើញថា ការបោះពុម្ពសៀវភៅត្រូវបានកំណត់ដោយទិន្នន័យពីរ គឺឆ្នាំបោះពុម្ពនិងចំនួនសៀវភៅ ហើយចំនួនសៀវភៅដែលបានបោះពុម្ពមានទំនាក់ទំនងនឹងឆ្នាំបោះពុម្ព ។ ការសិក្សាបែបនេះហៅថា ***ស្ថិតិមានពីរអថេរ*** ។

លំហាត់គំរូ : ក្នុងបណ្តាតារាងទិន្នន័យខាងក្រោម តើមួយណាជាស្ថិតិមានពីរអថេរ ។

ក. ពិន្ទុសិស្សក្នុងថ្នាក់រៀនមួយ

ពិន្ទុ	4	5	6	7	8	9
ចំនួនសិស្ស	5	9	12	7	4	3

ខ. ប្រាក់ចំណេញរបស់ក្រុមហ៊ុនមួយតាមឆ្នាំនីមួយៗ

ឆ្នាំ	2005	2006	2007	2008	2009
ប្រាក់ចំណេញ (គិតជាលានរៀល)	10	12	11	15	13

គ. ចំនួនកូននៅក្នុងគ្រួសារនិងចំនួនគ្រួសារ

ចំនួនកូននៅក្នុងគ្រួសារ	0	1	2	3	4	5
ចំនួនគ្រួសារ	3	5	7	8	4	2

ចម្លើយ : តារាងទិន្នន័យ ខ. ជាតារាងស្ថិតិមានពីរអថេរ ពីព្រោះប្រាក់ចំណេញមានទំនាក់ទំនងទៅនឹងឆ្នាំនីមួយៗ ។ ចំណែក ក. និង គ. ជាស្ថិតិមានមួយអថេរ ។

ប្រតិបត្តិ : តើតារាងទិន្នន័យមួយណា ក្នុងបណ្តាតារាងទិន្នន័យខាងក្រោម ជាតារាងស្ថិតិនៃពីរអថេរ ?

ក. តម្លៃលក់មួយឯកតានិងបរិមាណផលិតផលលក់បាន

តម្លៃលក់មួយឯកតា (គិតជារៀល)	35 200	35 200	30 000	27 600	24 800
បរិមាណផលិតផល (គិតជាពាន់ឯកតា)	3.8	5.2	7.3	8	9.6

ខ. ប្រាក់បៀវត្សនិងចំនួនបុគ្គលិកក្នុងក្រុមហ៊ុនមួយ

ប្រាក់បៀវត្ស (គិតជាម៉ឺនរៀល)	100	150	170	120	200
ចំនួនបុគ្គលិក	25	18	12	10	8

គ. ទំនាក់ទំនងខែនីមួយៗនិងប្រាក់ចំណាយលើការផលិត ផលិតផល

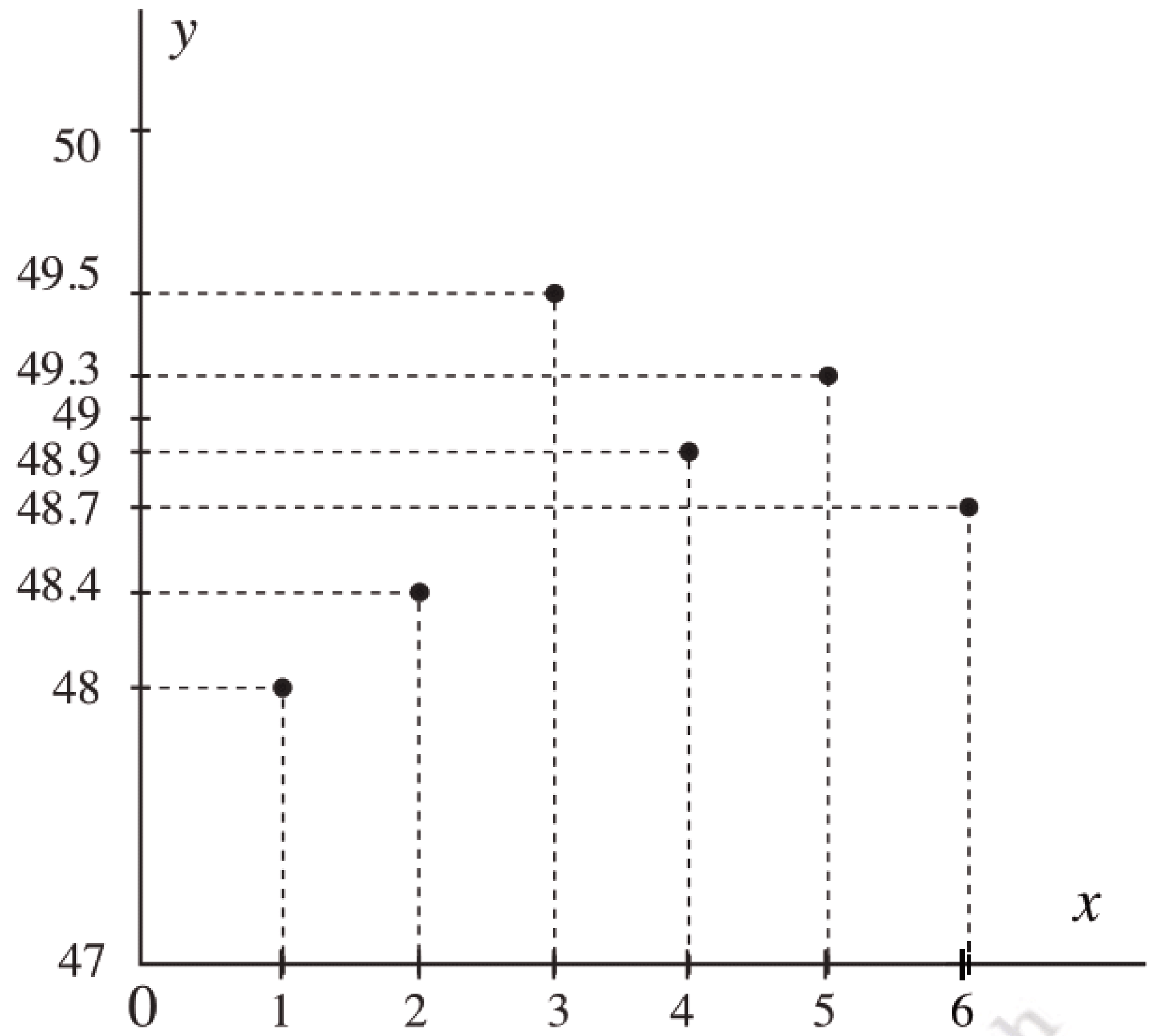
ខែ	មករា	កុម្ភៈ	មីនា	មេសា	ឧសភា	មិថុនា
ប្រាក់ចំណាយ (គិតជាពាន់រៀល)	35 200	35 200	35 200	35 200	35 200	35 200

1.2. បំណកស្រាយស្ថិតិមានពីរអថេរតាមក្រាប

យកឧទាហរណ៍ទី 2 ខាងលើមកបកស្រាយនៅក្នុងតម្រុយកែងមួយ គេក្រិតឆ្នាំបោះពុម្ពនៅលើអ័ក្សអាប់ស៊ីស ហើយចំនួនសៀវភៅដែលបោះពុម្ពនៅលើអ័ក្សអរដោនេ ។ ចំពោះអ័ក្សអរដោនេ គេយក 47 ធ្វើជាគល់អ័ក្ស រួចដៅចំណុចទាំង 6 ដែលមានកូអរដោនេ (1, 48) , (2, 48.4) ,

(3, 48.7) , (4, 48.9) , (5, 49) , (6, 49.5) ។

ធ្វើយ៉ាងនេះ គេថាគេបានបកស្រាយស្ថិតិនៃពីរអថេរជាចំណុចក្នុងតម្រុយកែង ។ ចំណុចតាងគូទិន្នន័យនីមួយៗ ហៅថាចំណុចទិន្នន័យ សំណុំចំណុចទិន្នន័យទាំងអស់ហៅថា ***ពពកចំណុចទិន្នន័យ*** ។



សម្គាល់ : ក្នុងតម្រុយកែងឯកតាលើអ័ក្សអាប់ស៊ីសនិងលើអ័ក្សអរដោនេអាចស្មើគ្នា ឬមិនស្មើគ្នា ។

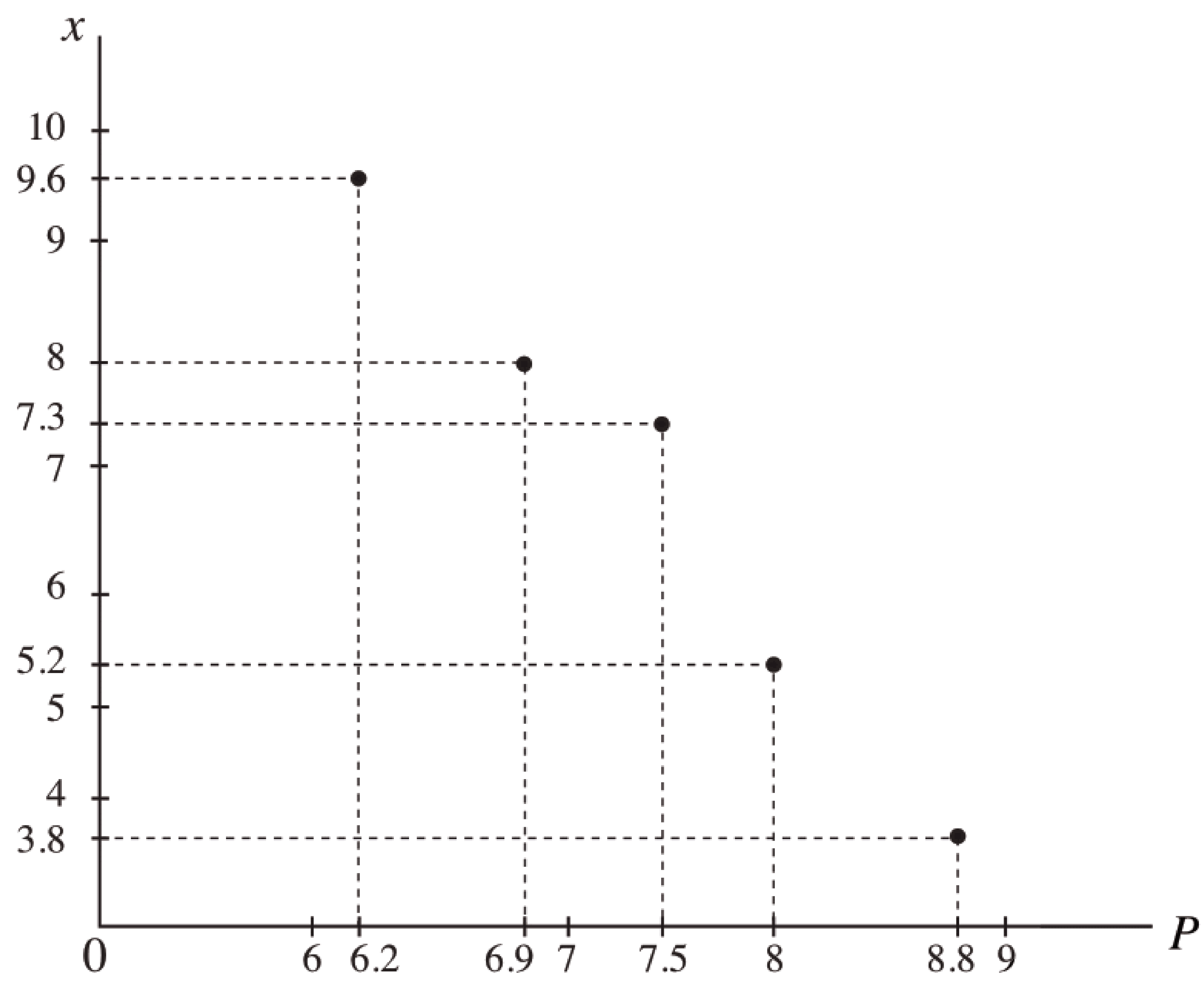
លំហាត់គំរូ : ការកត់ត្រាទុកនៅក្នុងក្រុមហ៊ុនមួយសម្រាប់រយៈពេល 5 ឆ្នាំចុងក្រោយនេះបានបង្ហាញពីទំនាក់ទំនងរវាងចំនួនឯកតានៃផលិតផលដែលបានលក់ (គិតជាពាន់ឯកតា) និងតម្លៃនៃផលិតផលគិតជាពាន់រៀល ។

p តម្លៃ (គិតជាពាន់រៀល)	8.80	8	7.50	6.90	6.20
x ចំនួនឯកតាដែលបានលក់ (គិតជាពាន់ឯកតា)	3.8	5.2	7.3	8	9.6

ចូរបកស្រាយស្ថិតិមានពីរអថេរខាងលើជាចំណុច ។

ចម្លើយ : នៅក្នុងតម្រុយកែងមួយ គេគ្រិតតម្លៃលក់នៃផលិតផលនៅលើអ័ក្សអាប់ស៊ីស ហើយចំនួនឯកតានៃផលិតនៅលើអ័ក្សអរដោនេ ។

គេបាន



ប្រតិបត្តិ : គេឱ្យតារាងស្ថិតិមានពីរអថេរខាងក្រោម :

x_i	1	2	3	4	5.5	6	7	9
y_i	10	15	20	16	30	25	35	40

ចូរបកស្រាយស្ថិតិមានពីរអថេរខាងលើជាចំណុច ។

1.3. ចំណុចមធ្យម

ក្នុងឧទាហរណ៍ 2 ខាងលើ បើគេតាង x_i ជាអថេរនៃឆ្នាំបោះពុម្ព ហើយ y_i ជាចំនួនសៀវភៅដែលបោះពុម្ព នោះគេបានតារាងទិន្នន័យ :

x_i	1	2	3	4	5	6
y_i	48	48.4	49.5	48.9	49.3	48.7

តាង $M(\bar{x}, \bar{y})$ ជាចំណុចមធ្យមនៃចំណុចទាំង 6 ដែល $\bar{x}$ និង $\bar{y}$ ជាមធ្យមរៀងគ្នានៃអថេរ x_i និង y_i ។

គេបាន $\bar{x} = \dfrac{1+2+3+4+5+6}{6} = 3.5$

$$\bar{y} = \frac{48+48.4+49.5+48.9+49.3+48.7}{6} = 48.8 \text{ ។}$$

ដូចនេះ ចំណុចមធ្យមកំណត់ដោយ $M(3.5,\ 48.8)$ ។

លំហាត់គំរូ **:** តារាងខាងក្រោមជាតារាងស្ថិតិមានពីរអថេរ

x_i	2	4	6	8	9	10
y_i	7	10	13	15	20	28

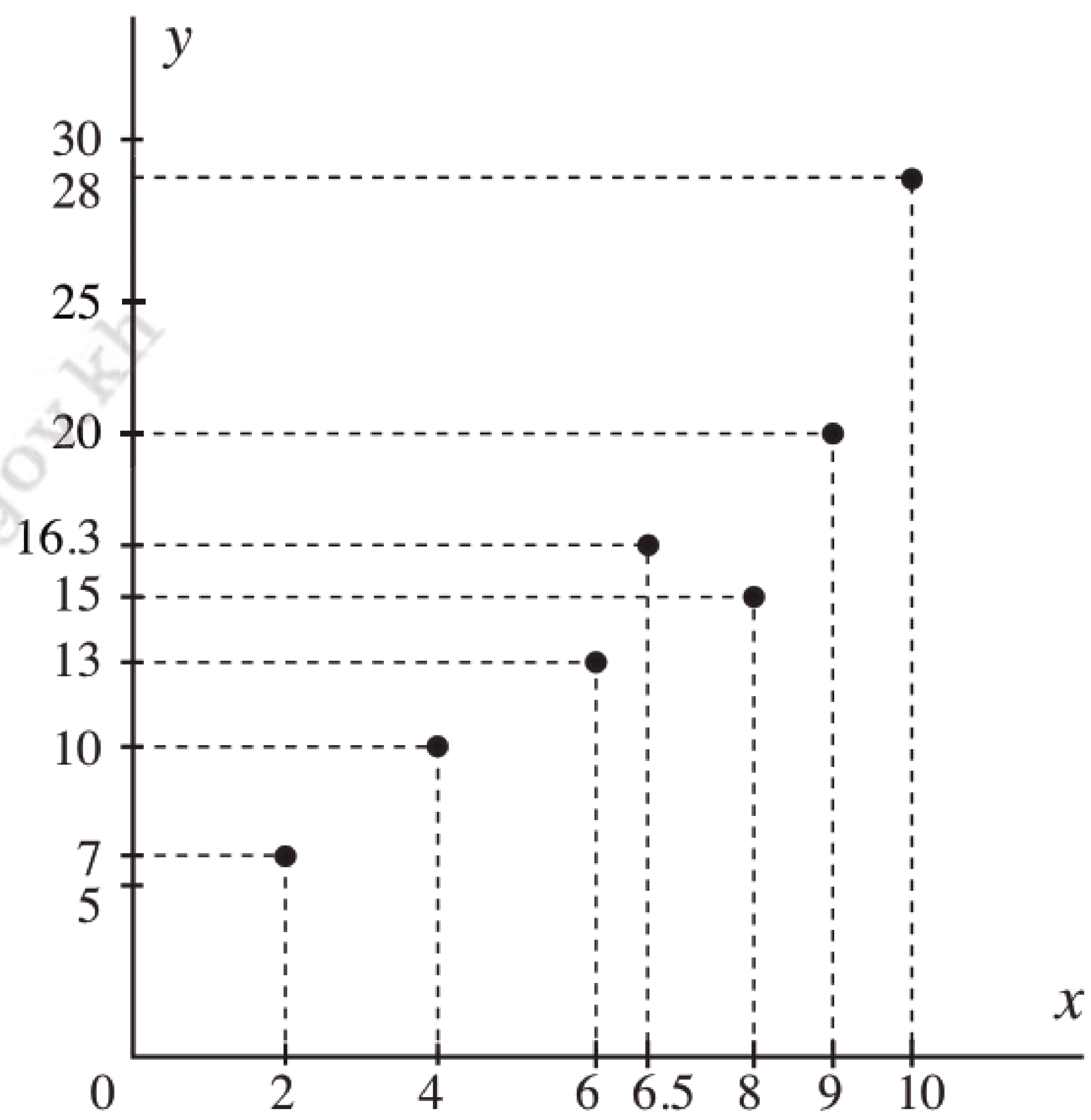
ក. បកស្រាយស្ថិតិពីរអថេរខាងលើជាចំណុច ។

ខ. រកចំណុចមធ្យម M ។

គ. រកសមីការបន្ទាត់ដែលកាត់តាមចំណុច M និងចំណុច $(6,\ 13)$ ។

ចម្លើយ :

ក. ដៅចំណុចដែលមានកូអរដោនេ $(2,\ 7)$, $(4,\ 10)$, $(6,\ 13)$, $(8,\ 15)$, $(9,\ 20)$, $(10,\ 28)$ ក្នុងតម្រុយកែង ។



ខ. ចំណុចមធ្យមកំណត់ដោយ $M(\bar{x},\ \bar{y})$

គេមាន $\bar{x} = \dfrac{2+4+6+8+9+10}{6} = 6.5$

$\bar{y} = \dfrac{7+10+13+15+20+28}{6} = 15.5$

ដូចនេះ $M(6.5,\ 15.5)$ ។

គ. សមីការបន្ទាត់ដែលកាត់តាមចំណុច $M(6.5,\ 15.5)$ និងចំណុច $(6,\ 13)$

សមីការបន្ទាត់ដែលកាត់តាមចំណុច $M(6.5,\ 15.5)$ និងចំណុច $(6,\ 13)$ កំណត់ដោយ

$$\frac{y-13}{x-6} = \frac{13-15.5}{6-6.5}$$

$$= \frac{-2.5}{-0.5}$$

$$= 5$$

$y - 13 = 5(x-6)$

$y = 5x - 30 + 13$

$y = 5x - 17$ ។ ដូចនេះសមីការបន្ទាត់ដែលកាត់តាមចំណុច $M(6.5,\ 15.5)$ និងចំណុច $(6,\ 13)$ គឺ $y = 5x - 17$ ។

ប្រតិបត្តិ **:** ការប្រមូលប្រាក់ពន្ធតាមកន្លែងលក់ចំនួន ៨ កន្លែងក្នុងផ្សារមួយ គេទទួលបានប្រាក់ចំណូលដូចតារាងខាងក្រោម :

សប្តាហ៍ទី	1	2	3	4	5	6	7	8
x_i ប្រាក់ចំណូលថ្ងៃចន្ទ	43	65	56	63	56	56	56	51
y_i ប្រាក់ចំណូលថ្ងៃសៅរ៍	72	83	79	84	80	76	74	79

ក. បកស្រាយស្ថិតិពីរអថេរខាងលើជាចំណុច ។

ខ. រកចំណុចមធ្យម M ។

គ. រកសមីការបន្ទាត់ដែលកាត់ចំណុច M និងចំណុច $(63, 84)$ ។

2. សមីការបន្ទាត់តម្រែតម្រង់លីនេអ៊ែ

2.1. បន្ទាត់តម្រែតម្រង់លីនេអ៊ែ

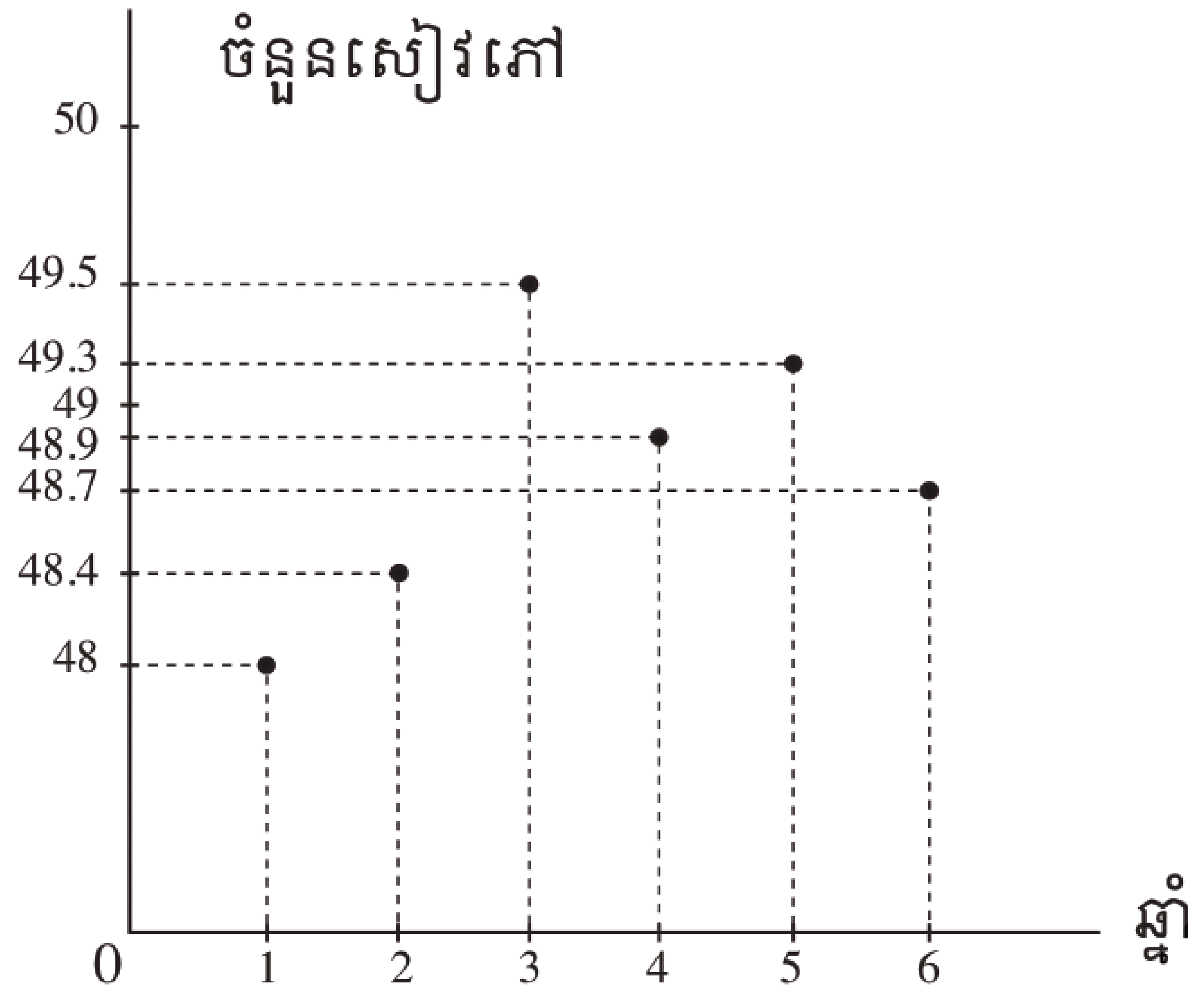
ឧទាហរណ៍ **:** តារាងខាងក្រោម ជាតារាងចំនួនសៀវភៅដែលរោងពុម្ពមួយបានបោះពុម្ពសៀវភៅទៅតាមឆ្នាំនីមួយៗ (ចំនួនសៀវភៅគិតជាម៉ឺនក្បាល)

ឆ្នាំបោះពុម្ពទី	1	2	3	4	5	6
ចំនួនសៀវភៅបោះពុម្ព	48	48.4	49.5	48.9	49.3	48.7

បកស្រាយស្ថិតិពីរអថេរជាចំណុច ។

តាមក្រាបខាងក្រោម គេសង្កេតឃើញថាចំណុចទាំង 6 នៅរាយប៉ាយមិនស្ថិតនៅលើបន្ទាត់តែមួយ ។ ឥឡូវនេះគេចង់សង់បន្ទាត់ d មួយដែលស្ថិតនៅជិតបំផុតទៅនឹងចំណុចទាំង 6 នោះ ។ ក្នុងករណីនេះគេត្រូវរំកិលបន្ទាត់ d លៃយ៉ាងណាឱ្យចម្ងាយទាំងនោះទៅបន្ទាត់មានប្រវែងតូចបំផុត ។ បន្ទាត់ d ហៅថា ***បន្ទាត់តម្រែតម្រង់លីនេអ៊ែ*** ។

បន្ទាត់ដែលសង់បានអាចឱ្យគេធ្វើការប៉ាន់ស្មានបាននូវចំនួនសៀវភៅដែលនឹងត្រូវបោះពុម្ពនៅពេលខាងមុខ ។



2.2. សមីការបន្ទាត់តម្រែតម្រង់លីនេអ៊ែ

នៅផ្នែកនេះ គេនឹងធ្វើការសិក្សាដើម្បីកំណត់សមីការនៃបន្ទាត់ d ។ ក្នុងករណីនេះ ដើម្បីឱ្យបន្ទាត់ d មានតម្រែតម្រូវបានល្អ គេត្រូវឱ្យបន្ទាត់ d កាត់តាមចំណុចមធ្យមពីរ ។

ឧទាហរណ៍ : តារាងខាងក្រោម ជាតារាងចំនួនសៀវភៅដែលរោងពុម្ពបានបោះពុម្ពសៀវភៅទៅតាមឆ្នាំនីមួយៗ (ចំនួនសៀវភៅគិតជាម៉ឺនក្បាល)

d ឆ្នាំបោះពុម្ពទី	1	2	3	4	5	6
d ចំនួនសៀវភៅបោះពុម្ព	48	48.4	49.5	48.9	49.3	48.7

កំណត់សមីការបន្ទាត់ d ។

ចែកចំណុចទិន្នន័យជាពីរក្រុមដូចខាងក្រោម :

ក្រុមទី 1 : $(1, 48)$, $(2, 48.4)$, $(3, 49.5)$

ក្រុមទី 2 : $(4, 48.9)$, $(5, 49.3)$, $(6, 48.7)$

បើ $G_1(\bar{x}_1, \bar{y}_1)$ ជាចំណុចមធ្យមនៃក្រុមទី 1 ដែល

$\bar{x}_1 = \dfrac{1+2+3}{3} = \dfrac{6}{3} = 2$ និង $\bar{y}_1 = \dfrac{48+48.4+49.5}{3} = 48.63$ នោះ $G_1(2, 48.63)$ ។

បើ $\bar{G}_2(\bar{x}_2, \bar{y}_2)$ ជាចំណុចមធ្យមនៃក្រុមទី 2 ដែល $\bar{x}_2 = \dfrac{4+5+6}{3} = 5$ និង $\bar{y}_2 = \dfrac{48.9+49.3+48.7}{3} = 48.97$ នោះ $G_2(5, 48.97)$ ។

សមីការបន្ទាត់ d ដែលកាត់តាមចំណុចមធ្យម $G_1(2,\ 48.63)$ និង $G_2(5,\ 48.97)$ ជាសមីការ

$$\frac{48.97-48.63}{5-2}=\frac{y-48.63}{x-2}$$

$$0.11=\frac{y-48.63}{x-2}$$

$$y=0.11(x-2)+48.63$$

$$y=0.11x+48.41$$

បើ $x=8$ នោះ $y=0.11(8)+48.41=49.29$ ។

គេឃើញថា ចំនួនសៀវភៅដែលត្រូវបោះពុម្ពនៅឆ្នាំទី 8 មានចំនួន 49.29 ម៉ឺនក្បាល បើធៀបទៅនឹងលទ្ធផលមុនមានការល្អៀងតិចតួចណាស់ ។

ជាទូទៅ **:** ដើម្បីរកសមីការបន្ទាត់តម្រែតម្រង់លីនេអ៊ែ គេត្រូវរកចំណុចមធ្យមពីរ

- តម្រៀបចំណុចទិន្នន័យពីអាប់ស៊ីសតូចទៅអាប់ស៊ីសធំ
- ចែកចំណុចទិន្នន័យជាពីរក្រុមស្មើគ្នា បើចំណុចនៃចំណុចទិន្នន័យជាចំនួនគូតែបើចំណុចទិន្នន័យជាចំនួនសេស គេចែកចំណុចទាំងនោះជាពីរក្រុមមិនស្មើគ្នា
- រកចំណុចមធ្យមនៃក្រុមនីមួយៗ
- សរសេរសមីការបន្ទាត់ដែលកាត់តាមចំណុចមធ្យមទាំងពីរ ។

លំហាត់គំរូ **:** ទិន្នន័យក្នុងតារាងខាងក្រោមជាស្ថិតិមានពីរអថេរ

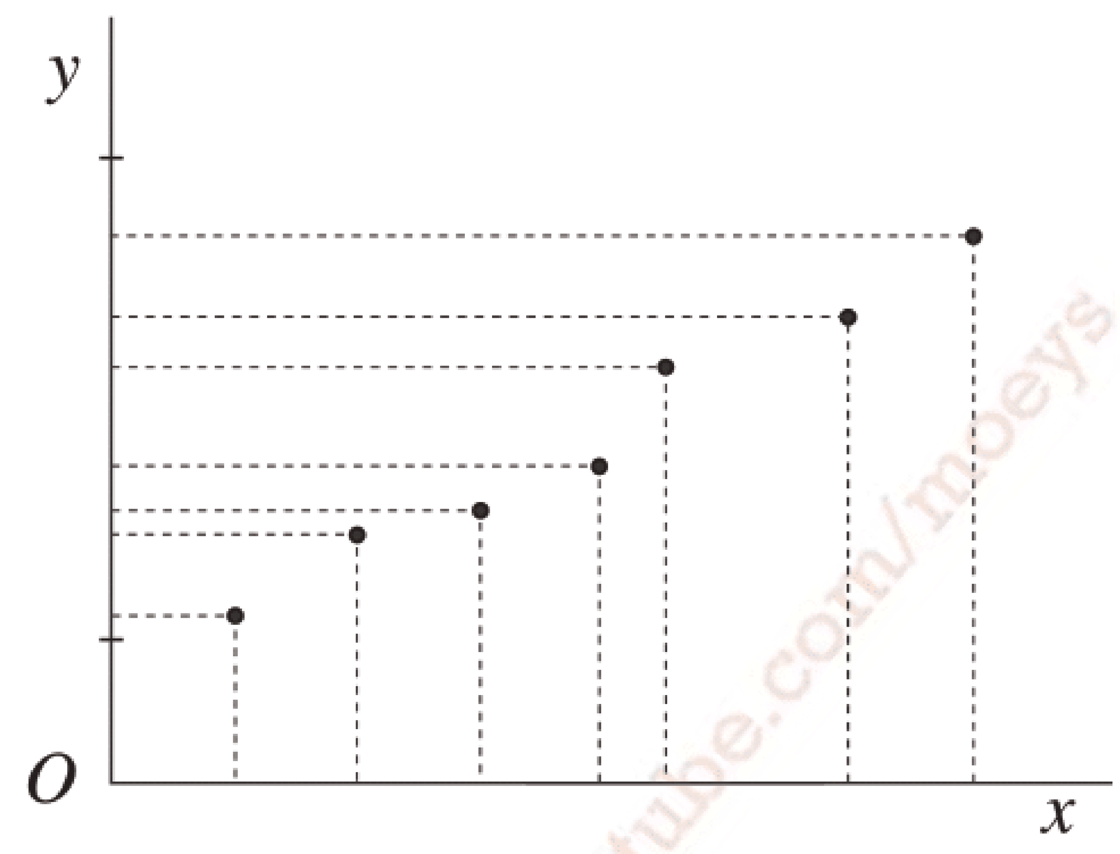
x_i	2	4	6	8	9	12	14
y_i	7	10	11	13	17	19	23

ក. ដៅចំណុចទិន្នន័យក្នុងតម្រុយកែង ។

ខ. ចែកចំណុចទិន្នន័យជាពីរក្រុម រួចរកសមីការបន្ទាត់ដែលកាត់តាមចំណុចមធ្យមនៃក្រុមទាំងពីរ ។

ចម្លើយ :

ក. ដៅចំណុចទិន្នន័យ



ខ. ចែកចំណុចទិន្នន័យជាពីរក្រុម

ក្រុមទី 1 : (2, 7) , (4, 10) , (6, 11) ,

(8, 13)

ក្រុមទី 2 : (9, 17) , (12, 19) , (14, 23)

តាង $M_1(\bar{x}_1, \bar{y}_1)$ ជាមធ្យមចំណុចនៃក្រុមទី 1 ដែល

$\bar{x}_1 = \dfrac{2+4+6+8}{4} = 5$ និង $\bar{y}_1 = \dfrac{7+10+11+13}{4} = 10.25$

គេបាន $M_1(5, 10.25)$ ។

តាង $M_2(\bar{x}_2, \bar{y}_2)$ ជាមធ្យមចំណុចនៃក្រុមទី 2 ដែល

$\bar{x}_2 = \dfrac{9+12+14}{3} = 11.67$ និង $\bar{y}_2 = \dfrac{17+19+23}{3} = 19.67$

គេបាន $M_2(11.67, 19.67)$ ។

សមីការបន្ទាត់ដែលកាត់តាមចំណុច M_1 និង M_2 គឺ $\dfrac{y-10.25}{x-5} = \dfrac{10.25-19.67}{5-11.67}$

$\dfrac{y-10.25}{x-5} = 1.41$ ឬ $y - 10.25 = 1.41(x-5)$

$$y = 1.41(x-5) + 10.25$$

$$y = 1.41x + 3.2$$

ដូចនេះ សមីការបន្ទាត់ដែលកាត់តាមចំណុចមធ្យមទាំងពីរគឺ $y = 1.41x + 3.2$ ។

ប្រតិបត្តិ : តារាងខាងក្រោមបង្ហាញអត្រាប្រាក់ម៉ោងកម្មករនៅរោងចក្រមួយតាមឆ្នាំនីមួយៗ

x_i ឆ្នាំ	1950	1952	1954	1956	1958	1960	1962	1964
y_i អត្រា	1.5	1.8	1.9	2.5	2.8	3.2	3.7	4.3

ក. ដៅចំណុចទិន្នន័យក្នុងតម្រុយកែង ។

ខ. រកសមីការបន្ទាត់តម្រែតម្រង់ដែលកាត់តាមចំណុចមធ្យមទាំងពីរ ។

គ. ប៉ាន់ស្មានអត្រាប្រាក់ម៉ោងកម្មករនៅឆ្នាំ 1966 ។

មេរៀនសង្ខេប

- ស្ថិតិនៃពីរអថេរជាទំនាក់ទំនងរវាងតម្លៃនិងតម្លៃនៃទិន្នន័យមួយ ហើយតម្លៃទិន្នន័យនោះហៅថាអថេរ ។
- ដើម្បីរកសមីការបន្ទាត់តម្រែតម្រង់លីនេអ៊ែ គេត្រូវរកចំណុចមធ្យមពីរ :
  - តម្រៀបចំណុចទិន្នន័យពីអាប់ស៊ីសតូចទៅអាប់ស៊ីសធំ
  - ចែកចំណុចទិន្នន័យជាពីរក្រុមស្មើគ្នា បើចំនួននៃចំណុចទិន្នន័យជាចំនួនគូ តែបើចំណុចទិន្នន័យជាចំនួនសេស គេចែកចំណុចទាំងនោះជាពីរក្រុមមិនស្មើគ្នា
  - រកចំណុចមធ្យមនៃក្រុមនីមួយៗ
  - សរសេរសមីការបន្ទាត់ ដែលកាត់តាមចំណុចមធ្យមទាំងពីរ ។

? លំហាត់

1. គេឱ្យតារាងស្ថិតិមានពីរអថេរខាងក្រោម :

x_i	2	5	3	4	5	6	8	7	9	7
y_i	9	10	25	20	18	19	15	30	35	40

បកស្រាយស្ថិតិនៃពីរអថេរដោយចំណុច ។

2. គេឱ្យតារាងស្ថិតិពីរអថេរខាងក្រោម :

x_i	2	3.5	2.5	4	4.5	5	6	6.5	7	8
y_i	10	15	20	18	30	35	40	38	32	45

ក. បកស្រាយស្ថិតិនៃពីរអថេរជាចំណុច ។

ខ. ផ្គុំចំណុចខាងលើជាពីរក្រុម ។

គ. រកចំណុចមធ្យម M_1 និង M_2 រួចរកសមីការបន្ទាត់ដែលកាត់តាម M_1 និង M_2 ។

3. ពិនិត្យលើវត្ថុធាតុដើម ដែលគេយកបានពីក្នុងដីតាមឆ្នាំនីមួយៗ ដូចក្នុងតារាងខាងក្រោម (វត្ថុធាតុដើមគិតជាពាន់តោន) ។

x_i ឆ្នាំ	1970	1971	1972	1973	1974	1975	1976	1977	1978
y_i វត្ថុធាតុដើម	12.4	13.6	12.7	13.3	12.3	13	12	12.4	12.5

ក. ដៅចំណុចទិន្នន័យតាងបម្រែបម្រួលនៃវត្ថុធាតុដើម តាមឆ្នាំនីមួយៗ ។

ខ. រកចំណុចមធ្យម M_1 និង M_2 ។

គ. រកសមីការតម្រែតម្រង់ ដែលកាត់តាមចំណុចមធ្យមទាំងពីរ ។

4. នៅលើបន្ទាត់ឈរ សំពាធបរិយាកាសថយចុះ កាលណាកម្ពស់កើនឡើង ដូចក្នុងតារាងខាងក្រោម : តាង x_i ជាកម្ពស់គិតជា km ហើយ y_i ជាសំពាធគិតជា cm នៃបារត ។

x_i	0	1	2	4	6	10
y_i	76	67	59	46	35	20

ក. បកស្រាយទិន្នន័យខាងលើជាចំណុច ។

ខ. រកសមីការបន្ទាត់តម្រែតម្រង់ដែលកាត់តាមចំណុចមធ្យមទាំងពីរ ។

គ. រកកម្ពស់នៃកន្លែងមួយដែលសំពាធបរិយាកាសស្មើនឹង $40cm$ នៃបារត ។

5. តារាងទិន្នន័យខាងក្រោមបង្ហាញពីចំនួនប្រាក់ដែលចំណាយលើការសាងសង់របស់ប្រទេសមួយនៅអំឡុងពេល 6 ខែ ។

x_i ខែ	មេសា	ឧសភា	មិថុនា	កក្កដា	សីហា	កញ្ញា
y_i ចំនួនប្រាក់ (គិតជាពាន់ដុល្លារ)	24	19	30	49	68	67

បើ $x_1 = 0$ តាងខែមេសា ។

ក. រកសមីការបន្ទាត់តម្រែតម្រង់ ។

ខ. ចូរធ្វើការប៉ាន់ស្មានចំនួនប្រាក់ដែលចំណាយក្នុងខែតុលា ។

មេរៀនទី

2 សមីការបន្ទាត់តម្រែតម្រង់លីនេអ៊ែ

វត្ថុបំណង

- ❑ ស្គាល់ទំនាក់ទំនងលីនេអ៊ែ
- ❑ រកសមីការតម្រែតម្រង់លីនេអ៊ែ
- ❑ រកមេគុណនៃតម្រែតម្រង់លីនេអ៊ែ ។

1. ទំនាក់ទំនងលីនេអ៊ែ

ឧទាហរណ៍ 1 : ក្រុមហ៊ុនមួយបានកំណត់ប្រាក់បៀវត្សសម្រាប់បុគ្គលិកទៅតាមចំនួនឆ្នាំនៃអតីតភាពដែលបម្រើការងារក្នុងក្រុមហ៊ុន ។

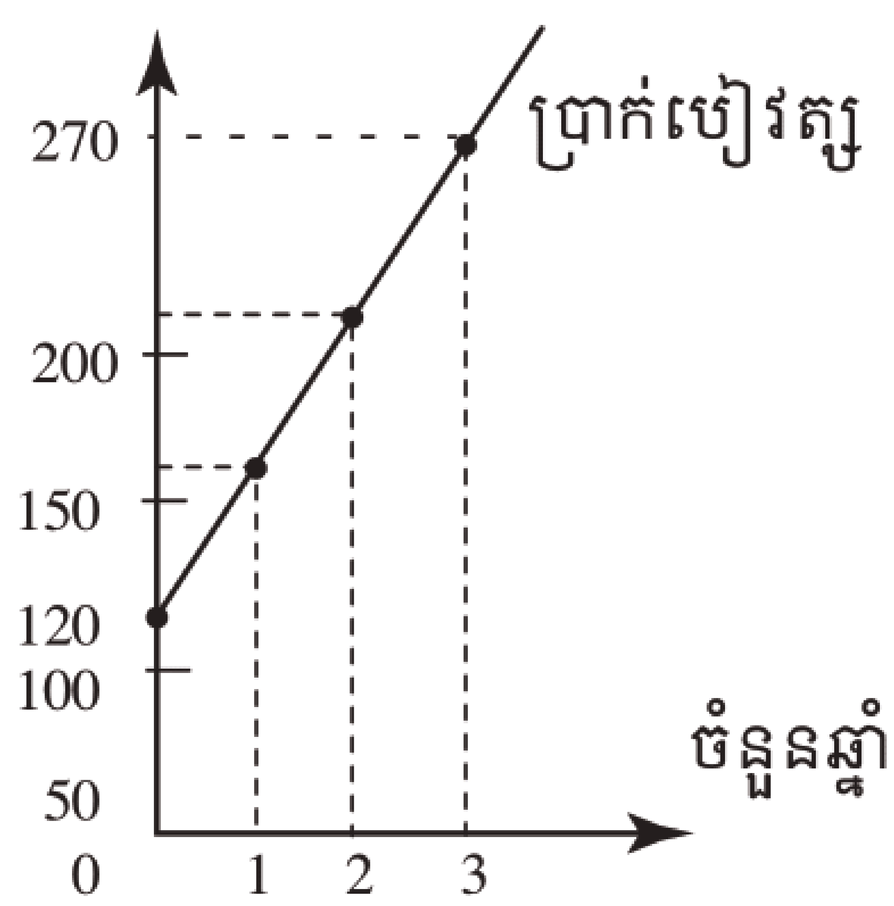
តាង x_i ជាចំនួនឆ្នាំនៃអតីតភាព ហើយ y_i ជាប្រាក់បៀវត្សគិតជាពាន់រៀល ។

គេបានតារាងប្រាក់បៀវត្សដូចខាងស្តាំ ។

x_i	0	1	2	3
y_i	120	170	220	270

គេសង្កេតឃើញថាប្រាក់បៀវត្ស y_i របស់បុគ្គលិកកើនតាមចំនួនឆ្នាំ x_i ។ គេថា x_i និង y_i មានទំនាក់ទំនងនឹងគ្នា ។ ដើម្បីងាយស្រួលសិក្សាតទៅមុខទៀត គេបកស្រាយទិន្នន័យខាងលើដោយចំណុចដែលមានកូអរដោនេ (x_i, y_i) ។ ធ្វើយ៉ាងនេះ គេបានចំណុច $(0, 120)$, $(1, 170)$, $(2, 220)$ និង $(3, 270)$ ។ គេដៅចំណុចទាំងនោះក្នុងតម្រុយកែងមួយ ។

តាមផលធៀប $\frac{170-120}{1-0} = \frac{220-170}{2-1} = \frac{270-220}{3-2} = 50$



បញ្ជាក់ថាចំណុចទាំងអស់ខាងលើស្ថិតនៅលើបន្ទាត់តែមួយដែលមានមេគុណប្រាប់ទិសស្មើនឹង 50 ហើយមានសមីការ $\frac{y-120}{x-0} = 50$ ឬ $y = 50x + 120$ ។

សមីការ $y = 50x + 120$ ជាទំនាក់ទំនងរវាង x និង y ដែលហៅថាទំនាក់ទំនងលីនេអ៊ែ ។

សមីការបន្ទាត់ ឬសមីការលីនេអ៊ែនេះអាចឱ្យគេយកទៅប៉ាន់ស្មានប្រាក់បៀវត្សរបស់បុគ្គលិក ធៀបទៅនឹងចំនួនឆ្នាំនៃអតីតភាពដែលបានបំរើការងារ ។

បើគេដឹងថាប្រាក់បៀវត្សរបស់បុគ្គលិកដែលមានអតីតភាព 5 ឆ្នាំ គេគ្រាន់តែជំនួស $x = 5$ ក្នុងសមីការ $y = 50x + 120$ គេបាន $y = 50(5) + 120 = 370$ មានន័យថាប្រាក់បៀវត្សដែលត្រូវនឹងអតីតភាពការងារ 5 ឆ្នាំស្មើនឹង 370 ពាន់រៀល ។

លំហាត់គំរូ **:** បំពេញចន្លោះខាងក្រោមបើអាច រួចរកសមីការបន្ទាត់ដែលកាត់តាមចំណុចទិន្នន័យទាំងនោះ បើមាន :

ក.

x_i	1	3	2	6	7
y_i	-1	5	2	$\cdots$	17

ខ.

x_i	7	5	4	3	6
y_i	9	$\cdots$	6	2	7

ចម្លើយ **:**

ក. ចំណុចទិន្នន័យ $(1, -1)$, $(3, 5)$, $(2, 2)$, $(7, 17)$

គេបានផលធៀប $\frac{5+1}{3-1} = \frac{6}{2} = 3$, $\frac{2-5}{2-3} = \frac{-3}{-1} = 3$ និង $\frac{17-2}{7-2} = \frac{15}{5} = 3$

ដោយផលធៀបស្មើនឹង 3 ថេរនាំឱ្យចំណុចទាំងនោះស្ថិតនៅលើបន្ទាត់តែមួយ ។

គេបាន $\frac{y+1}{x-1} = 3$ ឬ $y + 1 = 3(x-1)$

$$y = 3x - 4$$

បើ $x = 6$ នាំឱ្យ $y = 3(6) - 4 = 14$ ដូចនេះសមីការបន្ទាត់ដែលកាត់តាមចំណុចទាំងនោះគឺ $y = 3x - 4$ ។

ដូចនេះ

y_i	1	3	2	6	7
y_i	-1	5	2	14	17

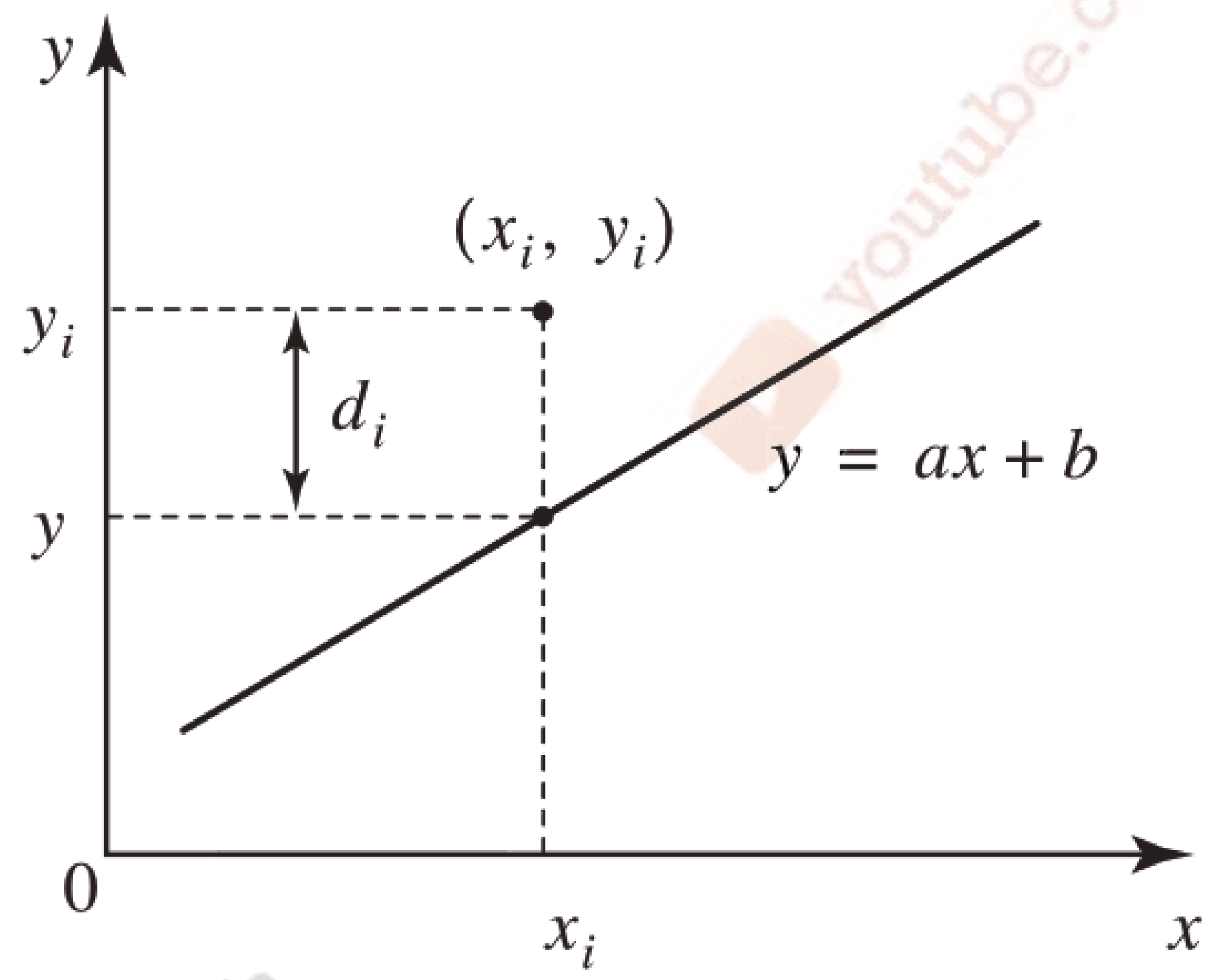
ខ. ចំណុចទិន្នន័យ $(7, 9)$, $(4, 6)$, $(3, 2)$, $(6,7)$

គេបានផលធៀប $\frac{6-9}{4-7} = \frac{-3}{-3} = 1$, $\frac{2-6}{3-4} = \frac{-4}{-1} = 4$ ។ គេទាញបាន $\frac{6-9}{4-7} \neq \frac{2-6}{3-4}$ ។ ហើយគេសន្និដ្ឋានថាចំណុចទាំង 4 មិនស្ថិតនៅលើបន្ទាត់តែមួយទេ ។ ប៉ុន្តែគេត្រូវការបន្ទាត់មួយដើម្បីធ្វើការប៉ាន់ស្មានតម្លៃ y ទៅតាមតម្លៃ x ។

2. សមីការបន្ទាត់តម្រែតម្រង់លីនេអ៊ែ

2.1. លក្ខខណ្ឌតម្លៃតូចបំផុតនៃផលបូកការេប្រវែង

ដើម្បីឱ្យគ្រប់ចំណុចទិន្នន័យនៅជិតបំផុតពីបន្ទាត់មួយ ក្រៅពីវិធីដែលបានសិក្សានៅមេរៀនមុន គេមានវិធីមួយទៀតដែលគេនិយមប្រើជាងគេ ។



បើគេមានចំណុចទិន្នន័យ $(x_1,\ y_1)$, $(x_2,\ y_2)$, $(x_3,\ y_3)$, ... , $(x_n,\ y_n)$ នោះគេអាចដៅចំណុចទិន្នន័យនេះក្នុងតម្រុយកែងមួយ ។

តាមរូបខាងស្តាំគេបាន $d_i = y_i - y$ តែ $y = ax_i + b$ ដូចនេះ $d_i = y_i - (ax_i + b)$ ដើម្បីឱ្យបន្ទាត់ $y = ax + b$ ស្ថិតនៅជិតបំផុតពីគ្រប់ចំណុចទិន្នន័យ $(x_1,\ y_1)$, $(x_2,\ y_2)$, $(x_3,\ y_3)$, ... , $(x_n,\ y_n)$ លុះត្រាតែ $\sum_{i=1}^{n} d_i^2$ មានតម្លៃតូចបំផុត ។

គេបាន : $\sum_{i=1}^{n} d_i^2 = \sum_{i=1}^{n} [y_i - (ax_i + b)]^2$ ។

រកតម្លៃ a និង b ដែលធ្វើឱ្យតម្លៃ $\sum_{i=1}^{n} d_i^2$ តូចបំផុត ពេលនោះគេនឹងបានបន្ទាត់ $y = ax + b$ ជាបន្ទាត់ដែលស្ថិតនៅជិតបំផុតពីគ្រប់ចំណុចទិន្នន័យ ។

- យក b ជាអថេរ :

តាង $y(b) = \sum_{i=1}^{n} d_i^2 = \sum_{i=1}^{n} [(y_i - ax_i) - b^2] = \sum_{i=1}^{n} (y_i - ax_i)^2 - 2\sum_{i=1}^{n} (y_i - ax_i)b + nb^2$

$y'(b) = -2\sum_{i=1}^{n} (y_i - ax_i) + 2nb$

$y'(b) = 0$ ត្រូវនឹង $b_0 = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} (y_i - ax_i)}{n}$

b		b_0	
$y'(b)$	$-$	0	$+$

$y = \sum_{i=1}^{n} d_i^2$ មានតម្លៃអប្បបរមាកាលណា

$y'(b) = 0$ ត្រូវនឹង $-2\sum_{i=1}^{n} (y_i - ax_i) + 2nb = 0$ ឬ $a\sum_{i=1}^{n} x_i + nb = \sum_{i=1}^{n} y_i$ (1)

- យក a ជាអថេរ ៖

$$y(a) = \sum_{i=1}^{n}[(y_i-b)-ax_i]^2 = \sum_{i=1}^{n}(y_i-b)^2 - 2\left[\sum_{i=1}^{n}(y_i-b)x_i\right]a + a^2\sum_{i=1}^{n}x_i^2$$

$$y'(a) = -2\sum_{i=1}^{n}[(y_i-b)x_i] + 2a\sum_{i=1}^{n}x_i^2$$

មាន $a_0 = \dfrac{\sum_{i=1}^{n}(y_i-b)x_i}{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}$ ដែល $y'(a_0) = 0$

a		a_0	
$y'(a)$	$-$	0	$+$

$y = \sum_{i=1}^{n}d_i^2$ មានតម្លៃអប្បបរមាកាលណា $y'(a) = 0$ ត្រូវនឹង

$$-2\sum_{i=1}^{n}[(y_i-b)x_i] + 2a\sum_{i=1}^{n}x_i^2 = 0 \text{ ឬ } a\sum_{i=1}^{n}x_i^2 + b\sum_{i=1}^{n}x_i = \sum_{i=1}^{n}x_iy_i \qquad (2)$$

- គេបានប្រព័ន្ធសមីការដែលមានអញ្ញាត a និង b

$$\begin{cases} a\sum_{i=1}^{n}x_i + nb = \sum_{i=1}^{n}y_i & (1) \\ a\sum_{i=1}^{n}x_i^2 + b\sum_{i=1}^{n}x_i = \sum_{i=1}^{n}x_iy_i & (2) \end{cases}$$

$(1)\times\sum_{i=1}^{n}x_i + (2)\times(-n)$ នាំឱ្យគេបាន $a = \dfrac{n\sum_{i=1}^{n}x_iy_i - \sum_{i=1}^{n}x_i\sum_{i=1}^{n}y_i}{n\sum_{i=1}^{n}x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2}$

តាម (1) គេបាន $b = \dfrac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}y_i - a\sum_{i=1}^{n}x_i\right)$ ។

ដូចនេះ $a = \dfrac{n\sum_{i=1}^{n}x_iy_i - \left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n}y_i\right)}{n\sum_{i=1}^{n}x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2}$ និង $b = \dfrac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}y_i - a\sum_{i=1}^{n}x_i\right)$ ។

គេបានបន្ទាត់ $y = ax+b$ ដែលស្ថិតនៅជិតបំផុតពីគ្រប់ចំណុចទិន្នន័យ ហៅថា***បន្ទាត់តម្រែតម្រង់លីនេអ៊ែ*** ហើយទំនាក់ទំនង $y = ax+b$ ហៅថា ***សមីការតម្រែតម្រង់លីនេអ៊ែ***។

សន្និដ្ឋាន : បើគេមានចំណុចទិន្នន័យ (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , (x_3, y_3) , … , (x_n, y_n) នោះបន្ទាត់តម្រែតម្រង់លីនេអ៊ែមានសមីការរាង $y = ax+b$ ដែល

$$a = \frac{n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2} \text{ និង } b = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} y_i - a\sum_{i=1}^{n} x_i\right) \text{ ។}$$

សម្គាល់ : $b = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n} - a\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$, $b = \bar{y} - a\bar{x}$ ឬ $\bar{y} = a\bar{x}+b$ មានន័យថាបន្ទាត់តម្រែតម្រង់លីនេអ៊ែកាត់តាមចំណុចមធ្យម $(\bar{x}, \bar{y})$ ។

ឧទាហរណ៍ 1 : រកសមីការតម្រែតម្រង់លីនេអ៊ែនៃទិន្នន័យក្នុងតារាងខាងស្តាំនេះ :

x_i	1	1	2	4
y_i	1	2	2	6

សមីការតម្រែតម្រង់លីនេអ៊ែមានរាង $y = ax+b$ ។

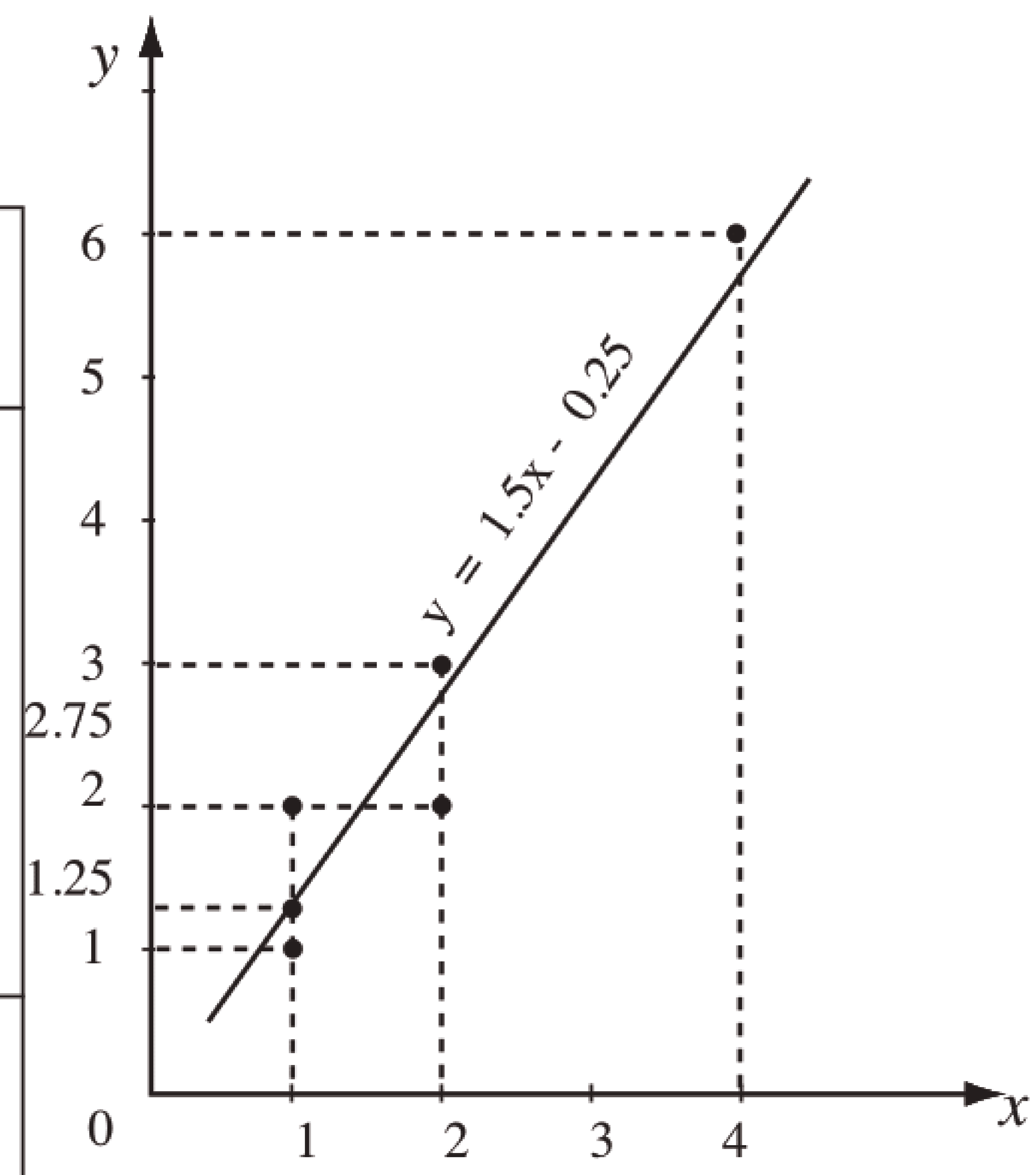
គេអាចរកតម្លៃ a និង b តាមរូបមន្ត

$$a = \frac{n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2} \text{ និង } b = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} y_i - a\sum_{i=1}^{n} x_i\right)$$

។ គេមាន 4 ចំណុចដូចនេះ $n = 4$ ។

គណនាផលបូកតាមតារាងខាងក្រោម :

x_i	y_i	$x_i y_i$	x_i^2
1	1	1	1
1	2	2	1
2	2	4	4
4	6	24	16
$\sum_{i=1}^{4} x_i = 8$	$\sum_{i=1}^{4} y_i = 11$	$\sum_{i=1}^{4} x_i y_i = 31$	$\sum_{i=1}^{4} x_i^2 = 22$



គេបាន $a = \dfrac{n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2} = \dfrac{4(31)-8(11)}{4(22)-8^2} = \dfrac{36}{24} = 1.5$

$$b = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{4} y_i - a\sum_{i=1}^{n} x_i\right) = \frac{1}{4}(11 - 1.5\times 8) = -0.25$$

ដូចនេះ សមីការតម្រែតម្រង់លីនេអ៊ែគឺ $y = 1.5x - 0.25$ ។

ឧទាហរណ៍ 2 : ក្នុងសាលារៀនបឋមសិក្សាមួយ គេជ្រើសរើសសិស្សចំនួន 10 នាក់ដើម្បីធ្វើការសិក្សារកទំនាក់ទំនងរវាងកម្ពស់នឹងអាយុ ។ គេទទួលបានលទ្ធផលដូចតារាងខាងក្រោម :

x_i អាយុ(ឆ្នាំ)	6	7	7	7	9	10	11	9	6	11
y_i កម្ពស់ (cm)	95	90	100	98	120	125	132	116	95	145

ក. រកសមីការតម្រែតម្រង់លីនេអ៊ែនៃទិន្នន័យខាងលើ ។

ខ. រកកម្ពស់ដែលមានអាយុ 7 ឆ្នាំ ។

ចម្លើយ :

ក. សមីការតម្រែតម្រង់លីនេអ៊ែមានរាង $y = ax + b$ ដែល

$$a = \frac{n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2} \text{ និង } b = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} y_i - a\sum_{i=1}^{n} x_i\right)$$

គណនាផលបូកតាមតារាងខាងក្រោម :

ដោយចំណុចទិន្នន័យមាន 10 នាំឱ្យ $n = 10$

x_i	y_i	x_iy_i	x_i^2
6	95	570	36
7	90	630	49
7	100	700	49
7	98	686	49
9	120	1080	81
10	125	1250	100
11	132	1452	121
9	116	1044	81
6	84	504	36
11	145	1595	121
$\sum_{i=1}^{10} x_i = 83$	$\sum_{i=1}^{10} y_i = 1105$	$\sum_{i=1}^{10} x_iy_i = 9511$	$\sum_{i=1}^{10} x_i^2 = 723$

គេបាន $a = \dfrac{10\sum_{i=1}^{4} x_iy_i - \sum_{i=1}^{4} x_i \sum_{i=1}^{4} y_i}{10\sum_{i=1}^{4} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{4} x_i\right)^2} = \dfrac{10(9511) - 83(1105)}{10(723) - 83^2} = \dfrac{3395}{341} = 9.96$

$$b = \frac{1}{10}\left(\sum_{i=1}^{4} y_i - a\sum_{i=1}^{4} x_i\right) = \frac{1}{10}(1105 - 9.96 \times 83) = 27.83$$

ដូចនេះ សមីការតម្រែតម្រង់គឺ $y = 9.96x + 27.83$ ។

ខ. គេអាចរកតម្លៃ y ដោយជំនួសតម្លៃ x ក្នុងសមីការ $y = 9.96x + 27.83$

បើ $x = 7$ នោះ $y = 9.96(7) + 27.83 = 97.55$ កម្ពស់សិស្សដែលត្រូវនឹងអាយុ 7 ឆ្នាំគឺ $97.55cm$ ។ តាមតារាងទិន្នន័យកម្ពស់សិស្សអាយុ 7 ឆ្នាំមាន $90cm$, $100cm$ និង $98cm$ ។ $97.55cm$ នេះជាតម្លៃដែលនៅជិតបំផុតទៅនឹងកម្ពស់សិស្សដែលមានអាយុ 7 ឆ្នាំមានកម្ពស់ប្រហែល $97.55cm$ នៅក្នុងសំណាកដែលគេបានសិក្សា។ គេអាចយកសមីការ $y = 9.96x + 27.83$ ដើម្បីធ្វើការប៉ាន់ស្មានកម្ពស់សិស្សដទៃទៀតបាន បើសិនជា x_i និង y_i មានទំនាក់ទំនងគ្នាល្អ ដែលយើងនឹងសិក្សាទៅមុខទៀត ដោយប្រើមេគុណតម្រែតម្រង់លីនេអ៊ែ ។

លំហាត់គំរូ **:** តាមរបាយការណ៍មន្ត្រីម្នាក់មកពីក្រសួងទេសចរណ៍របស់ប្រទេសមួយ បានឱ្យដឹងថាចំនួនទេសចរដែលមកកំសាន្តនៅប្រទេសនោះឱ្យដោយតារាងទិន្នន័យខាងក្រោម :

x_i ឆ្នាំ	2005	2006	2007	2008	2009
y_i ម៉ឺននាក់	25.7	26.3	29.7	34.2	38.3

បើ $x = 0$ តាងឆ្នាំ 2005

ក. រកសមីការបន្ទាត់តម្រែតម្រង់លីនេអ៊ែ ។

ខ. ចូរធ្វើការប៉ាន់ស្មានចំនួនទេសចរ ដែលនឹងមកកំសាន្តនៅប្រទេសនោះក្នុងឆ្នាំ 2010 ។

ចម្លើយ : បើ $x = 0$ តាងឆ្នាំ 2005 នោះគេបានចំណុចទិន្នន័យ $(0, 25.7)$, $(1, 26.3)$, $(0, 29.7)$, $(3, 34.2)$ និង $(4, 38.3)$ ។

ក. សមីការបន្ទាត់តម្រែតម្រង់លីនេអ៊ែមានរាង $y = ax+b$ ដែល

$$a = \frac{n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2} \quad \text{និង} \quad b = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} y_i - a\sum_{i=1}^{n} x_i\right)$$

ដោយចំណុចទិន្នន័យស្មើនឹង 5 គេបាន $n = 5$ ។ គណនាផលបូកតាមតារាងខាងក្រោម :

x_i	y_i	$x_i y_i$	x_i^2
0	25.7	0	0
1	26.3	26.3	1
2	29.7	59.4	4
3	34.2	102.6	9
4	38.3	153.2	16
$\sum_{i=1}^{5} x_i = 10$	$\sum_{i=1}^{5} y_i = 154.2$	$\sum_{i=1}^{5} x_i y_i = 341.5$	$\sum_{i=1}^{5} x^2{}_i = 30$

គេបាន $a = \dfrac{5(341.5) - 10(154.2)}{5(30) - 10^2} = 3.31$

$a = \dfrac{1}{5}(154.2 - 3.31 \times 10) = 24.22$ ។

ដូចនេះ បន្ទាត់តម្រែតម្រង់លីនេអ៊ែមានសមីការរាង $y = 3.31x + 24.22$ ។

ខ. ប៉ាន់ស្មានចំនួនទេសចរ ដែលនឹងមកកំសាន្តនៅប្រទេសនោះក្នុងឆ្នាំ 2010

ឆ្នាំ 2010 ត្រូវនឹង $x = 5$ បើ $x = 5$ នោះ $y = 3.31x + 24.22 = 40.77 \approx 41$

ដូចនេះ ចំនួនទេសចរដែលនឹងមកកំសាន្តនៅប្រទេសនោះក្នុងឆ្នាំ 2010 ប្រហែល 41 ម៉ឺននាក់ ។

ប្រតិបត្តិ : ក្រុមហ៊ុនមួយលក់រថយន្តដែលបានប្រើប្រាស់រួច ។ តម្លៃលក់បញ្ចុះទៅតាមចំនួនឆ្នាំដែលបានប្រើប្រាស់ ។ តាង x_i ជាចំនួនឆ្នាំដែលបានប្រើប្រាស់ និង y_i តាងតម្លៃលក់ (ឯកតាជាលានរៀល) ។

គេបានតារាងទិន្នន័យដែលបានលក់កន្លងមក :

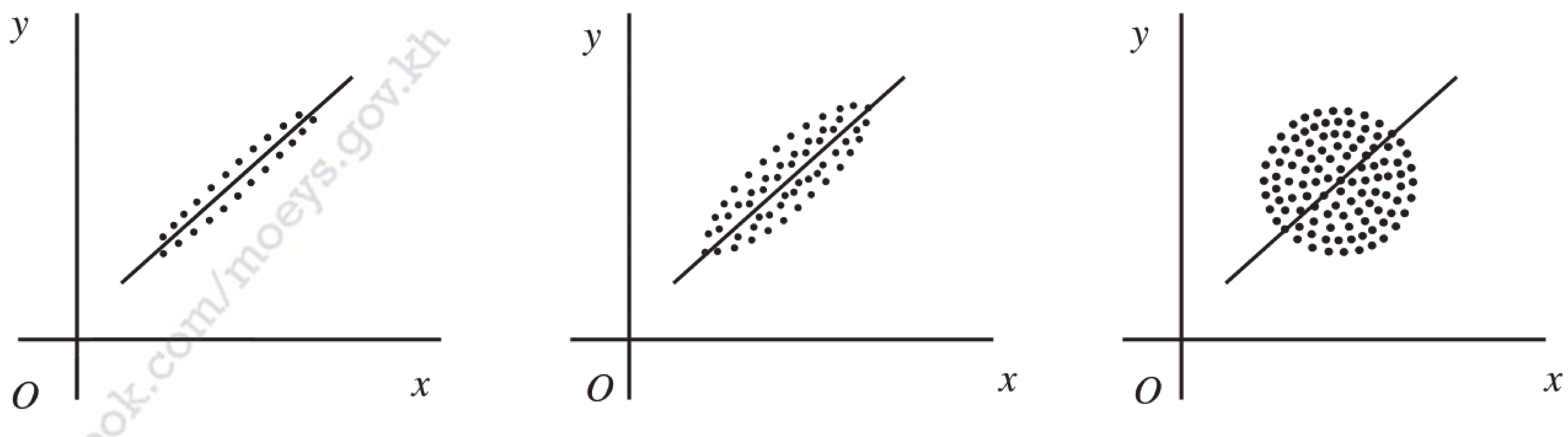
x_i	2	4	5	5	5	5	6	6	6	7	7
y_i	169	103	85	82	89	98	66	95	169	70	49

ក. រកសមីការតម្រែតម្រង់លីនេអ៊ែនៃទិន្នន័យខាងលើ ។

ខ. រកតម្លៃរថយន្តដែលមានចំណាស់ 3 ឆ្នាំនិង 5 ឆ្នាំ ។

3. មេគុណតម្រែតម្រង់លីនេអ៊ែ

ចំពោះទិន្នន័យនៃពីរអថេរគេតែងតែសិក្សាថា តើវាមានទំនាក់ទំនងគ្នាដែរឬទេ ? បើមានតើទំនាក់ទំនងនោះមានដល់កម្រិតណា ? ក្នុងស្ថិតិនៃពីរអថេរ ជួនកាលអថេរទាំងពីរអាចមានទំនាក់ទំនងខ្លាំង ទំនាក់ទំនងខ្សោយ ឬគ្មានទំនាក់ទំនង ។ គេអាចបកស្រាយទំនាក់ទំនងនោះដោយរូបខាងក្រោម :



ទំនាក់ទំនងខ្លាំង (រូប ក) ទំនាក់ទំនងខ្សោយ (រូប ខ) គ្មានទំនាក់ទំនង (រូប គ)

- ចំពោះ (រូប ក) : គេសង្កេតឃើញថាចំណុចទិន្នន័យស្ថិតនៅក្បែរបន្ទាត់តម្រែតម្រង់លីនេអ៊ែ គេថាអថេរទាំងពីរមានទំនាក់ទំនងគ្នាខ្លាំង មានន័យថាគេអាចប្រើសមីការតម្រែ

តម្រង់លីនេអ៊ែ ដើម្បីប៉ាន់ស្មានតម្លៃ y ទៅតាមតម្លៃ x បានល្អ ។

- ចំពោះ (រូប ខ) : គេសង្កេតឃើញថាចំណុចទិន្នន័យពុំសូវស្ថិតនៅក្បែរតម្រែតម្រង់លីនេអ៊ែដូច (រូប ក)ឡើយ ។ គេថាអថេរទាំងពីរមានទំនាក់ទំនងខ្សោយ មានន័យថា បើគេយកសមីការតម្រែតម្រងលីនេអ៊ែមកធ្វើការប៉ាន់ស្មានតម្លៃ y នោះគេពុំទទួលបានលទ្ធផលល្អទេ ។
- ចំពោះ (រូប គ) : គេសង្កេតឃើញថាចំណុចទិន្នន័យនៅរាយប៉ាយឃ្លាតឆ្ងាយពីបន្ទាត់តម្រែតម្រង់លីនេអ៊ែ ។ គេថាអថេរទាំងពីរពុំមានទំនាក់ទំនងគ្នាឡើយ មានន័យថាគេមិនអាចយកសមីការលីនេអ៊ែមកធ្វើការប៉ាន់ស្មានតម្លៃ y ទៅតាមតម្លៃ x បានឡើយ ។

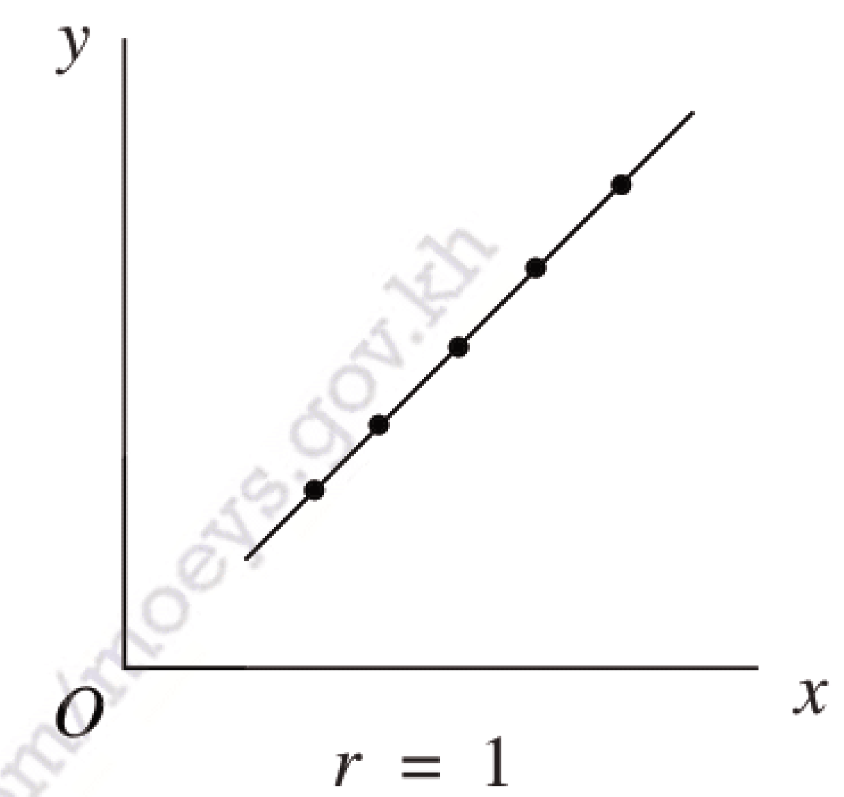
ដើម្បីឱ្យដឹងថា តើស្ថិតិនៃពីរអថេរមានទំនាក់ទំនងគ្នាដល់កំរិតណា គេគ្រាន់តែពិនិត្យលើតម្លៃ r ដែលកំណត់ដោយរូបមន្ត

$$r = \frac{n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i}{\sqrt{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2} \times \sqrt{n\sum_{i=1}^{n} y_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)^2}}$$

តម្លៃ r អាចប្រែប្រួលក្នុងចន្លោះ $-1 \le r \le 1$

តម្លៃ r ហៅថា មេគុណតម្រែតម្រង់លីនេអ៊ែ ។

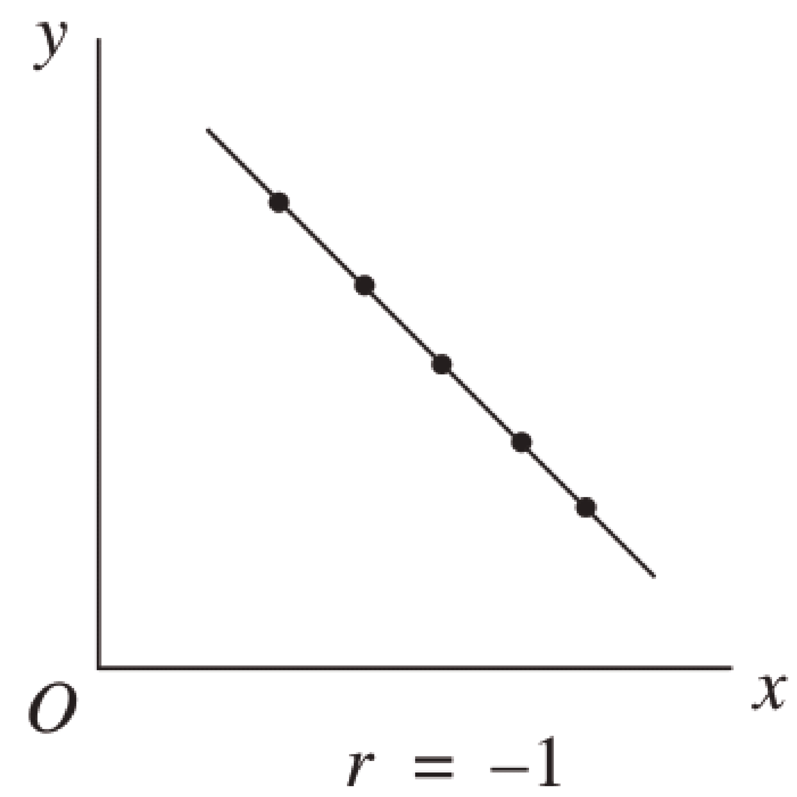
ជារឿយៗគេតែងជួបប្រទះចំណុចទិន្នន័យដែលមានតម្លៃ r ដូចករណីខាងក្រោម :



$r = 1$

កាលណា $r = 1$ ចំណុចទិន្នន័យស្ថិតនៅលើបន្ទាត់តម្រែតម្រង់លីនេអ៊ែ មានន័យថា x និង y មានទំនាក់ទំនងល្អឥតខ្ចោះ ។

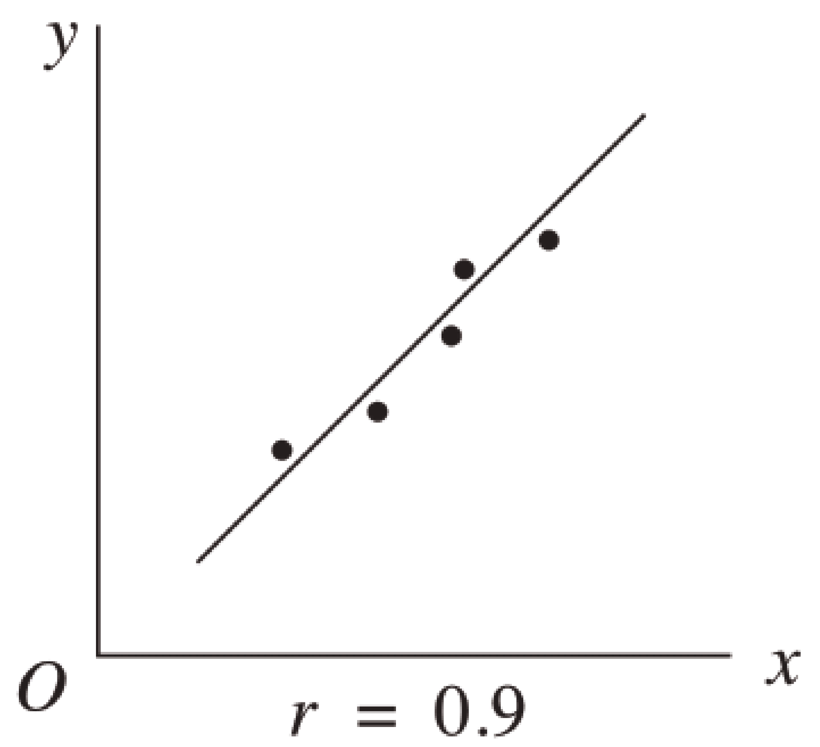
$r > 0$ បញ្ជាក់ថា y កើនទៅតាមតម្លៃ x ។



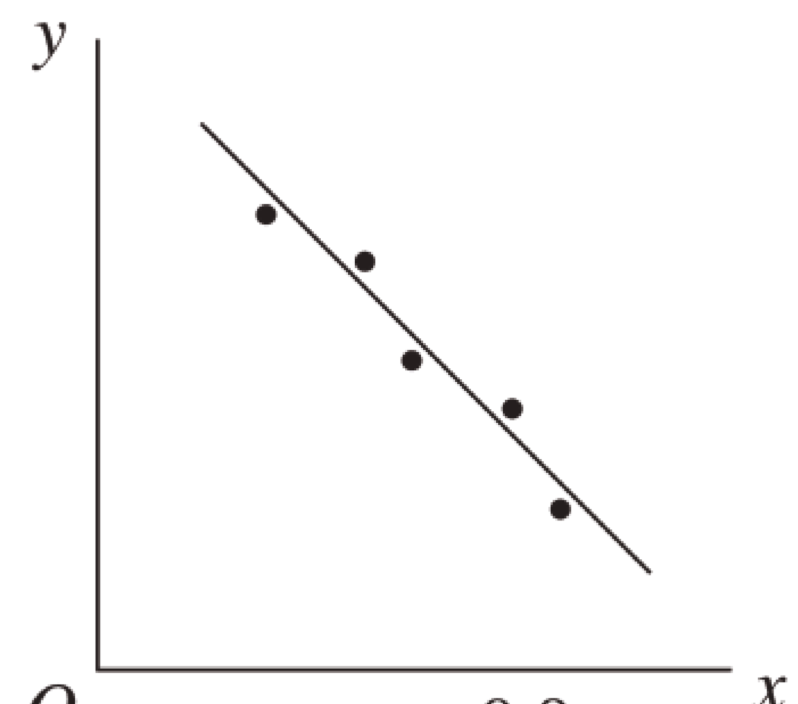
$r = -1$

ដូចគ្នានេះដែរចំពោះ $r = -1$ គេថា x និង y មានទំនាក់ទំនងខ្លាំង សមីការតម្រែតម្រង់លីនេអ៊ែប្រើការបានល្អ ។

$r < 0$ បញ្ជាក់ថា y ថយទៅតាមតម្លៃ y ។



$r = 0.9$



$r = -0.9$

កាលណា $r = 0.9$ ចំណុចទិន្នន័យស្ថិតនៅក្បែរបន្ទាត់តម្រែតម្រង់លីនេអ៊ែ ។ គេថា x និង y មានទំនាក់ទំនងគ្នាខ្លាំង ។

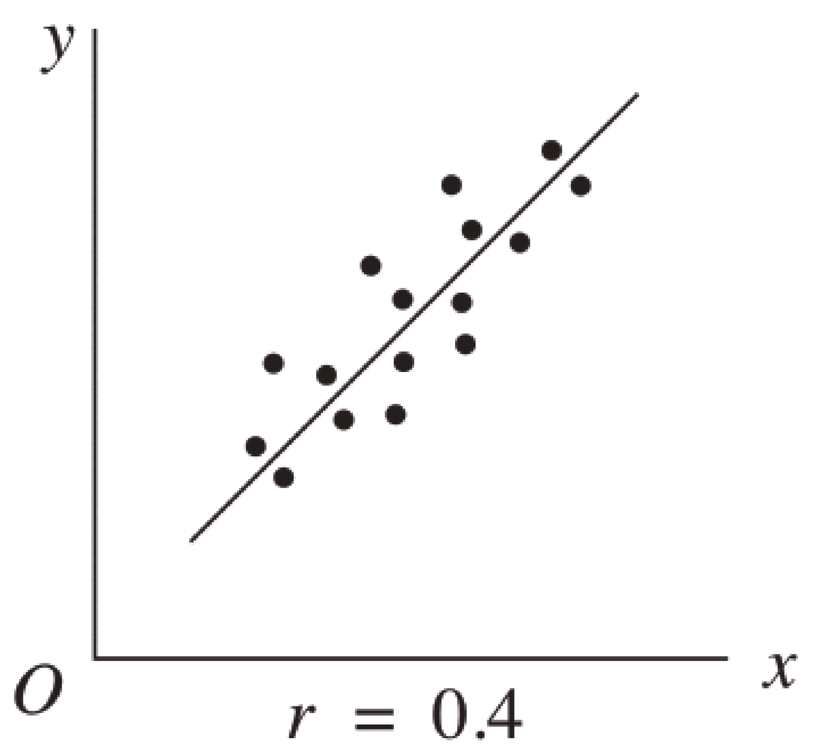
$r > 0$ បញ្ជាក់ថា y កើនទៅតាមតម្លៃ x ។

សមីការតម្រែតម្រង់លីនេអ៊ែអាចយកមកធ្វើការប៉ាន់ស្មានលទ្ធផលបានល្អ ។

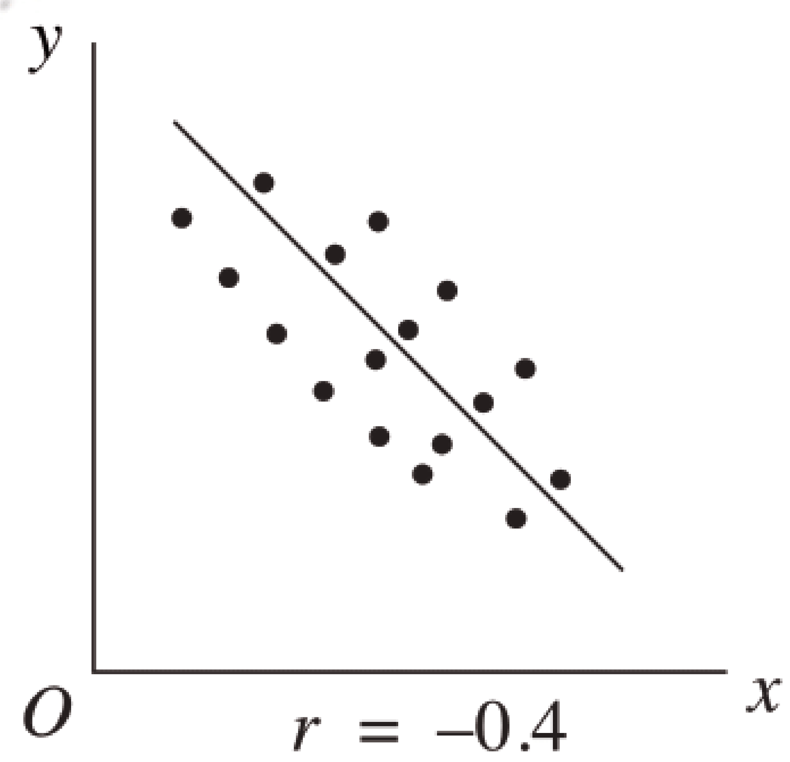
ដូចគ្នានេះដែរ $r = -0.9$ គេថា x និង y មានទំនាក់ទំនងគ្នាខ្លាំង ។

$r > 0$ បញ្ជាក់ថា y ថយទៅតាមតម្លៃ x ។

សមីការតម្រែតម្រង់លីនេអ៊ែអាចយកមកធ្វើការប៉ាន់ស្មានលទ្ធផលបានល្អ ។



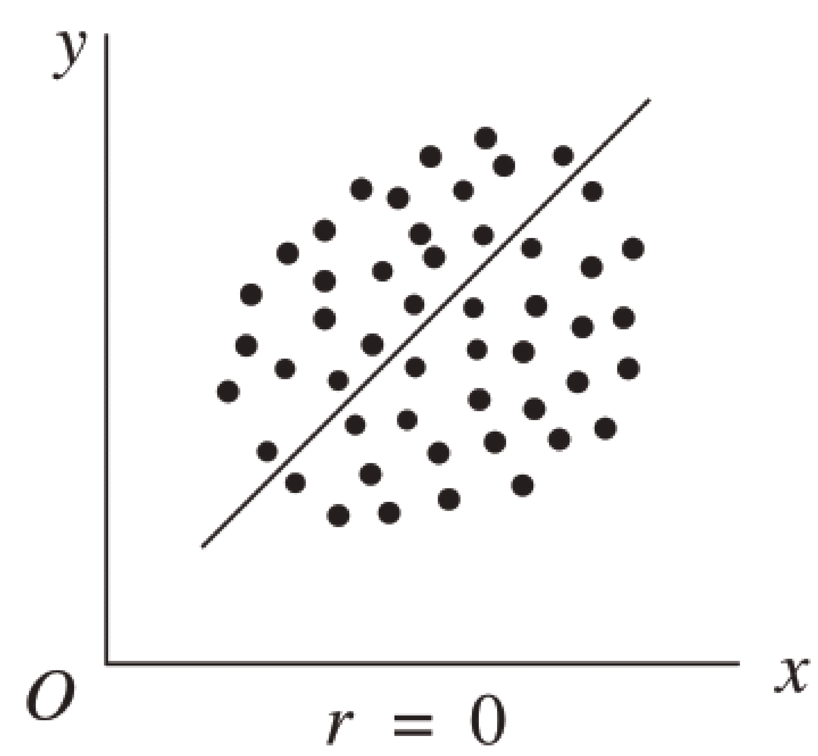
$r = 0.4$



$r = -0.4$

រូបទាំងពីរខាងលើបញ្ជាក់ថា x និង y មានទំនាក់ទំនងខ្សោយ ។ ដូចនេះការប្រើប្រាស់សមីការតម្រែតម្រង់លីនេអ៊ែពុំបានលទ្ធផលល្អទេ ។

កាលណា $r = 0$ បញ្ជាក់ថា x និង y គ្មានទំនាក់ទំនងនឹងគ្នា ។ គេពុំអាចប្រើសមីការតម្រែតម្រង់លីនេអ៊ែដើម្បីធ្វើការប៉ាន់ស្មានលទ្ធផលបានឡើយ ។



$r = 0$

ឧទាហរណ៍ : រកមេគុណតម្រែតម្រង់លីនេអ៊ែនៃទិន្នន័យក្នុងតារាងខាងក្រោម :

x_i	1	2	3	4
y_i	2	4	4	6

តាមរូបមន្ត $r = \dfrac{n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i}{\sqrt{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2} \times \sqrt{n\sum_{i=1}^{n} y_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)^2}}$ ដែល $n = 4$ ។

គណនាផលបូកតាមតារាងខាងក្រោម ៖

x_i	y_i	$x_i y_i$	x_i^2	y_i^2
1 2 3 4	2 4 4 6	2 8 12 24	1 4 9 16	4 16 16 36
$\sum_{i=1}^{4} x_i = 10$	$\sum_{i=1}^{4} y_i = 16$	$\sum_{i=1}^{4} x_i y_i = 46$	$\sum_{i=1}^{4} x_i^2 = 30$	$\sum_{i=1}^{4} y_i^2 = 72$

គេបាន $r = \dfrac{4 \times 46 - (10 \times 16)}{\sqrt{4 \times 30 - 10^2} \times \sqrt{4 \times 72 - 16^2}} = \dfrac{24}{\sqrt{20} \times \sqrt{32}} = 0.95$ ។

ដោយ $r = 0.95$ គេនិយាយថា x និង y មានទំនាក់ទំនងគ្នាខ្លាំង ។

លំហាត់គំរូ ៖ ទិន្នន័យខាងក្រោមជាតារាងទិន្នន័យទំនាក់ទំនងរវាងចំណូលសរុបប្រចាំសប្តាហ៍គិតជាពាន់ដុល្លារនិងពិន្ទុតែសរបស់បុគ្គលិក ៖

អ្នកលក់	x_i ពិន្ទុតែស	y_i ប្រាក់ចំណូលប្រចាំសប្តាហ៍
លោក A	4	5
លោក B	7	12
លោក C	3	4
លោក D	6	8
លោក E	10	11

គណនាមេគុណតម្រែតម្រង់លីនេអ៊ែ ។

ចម្លើយ ៖ តាមរូបមន្តមេគុណតម្រែតម្រង់លីនេអ៊ែ

$$r = \frac{n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i}{\sqrt{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2} \times \sqrt{n\sum_{i=1}^{n} y_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)^2}} \text{ ។}$$

គេអាចគណនាផលបូកតាមតារាងខាងក្រោម ៖

អ្នកលក់	x_i	y_i	x_iy_i	x_i^2	y_i^2
លោក A	4	5	20	16	25
លោក B	7	12	84	49	144
លោក C	3	4	12	9	16
លោក D	6	8	48	36	64
លោក E	10	11	110	100	121
	$\sum_{i=1}^{5} x_i = 30$	$\sum_{i=1}^{5} y_i = 40$	$\sum_{i=1}^{5} x_iy_i = 274$	$\sum_{i=1}^{5} x_i^2 = 210$	$\sum_{i=1}^{5} y_i^2 = 370$

គេបាន $r = \dfrac{5 \times 274 - 30 \times 40}{\sqrt{5 \times 210 - 30^2} \times \sqrt{5 \times 370 - 40^2}} = \dfrac{170}{\sqrt{150 \times 250}} = 0.88$ ។

$r = 0.88$ បញ្ជាក់ថាមានទំនាក់ទំនងគ្នាខ្លាំងរវាងពិន្ទុតែសរបស់បុគ្គលិកនិងប្រាក់ចំណូលប្រចាំសប្តាហ៍ មានន័យថាតែសបុគ្គលិករបស់អ្នកធ្វើតែសមានសពុលភាព ។

ប្រតិបត្តិ ៖ រកមេគុណតម្រែតម្រង់លីនេអ៊ែ r នៃតារាងទិន្នន័យខាងក្រោម ៖

x_i	5	4	6	5	5	5	6	6	2	7	7
y_i	85	103	70	82	89	98	66	95	169	70	48

មេរៀនសង្ខេប

- បើគេមានចំណុចទិន្នន័យ (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , (x_3, y_3) , ... , (x_n, y_n) នោះបន្ទាត់

តម្រែតម្រង់លីនេអ៊ែមានរាង $y = ax + b$ ដែល $a = \dfrac{n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}$ និង

$b = \dfrac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} y_i - a\sum_{i=1}^{n} x_i\right)$ ឬ $b = \bar{y} - a\bar{x}$ ។

- មេគុណតម្រែតម្រង់លីនេអ៊ែតាងដោយ ។

$$r = \frac{n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i}{\sqrt{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2} \times \sqrt{n\sum_{i=1}^{n} y_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)^2}}$$ ។

លំហាត់

1. គេមានបន្ទាត់ $y = -0.5x+3$ និង $y = -x+4$ ហើយមានតារាងទិន្នន័យ

x_i	0	2	2	5	6
y_i	4	2	0	–2	1

ក. សង់តារាងផលបូកនៃ x_i, y_i, y, d និង d^2 ។

ខ. តើបន្ទាត់មួយណាដែលនៅជិតចំណុចទាំងនោះជាងគេ ?

គ. ដោយប្រើបន្ទាត់ដែលរកឃើញ គណនាតម្លៃ y ចំពោះ $x = 2$ និង $x = 3$ ។

2. គេមានតារាងទិន្នន័យស្ថិតិពីរអថេរ

x_i	2	4	6	8	9
y_i	2	2	6	10	10

ក. រកសមីការបន្ទាត់តម្រែតម្រង់លីនេអ៊ែនៃទិន្នន័យខាងលើ ។

ខ. ចូរគណនាតម្លៃ y ចំពោះ $x = 3$ និង $x = 5$ ។

3. គេមានតារាងទិន្នន័យស្ថិតិពីរអថេរ

x_i	1	1	5	5
y_i	1	3	2	4

ក. រកសមីការបន្ទាត់តម្រែតម្រង់លីនេអ៊ែនៃទិន្នន័យខាងលើ ។

ខ. គណនាតម្លៃ y ចំពោះ $x = 1$, $x = 3$ និង $x = 5$ ។

គ. រកមេគុណតម្រែតម្រង់លីនេអ៊ែ រួចបកស្រាយទំនាក់ទំនងរវាង x_i និង y_i ។

4. ក្នុងរោងចក្រកាត់ដេរមួយគេជ្រើសរើសយកកម្មការិនីចំនួន 11 នាក់ ដែលមានអាយុពី 18 ទៅ 24 ឆ្នាំ ដើម្បីធ្វើការសិក្សាទំនាក់ទំនងរវាងកម្ពស់និងម៉ាស ។ តាង x_i ជាកម្ពស់គិតជា cm ហើយ y_i ជាម៉ាសគិតជា kg គេបានលទ្ធផលដូចតារាងខាងក្រោម :

x_i	150	152	152	155	155	157	158	158	160	160	165
y_i	50	58	48	50	52	60	53	63	54	62	56

ក. រកសមីការបន្ទាត់តម្រែតម្រង់លីនេអ៊ែ ។

ខ. រកម៉ាសកម្មករិនីដែលត្រូវនឹងកម្ពស់ $152cm$, $155cm$ និង $160cm$ ។

គ. រកមេគុណតម្រែតម្រង់លីនេអ៊ែ រួចបកស្រាយទំនាក់ទំនងរវាង x_i និង y_i ។

5. តារាងទិន្នន័យខាងក្រោមបានមកពីការិយាល័យសាងសង់ ដែលបង្ហាញពីចំនួនប្រាក់ចំណាយលើការសាងសង់នៅក្នុងទីក្រុងមួយ រយៈពេល 6 ខែចុងក្រោយ ។

ខែ	មករា	កុម្ភៈ	មីនា	មេសា	ឧសភា	មិថុនា
ចំនួនប្រាក់គិតជាពាន់លានរៀល	42	19	30	49	68	69

បើ $x = 0$ តាងខែ មករា ។

ក. រកសមីការបន្ទាត់តម្រែតម្រង់លីនេអ៊ែ ។

ខ. ចូរធ្វើការប៉ាន់ស្មានចំនួនប្រាក់ដែលចំណាយក្នុងខែកក្កដា ។

6. ប្រាក់ចំណូលប្រចាំឆ្នាំ (គិតជាកោដិរៀល) របស់សាជីវកម្មមួយឱ្យដោយតារាងទិន្នន័យខាងក្រោម :

ឆ្នាំ	2005	2006	2007	2008	2009	2010
ប្រាក់ចំណូល	66	82	127	201	310	392

បើ $x = 0$ តាងឆ្នាំ 2005

ក. រកសមីការបន្ទាត់តម្រែតម្រង់លីនេអ៊ែ ។

ខ. ចូរធ្វើការប៉ាន់ស្មានប្រាក់ចំណូលនៅឆ្នាំ 2011 ។

7. ក្រុមហ៊ុនមួយលក់រថយន្តដែលបានប្រើប្រាស់រួច ។ តម្លៃលក់បញ្ចុះទៅតាមចំនួនឆ្នាំដែលបានប្រើប្រាស់ គេបានតារាងទិន្នន័យដែលលក់កន្លងមក ។

ចំនួនឆ្នាំដែលបានប្រើប្រាស់	5	4	5	5	6	6	3	7	7
តម្លៃលក់ (គិតជាលានរៀល)	82	102	90	99	67	73	125	168	75

ក. រកសមីការបន្ទាត់តម្រែតម្រង់លីនេអ៊ែ ។

ខ. រកតម្លៃរថយន្តដែលមានចំណាស់ 5 ឆ្នាំ និង 2 ឆ្នាំ ។

គ. រកមេគុណតម្រែតម្រង់លីនេអ៊ែ រួចបកស្រាយទំនាក់ទំនងរវាងទិន្នន័យទាំងពីរ ។

8. នៅរយៈពេល 5 ឆ្នាំចុងក្រោយនេះ អ្នកគ្រប់គ្រងផ្នែកឃោសនាពាណិជ្ជកម្មម្នាក់បានប្រមូលទិន្នន័យ ដែលបង្ហាញពីទំនាក់ទំនងរវាងចំនួនថវិកាឃោសនាទំនិញ (គិតជាកោដិរៀល) និងបរិមាណផលិតផលដែលលក់បាន (គិតជាពាន់ឯកតាផលិតផល)។ គេបានតារាងទិន្នន័យដូចខាងក្រោម :

x_i ចំនួនថវិកាឃោសនា	4.5	6.5	3.5	3.2	2.6
y_i បរិមាណផលិតផលលក់បាន	37	46	42	32	29

ក. រកសមីការបន្ទាត់តម្រែតម្រង់លីនេអ៊ែ ។

ខ. ធ្វើការប៉ាន់ស្មានបរិមាណឯកតាផលិតផលដែលបានលក់ បើគេចំណាយថវិកាអស់ 4 កោដិរៀល ។

គ. រកមេគុណតម្រែតម្រង់លីនេអ៊ែ ។

លំហាត់ជំពូក 5

1. គេឱ្យតារាងស្ថិតិនៃពីរអថេរខាងក្រោម :

x_i	3	2	3.5	4	5	6	6.5	7	8	9
y_i	11	13	20	25	19	30	35	38	32	40

ក. បកស្រាយស្ថិតិនៃពីរអថេរជាចំណុច ។

ខ. ផ្គុំចំណុចខាងលើជាពីរក្រុម ។

គ. រកចំណុចមធ្យម M_1 និង M_2 រួចរកសមីការបន្ទាត់ដែលកាត់តាម M_1 និង M_2 ។

2. គេមានសមីការបន្ទាត់ $y = -0.6x + 3$ និង $y = -x + 3$ និងតារាងទិន្នន័យ :

x_i	0	2	2	5	6
y_i	4	2	0	–2	1

ក. ចូរសង់តារាងផលបូកនៃ x_i និង y_i , y , d និង d^2 ។

ខ. តើបន្ទាត់មួយណាដែលនៅជិតចំណុចទាំងនោះជាងគេ ?

គ. ដោយប្រើបន្ទាត់ដែលរកឃើញ គណនាតម្លៃ y ចំពោះ $x = 3$ និង $x = 4$ ។

3. តារាងទិន្នន័យខាងក្រោមបង្ហាញពីចំនួនប្រាក់ដែលចំណាយលើការសាងសង់ក្នុងតំបន់មួយនៅអំឡុងពេល 5 ខែ ។

x_i ខែ	មករា	កុម្ភៈ	មិនា	មេសា	ឧសភា
y_i ចំនួនប្រាក់ (គិតជាពាន់ដុល្លារ)	15	17	24	20	25

បើ $x_1 = 0$ តាងខែមករា

ក. រកសមីការបន្ទាត់តម្រែតម្រង់លីនេអ៊ែ ។

ខ. ចូរធ្វើការប៉ាន់ស្មានចំនួនប្រាក់ដែលនឹងចំណាយក្នុងខែមិថុនា ។

4. ចូរពិនិត្យតារាងទិន្នន័យនៃពីរអថេរ

x_i	-3	-2	-1	0	1	2	3
y_i	9	4	1	0	1	4	9

ក. រកសមីការបន្ទាត់តម្រែតម្រង់លីនេអ៊ែ ។

ខ. រកមេគុណតម្រែតម្រង់លីនេអ៊ែ r ។

គ. តាមតម្លៃ r ខាងលើ តើ x_i និង y_i មានទំនាក់ទំនងគ្នាដែរឬទេ ? តើគេអាចប្រើសមីការតម្រែតម្រង់លីនេអ៊ែខាងលើសម្រាប់ធ្វើការប៉ាន់ស្មានលទ្ធផលឬទេ ?

ជំពូក 6 កោនិក

រូបមួយនៅក្នុងប្លង់ដែលបានតាងដោយសមីការលីនេអ៊ែ x និង y គឺជាបន្ទាត់មួយ ។ តើរូបដែលបានតាងដោយសមីការដឺក្រេទី 2 ជារូបអ្វី ? នៅក្នុងជំពូកនេះ គេនឹងសិក្សាលក្ខណៈគ្រឹះនៃខ្សែកោងដឺក្រេទី 2 ។

ខ្សែកោងដឺក្រេទី 2 កើតឡើងដោយគេកាត់កោនមួយដោយប្លង់មួយ ។ ដូចនេះខ្សែកោងដឺក្រេទី 2 ត្រូវបានគេហៅថា " ខ្សែកោងកោនិក " ហើយខ្សែកោងទាំងនោះត្រូវបានគេសិក្សាតាំងតែពីប្រទេសក្រិចនៅក្នុងសម័យបុរាណកាលមកម្ល៉េះ ។

ជាពិសេស ការរកឃើញរបស់លោកអាប៉ូឡូនុស Apolllonius ជាគណិតវិទូជនជាតិក្រិច (260 -200 មុន គ.ស) បានបញ្ជាក់ច្បាស់លាស់និងមានឈ្មោះល្បីរន្ទឺ ។ គាត់បានធ្វើចំណាត់ថ្នាក់ មុខកាត់កោនិកកាត់ដោយប្លង់មួយជាបីប្រភេទ ហើយប្រភេទទាំងនោះមានឈ្មោះថា ***អេលីប ប៉ារ៉ាបូលនិង អ៊ីពែរបូល*** ។ យើងបានចងចាំនូវពាក្យទាំងនេះអាស្រ័យទៅនឹងខ្សែកោងដែលបានបង្កើតដោយមុខកាត់ទាំងនេះ ។

មេរៀនទី

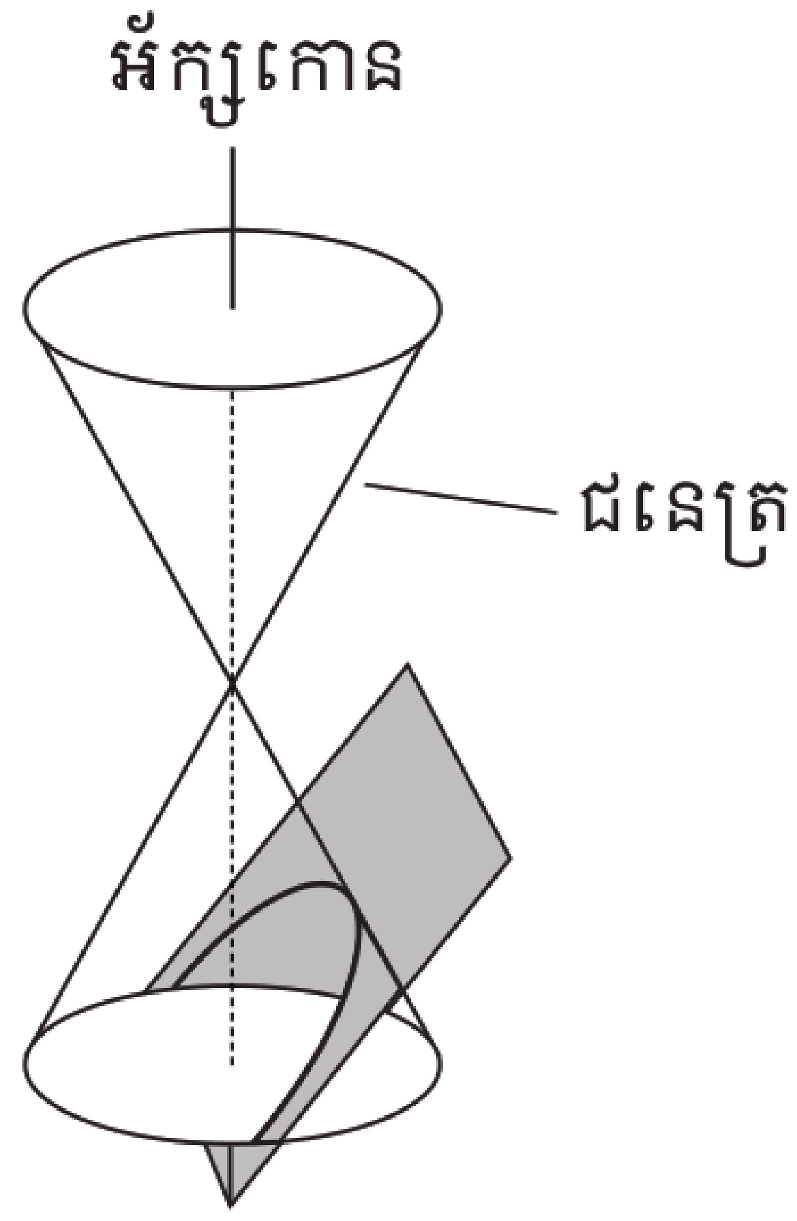
1 ប៉ារ៉ាបូល

វត្ថុបំណង

- ❑ កំណត់និយមន័យនៃប៉ារ៉ាបូល
- ❑ កំណត់សមីការស្តង់ដានៃប៉ារ៉ាបូល
- ❑ បំប្លែងសមីការទូទៅនៃប៉ារ៉ាបូលទៅជាសមីការស្តង់ដា ។

1. សេចក្តីផ្តើម

គេឱ្យប្លង់មួយកាត់កោនបរិវត្តមានបាតជារង្វង់ (មិនកាត់តាមកំពូល) ហើយស្របនឹងជនេត្រកោននោះ ។ ប្រសព្វដែលបានមកនេះមានរាងជាខ្សែកោងមួយដែលគេហៅថា ***ប៉ារ៉ាបូល*** ។ ដូចនេះ ***ប៉ារ៉ាបូលជាកោនិក***មួយ ។



2. និយមន័យនៃប៉ារ៉ាបូល

ឧទាហរណ៍ : នៅលើក្រដាសមួយសន្លឹក គេគូសបន្ទាត់ Δ មួយ និងបន្ទាត់ស្របនឹងបន្ទាត់ Δ ជាបន្តបន្ទាប់គ្នា :

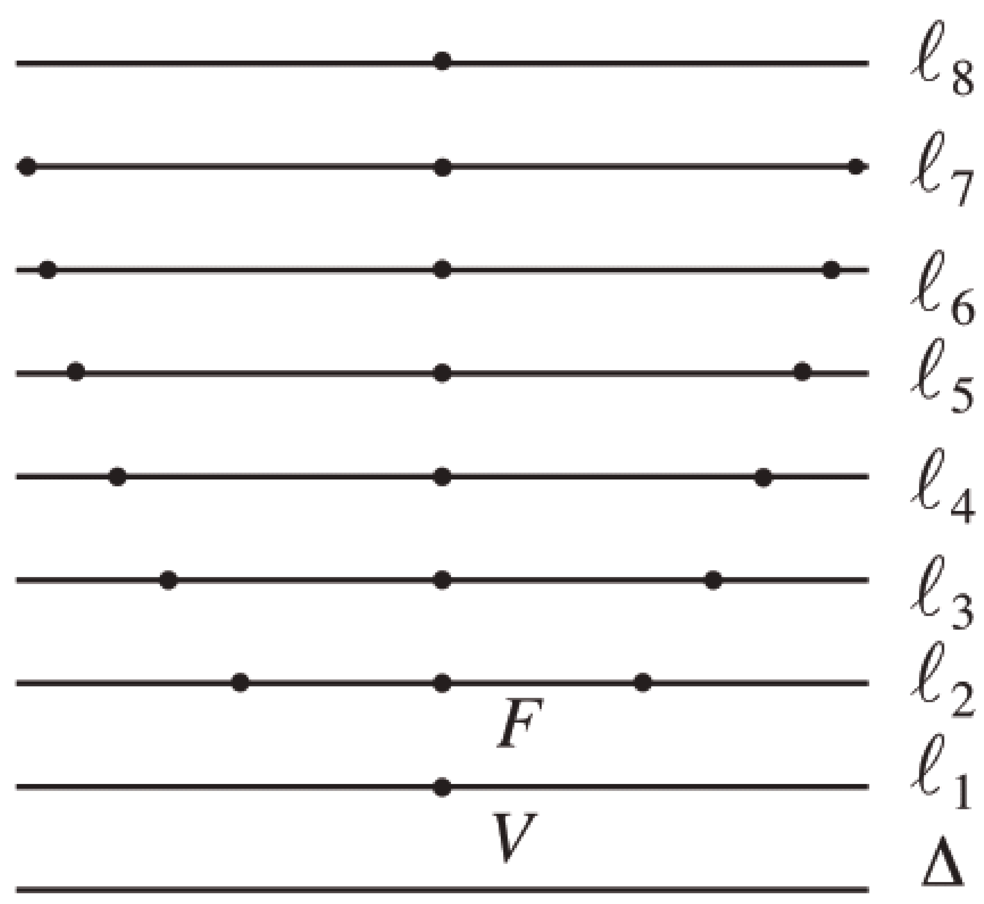
បន្ទាត់ ℓ_1 មានចម្ងាយ 1 ឯកតាពី Δ

បន្ទាត់ ℓ_2 មានចម្ងាយ 1 ឯកតាពី ℓ_1

បន្ទាត់ ℓ_3 មានចម្ងាយ 1 ឯកតាពី ℓ_2

បន្ទាត់ ℓ_4 មានចម្ងាយ 1 ឯកតាពី ℓ_3

....



ដៅចំណុច F មួយនៅលើបន្ទាត់ ℓ_2 និង V នៅលើបន្ទាត់ ℓ_1 ដោយ $FV\perp\Delta$ ។

V ស្ថិតនៅចម្ងាយ 1 ឯកតាពី F និង 1 ឯកតាពីបន្ទាត់ (Δ) ។

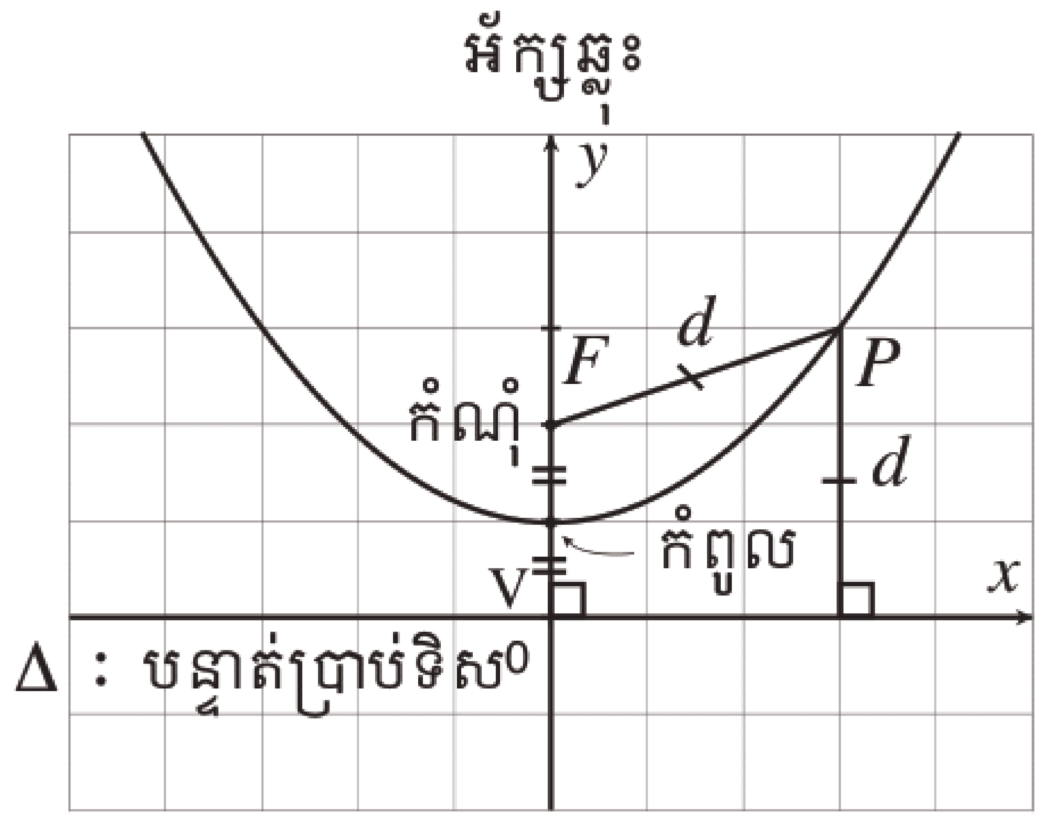
ដោយយក F ជាផ្ចិត រួចសង់ធ្នូរង្វង់ដែលមានកាំ 2 ឯកតា 3 ឯកតា 4 ឯកតា ... ។ រង្វង់ទាំងនេះកាត់បន្ទាត់ ℓ_2 , ℓ_3 , ℓ_4 , ... រៀងគ្នាត្រង់ពីរចំណុច ។

ចំណុចប្រសព្វដែលបានទាំងនោះ មានចម្ងាយស្មើពីចំណុច F និងបន្ទាត់ Δ ។

បើគេគូសខ្សែកោងកាត់តាមចំណុច V និងចំណុចប្រសព្វទាំងនោះ គេបានខ្សែកោងមួយហៅថា ប៉ារ៉ាបូលដែលមានកំពូល V កំណុំ F និងបន្ទាត់ប្រាប់ទិស Δ ។

និយមន័យ : ប៉ារ៉ាបូលជាសំណុំចំណុចនៅក្នុងប្លង់ ដែលមានចម្ងាយស្មើពីចំណុចនឹង F មួយនិងបន្ទាត់នឹង Δ មួយនៅក្នុងប្លង់នោះ ។ ចំណុចនឹង F ហៅថា កំណុំ និងបន្ទាត់នឹង Δ ហៅថា ***បន្ទាត់ប្រាប់ទិស*** ។

- បន្ទាត់ដែលកាត់តាមកំណុំ F ហើយកែងនឹងបន្ទាត់ប្រាប់ទិស Δ ហៅថាអ័ក្សឆ្លុះនៃប៉ារ៉ាបូល ។
- ចំណុច V ដែលស្ថិតនៅលើអ័ក្សឆ្លុះ និងជាចំណុចកណ្តាលនៃអង្កត់ដែលភ្ជាប់កំណុំ F និងបន្ទាត់ប្រាប់ទិស Δ ហៅថា ***កំពូលនៃប៉ារ៉ាបូល*** ។



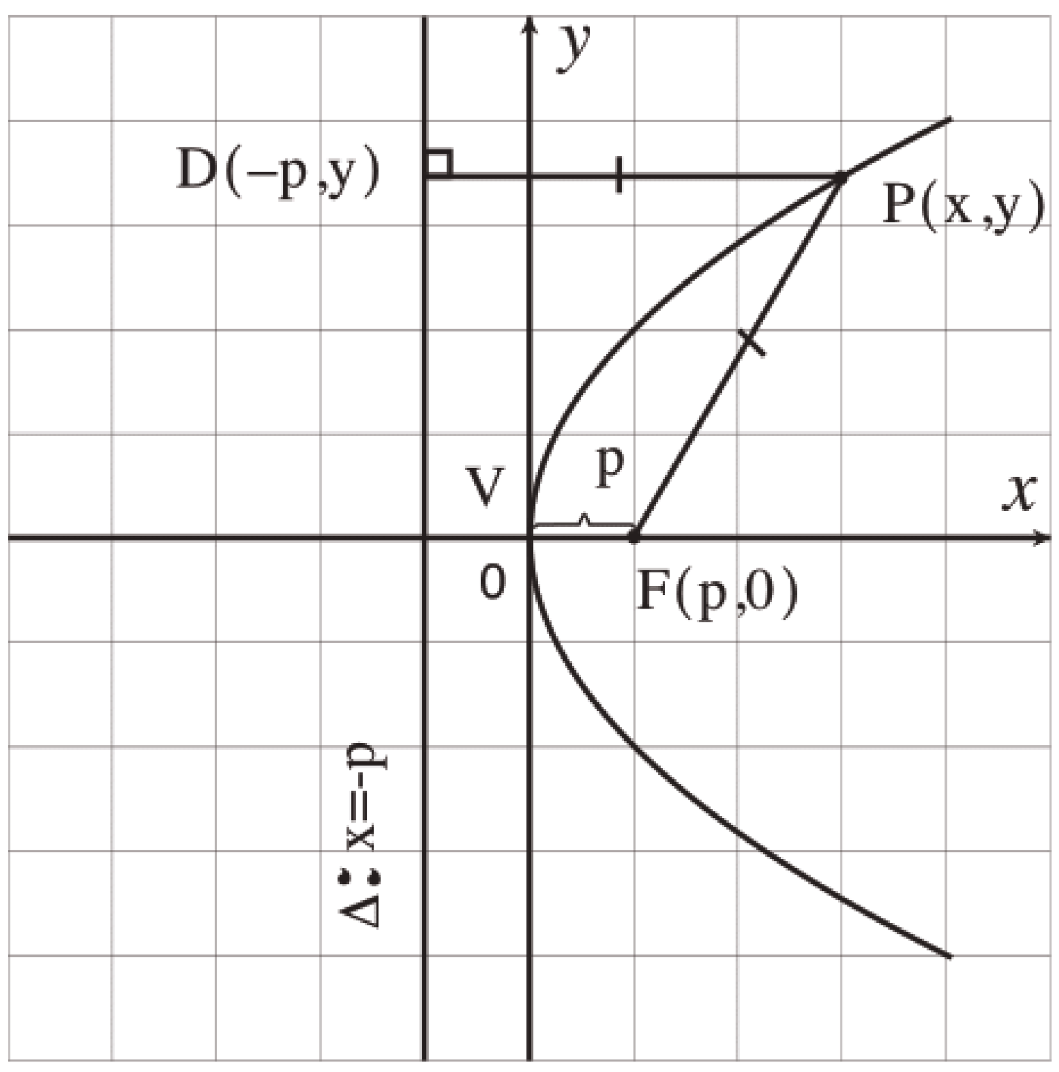
3. សមីការនៃប៉ារ៉ាបូល

3.1. សមីការស្តង់ដានៃប៉ារ៉ាបូលដែលមានកំពូលជាគល់នៃអ័ក្សកូអរដោនេ

ក. ករណីបន្ទាត់ប្រាប់ទិស Δ ស្របនឹងអ័ក្សអរដោនេ

គេអាចប្រើនិយមន័យដើម្បីរកសមីការនៃប៉ារ៉ាបូល ។ សមីការនេះអាស្រ័យលើកំណុំនិងបន្ទាត់ប្រាប់ទិស ។

ឧបមាថា ប៉ារ៉ាបូលមានកំពូល V ជាគល់អ័ក្សកូអរដោនេ និងកំណុំ F ស្ថិតនៅលើអ័ក្សអាប់ស៊ីស ។



បើពីកំពូល V ទៅកំណុំ F មានចម្ងាយ p ឯកតានោះ $F(p,\ 0)$ និងបន្ទាត់ប្រាប់ទិស Δ មានសមីការ $x = -p$ ។

តាង $P(x,\ y)$ ជាចំណុចមួយស្ថិតនៅលើប៉ារ៉ាបូល ។

បើ D ជាចំណុចមួយមានកូអរដោនេ $(-p,\ y)$ គេបាន៖ $PF = PD$

$\sqrt{(x-p)^2+y^2} = \sqrt{(x+p)^2}$ (ប្រើរូបមន្តចម្ងាយរវាងពីរចំណុច)

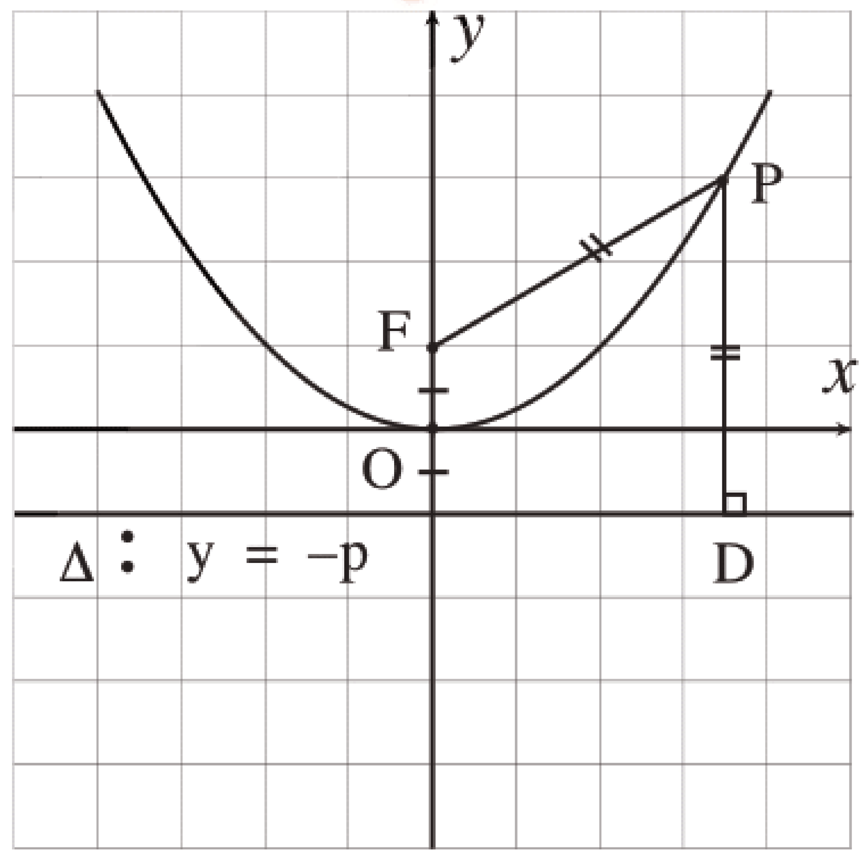
$(x-p)^2+y^2 = (x+p)^2$ (លើកអង្គទាំងពីរជាការេ)

$x^2-2xp+p^2+y^2 = x^2+2xp+p^2$

$y^2 = 4px$

នេះជាសមីការស្តង់ដានៃប៉ារ៉ាបូលដែលមានកំពូល $V(0,\ 0)$ និងកំណុំ $F(p,\ 0)$ ស្ថិតនៅលើអ័ក្សអាប់ស៊ីស ។

ខ. ករណីបន្ទាត់ប្រាប់ទិស Δ ស្របនឹងអ័ក្សអាប់ស៊ីស



ដូចគ្នាដែរ សមីការស្តង់ដានៃប៉ារ៉ាបូលដែលមានកំពូល $V(0,\ 0)$ និងកំណុំ $F(0,\ p)$ ស្ថិតនៅលើអ័ក្សអរដោនេគឺ $x^2 = 4py$ ។

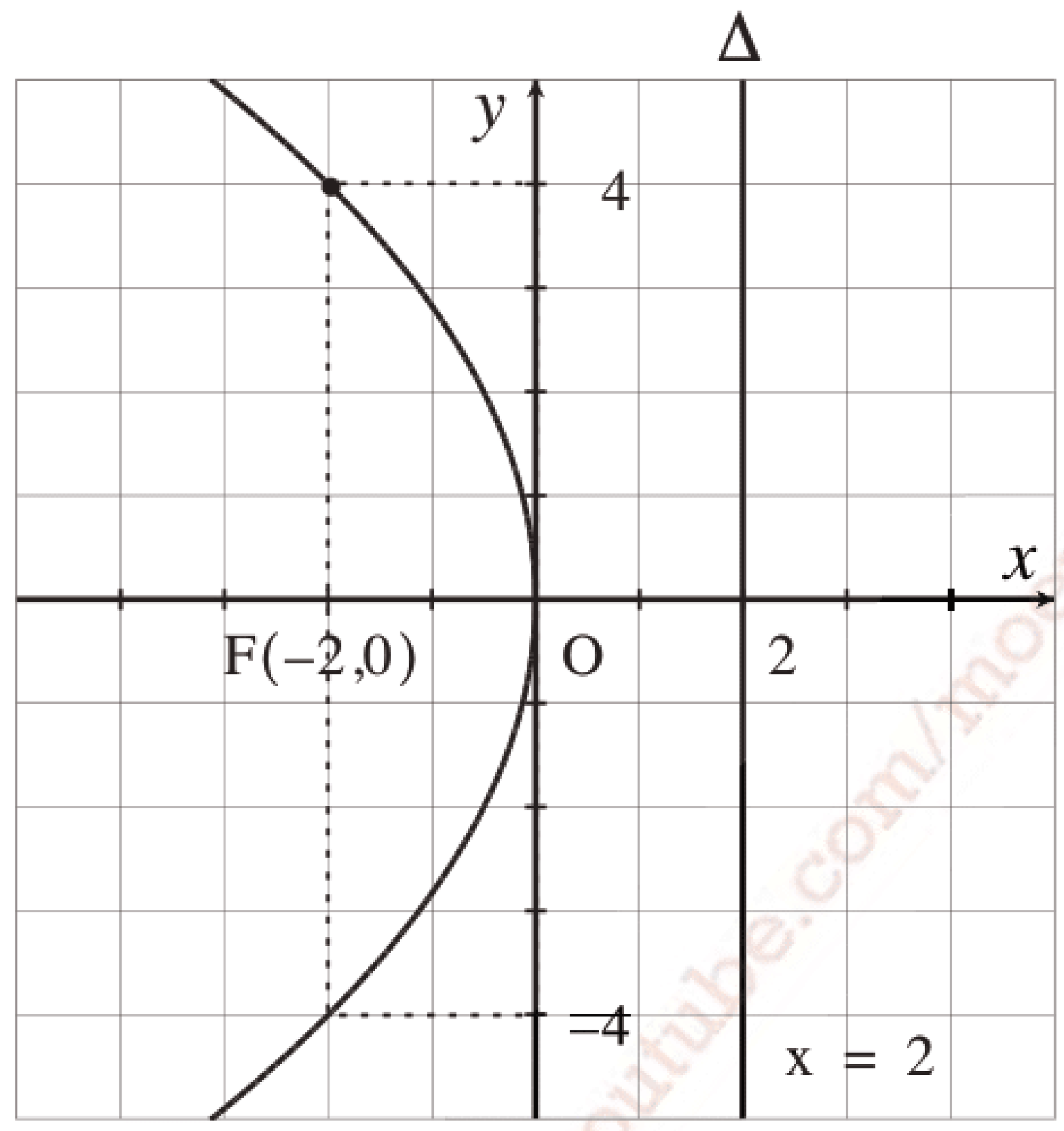
នៅក្នុងសមីការទាំងនេះ p អាចជាចំនួនវិជ្ជមាន ឬជាចំនួនអវិជ្ជមាន ។

ជាទូទៅ : សមីការស្តង់ដានៃប៉ារ៉ាបូលដែលមានកំពូលជាគល់អ័ក្សកូអរដោនេ

1. បើអ័ក្សឆ្លុះជាអ័ក្សអរដោនេ នោះប៉ារ៉ាបូលមានសមីការស្តង់ដា $x^2 = 4py$ ហើយមានកំណុំ $F(0,\ p)$ និងបន្ទាត់ប្រាប់ទិសមានសមីការ $y = -p$ ។
   - បើ $p>0$ នោះប៉ារ៉ាបូលបែរភាពផតទៅរកទិស $y>0$
   - បើ $p<0$ នោះប៉ារ៉ាបូលបែរភាពផតទៅរកទិស $y<0$ ។

2. បើអ័ក្សឆ្លុះជាអ័ក្សអាប់ស៊ីស នោះប៉ារ៉ាបូលមានសមីការស្តង់ដា $y^2 = 4px$ ហើយមានកំណុំ $F(p,\ 0)$ និងបន្ទាត់ប្រាប់ទិសមានសមីការ $x = -p$ ។
   - បើ $p>0$ នោះប៉ារ៉ាបូលបែរភាពផតទៅរកទិស $x>0$
   - បើ $p<0$ នោះប៉ារ៉ាបូលបែរភាពផតទៅរកទិស $x<0$ ។

លំហាត់គំរូ 1 : រកសមីការស្តង់ដានៃប៉ារ៉ាបូលដែលមានកំណុំត្រង់ចំណុច $(-2,\ 0)$ និងបន្ទាត់ប្រាប់ទិសមានសមីការ $x = 2$ ។



ចម្លើយ : កំណុំស្ថិតនៅលើអ័ក្សអាប់ស៊ីស នោះអ័ក្សឆ្លុះជាអ័ក្សអាប់ស៊ីស ។ ដោយកំពូលស្ថិតនៅលើអ័ក្សឆ្លុះជាចំណុចកណ្ដាលរវាងកំណុំ និងបន្ទាត់ប្រាប់ទិស នោះកំពូលជាគល់អ័ក្សកូអរដោនេ ។ ប៉ារ៉ាបូលនេះមានសមីការ $y^2 = 4px$ ដែល $p = -2$ ។

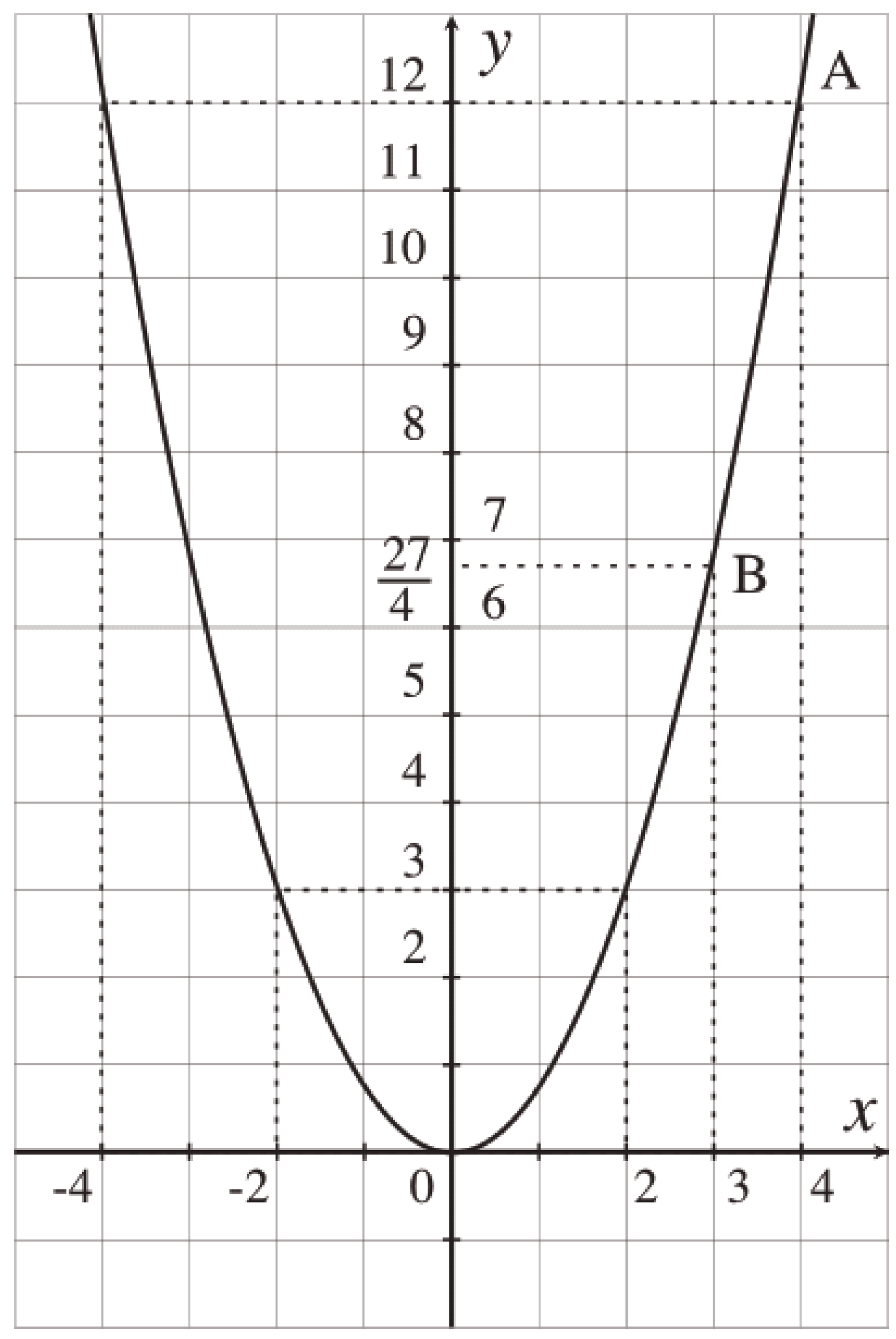
ដូចនេះ សមីការស្តង់ដានៃប៉ារ៉ាបូលគឺ $y^2 = -8x$ ។

លំហាត់គំរូ 2 : ប៉ារ៉ាបូលមួយមានកំពូលនៅត្រង់ចំណុច $(0, 0)$ និងកំណុំស្ថិតនៅលើអ័ក្សអរដោនេ ។

ក. រកសមីការស្តង់ដានៃប៉ារ៉ាបូល បើវាកាត់តាមចំណុច $A(4, 12)$ ។

ខ. រកតម្លៃនៃ y_1 បើ $B(3, y_1)$ ស្ថិតនៅលើប៉ារ៉ាបូល ។

ចម្លើយ :



ក. ដោយប៉ារ៉ាបូលនេះមានកំពូលត្រង់ $(0, 0)$ និងកំណុំស្ថិតនៅលើអ័ក្សអរដោនេ នោះអ័ក្សអរដោនេជាអ័ក្សឆ្លុះនៃប៉ារ៉ាបូល ។ គេបានសមីការនៃប៉ារ៉ាបូលនេះគឺ $x^2 = 4py$ ដោយ $A(4, 12)$ ស្ថិតនៅលើប៉ារ៉ាបូល នោះកូអរដោនេរបស់វាផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការ $x^2 = 4py$

$4^2 = 4p(12)$

$16 = 48p$ នោះ $p = \frac{16}{48} = \frac{1}{3}$

ដូចនេះ សមីការស្តង់ដានៃប៉ារ៉ាបូលគឺ $x^2 = \frac{4}{3}y$ ។

ខ. រកតម្លៃ y_1

ជំនួសតម្លៃ $x = 3$ និង $y = y_1$ ក្នុងសមីការ $y = \frac{3}{4}x^2$ គេបាន $y_1 = \frac{3}{4}(3)^2 = \frac{27}{4}$ ។

ដូចនេះ បើ $B(3, y_1)$ ស្ថិតនៅលើប៉ារ៉ាបូលនោះ $y_1 = \frac{27}{4}$ ។

ប្រតិបត្តិ 1 : រកកូអរដោនេកំពូល កំណុំនិងសមីការបន្ទាត់ប្រាប់ទិសនៃប៉ារ៉ាបូល $y^2 = -6x$ រួចសង់ប៉ារ៉ាបូលនោះ ។

ប្រតិបត្តិ 2 : រកសមីការស្តង់ដានៃប៉ារ៉ាបូលក្នុងករណីនីមួយៗខាងក្រោម :

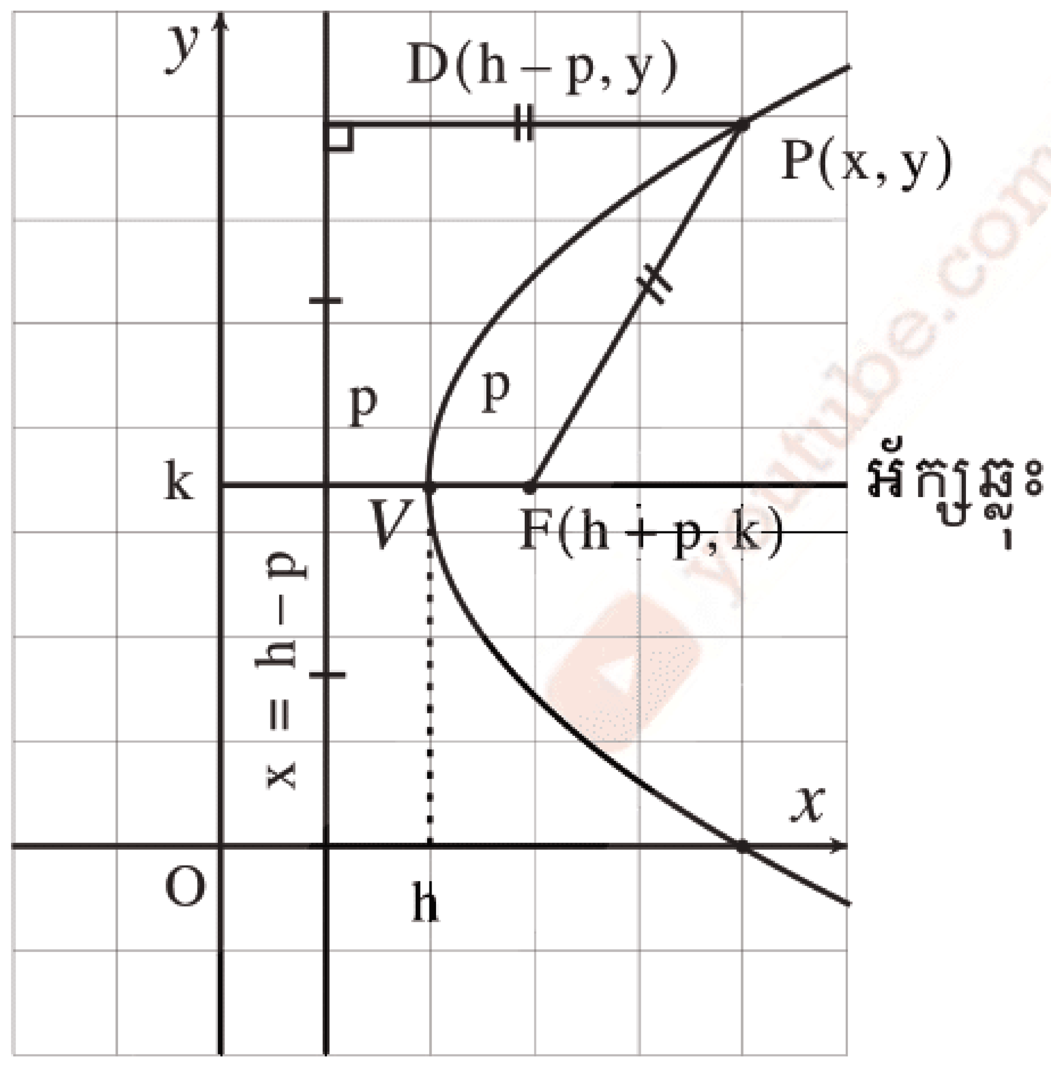
ក. កំពូល $V(0, 0)$ និងកំណុំ $F\left(0, -\frac{3}{2}\right)$ ។

ខ. កំណុំ $F(0, 2)$ និងបន្ទាត់ប្រាប់ទិសមានសមីការ $x = -2$ ។

3.2. សមីការស្តង់ដានៃប៉ារ៉ាបូលដែលមានកំពូលខុសពីគល់នៃអ័ក្សកូអរដោនេ

ក. ករណីបន្ទាត់ប្រាប់ទិស Δ ស្របនឹងអ័ក្សអរដោនេ

គេប្រើនិយមន័យនៃប៉ារ៉ាបូលដើម្បីរកសមីការនៃប៉ារ៉ាបូលដែលមានកំពូល $V(h,\ k)$ ។



តាង p ជាចម្ងាយពីកំពូលទៅកំណុំ និងទៅបន្ទាត់ប្រាប់ទិស ។

បើអ័ក្សឆ្លុះជាអ័ក្សដេកនោះ កូអរដោនេនៃកំណុំគឺ $F(h+p,\ k)$ និងសមីការនៃបន្ទាត់ប្រាប់ទិសគឺ $x = h-p$ ។

តាង $P(x,\ y)$ ជាចំណុចមួយស្ថិតនៅលើប៉ារ៉ាបូល ។ បើ D ជាចំណុចមួយមានកូអរដោនេ $(h-p,\ y)$

គេបាន : $PF = PD$

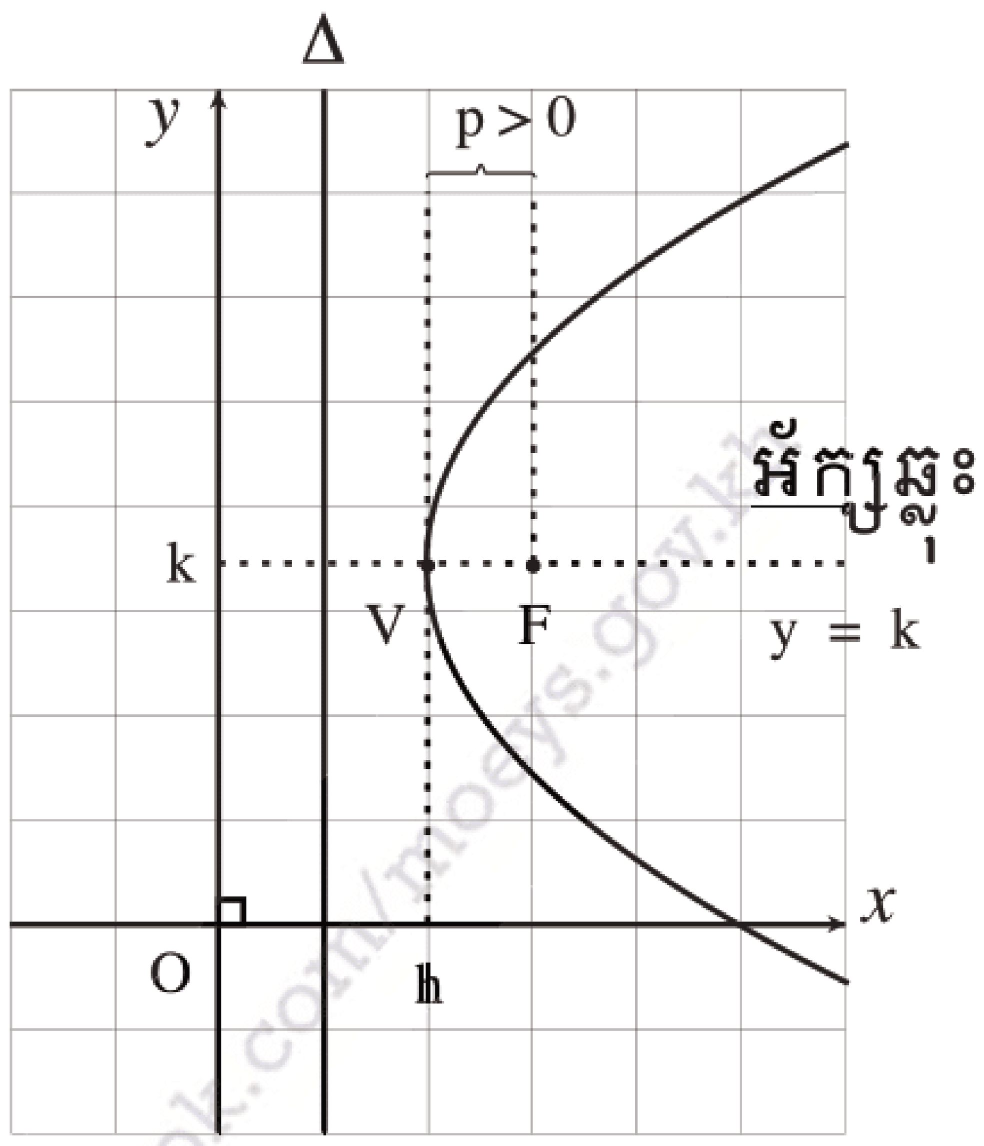
$$\sqrt{(x-h-p)^2+(y-k)^2} = \sqrt{(x-h+p)^2}$$

លើកអង្គទាំងពីរជាការេ គេបាន : $(x-h-p)^2+(y-k)^2 = (x-h+p)^2$

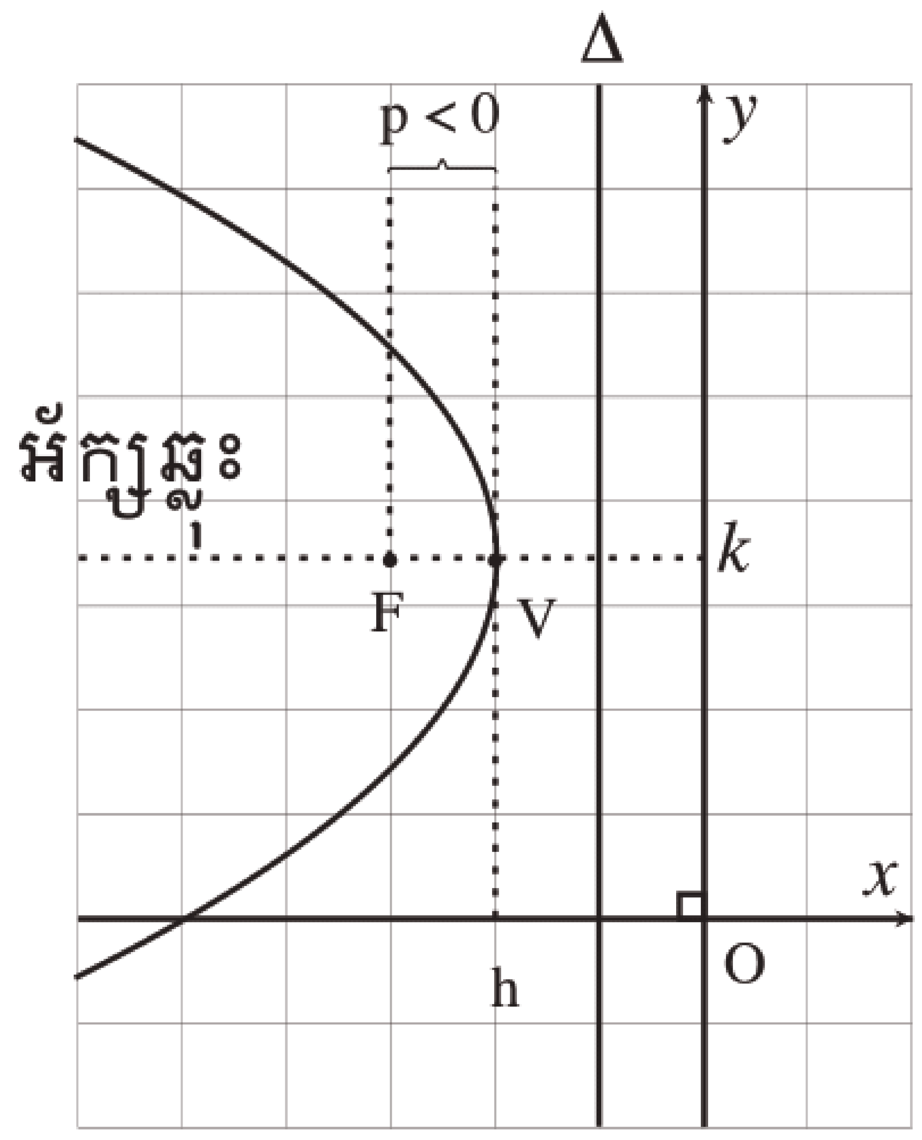
$$x^2+h^2+p^2-2hx-2px+2hp+(y-k)^2 = x^2+h^2+p^2-2hx+2px-2hp$$

$$(y-k)^2 = 4p(x-h)$$

នេះជាសមីការស្តង់ដានៃប៉ារ៉ាបូលដែលមានកំពូល $(h,\ k)$ និងអ័ក្សឆ្លុះជាអ័ក្សដេក ។



$$(y-k)^2 = 4p(x-h)$$



បន្ទាត់ប្រាប់ទិស $\Delta : x = h-p$

អ័ក្សឆ្លុះជាអ័ក្សដេក $p>0$

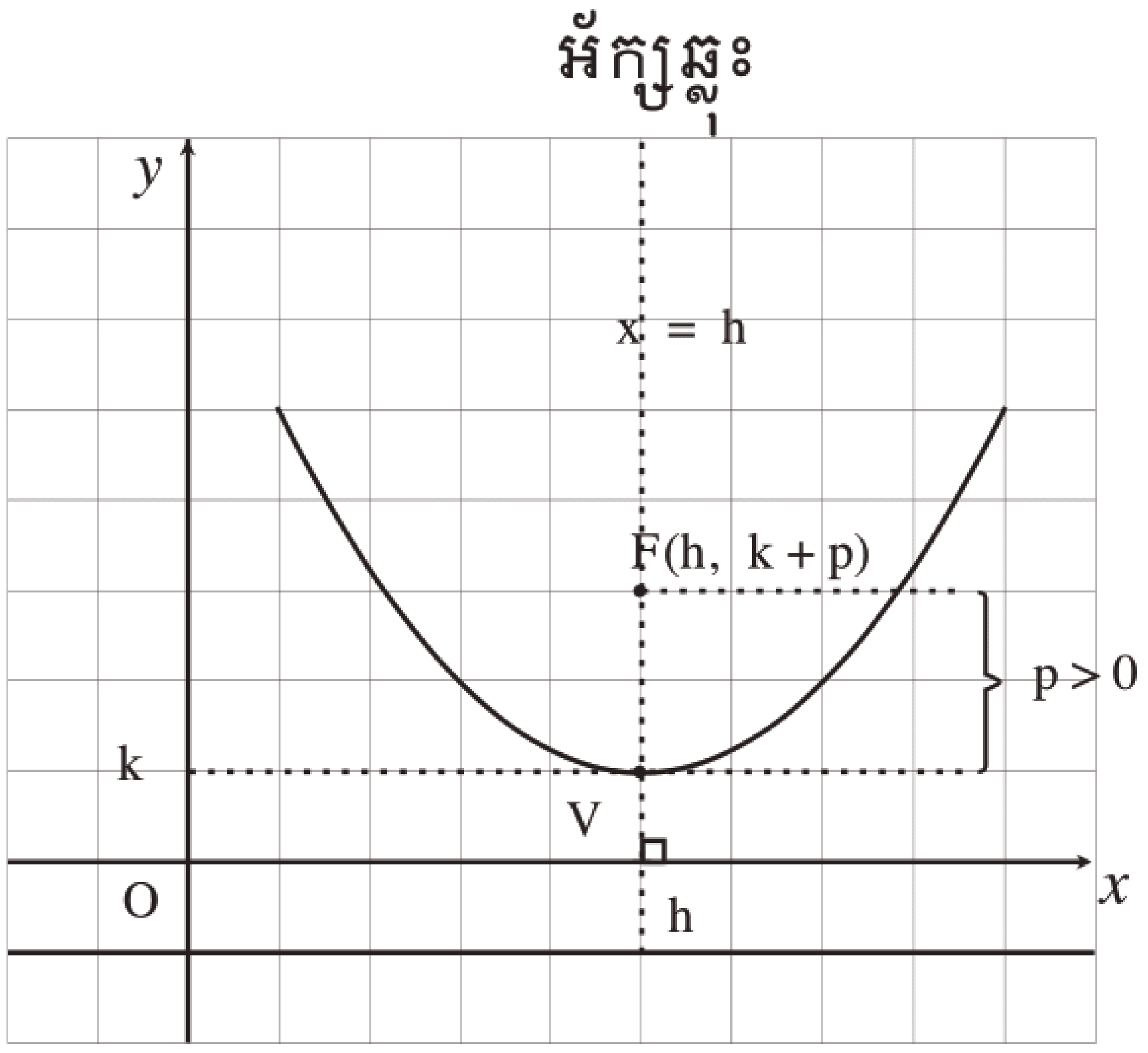
បន្ទាត់ប្រាប់ទិស $\Delta : x = h-p$

អ័ក្សឆ្លុះជាអ័ក្សដេក $p<0$

ខ. ករណីបន្ទាត់ប្រាប់ទិស Δ ស្របនឹងអ័ក្សអាប់ស៊ីស

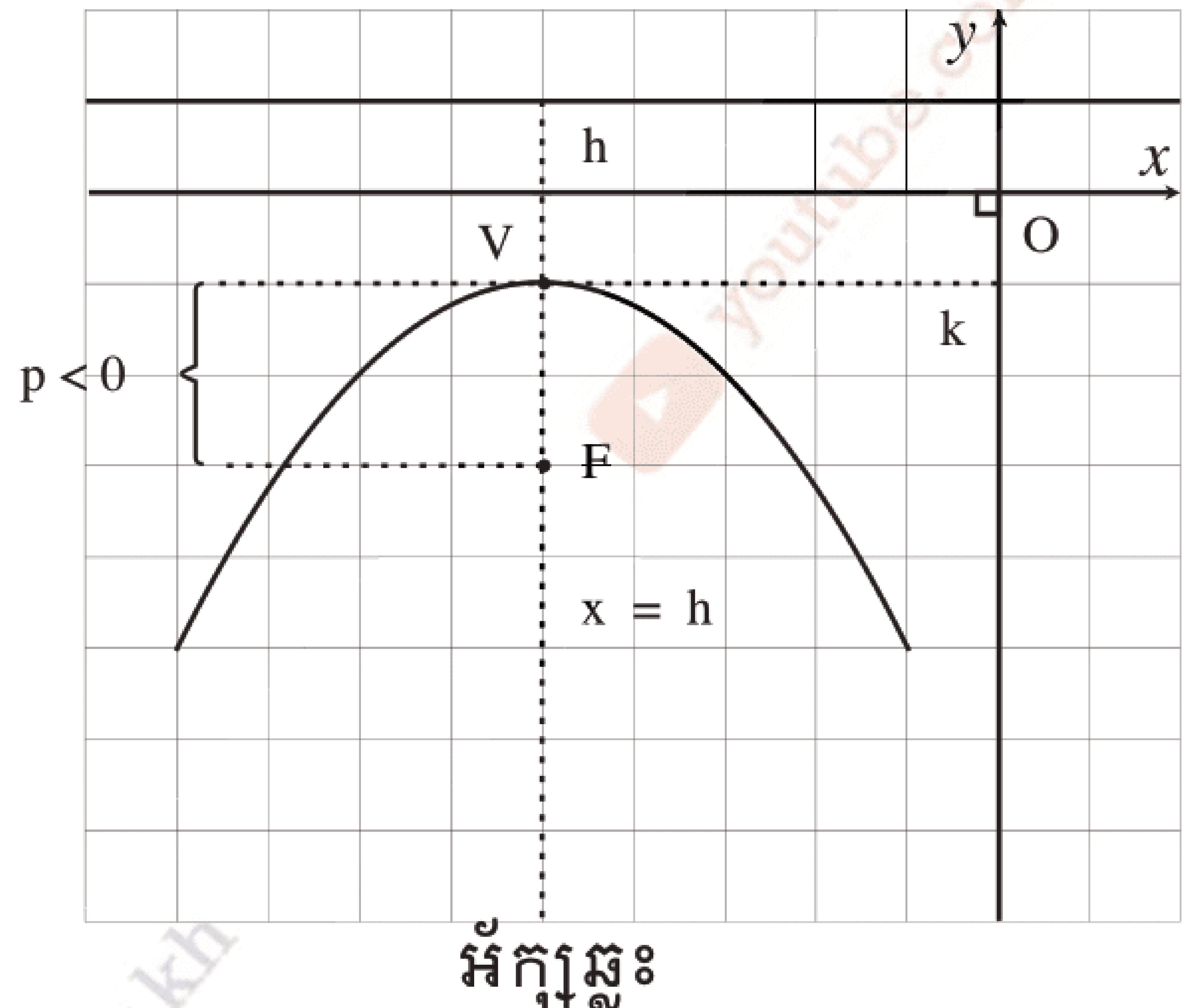
ដូចគ្នាដែរ សមីការស្តង់ដានៃប៉ារ៉ាបូលដែលមានកំពូល $(h,\ k)$ និងអ័ក្សឆ្លុះជាអ័ក្សឈរគឺ

$(x-h)^2 = 4p(y-k)$



បន្ទាត់ប្រាប់ទិស $\Delta : y = k-p$

អ័ក្សឆ្លុះជាអ័ក្សឈរ : $p > 0$



បន្ទាត់ប្រាប់ទិស $\Delta : y = k-p$

អ័ក្សឆ្លុះជាអ័ក្សឈរ : $p < 0$

ជាទូទៅ **:** សមីការស្តង់ដានៃប៉ារ៉ាបូលដែលមានកំពូលត្រង់ចំណុច $(h,\ k)$ គឺ

1. បើអ័ក្សឆ្លុះជាអ័ក្សដេក នោះប៉ារ៉ាបូលមានសមីការស្តង់ដា $(y-k)^2 = 4p(x-h)$ ហើយមានកំណុំ $(h+p,\ k)$ និងបន្ទាត់ប្រាប់ទិសមានសមីការ $x = h-p$ ។

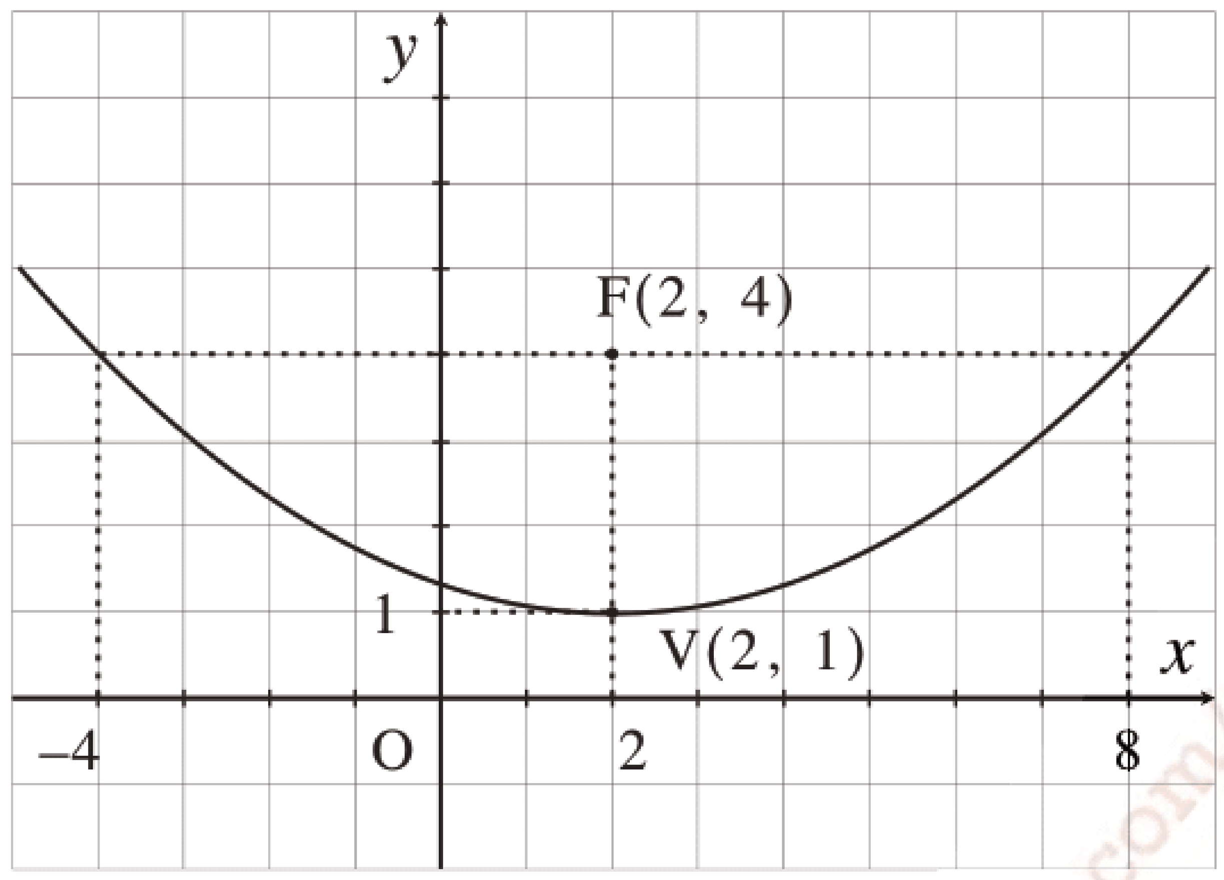
- ប៉ារ៉ាបូលបែរភាពផតទៅរកទិស $x > 0$ បើ $p > 0$
- ប៉ារ៉ាបូលបែរភាពផតទៅរកទិស $x < 0$ បើ $p < 0$ ។

2. បើអ័ក្សឆ្លុះជាអ័ក្សឈរនោះប៉ារ៉ាបូលមានសមីការស្តង់ដា $(x-h)^2 = 4p(y-k)$ ហើយមានកំណុំ $(h,\ k+p)$ និងបន្ទាត់ប្រាប់ទិសមានសមីការ $y = k-p$ ។

- ប៉ារ៉ាបូលបែរភាពផតទៅរកទិស $y > 0$ បើ $p > 0$
- ប៉ារ៉ាបូលបែរភាពផតទៅរកទិស $y < 0$ បើ $p < 0$ ។

លំហាត់គំរូ1 **:** រកសមីការស្តង់ដានៃប៉ារ៉ាបូលដែលមានកំពូលត្រង់ចំណុច $(2,\ 1)$ និងកំណុំត្រង់ចំណុច $(2,\ 4)$ រួចសង់ប៉ារ៉ាបូលនោះ ។

ចម្លើយ : ដោយអ័ក្សឆ្លុះនៃប៉ារ៉ាបូលជាអ័ក្សឈរ (កំពូល និងកំណុំមានអាប់ស៊ីសដូចគ្នា) ។ គេប្រើសមីការ $(x-h)^2 = 4p(y-k)$



កូអរដោនេកំពូល : $h = 2$, $k = 1$

កូអរដោនេកំណុំ $k+p = 4$, $p = 4-k = 4-1 = 3$

ដូចនេះ សមីការស្តង់ដានៃប៉ារ៉ាបូលគឺ

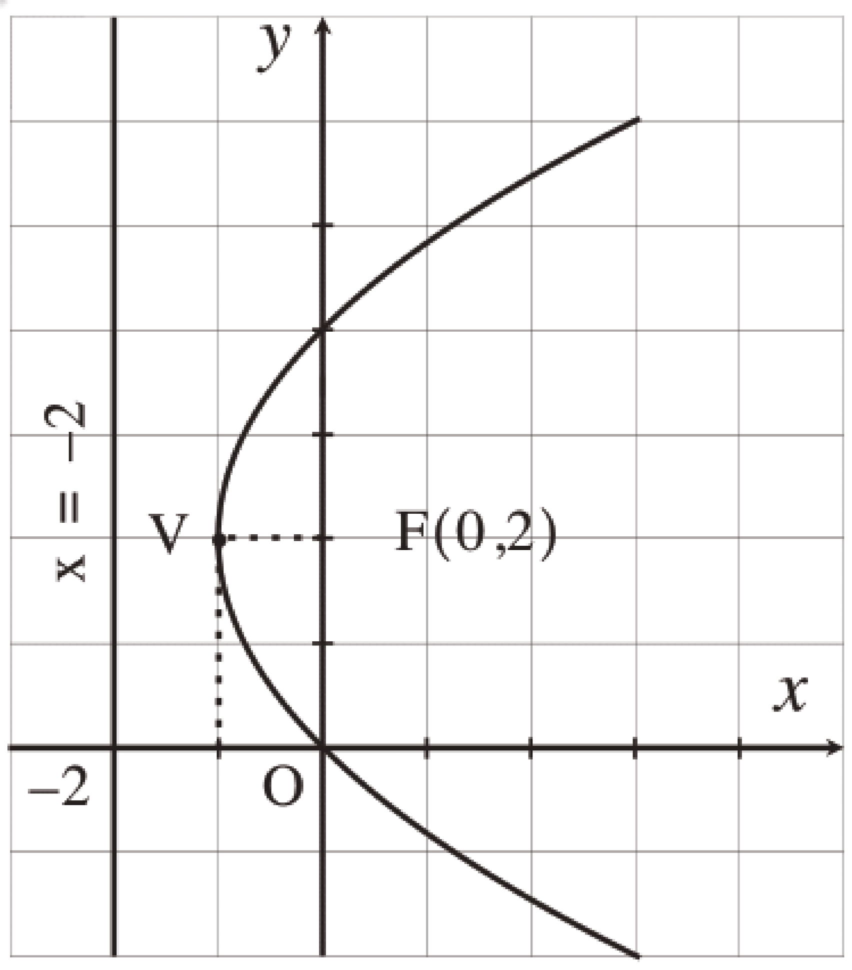
$(x-2)^2 = 12(y-1)$

សំណង់ប៉ារ៉ាបូល :

x	-4	8
y	4	4

លំហាត់គំរូ2 : រកកូអរដោនេកំពូល កំណុំ និងសមីការបន្ទាត់ប្រាប់ទិសនៃប៉ារ៉ាបូល $(y-2)^2 = 4(x+1)$ រួចហើយសង់ប៉ារ៉ាបូលនោះ ។

ចម្លើយ : គេមានសមីការ $(y-2)^2 = 4(x+1)$ សមីការនេះមានរាង $(y-k)^2 = 4p(x-h)$ ដែល $h = -1$, $k = 2$ និង $p = 1$ ។ ប៉ារ៉ាបូលមានបន្ទាត់ប្រាប់ទិសស្រប នឹងអ័ក្សអរដោនេ ។ ដូចនេះ គេទាញបានថា



កូអរដោនេកំពូល (h, k) គឺ : $(-1, 2)$

កូអរដោនេកំណុំ $(h+p, k)$ គឺ : $(0, 2)$

សមីការបន្ទាត់ប្រាប់ទិស $x = h-p$ គឺ $x = -2$ ។

ប្រតិបត្តិ 1 : រកកូអរដោនេនៃកំពូល កំណុំ និងសមីការនៃបន្ទាត់ប្រាប់ទិសនៃប៉ារ៉ាបូល $(y+3)^2 = -8(x-4)$ រួចសង់ប៉ារ៉ាបូលនោះ ។

សំណង់ប៉ារ៉ាបូល

x	0	0
y	0	4

ប្រតិបត្តិ 2 : រកសមីការស្តង់ដានៃប៉ារ៉ាបូលដែលអ័ក្សឆ្លុះរបស់វាស្របនិងអ័ក្សអរដោនេ ហើយក្រាបកាត់តាមចំណុច $(0, 3)$, $(3, 4)$ និង $(4, 11)$ ។

3.3. សមីការទូទៅនៃប៉ារ៉ាបូល

- ករណីអ័ក្សឆ្លុះ ជាអ័ក្សឈរប៉ារ៉ាបូលមានសមីការស្តង់ដា $(x-h)^2 = 4p(y-k)$

  សមីការសរសេរជា $x^2 - 2hx - 4py + h^2 + 4kp = 0$

- ករណីអ័ក្សឆ្លុះ ជាអ័ក្សដេកប៉ារ៉ាបូលមានសមីការស្តង់ដា $(y-k)^2 = 4p(x-h)$

  សមីការសរសេរជា $y^2 - 4px - 2ky + k^2 + 4hp = 0$

  សមីការដែលបានពន្លាតហើយមានរាង :

  ករណីអ័ក្សឆ្លុះជាអ័ក្សឈរ : $Ax^2 + Cx + Dy + E = 0$, $(A \neq 0)$

  ករណីអ័ក្សឆ្លុះជាអ័ក្សដេក : $By^2 + Cx + Dy + E = 0$, $(B \neq 0)$

***ជាទូទៅ* :** សមីការទូទៅរបស់ប៉ារ៉ាបូលមានរាង :

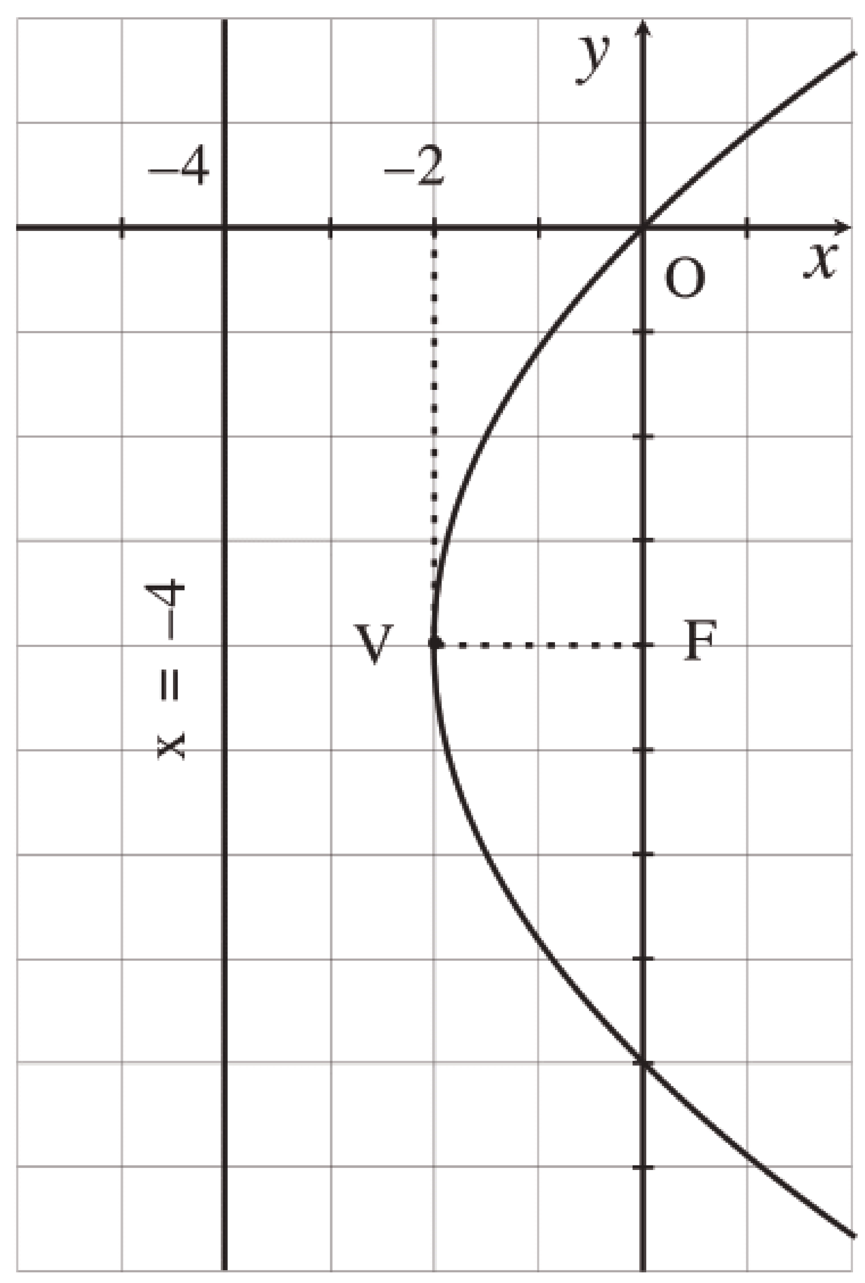
- $Ax^2 + Cx + Dy + E = 0$, $(A \neq 0)$ អ័ក្សឆ្លុះជាអ័ក្សឈរ
- $By^2 + Cx + Dy + E = 0$, $(B \neq 0)$ អ័ក្សឆ្លុះជាអ័ក្សដេក ។

***លំហាត់គំរូ* :**

ក. បំប្លែងសមីការនៃប៉ារ៉ាបូល $y^2 + 8y - 8x = 0$ ជាទម្រង់ស្តង់ដា ។

ខ. រកកូអរដោនេនៃកំពូល កំណុំ និងសមីការបន្ទាត់ប្រាប់ទិស រួចសង់ប៉ារ៉ាបូលនោះ ។

***ចម្លើយ* :**



ក. គេមាន $y^2 + 8y - 8x = 0$

$$y^2 + 8y = 8x$$

$$y^2 + 8y + 16 = 8x + 16$$

$$y^2 + 8y + 16 = 8x + 16$$

$$(y+4)^2 = 8(x+2)$$

នេះជាសមីការស្តង់ដានៃប៉ារ៉ាបូល ។

ខ. ដោយប្រៀបធៀបសមីការ $(y+4)^2 = 8(x+2)$ ជាមួយ

សមីការ $(y-k)^2 = 4p(x-h)$ គេទាញបាន $h = -2$, $k = -4$ និង $4p = 8$ នោះ $p = 2$ ។

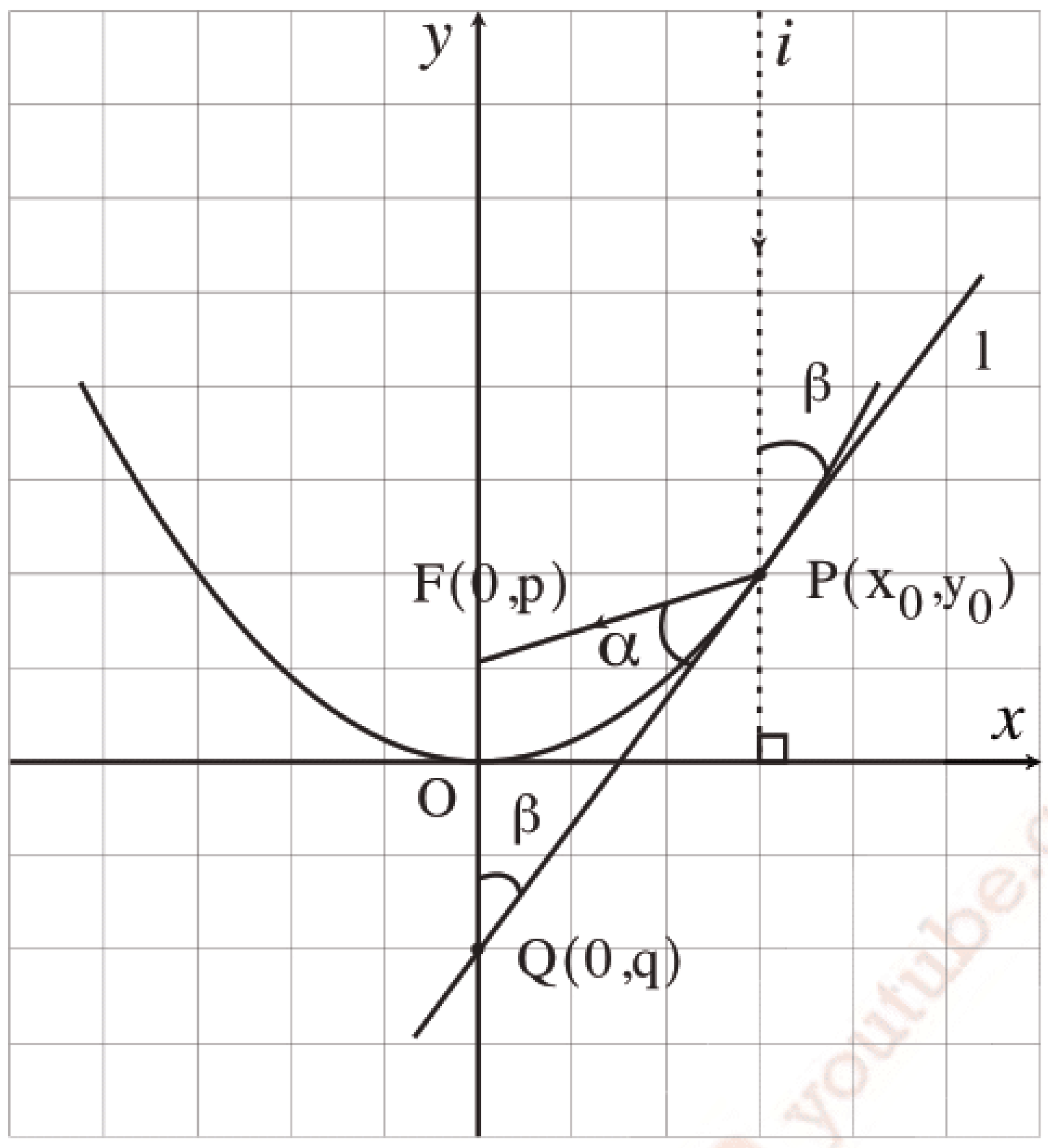
ដូចនេះ កូអរដោនេកំពូល $V(h, k)$ គឺ $V(-2, -4)$

កូអរដោនេកំណុំ $F(h+p, k)$ គឺ $F(0, -4)$

សមីការបន្ទាត់ប្រាប់ទិស $x = h - p = -2 - 2 = -4$ ។

***ប្រតិបត្តិ* :** រកកូអរដោនេកំពូល កំណុំ និងសមីការបន្ទាត់ប្រាប់ទិសនៃប៉ារ៉ាបូល $y = -\frac{1}{2}x^2 - x + \frac{1}{2}$ រួចសង់ប៉ារ៉ាបូលនោះ ។

4. លក្ខណៈអុបទិចនៃប៉ារ៉ាបូល



កញ្ចក់រាងប៉ារ៉ាបូលមានលក្ខណៈចំណាំងផ្លាតដូចកញ្ចក់ប្លង់ដែរ ។

គូសបន្ទាត់ ℓ ប៉ះប៉ារ៉ាបូលត្រង់ $P(x_0,\ y_0)$ ។

ប៉ារ៉ាបូលមានសមីការ $x^2 = 4py$ និងមានកំណុំ $F(0,\ \ p)$ ។

តាង α ជាមុំផ្គុំរវាងបន្ទាត់ ℓ នឹងអង្កត់ FP ហើយ β ជាមុំផ្គុំរវាងបន្ទាត់ ℓ នឹងបន្ទាត់ឈរដែលកាត់តាម P ស្របនឹងអ័ក្សឆ្លុះ ។

បន្ទាត់ប៉ះត្រង់ចំណុច P មានមេគុណប្រាប់ទិស $y' = \dfrac{2x_0}{4p} = \dfrac{x_0}{2p}$

សមីការបន្ទាត់ប៉ះគឺ $y - y_0 = \dfrac{x_0}{2p}(x - x_0)$

បន្ទាត់ប៉ះនេះកាត់អ័ក្សអរដោនេត្រង់ចំណុច $Q(0,\ q)$ គេបាន :

$$q = y_0 - \frac{x_0^2}{2p} = \frac{x_0^2}{4p} - \frac{x_0^2}{2p} = -\frac{x_0^2}{4p}$$

ប្រវែងអង្កត់ FQ គឺ $p - q = p + \dfrac{x_0^2}{4p}$

តាមរូបមន្ត ចម្ងាយរវាងពីរចំណុចគេបានប្រវែង FP គឺ

$$\sqrt{x_0^2 + (y_0 - p)^2} = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{x_o^2}{4p} - p\right)^2}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{x_0^2}{4p}\right)^2 + 2\frac{x_0^2}{4p}\cdot p + p^2} = \sqrt{\left(\frac{x_0^2}{4p} + p\right)^2} = \frac{x_0^2}{4p} + p$$

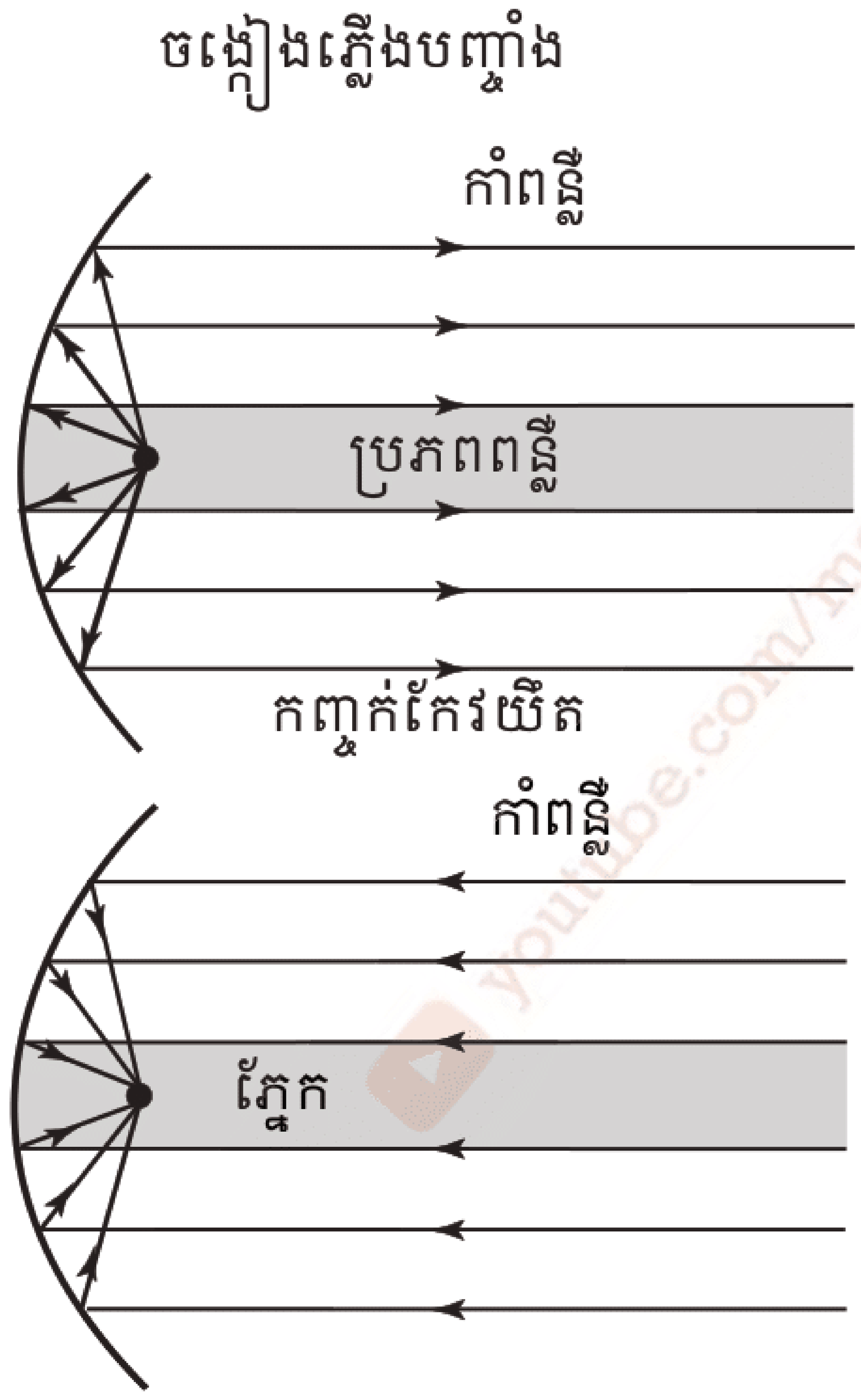
ដូចនេះ ត្រីកោណ FQP ជាត្រីកោណសមបាតគេទាញបាន $\alpha = \beta$ ។

មានន័យថា កាំពន្លឺ i ដែលស្របនឹងអ័ក្សឆ្លុះនៃប៉ារ៉ាបូលមកប៉ះប៉ារ៉ាបូលត្រង់ P ហើយចាំងផ្លាតទៅតាម PF ។

ជាទូទៅ : បន្ទាត់ស្របនឹងអ័ក្សឆ្លុះនៃប៉ារ៉ាបូលដែលកាត់ប៉ារ៉ាបូលត្រង់ P និងបន្ទាត់ PF ផ្គុំជាមួយបន្ទាត់ប៉ះប៉ារ៉ាបូលត្រង់ P បានមុំស្មើគ្នា ។

ដូចនេះគ្រប់កាំពន្លឺស្របនឹងអ័ក្សឆ្លុះនៃប៉ារ៉ាបូលដែលមកប៉ះប៉ារ៉ាបូលចាំងផ្លាតទៅចំណុចតែមួយគឺកំណុំ F នៃប៉ារ៉ាបូល ។

លក្ខណៈអុបទិចនេះមានការអនុវត្តជាច្រើន ។



ឧទាហរណ៍ : រាងបន្ទះផ្លាតពន្លឺនៃចង្កៀងបញ្ចាំងមើលផ្លូវគឺបានមកពីរង្វិលប៉ារ៉ាបូលជុំវិញអ័ក្សឆ្លុះ ។ បើប្រភពពន្លឺដាក់នៅត្រង់កំណុំ F នោះកាំពន្លឺចាំងប៉ះនិងចាំងផ្លាតមកវិញតាមបន្ទាត់ស្របនឹងអ័ក្សឆ្លុះ គេបានបាច់ពន្លឺស្របមួយ ។

តាមច្បាប់រូបវិទ្យាមុំចំណាំងផ្លាតស្មើនឹងមុំចំណាំងប៉ះ ។

ដូចគ្នានេះដែរ គោលការណ៍នេះត្រូវបានគេយកទៅអនុវត្តក្នុងការសង់កញ្ចក់កែវយឺត ។ កាំពន្លឺចាំងប៉ះដែលស្របនិងអ័ក្សឆ្លុះទៅប៉ះកញ្ចក់ប៉ារ៉ាបូល ចាំងផ្លាតមកវិញទៅកាត់គ្នាត្រង់កំណុំ ។

មេរៀនសង្ខេប

- សមីការស្តង់ដានៃប៉ារ៉ាបូលដែលមានកំពូលជាគល់អ័ក្សកូអរដោនេ

កំពូល	កំណុំ	បន្ទាត់ប្រាប់ទិស	សមីការស្តង់ដា	ពណ៌នា
$(0,\ 0)$	$(p,\ 0)$	$x = -p$	$y^2 = 4px$	• អ័ក្សឆ្លុះជាអ័ក្សអាប់ស៊ីស • $P>0$ ប៉ារ៉ាបូលបែរភាពផតទៅរកទិស $x>0$ • $P<0$ ប៉ារ៉ាបូលបែរភាពផតទៅរកទិស $x<0$
$(0,\ 0)$	$(0,\ p)$	$y = -p$	$x^2 = 4py$	• អ័ក្សឆ្លុះជាអ័ក្សអរដោនេ • $P>0$ ប៉ារ៉ាបូលបែរភាពផតទៅរកទិស $y>0$ • $P<0$ ប៉ារ៉ាបូលបែរភាពផតទៅរកទិស $y<0$

- សមីការស្តង់ដានៃប៉ារ៉ាបូលដែលមានកំពូលខុសពីគល់អ័ក្សកូអរដោនេ

កំពូល	កំណុំ	បន្ទាត់ប្រាប់ទិស	សមីការស្តង់ដា	ពណ៌នា
$(h,\ k)$	$(h+p, k)$	$x = h-p$	$(y-k)^2 =$ $4p(x-h)$	• អ័ក្សឆ្លុះជាអ័ក្សដេក • $P>0$ ប៉ារ៉ាបូលបែរភាពផតទៅរកទិស $x>0$ • $P<0$ ប៉ារ៉ាបូលបែរភាពផតទៅរកទិស $x<0$
$(h,\ k)$	$(h,\ k+p)$	$y = k-p$	$(x-h)^2 =$ $4p(y-k)$	• អ័ក្សឆ្លុះជាអ័ក្សឈរ • $P>0$ ប៉ារ៉ាបូលបែរភាពផតទៅរកទិស $y>0$ • $P<0$ ប៉ារ៉ាបូលបែរភាពផតទៅរកទិស $y<0$

លំហាត់

1. រកកូអរដោនេកំពូល កំណុំ និងសមីការបន្ទាត់ប្រាប់ទិសនៃប៉ារ៉ាបូលខាងក្រោម រួចសង់ក្រាប ៖

ក. $y^2 = 4x$　　ខ. $y^2 = 12x$　　គ. $x^2 = 8y$

ឃ. $x^2 = -2y$　　ង. $(y+2)^2 = 4(x-1)$　　ច. $(y-1)^2 = -(x+3)$

ឆ. $(x-3)^2 = 2(y+2)$　　ជ. $(x-1)^2 + 8(y+2) = 0$　　ឈ. $(x+3)+(y-2)^2 = 0$

ញ. $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 = 4(y-3)$ ។

2. បំប្លែងសមីការទូទៅនីមួយៗខាងក្រោមទៅជាសមីការស្តង់ដា

ក. $x^2 - 2x - 3y - 8 = 0$　　ខ. $4x - y^2 - 2y - 33 = 0$

គ. $y^2 - 4y - 4x = 0$　　ឃ. $x^2 + 4x + 4y - 4 = 0$

ង. $9y^2 - 36y - 2x + 24 = 0$　　ច. $y^2 - 4x + 4y + 24 = 0$ ។

3. រកកូអរដោនេនៃកំពូល កំណុំ និងសមីការបន្ទាត់ប្រាប់ទិសនៃប៉ារ៉ាបូលតាងសមីការនីមួយៗខាងក្រោម រួចសង់ក្រាប ៖

ក. $y = \frac{1}{4}(x^2 - 2x + 5)$　　ខ. $y^2 + 6y + 8x + 25 = 0$

គ. $x^2 + 4x + 4y - 4 = 0$　　ឃ. $y^2 + 4y + 8x - 12 = 0$

ង. $2x^2 + 4x - 9y + 20 = 0$　　ច. $4y^2 + 8y - 3x + 10 = 0$ ។

4. រកសមីការនៃប៉ារ៉ាបូលដែលកំណត់ដោយលក្ខខណ្ឌដូចខាងក្រោម ៖

ក. កំពូល $V(0,\ 0)$ និងកំណុំ $F(2,\ 0)$

ខ. កំពូល $V(3,\ 2)$ និងកំណុំ $F(1,\ 2)$

គ. កំពូល $V(0,\ -4)$ និងសមីការបន្ទាត់ប្រាប់ទិស $y-2 = 0$

ឃ. កំពូល $V(-2,\ 1)$ និងសមីការបន្ទាត់ប្រាប់ទិស $x-1 = 0$

ង. កំណុំ $F(2,\ 1)$ និងសមីការបន្ទាត់ប្រាប់ទិស $x = -2$

ច. អ័ក្សឆ្លុះនៃប៉ារ៉ាបូលស្របនិងអ័ក្សអាប់ស៊ីស ហើយក្រាបកាត់តាមចំណុច $(4,\ 2)$, $(0,\ 0)$ និងចំណុច $(3,\ -3)$ ។

5. រកសមីការនៃបន្ទាត់ប៉ះទៅនឹងក្រាបនៃប៉ារ៉ាបូល $y^2 = 2x$ ដែលកាត់តាមចំណុច $(-4, 1)$ ។

6. រកសមីការនៃប៉ារ៉ាបូលដែលអ័ក្សឆ្លុះស្របនិងអ័ក្សអរដោនេ ហើយមានកំពូល $V(0, 2)$ ដែលកាត់តាមចំណុច $P(4, 8)$ ។

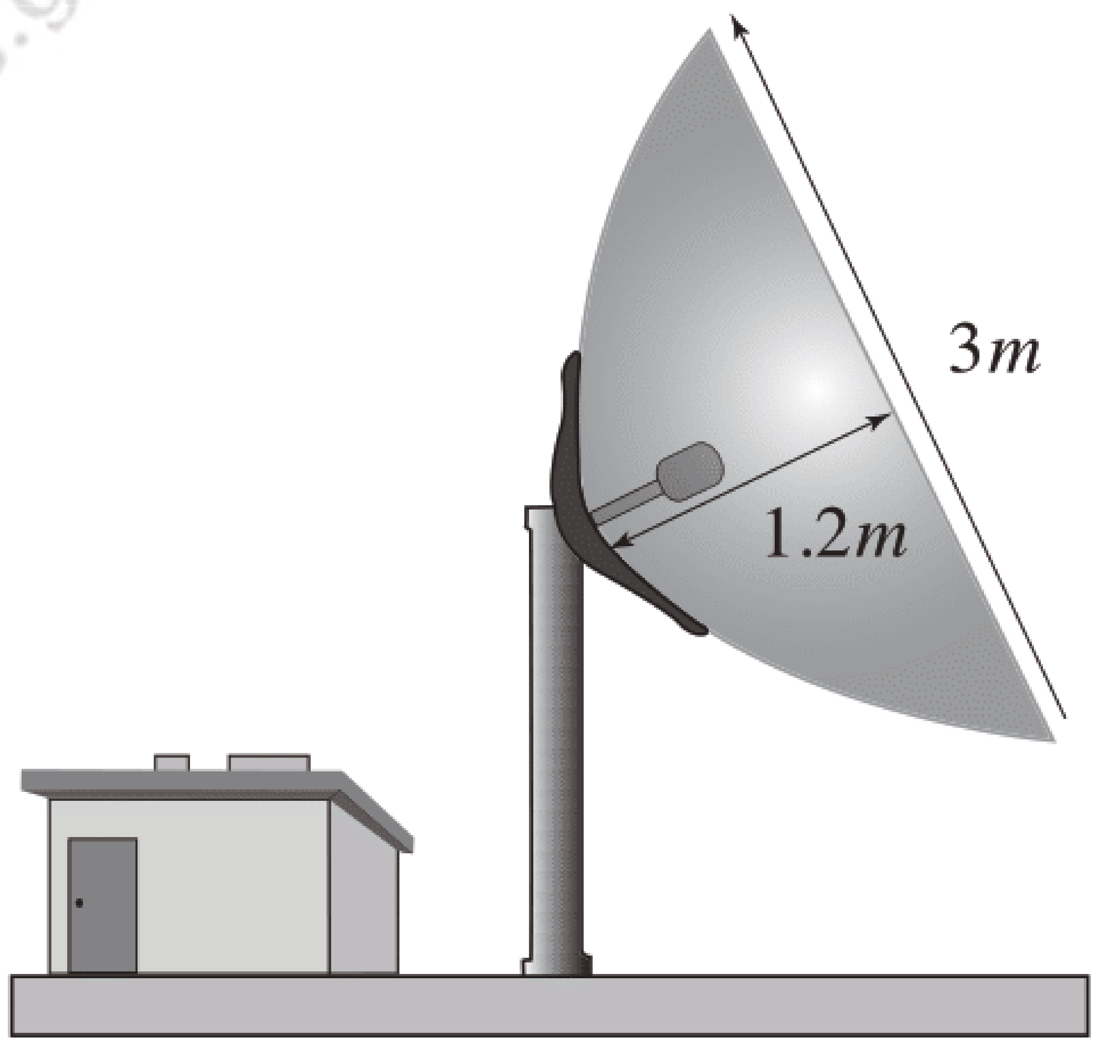
7. ចំណុច P មួយចល័តដែលមានចម្ងាយស្មើពីចំណុច $F(-1, 2)$ និងបន្ទាត់មួយមានសមីការ $y - 6 = 0$ ។ រកសមីការនៃសំណុំចំណុចនៃចំណុច P ។

8. រកសមីការនៃប៉ារ៉ាបូលដែលដែលមានអ័ក្សឆ្លុះជាអ័ក្សឈរ ហើយក្រាបវាកាត់តាមចំណុច $A(2, 5)$, $B(-2, -3)$ និង $C(1, 6)$ ។

9. រកសមីការនៃប៉ារ៉ាបូលដែលមានអ័ក្សឆ្លុះជាអ័ក្សដេក ហើយក្រាបវាកាត់តាមចំណុច $A(-1, 1)$, $B(11, -2)$ និង $C(5, -1)$ ។

10. តាង m និង b ជាចំនួនពិតពីរខុសពីសូន្យ ។ បើបន្ទាត់ $y = mx + b$ កាត់ប៉ារ៉ាបូល $y^2 = 4px$ ត្រង់ចំណុចមួយ ។ បង្ហាញថា $p = mb$ ។ បង្ហាញថាបន្ទាត់ប៉ះទៅនឹងប៉ារ៉ាបូល $y^2 = 4px$ ត្រង់ចំណុច $P(x_1, y_1)$ មានមេគុណប្រាប់ទិសស្មើនិង $\frac{y_1}{2x_1}$ ។

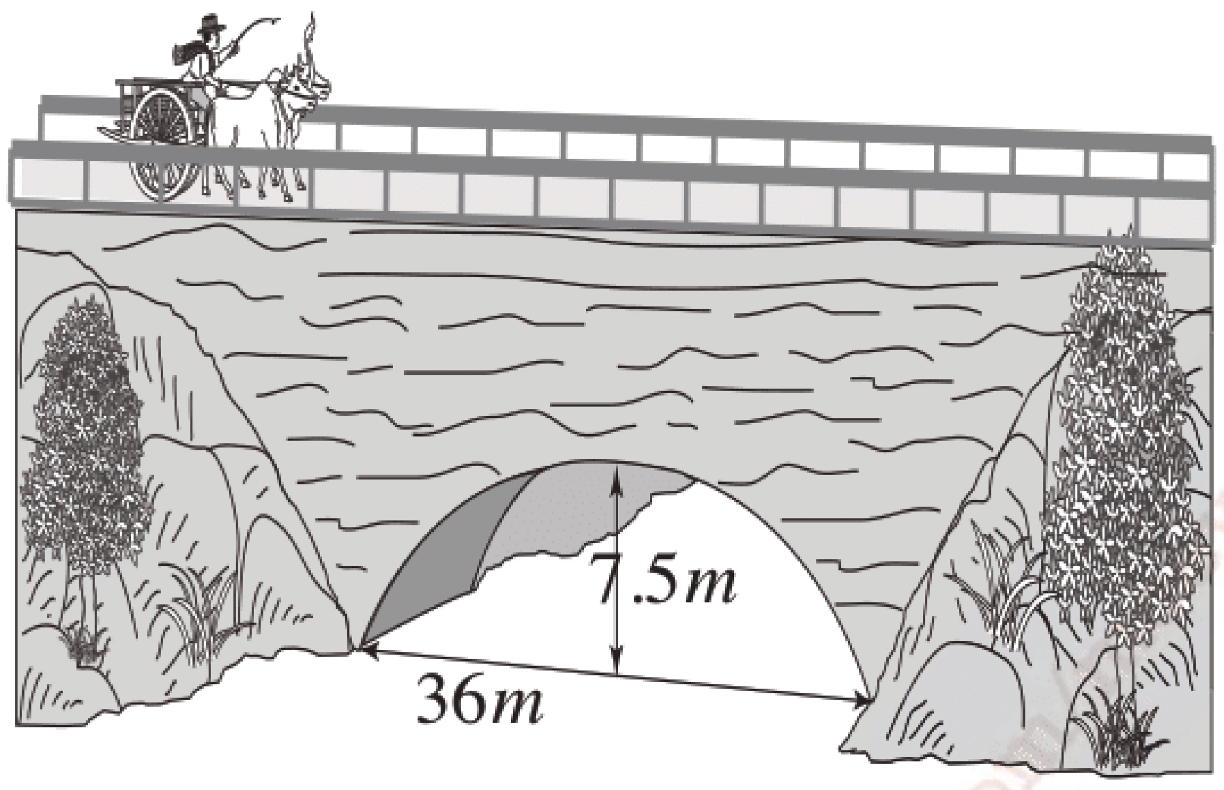
11. ថាសផ្កាយរណបមួយមានរាងជាផ្ទៃដែលបានពីរង្វិលនៃប៉ារ៉ាបូលជុំវិញអ័ក្សរបស់វា ។ ការផ្សាយចេញពីផ្កាយរណបបានមកប៉ះផ្ទៃនៃថាស ហើយត្រូវបានចាំងផ្លាតទៅប្រសព្វគ្នានៅត្រង់ចំណុចមួយដែលបានដាក់គ្រឿងទទួល (រូប ក) ។ បើមាត់ថាសមានអង្កត់ផ្ចិត $3m$ និងមានជម្រៅពីផ្ចិតទៅកំពូល $1.2m$ ។ តើគ្រឿងទទួលត្រូវដាក់នៅត្រង់ទីតាំងណា ?



(រូប ក.)

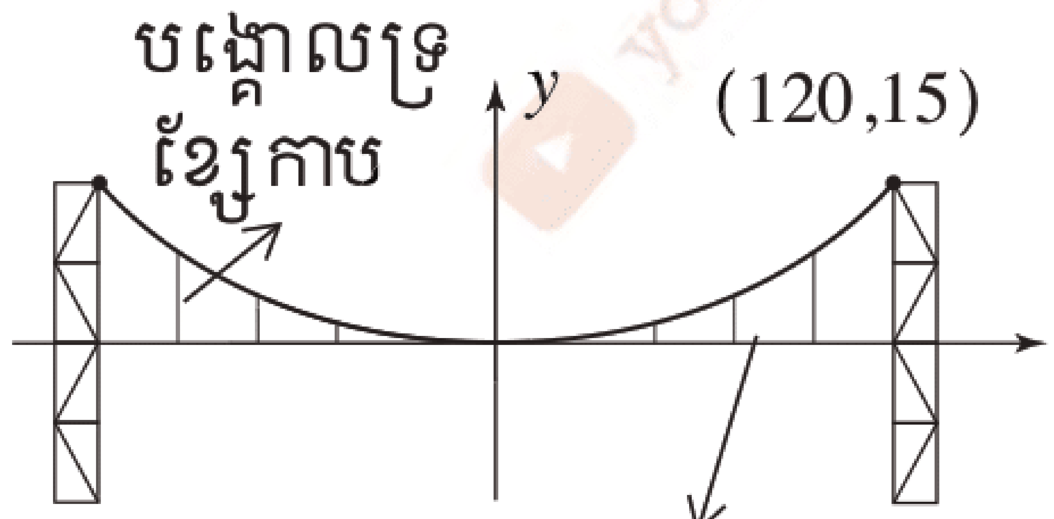
12. ចង្កៀងភ្លើងបញ្ចាំងមើលផ្លូវមួយមានបន្ទះផ្លាតពន្លឺជាផ្ទៃដែលបានមកពីរង្វិលនៃប៉ារ៉ាបូលជុំវិញអ័ក្សរបស់វា ។ បើប្រភពពន្លឺស្ថិតលើអ័ក្សឆ្លុះចម្ងាយ$0.6m$ ពីបាត និងនៅមុខកាត់មាត់ចង្កៀងមានអង្កត់ផ្ចិត $1.5m$ ។ តើចង្កៀងនេះមានជម្រៅប៉ុន្មានម៉ែត?

13. ផ្នែកខាងក្រោមនៃស្ពានមួយមានរាងជាប៉ារ៉ាបូល ។ ចម្ងាយរវាងចុងនៃមែកប៉ារ៉ាបូលស្មើនឹង $36m$ និង ផ្នែកខាងក្រោមនៃស្ពានដែលមានរាងប៉ារ៉ាបូលមាន កម្ពស់អតិបរមា $7.5m$ (រូប ខ) ។ រកកម្ពស់ នៃចំណុច នៅលើប៉ារ៉ាបូលដែលមានចម្ងាយ $3m$, $9m$ និង $15m$ ពីផ្ចិត ។



(រូប ខ.)

14. ខ្សែកាបនៃស្ពានព្យួរមួយមានរាងជាប៉ារ៉ាបូល ត្រូវបានចងព្យួរនៅចន្លោះប៉មពីរមានចម្ងាយ $120m$ ពីគ្នា និងមានកម្ពស់ $15m$ ពីផ្លូវថ្នល់ (រូប គ) ។ ខ្សែកាបនេះបានប៉ះផ្ទៃផ្លូវត្រង់ ចំណុចកណ្ដាលរវាងប៉មទាំងពីរ ។ រកសមីការប៉ារ៉ាបូលនៃខ្សែកាបនីមួយៗ ។



(រូប គ.)

មេរៀនទី

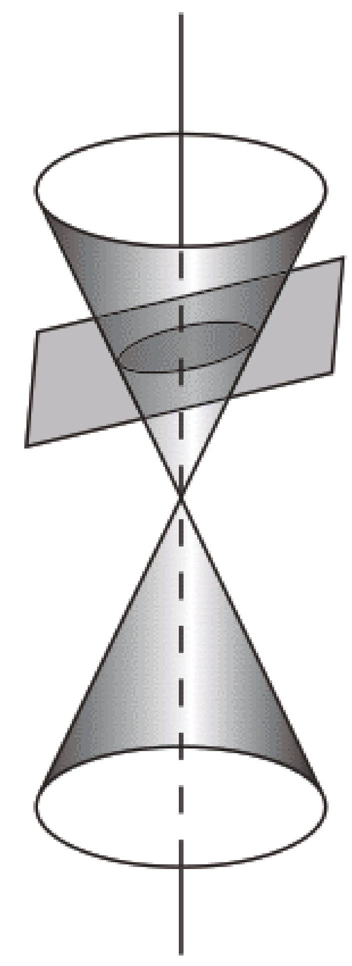
2 អេលីប

វត្ថុបំណង

- ❑ កំណត់និយមន័យនៃអេលីប
- ❑ កំណត់សមីការស្តង់ដានៃអេលីប
- ❑ បំប្លែងសមីការទូទៅនៃអេលីបជាសមីការស្តង់ដា
- ❑ កំណត់អ៊ិចសង់ទ្រីស៊ីតេនៃអេលីប
- ❑ បកស្រាយលក្ខណៈចាំងផ្លាតនៃអេលីប ។

1. សេចក្តីផ្តើម

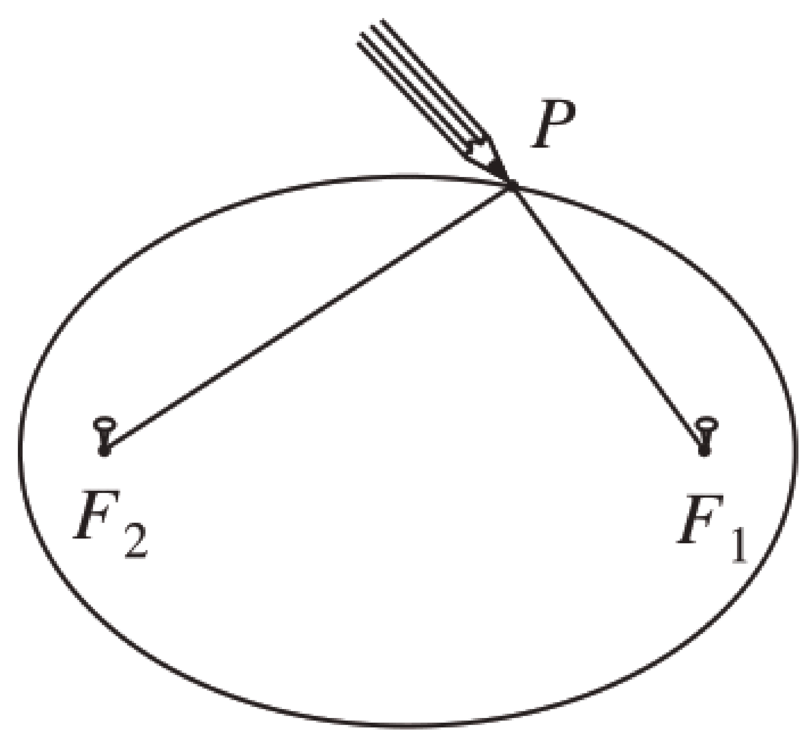
ប្លង់មួយកាត់កោនបរិវត្តន៍ដែលមានបាតជារង្វង់ ហើយមិន កែង និងអ័ក្សកោន នោះផ្នែកប្រសព្វដែលបានជារូបធរណីមាត្រ មួយដែលហៅថា ***អេលីប*** ។ ដូចនេះ ***អេលីបជាកោនិក***មួយ ។



2. និយមន័យនៃអេលីប

ឧទាហរណ៍ : គេអាចសង់អេលីបនៅលើក្រដាសដូចខាងក្រោម :

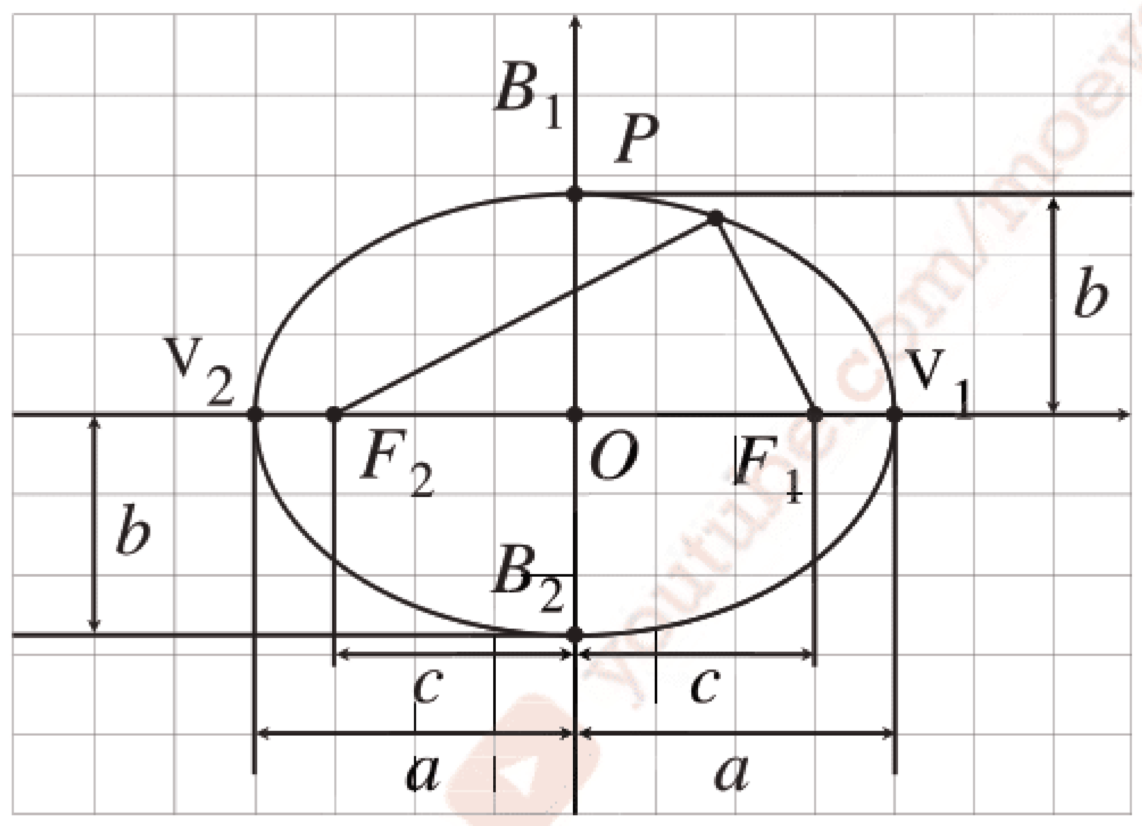
ដំបូងគេដោតម្ជុលពីរនៅលើក្រដាសនៅត្រង់ចំណុចពីរផ្សេង គ្នា F_1 និង F_2 ហើយចងភ្ជាប់ចុងខ្សែទាំងសងខាងទៅនឹងម្ជុលទាំងពីរនោះ ។ បន្ទាប់មកទាញខ្សែនោះឱ្យតឹង ដោយខ្មៅដៃនៅត្រង់ចំណុច P (ដូចរូប) ។ គេរំកិលចុងខ្មៅដៃលើក្រដាសរក្សាខ្សែឱ្យតឹងជានិច្ច ។



ផលបូកចម្ងាយ F_1P និង F_2P ស្មើនឹងប្រវែងខ្សែ ។

ដូចនេះ ផលបូកនេះជាចំនួនថេរ ។ គន្លងដែលបានគូសដោយខ្មៅដៃនេះជាអេលីប ។ បើចំណុច F_1 និង F_2 ត្រួតស៊ីគ្នានោះអេលីបនេះក្លាយជារង្វង់ ។

និយមន័យ : អេលីបជាសំណុំចំណុចនៅក្នុងប្លង់ដែលមានផលបូកចម្ងាយពីចំណុចនោះទៅចំណុចនឹងពីរជាចំនួនថេរ ។



- ចំណុចនឹងពីរ F_1 និង F_2 ហៅថា កំណុំ
  តាង V_1 និង V_2 ជាចំណុចប្រសព្វរវាងបន្ទាត់ F_1F_2 និងអេលីប ។
  តាង B_1 និង B_2 ជាចំណុចប្រសព្វរវាងមេដ្យាទ័រនៃអង្កត់ F_1F_2 និងអេលីប ។
- V_1 និង V_2 ហៅថាកំពូលនៃអេលីប
- អង្កត់ V_1V_2 ហៅថាអ័ក្សធំនៃអេលីបហើយគេតាង $V_1V_2 = 2a$ ដែល $a > 0$ ។
  អ័ក្សធំ V_1V_2 កាត់តាមកំណុំទាំងពីរនៃអេលីប ។
- អង្កត់ B_1B_2 ហៅថាអ័ក្សតូចនៃអេលីប ហើយគេតាង $B_1B_2 = 2b$ ដែល $a > b > 0$ ។
- V_1V_2 និង B_1B_2 ប្រសព្វគ្នាត្រង់ចំណុច O ហៅថាផ្ចិតនៃអេលីប ។
- OV_1 ហៅថាកន្លះអ័ក្សធំ ហើយមានប្រវែង a ។
- OB_1 ហៅថាកន្លះអ័ក្សតូច ហើយមានប្រវែង b ។
- តាង c ជាចម្ងាយពីផ្ចិតទៅកំណុំ ។
- អ័ក្សធំ និងអ័ក្សតូចជាអ័ក្សឆ្លុះនៃអេលីប ។

តាមនិយមន័យគេបាន $PF_1 + PF_2$ ជាចំនួនថេរចំពោះគ្រប់ទីតាំងនៃ P ស្ថិតនៅលើអេលីប ។

ករណីពិសេស P អាចស្ថិតនៅត្រង់ V_1 ឬ B_1 ។

ឧបមាថា P ស្ថិតនៅត្រង់ V_1 គេបាន : $PF_1 + PF_2 = V_1F_1 + V_1F_2 = V_2F_2 + V_1F_2$

$$= V_1V_2 = 2a$$

ដូចនេះ ចំពោះគ្រប់ទីតាំងនៃ P ដែលស្ថិតនៅលើអេលីប គេបាន $PF_1 + PF_2 = 2a$ (ស្មើនឹងប្រវែងអ័ក្សធំ) ។

បើ P ស្ថិតនៅត្រង់ B_1 : $PF_1 + PF_2 = B_1F_1 + B_1F_2 = 2B_1F_1 = 2a$

ដូចនេះ $B_1F_1 = a$ នេះបញ្ជាក់ថាចម្ងាយពីចំណុចចុងនៃអ័ក្សតូចទៅកំណុំស្មើនឹងកន្លះអ័ក្សធំ ។

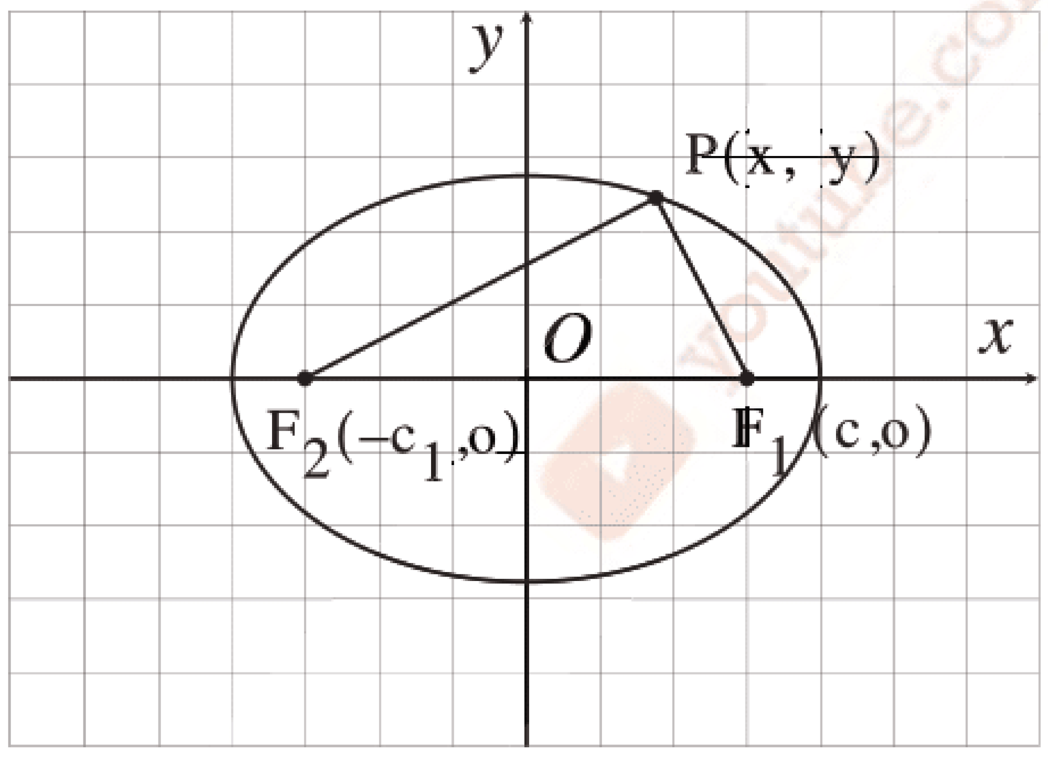
ដោយត្រីកោណ OB_1F_1 ជាត្រីកោណកែង តាមទ្រឹស្តីបទពីតាក័រ គេបាន :

$B_1F_1^2 = OB_1^2 + OF_1^2$ ឬ $a^2 = b^2 + c^2$ ។

3. សមីការនៃអេលីប

3.1. សមីការស្តង់ដានៃអេលីបដែលមានផ្ចិតជាគល់អ័ក្សកូអរដោនេ

នៅក្នុងតម្រុយមួយ គេមានអេលីបមួយដែលមានផ្ចិតនៅត្រង់គល់អ័ក្សកូអរដោនេ $(0,\ 0)$ និងកំណុំទាំងពីរស្ថិតនៅលើអ័ក្សអាប់ស៊ីស ។



តាងកូអរដោនៃកំណុំគឺ $F_1(c,o)$ និង $F_2(-c,o)$ ។

តាង $P(x,\ y)$ ជាចំណុចមួយស្ថិតនៅលើអេលីប ។

គេបាន $PF_1 + PF_2 = 2a$

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2} + \sqrt{(x+c)^2+y^2} = 2a$$

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2} = 2a - \sqrt{(x+c)^2+y^2}$$

$$x^2 - 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2+y^2} + x^2 + 2cx + c^2 + y^2$$

$$a\sqrt{(x+c)^2+y^2} = a^2 + cx$$

$$a^2(x^2+2cx+c^2+y^2) = a^4 + 2a^2cx + c^2x^2$$

$$x^2(a^2-c^2) + a^2y^2 = a^2(a^2-c^2)$$

ដោយ $a^2 = b^2 + c^2$ គេទាញបាន $b^2 = a^2 - c^2$

សមីការសរសេរជា $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ (1)

ចែកអង្គទាំងពីរនៃ (1) និង a^2b^2 គេបានសមីការ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

នេះជាសមីការស្តង់ដានៃអេលីបដែលមានផ្ចិតជាគល់អ័ក្សកូអរដោនេ និងកំណុំទាំងពីរស្ថិត នៅលើអ័ក្សអាប់ស៊ីស ។

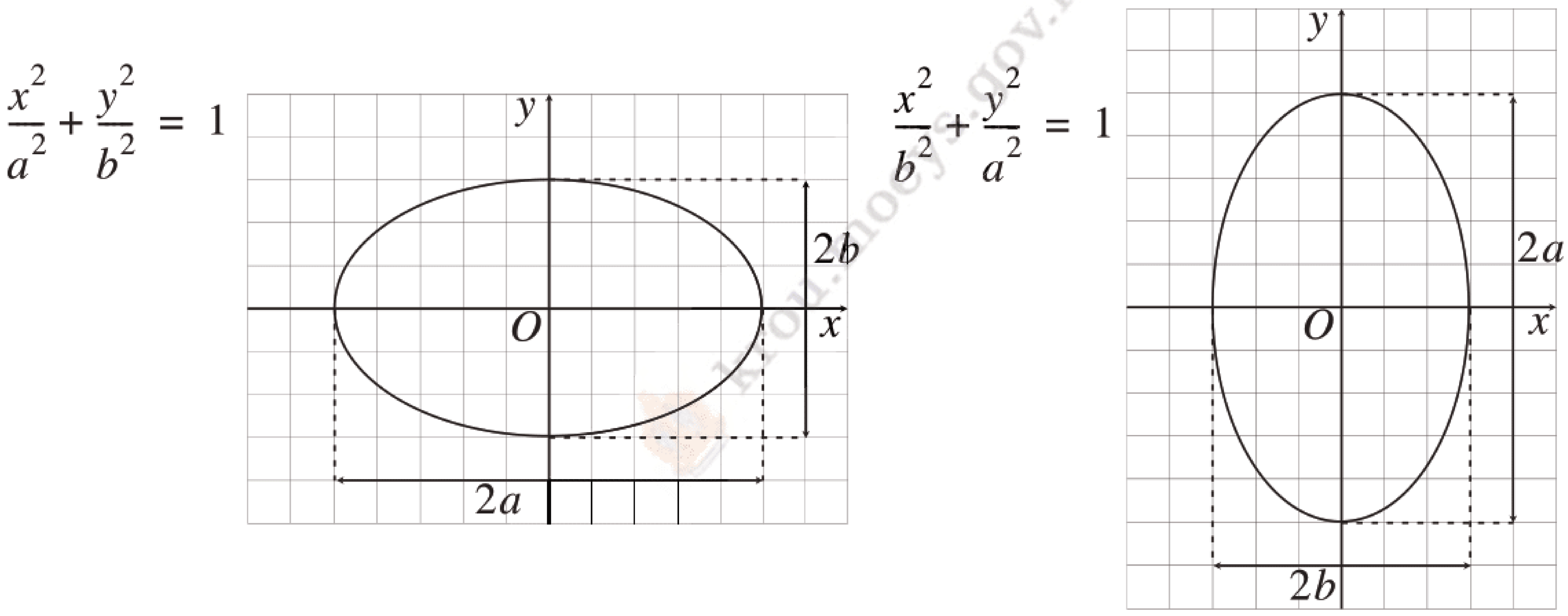
ដូចគ្នាដែរ សមីការស្តង់ដានៃអេលីបដែលមានផ្ចិតជាគល់អ័ក្សកូអរដោនេ និងកំណុំទាំងពីរស្ថិត នៅលើអ័ក្សអរដោនេគឺ : $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$ ។

ជាទូទៅ : អេលីបដែលមានផ្ចិតជាគល់អ័ក្សកូអរដោនេ និងមានអ័ក្សធំនៅលើអ័ក្សអាប់ស៊ីសមានសមីការស្តង់ដា $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad a>b>0$

- អ័ក្សធំមានប្រវែង $2a$ និងអ័ក្សតូចមានប្រវែង $2b$
- កំពូលទាំងពីរមានកូអរដោនេ $(a,\ 0)$ និង $(-a,\ 0)$
- កំណុំទាំងពីរមានកូអរដោនេ $(c,\ 0)$ និង $(-c,\ 0)$ ដែល $c^2=a^2-b^2$ ។

អេលីបដែលមានផ្ចិតជាគល់អ័ក្សកូអរដោនេ និងមានអ័ក្សធំនៅលើអ័ក្សអរដោនេមានសមីការស្តង់ដា $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1 \quad a>b>0$

- អ័ក្សធំមានប្រវែង $2a$ និងអ័ក្សតូចមានប្រវែង $2b$
- កំពូលទាំងពីរមានកូអរដោនេ $(0,\ a)$ និង $(0,\ -a)$
- កំណុំទាំងពីរមានកូអរដោនេ $(0,\ c)$ និង $(0,\ -c)$ ដែល $c^2=a^2-b^2$ ។



លំហាត់គំរូ1 : រកសមីការស្តង់ដានៃអេលីបដែលមានកំណុំមួយនៅត្រង់ចំណុច $(0,\ 2)$ និងកំពូលពីរនៅត្រង់ចំណុច $(0,\ -3)$ និង $(0,\ 3)$ រួចសង់អេលីបនោះ ។

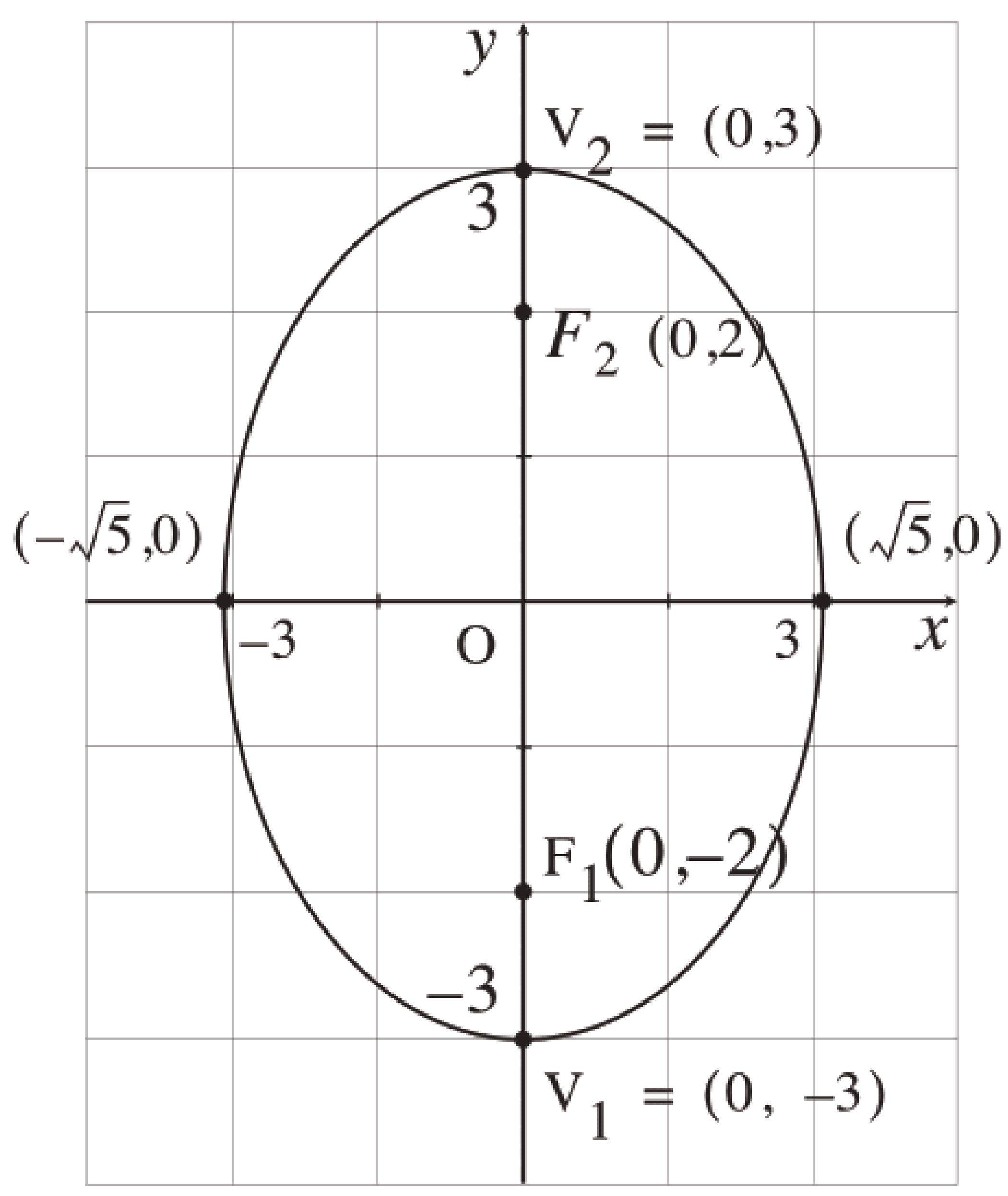
ចម្លើយ : ដោយកំពូលទាំងពីរនៅត្រង់ចំណុច $(0,\ -3)$ និង $(0,\ 3)$ នោះផ្ចិតនៃអេលីបនេះនៅត្រង់ចំណុច $(0,\ 0)$ ហើយអ័ក្សធំស្ថិតនៅលើអ័ក្សអរដោនេ ។

គេបាន $c=2$, $a=3$ **និង** $b^2=a^2-c^2$

$$=9-4=5$$

អេលីបនេះមានសមីការស្តង់ដា :

$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$ ឬ $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{9}=1$



លំហាត់គំរូ2 : គេឱ្យសមីការ $4x^2 + 25y^2 = 100$ ។

ក. បង្ហាញថាសមីការនេះជាសមីការនៃអេលីប ។ រកប្រវែងអ័ក្សធំ អ័ក្សតូច កូអរដោនេកំពូលទាំងពីរ និងកូអរដោនេកំណុំទាំងពីរនៃអេលីប ។

ខ. សង់អេលីបនោះ ។

ចម្លើយ :

ក. គេចែកអង្គទាំងពីរនៃសមីការនឹង 100 គេបាន : $\frac{4x^2}{100} + \frac{25y^2}{100} = 1$ ឬ $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{4} = 1$ ។ ដូចនេះ សមីការនេះជាសមីការនៃអេលីបមួយដែលមានផ្ចិត $(0, 0)$ និងអ័ក្សធំនៅលើអ័ក្សអាប់ស៊ីស ។

តាមសមីការនេះ គេទាញបាន $a = 5$ និង $b = 2$ ។

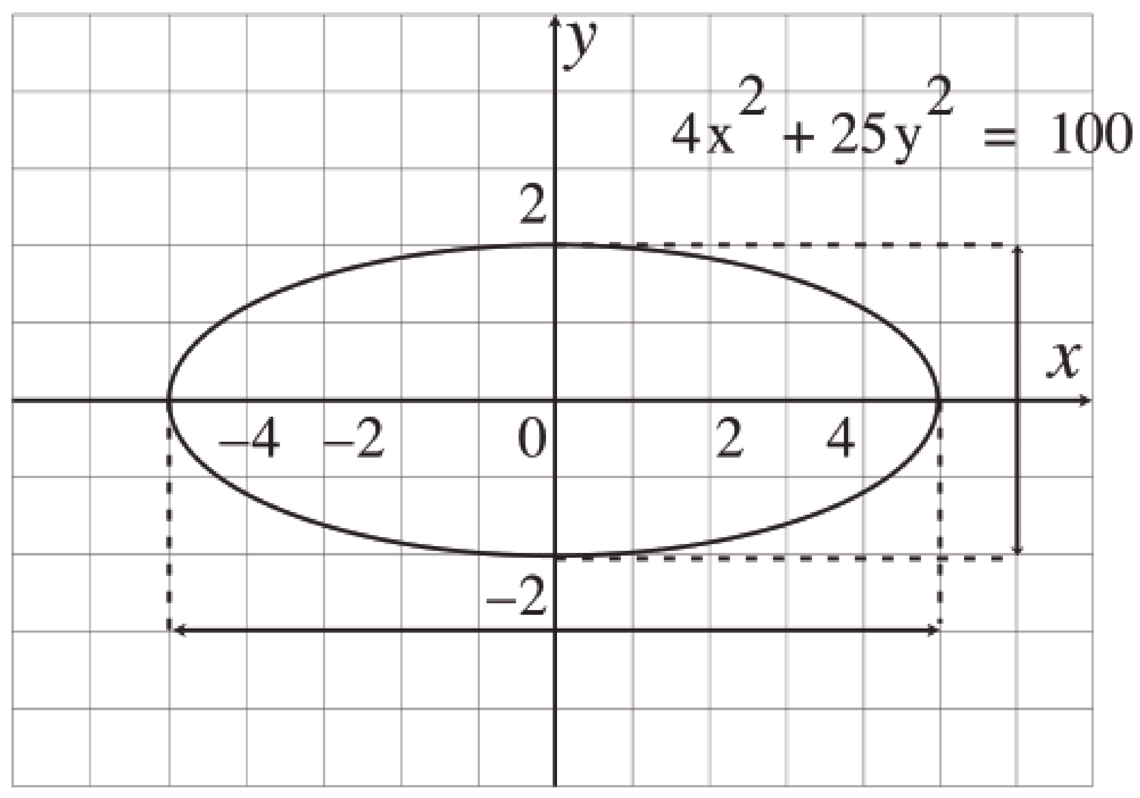
អ័ក្សធំមានប្រវែង $2a = 2 \times 5 = 10$ និងអ័ក្សតូចមានប្រវែង $2b = 2 \times 2 = 4$

កំពូលទាំងពីរមានកូអរដោនេ $(5, 0)$ និង $(-5, 0)$ ។

$c^2 = a^2 - b^2 = 25 - 4 = 21$ នោះ $c = \sqrt{21}$ ។

កំណុំទាំងពីរមានកូអរដោនេ $(\sqrt{21}, 0)$ និង $(-\sqrt{21}, 0)$ ។

ខ. សង់អេលីប



ប្រតិបត្តិ1 : រកសមីការស្តង់ដានៃអេលីបតាមករណីនីមួយៗខាងក្រោម :

ក. អ័ក្សធំមានប្រវែង 10 ឯកតា កំណុំទាំងពីរមានកូអរដោនេ $(4, 0)$ និង $(-4, 0)$ ។

ខ. អ័ក្សតូចមានប្រវែង 6 ឯកតា កំណុំទាំងពីរមានកូអរដោនេ $(0, 4)$ និង $(0, -4)$ ។

ប្រតិបត្តិ2 : រកប្រវែងអ័ក្សធំ អ័ក្សតូច កូអរដោនេផ្ចិត កំណុំ និងកំពូលនៃអេលីប រួចសង់អេលីបតាមករណីនីមួយៗខាងក្រោម :

ក. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ ខ. $25x^2 + 16y^2 = 400$ ។

3.2. សមីការស្តង់ដានៃអេលីបដែលមានផ្ចិតខុសពីគល់អ័ក្សកូអរដោនេ

***ឧទាហរណ៍* :** គេឱ្យសមីការ $\frac{(x-3)^2}{25}+\frac{(y+4)^2}{4}=1$

ក. កំណត់ប្រភេទនៃរូបធរណីមាត្រដែលជាក្រាបតាងសមីការខាងលើ

ខ. សង់រូបធរណីមាត្រនោះ រួចរកកូអរដោនេនៃផ្ចិត កំពូល និងកំណុំនៃរូបនោះ ។

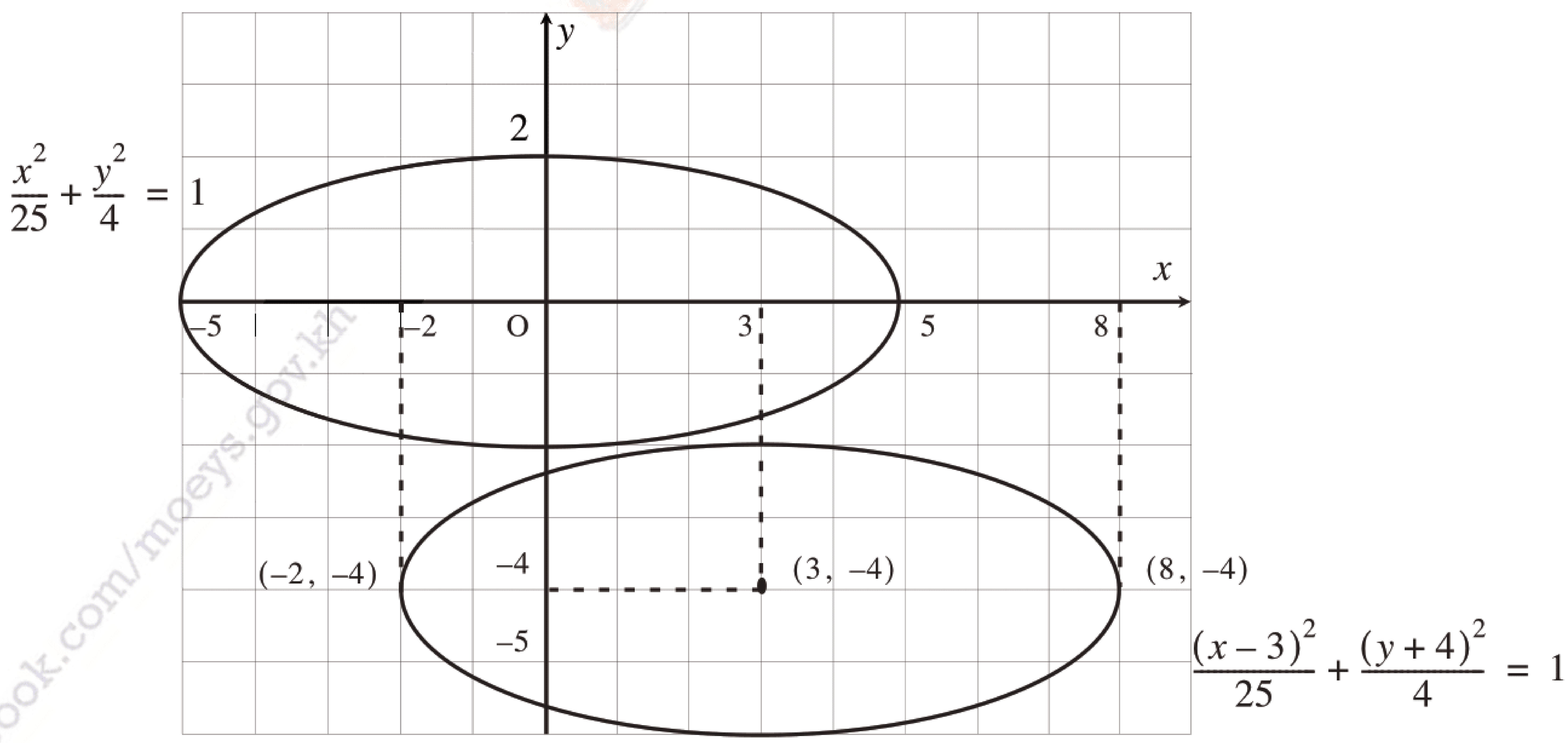
***ចម្លើយ* :**

ក. បើគេជំនួស x ដោយ $x-3$ ក្នុងសមីការ $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{4}=1$ នៃអេលីប E_1 មួយ នោះគេបាន $\frac{(x-3)^2}{25}+\frac{y^2}{4}=1$ ដែលជាសមីការនៃអេលីប E_2 ថ្មីមួយទៀតបានមកពីការរំកិល E_1 ស្របនិងអ័ក្សអាប់ស៊ីសទៅខាងស្តាំចំនួន 3 ឯកតា ។

បើគេជំនួស y ដោយ $y+4$ ក្នុងសមីការ $\frac{(x-3)^2}{25}+\frac{y^2}{4}=1$ នោះ គេបាន $\frac{(x-3)^2}{25}+\frac{(y+4)^2}{4}=1$ ដែលជាសមីការនៃអេលីប E_3 ថ្មីមួយទៀត បានមកពីការរំកិលអេលីប E_2 ស្របនឹងអ័ក្សអរដោនេចុះក្រោមចំនួន 4 ឯកតា ។

សរុបមក រូបធរណីមាត្រតាងសមីការ $\frac{(x-3)^2}{25}+\frac{(y+4)^2}{4}=1$ ជាអេលីប E_3 ដែលបានមកពីការរំកិលអេលីប E_1 ស្របនឹងអ័ក្សកូអរដោនេទៅខាងស្តាំចំនួន 3 ឯកតា និងចុះក្រោមចំនួន 4 ឯកតា ។

ខ. រូបធរណីមាត្រនេះបានមកពីការរំកិលអេលីប



ដែលមានសមីការ $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{4}=1$ ស្របនឹងអ័ក្សកូអរដោនេទៅខាងស្តាំចំនួន 3 ឯកតា និងចុះក្រោមចំនួន 4 ឯកតា ។

អេលីបតាង $\frac{(x-3)^2}{25}+\frac{(y+4)^2}{4}=1$ ប៉ុននឹង

អេលីបតាង $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{4}=1$ នោះគេបាន ៖

$a^2=25$ នោះ $a=\sqrt{25}=5$ និង $b^2=4$ នោះ $b=\sqrt{4}=2$

ប្រវែងអ័ក្សធំគឺ $2a=5\times 2=10$ និងប្រវែងអ័ក្សតូចគឺ $2b=2\times 2=4$

ផ្ចិតមានកូអរដោនេ $(3,-4)$

កំពូលទាំងពីរមានកូអរដោនេ $(3+5,-4)$ ឬ $(8,-4)$ និង $(3-5,-4)$ ឬ $(-2,-4)$ ។

$c^2=a^2-b^2=25-4=21$ នោះ $c=\sqrt{21}$

កំណុំទាំងពីរមានកូអរដោនេ $(3+\sqrt{21},-4)$ និង $(3-\sqrt{21},-4)$ ។

តាមឧទាហរណ៍ខាងលើ គេសង្កេតឃើញថា បើគេរំកិលអេលីបដែលមានផ្ចិតនៅត្រង់គល់អ័ក្សកូអរដោនេ និងមានអ័ក្សធំស្ថិតនៅលើអ័ក្សកូអរដោនេចំនួន 3 ឯកតាទៅខាងស្តាំស្របនឹងអ័ក្សអាប់ស៊ីស និង 4 ឯកតាចុះក្រោមស្របនឹងអ័ក្សអរដោនេ នោះគេបានអេលីបមួយដែលមានផ្ចិតនៅត្រង់ចំណុច $(3,-4)$ និងអ័ក្សធំស្របនឹងអ័ក្សកូអរដោនេ ហើយមានសមីការស្តង់ដា $\frac{(x-3)^2}{25}+\frac{(y+4)^2}{4}=1$ ។

ជាទូទៅ ៖

1. អេលីបដែលមានផ្ចិត (h,k) និងអ័ក្សធំស្របនឹងអ័ក្សអាប់ស៊ីស មានសមីការស្តង់ដា

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

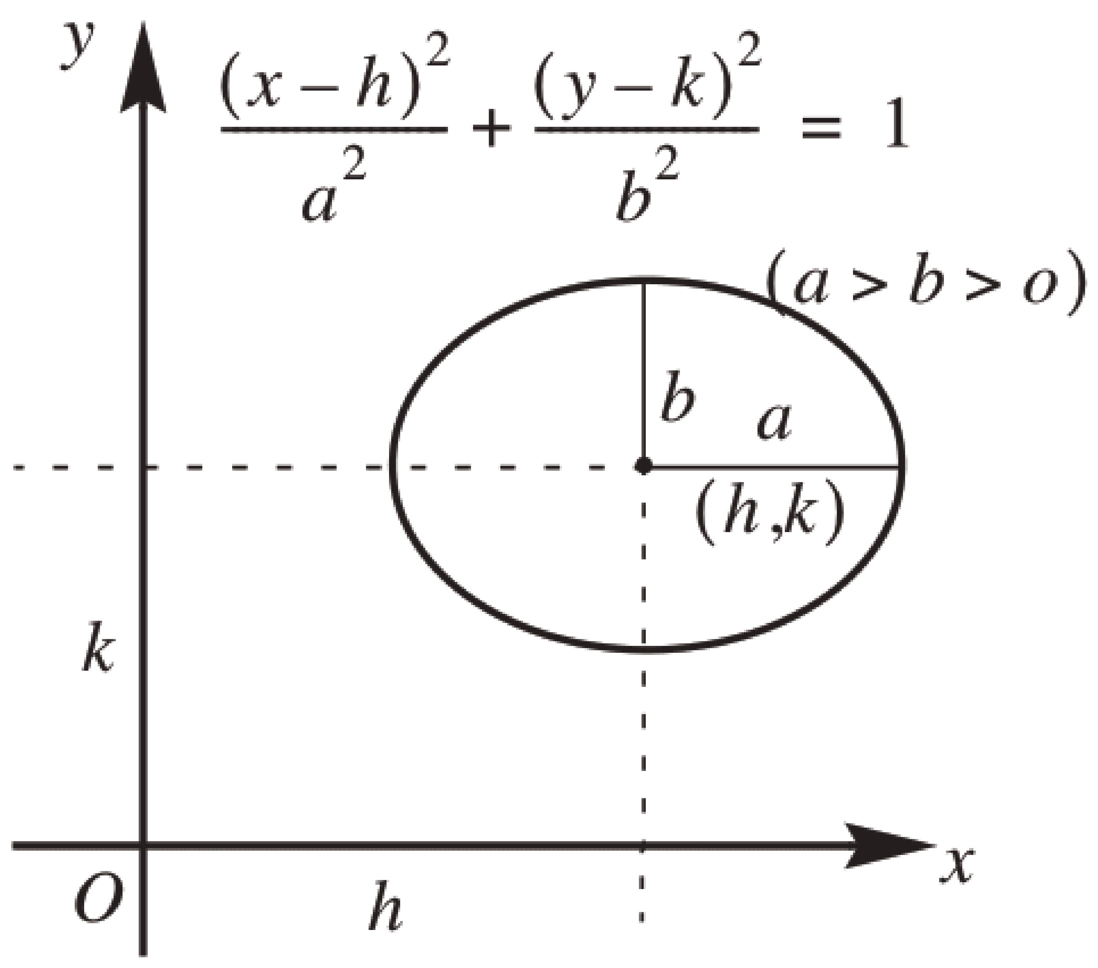
- អ័ក្សធំមានប្រវែង $2a$ និងអ័ក្សតូចមានប្រវែង $2b$ ដែល $a>b>0$
- កំពូលទាំងពីរមានកូអរដោនេ $(h-a,k)$ និង $(h+a,k)$
- កំណុំទាំងពីរមានកូអរដោនេ $(h-c,k)$ និង $(h+c,k)$ ដែល $c^2=a^2-b^2$ ។

2. អេលីបដែលមានផ្ចិត (h,k) និងអ័ក្សធំស្របនឹងអ័ក្សអរដោនេមានសមីកាស្តង់ដា៖

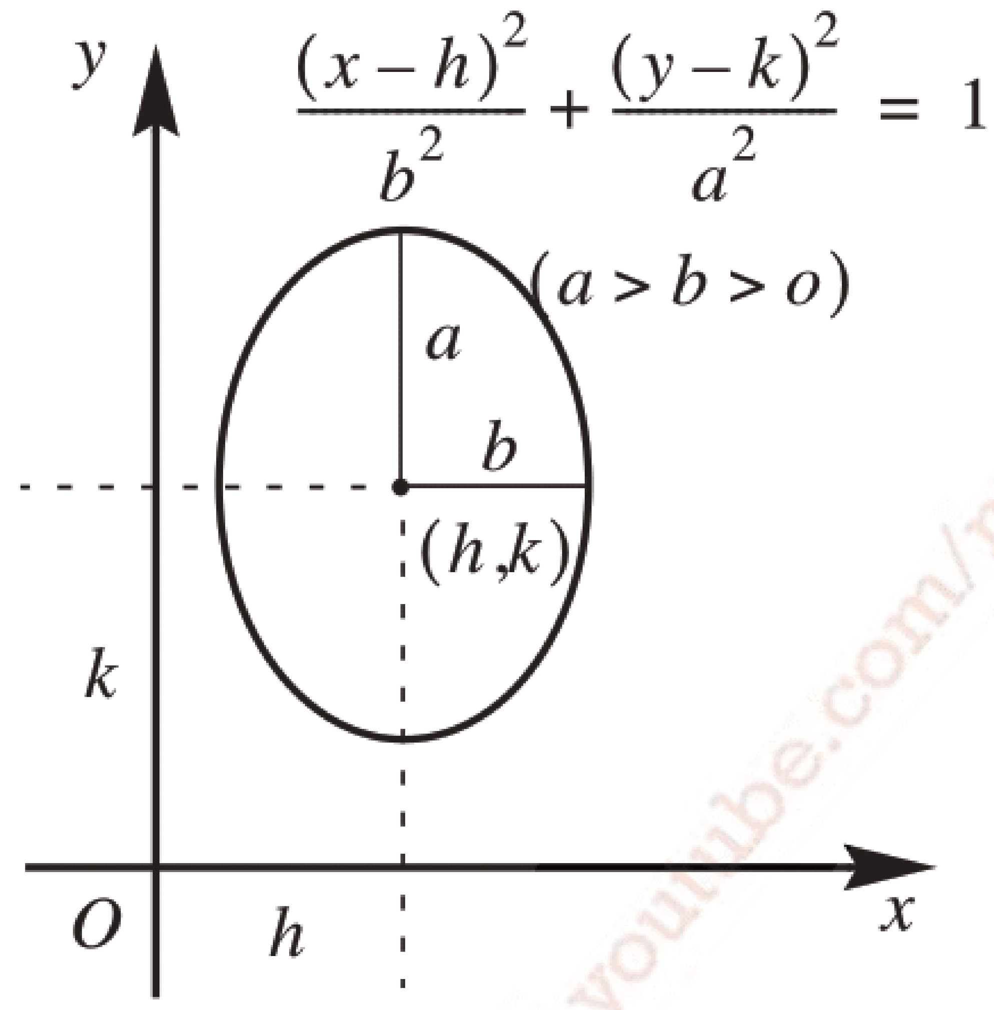
$$\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$$

- អ័ក្សធំមានប្រវែង $2a$ និងអ័ក្សតូចមានប្រវែង $2b$ ដែល $a>b>0$
- កំពូលទាំងពីរមានកូអរដោនេ $(h,k-a)$ និង $(h,k+a)$
- កំណុំទាំងពីរមានកូអរដោនេ $(h,k-c)$ និង$(h,k+c)$ ដែល $c^2=a^2-b^2$ ។

អ័ក្សធំជាអ័ក្សដេក



អ័ក្សធំជាអ័ក្សឈរ



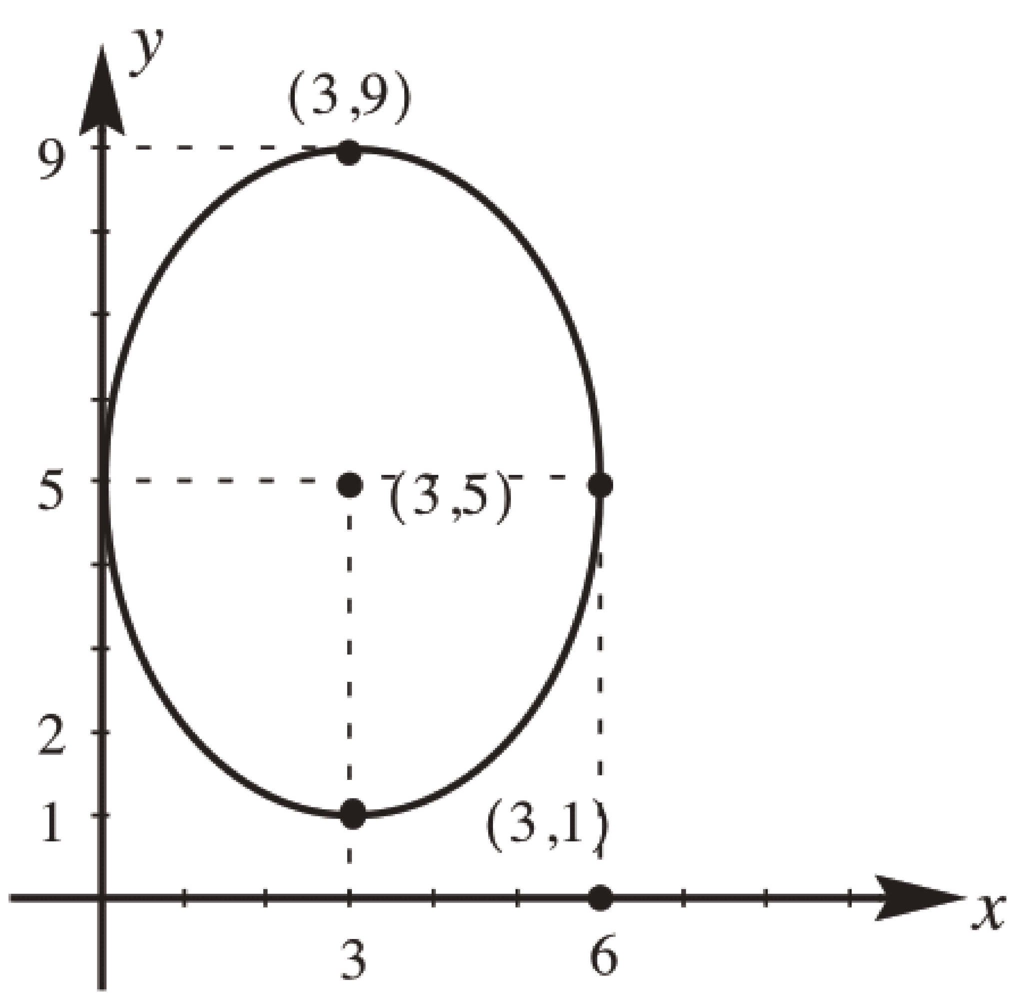
លំហាត់គំរូ : រកសមីការនៃអេលីបដែលមានកំពូលទាំងពីរនៅត្រង់ចំណុច $(3,\ 1)$ និងចំណុច $(3,\ 9)$ ហើយអ័ក្សតូចមានប្រវែង 6 ឯកតា ។

ចម្លើយ : ដោយកំពូលទាំងពីរស្ថិតនៅលើបន្ទាត់ឈរនោះអេលីបមានសមីការស្តង់ដា :
$\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$

ដោយផ្ចិតនៃអេលីបជាចំណុចកណ្តាលនៃអង្កត់ភ្ជាប់កំពូលទាំងពីរ នោះគេបានកូអរដោនេ នៃផ្ចិតអេលីប : $\left(h=\frac{3+3}{2}=3,\ k=\frac{1+9}{2}=5\right)$ ។

ប្រវែងអ័ក្សធំគឺ $2a=\sqrt{(3-3)^2+(9-1)^2}=\sqrt{64}=8$ នោះ $a=4$ ។ម្យ៉ាងទៀតប្រវែងអ័ក្សតូចស្មើនឹង 6 ឯកតា គេបាន :

$2b=6$ នោះ $b=\frac{6}{2}=3$ ។ ដូចនេះសមីការស្តង់ដា នៃអេលីបគឺ $\frac{(x-3)}{9}+\frac{(y-5)^2}{16}=1$ ។



ប្រតិបត្តិ : រកប្រភេទនៃរូបធរណីមាត្រព្រមទាំងបញ្ជាក់កូអរដោនេនៃផ្ចិត កំពូល កំណុំហើយសង់រូបធរណីមាត្រតាងសមីការនីមួយៗខាងក្រោមនេះ

ក. $\frac{(x-2)^2}{16}+\frac{(y+3)^2}{49}=1$ ខ. $4(x-3)^2+9(y-2)^2=36$ ។

3.3. សមីការទូទៅនៃអេលីប

ឧទាហរណ៍ : អេលីបមួយមានសមីការស្តង់ដា $\frac{(x-2)^2}{9}+\frac{(y-1)^2}{16}=1$ ដោយភាគបែងរួមនៃសមីការនេះគឺ 144 គេបាន : $16(x-2)^2+9(y-1)^2=144$

$16(x^2-4x+4)+9(y^2-2y+1)=144$ ឬ $16x^2+9y^2-64x-18y-71=0$

សមីការដឺក្រេទីពីរនៃ x និង y នេះ ហៅថា ***សមីការទូទៅនៃអេលីប*** ។

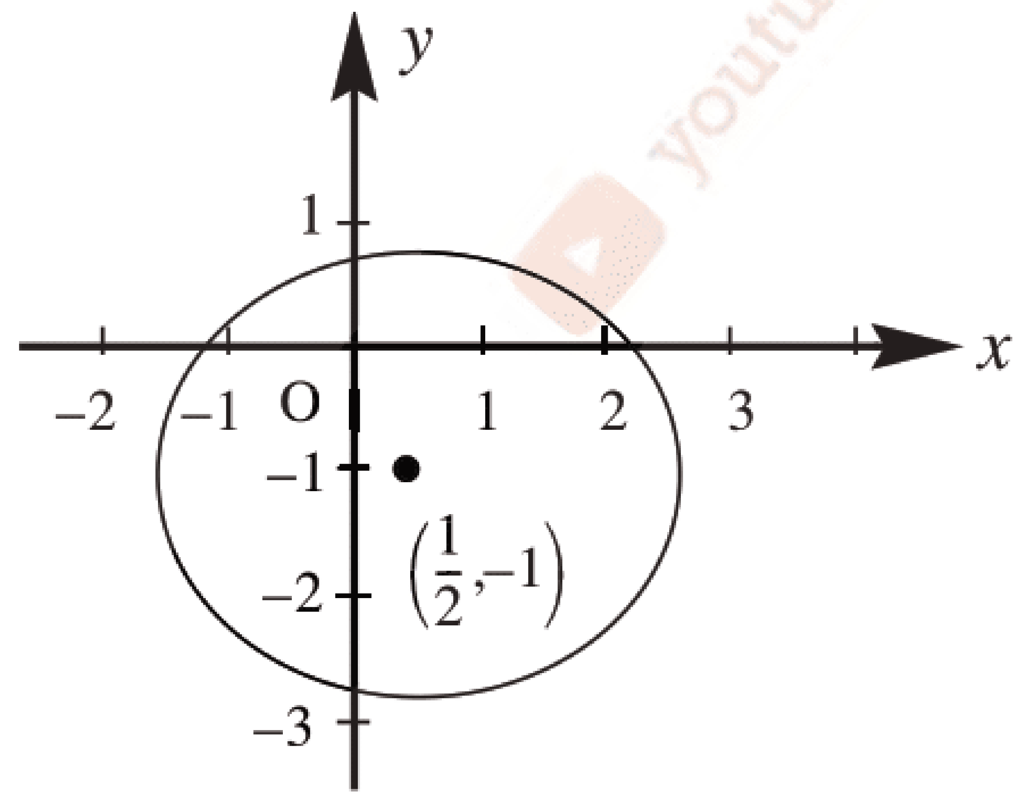
ជាទូទៅ : សមីការដឺក្រេទីពីរមានរាង $Ax^2+By^2+Cx+Dy+E=0$ ដែល $A\cdot B>0$ និង $A\neq B$ ជាសមីការទូទៅនៃអេលីប (ជារង្វង់បើ $A=B$) ។

លំហាត់គំរូ : អេលីបមួយមានសមីការទូទៅ $12x^2+20y^2-12x+40y-37=0$

ក. បំប្លែងសមីការនេះជាសមីការស្តង់ដា ។

ខ. រកកូអរដោនេនៃផ្ចិត កំពូល កំណុំ ហើយសង់អេលីបនោះ ។

ចម្លើយ :



ក. គេមាន : $12x^2+20y^2-12x+40y-37=0$

$$12\left(x^2-x+\frac{1}{4}\right)+20(y^2+2y+1)=37+3+20$$

$$12\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+20(y+1)^2=60$$

$$\frac{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}{5}+\frac{(y+1)^2}{3}=1$$

គេបាន $h=\frac{1}{2}$, $k=-1$, $a=\sqrt{5}$, $b=\sqrt{3}$ និង $c=\sqrt{5-3}=\sqrt{2}$

អេលីបនោះមាន : ផ្ចិត $(h,\ k)$ គឺ $\left(\frac{1}{2},\ -1\right)$

កំណុំទាំងពីរ $(h\pm c,\ k)$ គឺ $\left(\frac{1}{2}\pm\sqrt{2},\ -1\right)$

កំពូលទាំងពីរ $(h\pm a,\ k)$ គឺ $\left(\frac{1}{2}\pm\sqrt{5},\ -1\right)$ ។

ប្រតិបត្តិ : រកកូអរដោនេនៃផ្ចិត កំណុំនិងកំពូលនៃអេលីបហើយសង់អេលីបនីមួយៗខាងក្រោមនេះ

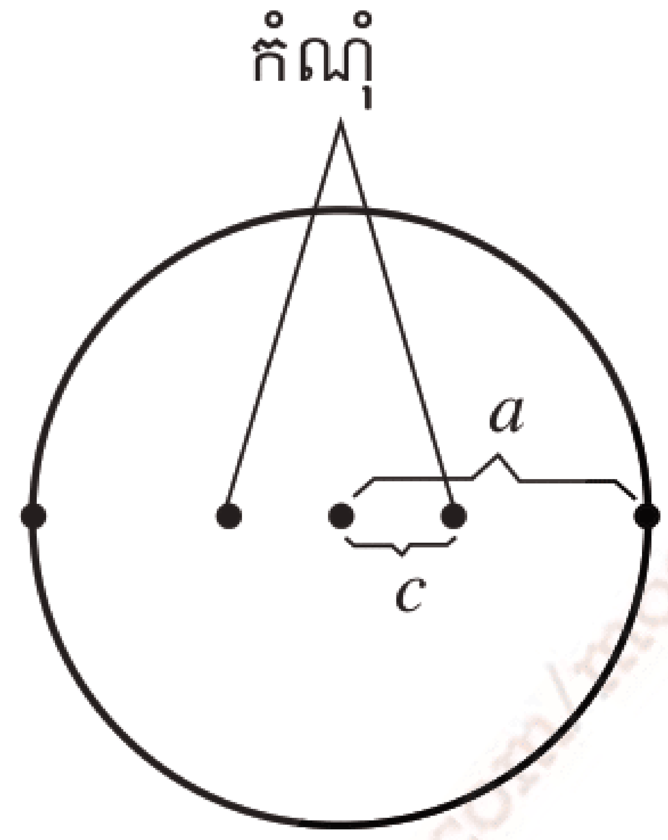
ក. $4x^2+y^2-8x+4y+4=0$ ខ. $x^2+9y^2-8x+36y+4=0$ ។

4. អ៊ិចសង់ទ្រីស៊ីតេ

ហេតុផលមួយដែលពួកតារាវិទូមានការលំបាកក្នុងការរកឱ្យឃើញថាគន្លងនៃភពមានរាងជាអេលីបនោះដោយសារតែកំណុំនៃគន្លងភពស្ថិតនៅជិតផ្ចិតនៃព្រះអាទិត្យ ហើយវាបង្កើតបានគន្លងស្ទើរតែជារង្វង់ ។ ដើម្បីវាស់រាងមូលទ្រវែងនៃអេលីប គេប្រើបញ្ញត្តិនៃអ៊ិចសង់ទ្រីស៊ីតេ ។

និយមន័យ : អ៊ិចសង់ទ្រីស៊ីតេ e នៃអេលីបគឺជាផលធៀបរវាង c ដែលជាចម្ងាយពីផ្ចិតទៅកំណុំនិង a ដែលជាកន្លះអ័ក្សធំនៃអេលីប $e=\frac{c}{a}$ ។

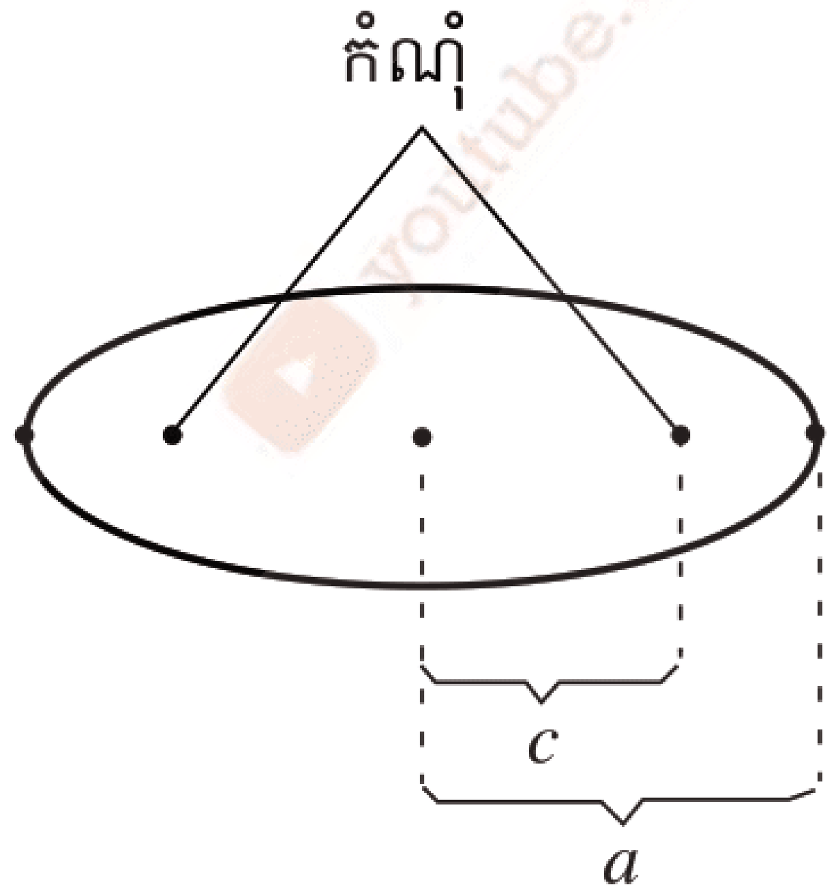
សម្គាល់ **:** គ្រប់អេលីបទាំងអស់មានកំណុំនៅលើអ័ក្សធំ នៅចន្លោះកំពូលនិងផ្ចិតនៃអេលីប នោះគេបាន : $0 < c < a$



$$0 < \frac{c}{a} < 1$$

$$0 < e < 1$$

- បើកំណុំស្ថិតនៅកាន់តែជិតផ្ចិតនោះ $\frac{c}{a}$ មានតម្លៃកាន់តែតូចទៅៗ ហើយអេលីបមានរាងស្ទើរតែជារង្វង់ ។
- បើកំណុំស្ថិតនៅកាន់តែជិតកំពូលនោះ $\frac{c}{a}$ មានតម្លៃស្ទើរតែស្មើ 1 ហើយអេលីបមានរាងកាន់តែទ្រវែង ។

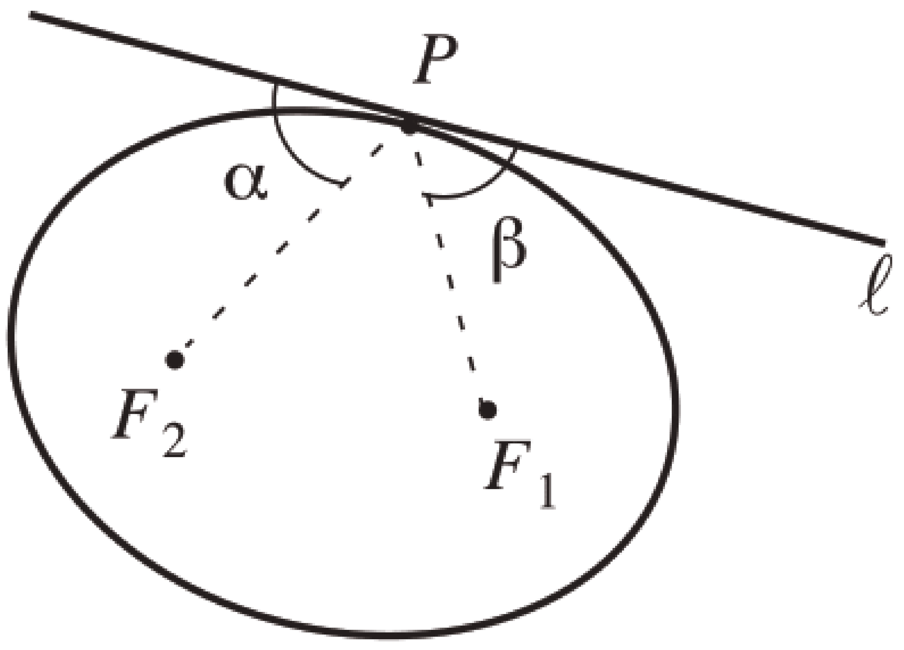


គន្លងនៃភពខាងក្រោមមានអ៊ិចសង់ទ្រីស៊ីតេដូចខាងក្រោម :

ភពចន្ទ : $e = 0.0549$	ភពអង្គារ : $e = 0.0934$	ភពពុធ : $e = 0.2056$
ភពព្រហស្បតិ៍ : $e = 0.0484$	ភពសុក្រ : $e = 0.0068$	ភពសៅរ៍ : $e = 0.0543$
ភពផែនដី : $e = 0.0167$	ភពអ៊ុយរ៉ានុស : $e = 0.0460$	ភពណិបទូន : $e = 0.0082$
ភពភ្លុយតុង : $e = 0.2481$ ។		

5. លក្ខណៈចំណាំងផ្លាតនៃអេលីប

អេលីបមានលក្ខណៈចំណាំងផ្លាតដូចគ្នានឹងប៉ារ៉ាបូលដែលបានសិក្សានៅក្នុងមេរៀនទី 1 ។



បន្ទាត់ ℓ ប៉ះទៅនឹងអេលីបមួយត្រង់ចំណុច P ហើយអេលីបនោះមានកំណុំ F_1 និង F_2 (ដូចរូបដែលបានបង្ហាញ) ។

បើ α ជាមុំបង្កើតឡើងដោយបន្ទាត់ F_1P និងបន្ទាត់ ℓ ហើយ β ជាមុំបង្កើតឡើងដោយបន្ទាត់ F_2P និងបន្ទាត់ ℓ នោះគេអាចបង្ហាញបានថា $\alpha = \beta$ ។ ដូចនេះ បើកាំពន្លឺ ឬរលកសំឡេងចេញពីកំណុំមួយវាត្រូវចាំងផ្លាតទៅកាត់កំណុំមួយទៀត ។ លក្ខណៈនេះគេបានប្រើក្នុងការកំណត់ប្រភេទឧបករណ៍អុបទិច ។

មេរៀនសង្ខេប

1. សមីការស្តង់ដានៃអេលីបដែលមានផ្ចិតជាគល់អ័ក្សកូអរដោនេ

ផ្ចិត	អ័ក្សធំ	កំណុំ	កំពូល	សមីការស្តង់ដា
$(0, 0)$	នៅលើអ័ក្សអាប់ស៊ីស	$(\pm c, 0)$	$(\pm a, 0)$	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $a>b>o$ ដែល $c^2=a^2-b^2$
$(0, 0)$	នៅលើអ័ក្សអរដោនេ	$(0, \pm c)$	$(0, \pm a)$	$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$ $a>b>o$ ដែល $c^2=a^2-b^2$

2. សមីការស្តង់ដានៃអេលីបដែលមានកំពូលខុសពីគល់អ័ក្សកូអរដោនេ

ផ្ចិត	អ័ក្សធំ	កំណុំ	កំពូល	សមីការស្តង់ដា
(h, k)	ជាអ័ក្សដេក	$(h\pm c, k)$	$(h\pm a, k)$	$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$ $a>b>o$ ដែល $c^2=a^2-b^2$
(h, k)	ជាអ័ក្សឈរ	$(h, k\pm c)$	$(h, k\pm a)$	$\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$ $a>b>o$ ដែល $c^2=a^2-b^2$

លំហាត់

1. រកកូអរដោនេនៃផ្ចិត កំពូល កំណុំ និងអ៊ិចសង់ទ្រីស៊ីតេនៃអេលីប ហើយសង់អេលីបនីមួយៗ ។

ក. $x^2+4y^2 = 4$ ខ. $5x^2+2y^2 = 10$ គ. $\frac{(x-3)^2}{16}+\frac{(y+4)^2}{9} = 1$

ឃ. $(x+2)^2+\frac{(y+4)^2}{\frac{1}{4}} = 1$ ង. $\frac{(x-1)^2}{9}+\frac{(y-5)^2}{25} = 1$ ច. $\frac{(x+2)^2}{4}+\frac{(y+2)^2}{25} = 1$ ។

2. រកកូអរដោនេនៃផ្ចិត កំពូល កំណុំ និងអ៊ិចសង់ទ្រីស៊ីតេនៃអេលីប រួចសង់អេលីបនីមួយៗ :

ក. $9x^2+4y^2+36x-24y+36 = 0$ ខ. $100x^2+16y^2-100x-64y-311 = 0$

គ. $9x^2+16y^2+54x-32y-47 = 0$ ឃ. $25x^2+4y^2-25x-16y+541 = 0$

ង. $2x^2+3y^2-8x+6y+5 = 0$ ច. $4x^2+y^2+4y = 0$ ។

3. រកសមីការអេលីបដែលមានផ្ចិត $(0, 0)$ កំណុំ $(2, 0)$ និងកំពូល $(3, 0)$ ។

4. រកសមីការនៃអេលីបដែលមានផ្ចិត $(0, 0)$ កំពូល $(2, 0)$ និងអ័ក្សតូចមានប្រវែង 3 ឯកតា។

5. រកសមីការនៃអេលីបដែលមានកំពូល $(5, 0)$ និង $(-5, 0)$ ហើយមានអ៊ិចសង់ទ្រីស៊ីតេស្មើនឹង $\frac{3}{5}$

6. រកសមីការនៃអេលីបដែលមានកំណុំ $(5, 5)$ និង $(0, -5)$ ហើយអ័ក្សធំមានប្រវែង 6 ឯកតា។

7. រកសមីការនៃអេលីបដែលមានផ្ចិត $(0, 0)$ និងអ័ក្សធំជាអ័ក្សដេកហើយចំណុច $(3, 1)$ និង $(4, 0)$ ស្ថិតនៅលើអេលីប ។

8. រកសមីការនៃអេលីបដែលមានកំណុំ $(0, 0)$ និង $(4, 0)$ ។ ផលបូកចម្ងាយពីកំណុំទាំងពីរទៅចំណុចមួយនៅលើអេលីបស្មើនឹង 10 ឯកតា។

9. រកសមីការនៃបន្ទាត់ប៉ះទៅនឹងអេលីប $4x^2+y^2 = 4$ ដែលកាត់តាមចំណុច $(3, 0)$ ។

10. រកសមីការនៃអេលីបដែលមានផ្ចិត $(0, 0)$ និងកំពូល $(0,\pm 6)$ ហើយកាត់តាមចំណុច $(3, 2)$ ។

11. រកសមីការនៃអេលីបដែលមានផ្ចិត $(0, 0)$ ហើយកាត់តាមចំណុច $(2, 3)$ និង $(6, 1)$ ។

12. រកសមីការនៃអេលីបដែលមានផ្ចិត $(0, 0)$ និងកាត់អ័ក្សអាប់ស៊ីសត្រង់ចំណុច $(2, 0)$ និង $(-2, 0)$ ហើយកាត់អ័ក្សអរដោនេត្រង់ចំណុច $\left(0, \frac{1}{3}\right)$ និង $\left(0, -\frac{1}{3}\right)$ ។

13. រកសមីការនៃអេលីបដែលមានផ្ចិត $(0, 0)$ ហើយអ័ក្សធំជាអ័ក្សដេកមានប្រវែង 8 ឯកតា និងអ័ក្សតូចមានប្រវែង 5 ឯកតា។

មេរៀនទី

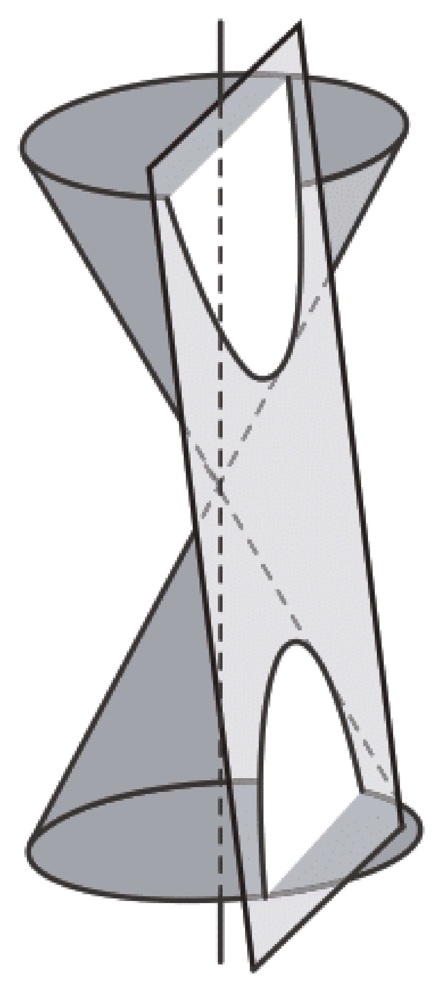
3 អ៊ីពែរបូល

វត្ថុបំណង

- ❑ កំណត់និយមន័យនៃអ៊ីពែរបូល
- ❑ កំណត់សមីការស្តង់ដានិងអាស៊ីមតូតនៃអ៊ីពែរបូល
- ❑ បំលែងសមីការទូទៅនៃអ៊ីពែរបូលជាសមីការស្តង់ដា ។

1. សេចក្តីផ្តើម

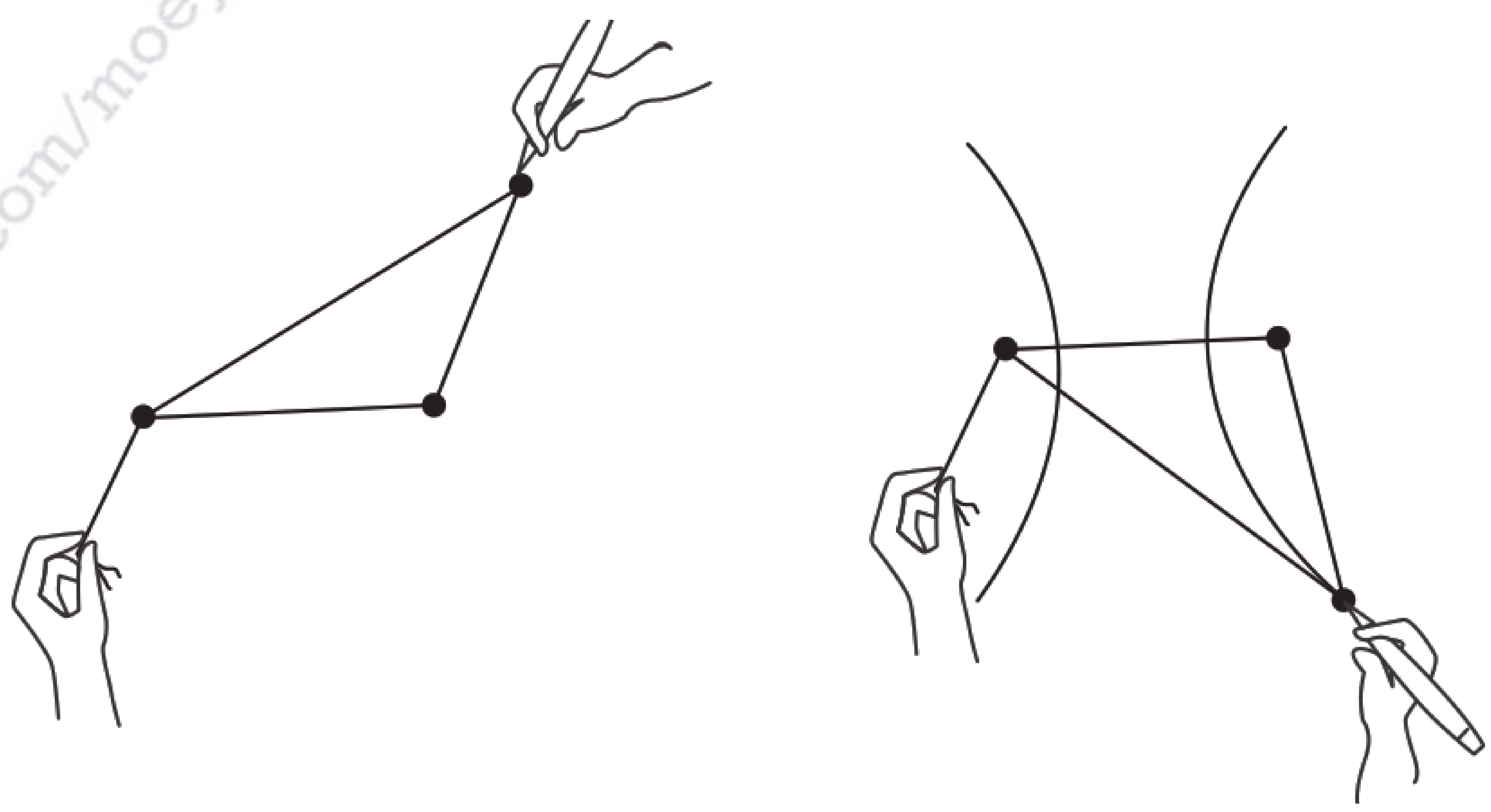
ប្លង់មួយស្របនឹងអ័ក្សនៃកោនបរិវត្តន៍ប្រសព្វផ្ទៃកោនបានខ្សែកោង ដែលមានពីរផ្នែកផ្សេងគ្នាហៅថា ***អ៊ីពែរបូល*** ។



2. និយមន័យនៃអ៊ីពែរបូល

ឧទាហរណ៍ : គេបិទក្រដាសមួយសន្លឹកនៅលើបន្ទះក្តារមួយ ។ គេបោះកូនដែកគោលពីរនៅលើបន្ទះក្តារនោះឱ្យបានចម្ងាយ $10cm$ ពីគ្នា។ គេក្ងួចខ្សែមួយសរសៃឱ្យបានជាចំណងមួយសម្រាប់ដាក់ចុងខ្មៅដៃ រួចពាក់ខ្សែលើកូនដែកគោលទាំងពីរ (ដូចរូបខាងក្រោម) ។

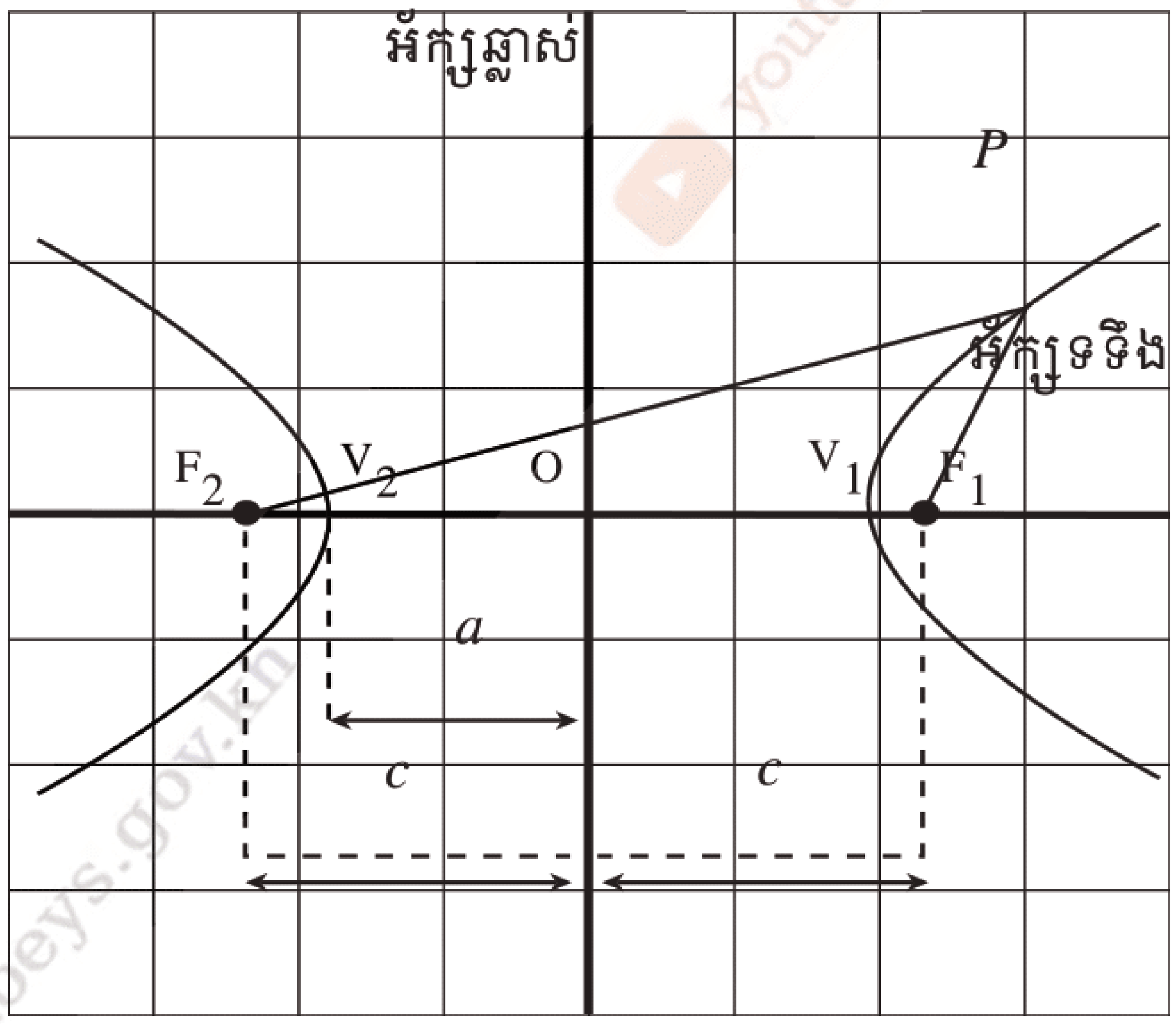
កាន់ចុងខ្សែទាំងពីរផ្តួបគ្នា ហើយទាញខ្សែឱ្យតឹងដោយខ្មៅដៃ ។ បន្ទាប់មកទាញចុងខ្សែទាំងពីរផ្តួបគ្នាដើម្បីឱ្យខ្មៅដៃផ្លាស់ទី គន្លងដែលគូសបានដោយខ្មៅដៃជាអ៊ីពែរបូល ។ ធ្វើឡើងវិញម្តងទៀតដោយដាក់បញ្ច្រាសទីតាំងនៃខ្សែដើម្បីបង្កើតបានមែកម្ខាងទៀតនៃអ៊ីពែរបូល ។



និយមន័យ : អ៊ីពែរបូលជាសំណុំចំណុច P នៅក្នុងប្លង់ដែលមានផលដករវាងចម្ងាយពីចំណុច P ទៅចំណុចនឹងពីរ F_1 និង F_2 ជាចំនួនថេរ ។

ចំណុច F_1 និង F_2 ជាកំណុំនៃអ៊ីពែរបូល ។

បន្ទាត់ F_1F_2 ជួបអ៊ីពែរបូលត្រង់ចំណុចពីរតាងដោយ V_1 និង V_2 ។



- V_1 និង V_2 ហៅថាកំពូលនៃអ៊ីពែរបូល ។
- បន្ទាត់ F_1F_2 ហៅថាអ័ក្សទទឹង ។
- ចំណុចកណ្ដាលនៃអង្កត់ F_1F_2 គឺជាផ្ចិត O នៃអ៊ីពែរបូល ។
- តាង $OF_1 = OF_2 = c$ និង $OV_1 = OV_2 = a$ ដែល $c > a > 0$
- មេដ្យាទ័រនៃអង្កត់ F_1F_2 ហៅថាអ័ក្សឆ្លាស់ ។
- អ័ក្សទទឹងនិងអ័ក្សឆ្លាស់ជាអ័ក្សឆ្លុះនៃអ៊ីពែរបូល ។

តាមនិយមន័យ $|PF_1 - PF_2|$ ជាចំនួនថេរចំពោះគ្រប់ទីតាំងនៃ P ដែលស្ថិតនៅលើអ៊ីពែរបូល ។

ឧបមាថា P នៅត្រង់ V_1 គេបាន $|PF_1 - PF_2| = |V_1F_1 - V_1F_2|$ (P ត្រួតលើ V_1)

$= |V_2F_1 - V_2F_2|$ (P ត្រួតលើ V_2)

$= V_1V_2$ (ព្រោះ $V_1F_1 = V_2F_2$)

$= 2a$

ដូចនេះ ចំពោះគ្រប់ទីតាំងនៃ P នៅលើអ៊ីពែរបូល $|PF_1 - PF_2|$ ស្មើនិងប្រវែង $V_1V_2 = 2a$ ។

3. សមីការនៃអ៊ីពែរបូល

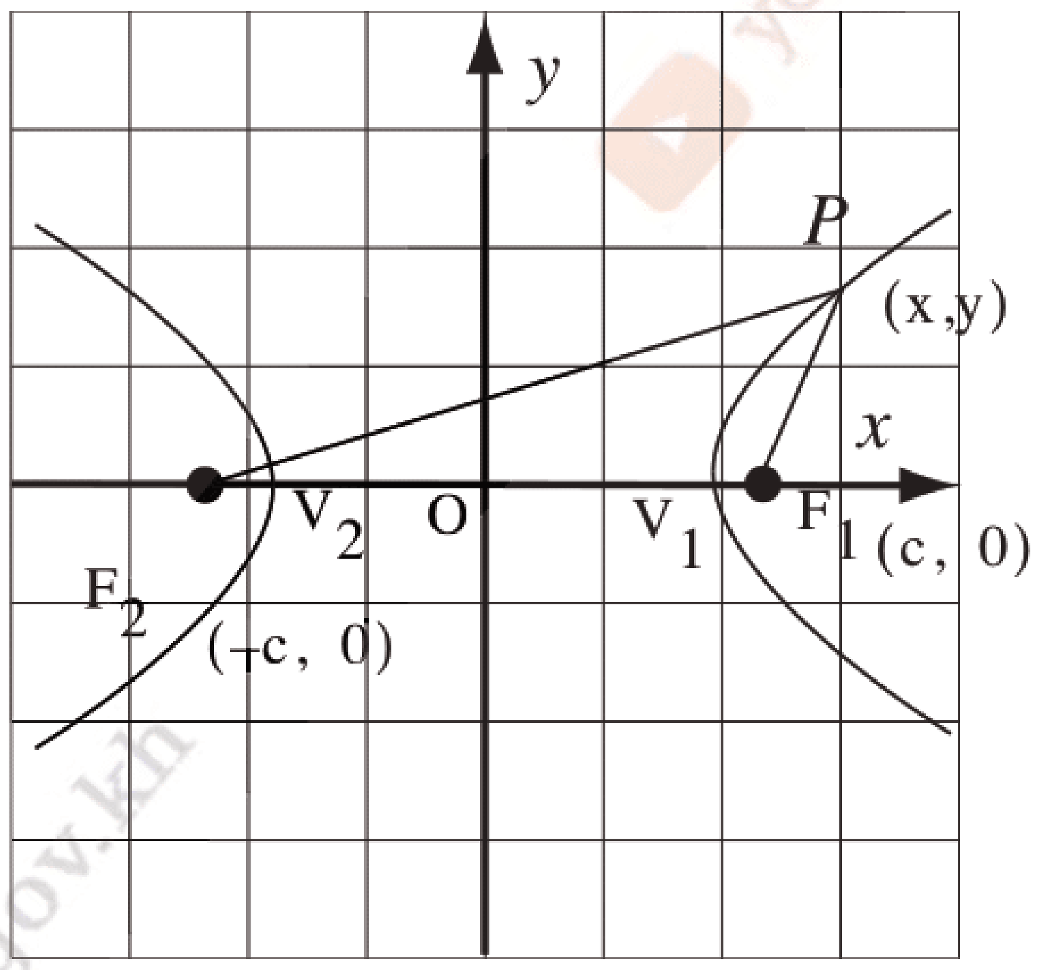
3.1. សមីការស្តង់ដានៃអ៊ីពែរបូលដែលមានផ្ចិតជាគល់អ័ក្សកូអរដោនេ

ក. ករណីអ័ក្សទទឹងជាអ័ក្សអាប់ស៊ីស

តាមនិយម័យ គេអាចទាញបានសមីការស្តង់ដានៃអ៊ីពែរបូលដែលមានផ្ចិត (0, 0) និងកំណុំទាំងពីរស្ថិតនៅលើអ័ក្សអាប់ស៊ីស ។

តាងកូអរដោនេនៃកំណុំទាំងពីរដោយ $F_1(c, 0)$ និង $F_2(-c, 0)$ ។

តាង $P(x, y)$ ជាចំណុចមួយស្ថិតនៅលើអ៊ីពែរបូល



តាមនិយមន័យផលដករវាងចម្ងាយពីចំណុច P ទៅកំណុំទាំងពីរជាចំនួនថេរ គេបាន :

$|PF_1 - PF_2| = 2a$

$PF_1 - PF_2 = \pm 2a$

$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} - \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \pm 2a$

$\left(\sqrt{(x-c)^2 + y^2}\right)^2 = \left(\pm 2a + \sqrt{(x+c)^2 + y^2}\right)^2$

$(x-c)^2 + y^2 = 4a^2 \pm 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + (x+c)^2 + y^2$

$x^2 - 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 \pm 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + x^2 + 2cx + c^2 + y^2$

$-4a^2 - 4cx = \pm 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2}$ ឬ $-a^2 - cx = \pm a\sqrt{(x+c)^2 + y^2}$

ឬ $a^4 + 2a^2cx + c^2x^2 = a^2(x^2 + 2cx + c^2 + y^2)$

សមីការនេះអាចសរសេរ : $(c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2)$

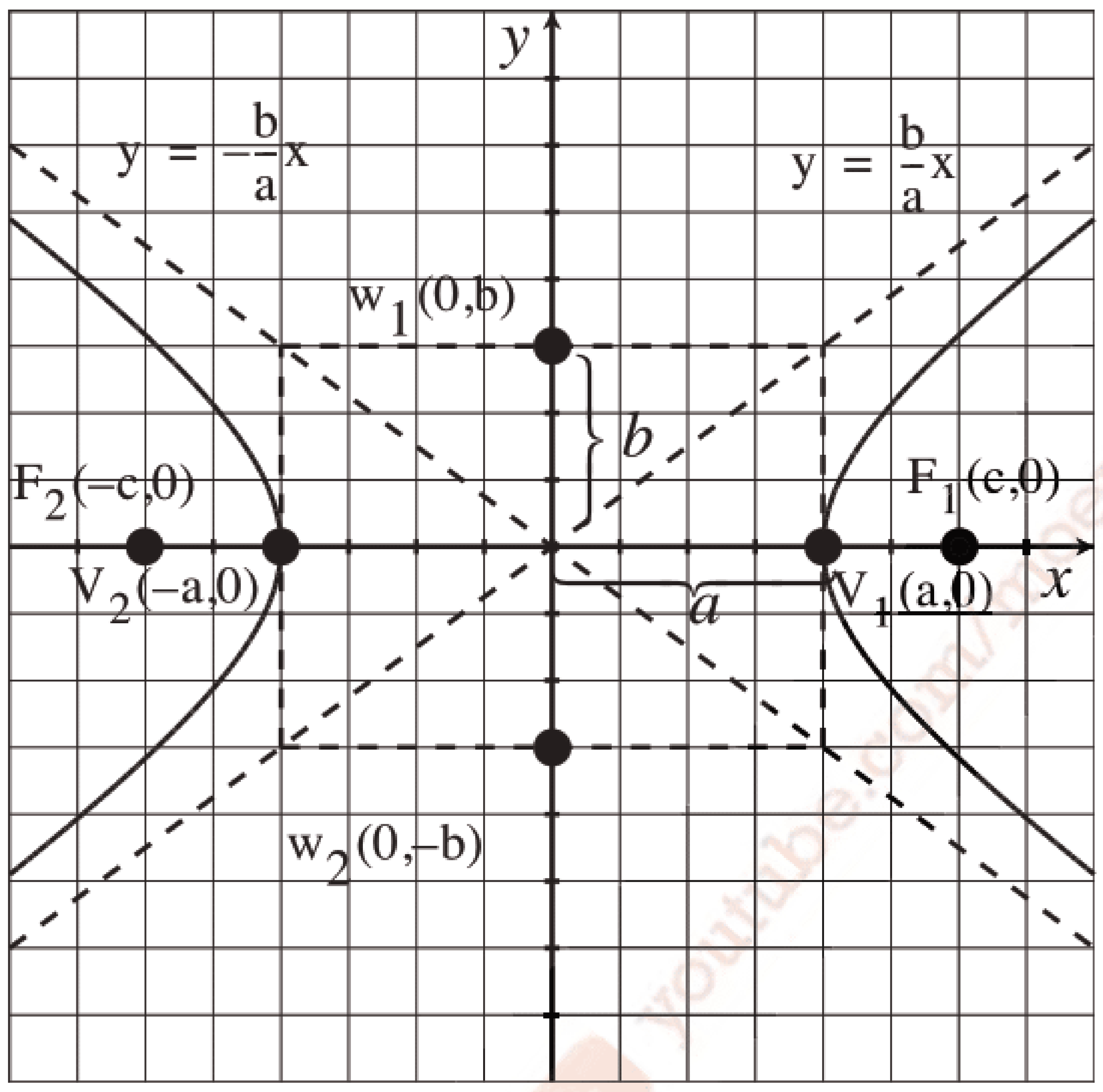
គេកំណត់យក $b^2 = c^2 - a^2$

សមីការនេះក្លាយជា $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ បន្ទាប់មកចែកអង្គទាំងពីរនឹង a^2b^2 គេបាន :

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ហៅថាសមីការស្តង់ដានៃអ៊ីពែរបូលដែលមានផ្ចិតជាគល់កូអរដោនេ ហើយមានអ័ក្សទទឹងនៅលើអ័ក្សអាប់ស៊ីស ។

ដើម្បីរកកំពូលនៃអ៊ីពែរបូលរបស់សមីការនេះ គេឱ្យ $y = 0$ នោះកំពូលផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការ $\frac{x^2}{a^2} = 1$ នោះគេបាន $x = \pm a$ ។

ដូចនេះ កំពូលនៃអ៊ីពែរបូលគឺ $V_1(a, 0)$ និង $V_2(-a, 0)$ ។



បើគេដោះស្រាយសមីការ $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ រក y គេបាន $y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$

- បើ $x^2 - a^2 < 0$ គេបាន $-a < x < a$ នោះគ្មានចំណុច $P(x, y)$ នៅលើក្រាបទេ ។
- បើ $x^2 - a^2 \geq 0$ គេបាន $x \geq a$ ឬ $x \leq -a$ នោះមានចំណុច $P(x, y)$ នៅលើក្រាប ។

បើ $x \geq a$ គេអាចសរសេរសមីការ $y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$ ជាទម្រង់

$$y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2\left(1 - \frac{a^2}{x^2}\right)} = \pm\frac{b}{a}x\sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}}$$

បើ $x \to +\infty$ នោះកន្សោម $1 - \frac{a^2}{x^2}$ ខិតជិត 1 ហើយកូអរដោនេ y នៃចំណុច $P(x, y)$ នៅលើអ៊ីពែរបូលខិតជិត $\frac{b}{a}x$ ឬ $-\frac{b}{a}x$ ។

ដូចនេះចំណុច $P(x, y)$ ខិតជិតបន្ទាត់ $y = \frac{b}{a}x$ កាលណា y ជាចំនួនវិជ្ជមាន ឬខិតជិតបន្ទាត់ $y = -\frac{b}{a}x$ កាលណា y ជាចំនួនអវិជ្ជមាន ។

ស្ថានភាពត្រូវគ្នានេះមានបើ $x \leq -a$ ។ បន្ទាត់មានសមីការ $y = \pm\frac{b}{a}x$ ជាអាស៊ីមតូតនៃអ៊ីពែរបូល $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ។

ដើម្បីគូសអាស៊ីមតូត ដំបូងគេដៅកំពូល $V_1(a, 0)$ និង $V_2(-a, 0)$ និងចំណុច $W_1(0, b)$, $W_2(0, -b)$ ។ អង្កត់ W_1W_2 មានប្រវែង $2b$ ជាអ័ក្សឆ្លាស់នៃអ៊ីពែរបូល ។ បើគេគូសបន្ទាត់ឈរនិងបន្ទាត់ដេកកាត់តាមចំណុចចុងនៃអ័ក្សឆ្លាស់និងអ័ក្សទទឹងរៀងគ្នា នោះអង្កត់ទ្រូងនៃចតុកោណកែងដែលបានមានមេគុណប្រាប់ទិស $\frac{b}{a}$ និង $-\frac{b}{a}$ ។ ដូចនេះ ដោយបន្លាយអង្កត់ទ្រូង គេបានបន្ទាត់មានសមីការ $y = \frac{b}{a}x$ និង $y = -\frac{b}{a}x$ ។ ខ្សែកោងពីរដែលបង្កើតបានអ៊ីពែរបូលជាមែកនៃអ៊ីពែរបូល ។

ជាទូទៅ : អ៊ីពែរបូលដែលមានផ្ចិតជាគល់អ័ក្សកូអរដោនេ ហើយអ័ក្សទទឹងស្ថិតនៅលើអ័ក្សអាប់ស៊ីសមានសមីការស្តង់ដា $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\ \ (a>0,\ b>0)$ ។

- កំពូលទាំងពីរមានកូអរដោនេ $(a,\ 0)$ និង $(-a,\ 0)$
- កំណុំទាំងពីរមានកូអរដោនេ $(c,\ 0)$ និង $(-c,\ 0)$ ដែល $c^2=a^2+b^2$
- សមីការអាស៊ីមតូតទាំងពីរគឺ $y=\frac{b}{a}x$ និង $y=-\frac{b}{a}x$ ។

លំហាត់គំរូ : គេឱ្យសមីការ $9x^2-16y^2=144$

ក. បង្ហាញថា សមីការនេះជាសមីការអ៊ីពែរបូល ។ កំណត់កូអរដោនេកំពូលនិងកូអរដោនេកំណុំ ។

ខ. រកសមីការអាស៊ីមតូត ។

គ. សង់អ៊ីពែរបូល ។

ចម្លើយ :

ក. កំណត់កូអរដោនេកំពូលនិងកូអរដោនេកំណុំ

គេមាន $9x^2-16y^2=144$ ចែកអង្គទាំងពីរនៃសមីការនេះនឹង 144

គេបាន : $\frac{9x^2}{144}-\frac{16y^2}{144}=1$

$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ គេទាញបាន $a=4$ និង $b=3$

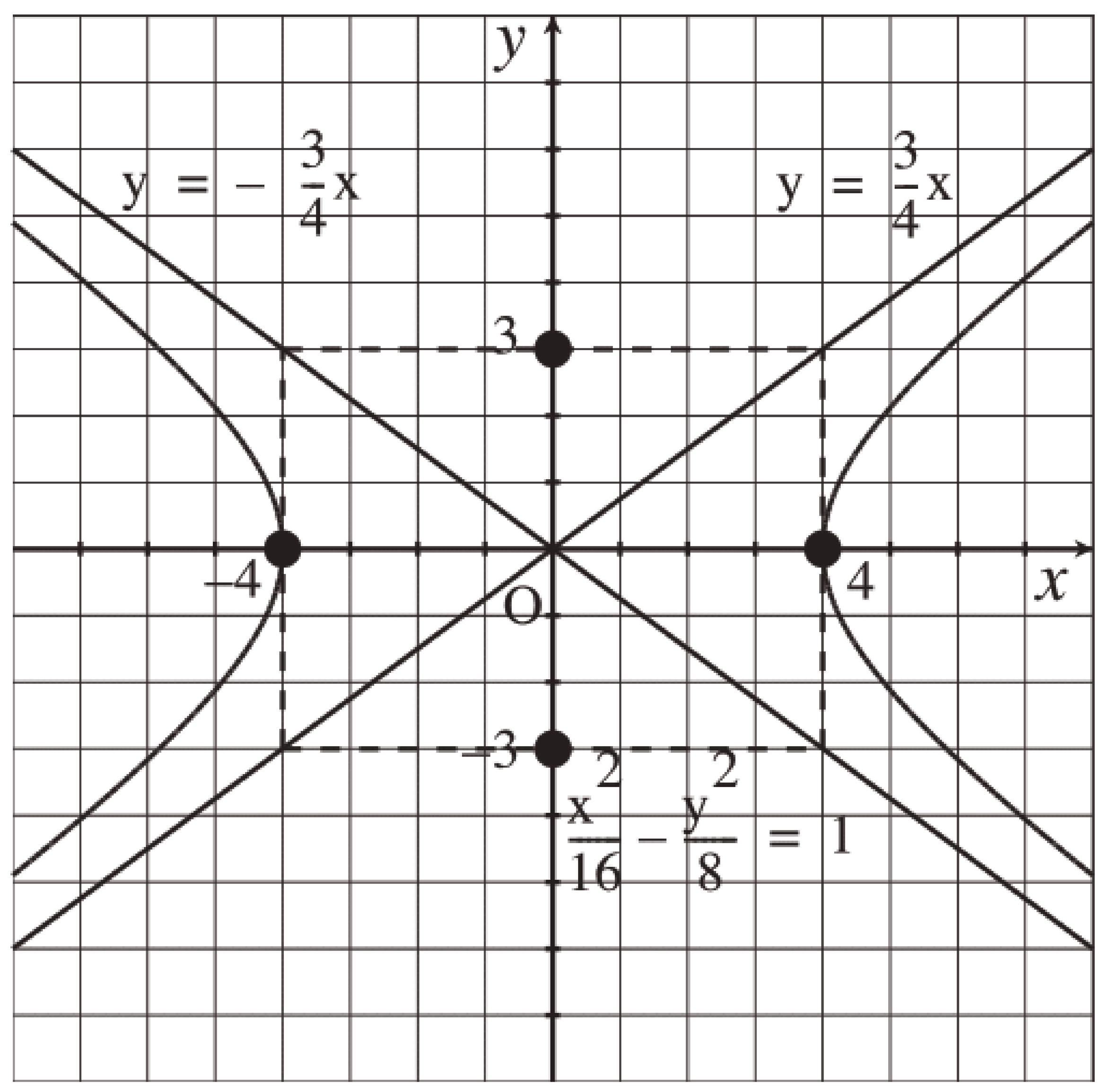
កូអរដោនេកំពូលទាំងពីរគឺ $(4,\ 0)$ និង $(-4,\ 0)$ ។

$c^2=a^2+b^2=16+9=25$ នោះ $c=\sqrt{25}=5$

កូអរដោនេកំណុំទាំងពីរគឺ $(5,\ 0)$ និង $(-5,\ 0)$ ។

ខ. សមីការអាស៊ីមតូតទាំងពីរគឺ $y=\frac{3}{4}x$ និង $y=-\frac{3}{4}x$ ។

គ. ដើម្បីសង់អ៊ីពែរបូល គេដៅកំពូលនិងគូសចតុកោណកែងដែលមានបណ្តោយប្រវែង 8 ឯកតា និងទទឹងប្រវែង 6 ឯកតា ហើយមានផ្ចិតនៅត្រង់គល់អ័ក្សកូអរដោនេ ។ បន្ទាប់មកគូសអាស៊ីមតូតដោយបន្លាយអង្កត់ទ្រូងនៃចតុកោណកែងនេះ រួចគូសអ៊ីពែរបូល ។



ប្រតិបត្តិ : អ៊ីពែរបូលមួយមានកំពូល $V_1(3,\ 0)$ និង $V_2(-3,\ 0)$ ហើយកាត់តាមចំណុច $P(5,\ 2)$ ។

ក. រកសមីការស្តង់ដា កូអរដោនេកំណុំនិងសមីការអាស៊ីមតូត ។

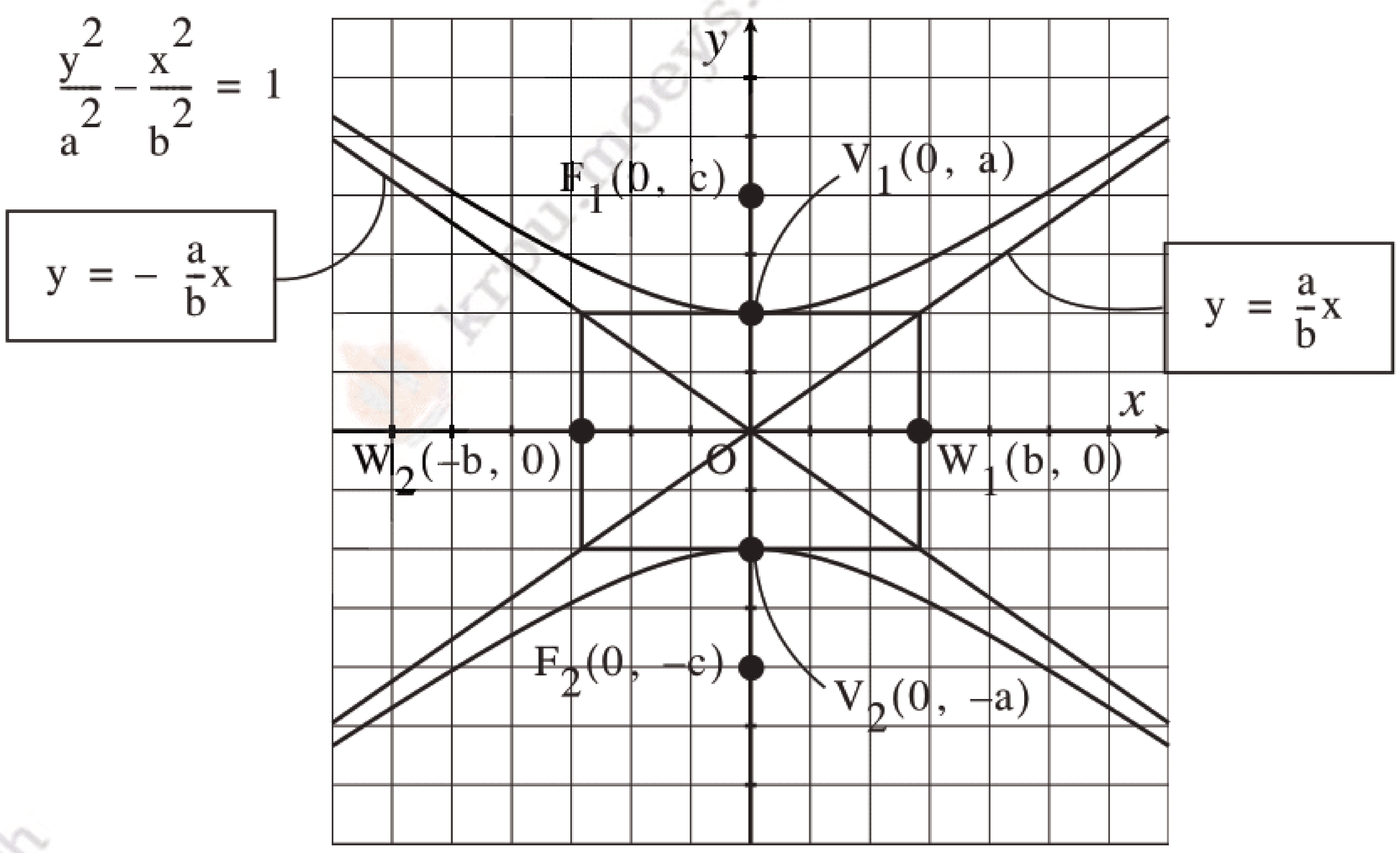
ខ. សង់អ៊ីពែរបូលនោះ ។

ខ. ករណីអ័ក្សទទឹងជាអ័ក្សអរដោនេ

នៅក្នុងផ្នែកខាងលើ គេបានរកឃើញថាសមីការ $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ ជាសមីការស្តង់ដានៃអ៊ីពែរបូលដែលមានផ្ចិត $(0,\ 0)$ និងកំណុំ $(\pm c,\ 0)$ ដែលមានអ័ក្សទទឹងជាអ័ក្សអាប់ស៊ីស ហើយ $c^2=a^2+b^2$ ។

បើគេប្តូរ x ជា y និង y ជា x ក្នុងសមីការខាងលើ គេបាន $\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$ ជាសមីការនៃរូបឆ្លុះរបស់អ៊ីពែរបូល $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ ធៀបនឹងបន្ទាត់ $y=x$ ។

ដូចនេះ សមីការ $\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$ ជាសមីការអ៊ីពែរបូលដែលមានផ្ចិត $(0,\ 0)$ និងកំណុំ $(0,\ \pm c)$ ហើយអ័ក្សទទឹងស្ថិតនៅលើអ័ក្សអរដោនេដែល $c^2=a^2+b^2$ ។



ជាទូទៅ : អ៊ីពែរបូលដែលមានផ្ចិតជាគល់អ័ក្សកូអរដោនេនិងអ័ក្សទទឹងស្ថិតនៅលើអ័ក្សអរដោនេមានសមីការស្តង់ដា $\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1\ \ (a>0,\ b>0)$

- កំពូលទាំងពីរមានកូអរដោនេ $(0,\ a)$ និង $(0,\ -a)$
- កំណុំទាំងពីរមានកូអរដោនេ $(0,\ c)$ និង $(0,\ -c)$ ដែល $c^2=a^2+b^2$
- សមីការអាស៊ីមតូតទាំងពីរ $y=\frac{a}{b}x$ និង $y=-\frac{a}{b}x$ ។

លំហាត់គំរូ **:** គេឱ្យសមីការ $x^2-2y^2=-8$

ក. បង្ហាញថាសមីការនេះជាសមីការអ៊ីពែរបូល ។ កំណត់កូអរដោនេនៃកំពូលនិងកំណុំនៃអ៊ីពែរបូល ។

ខ. រកសមីការអាស៊ីមតូតនៃអ៊ីពែរបូល ។

គ. សង់អ៊ីពែរបូលនោះ ។

ចម្លើយ **:**

ក. ចែកអង្គទាំងពីរនៃសមីការ $x^2-2y^2=-8$ នឹង -8

គេបាន $-\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1$ ឬ $\frac{y^2}{4}-\frac{x^2}{8}=1$

ដូចនេះ សមីការឱ្យនេះជាសមីការអ៊ីពែរបូល ។

គេទាញបាន $a^2=4$ និង $b^2=8$ គេបាន $a=2$ និង $b=2\sqrt{2}$ ។

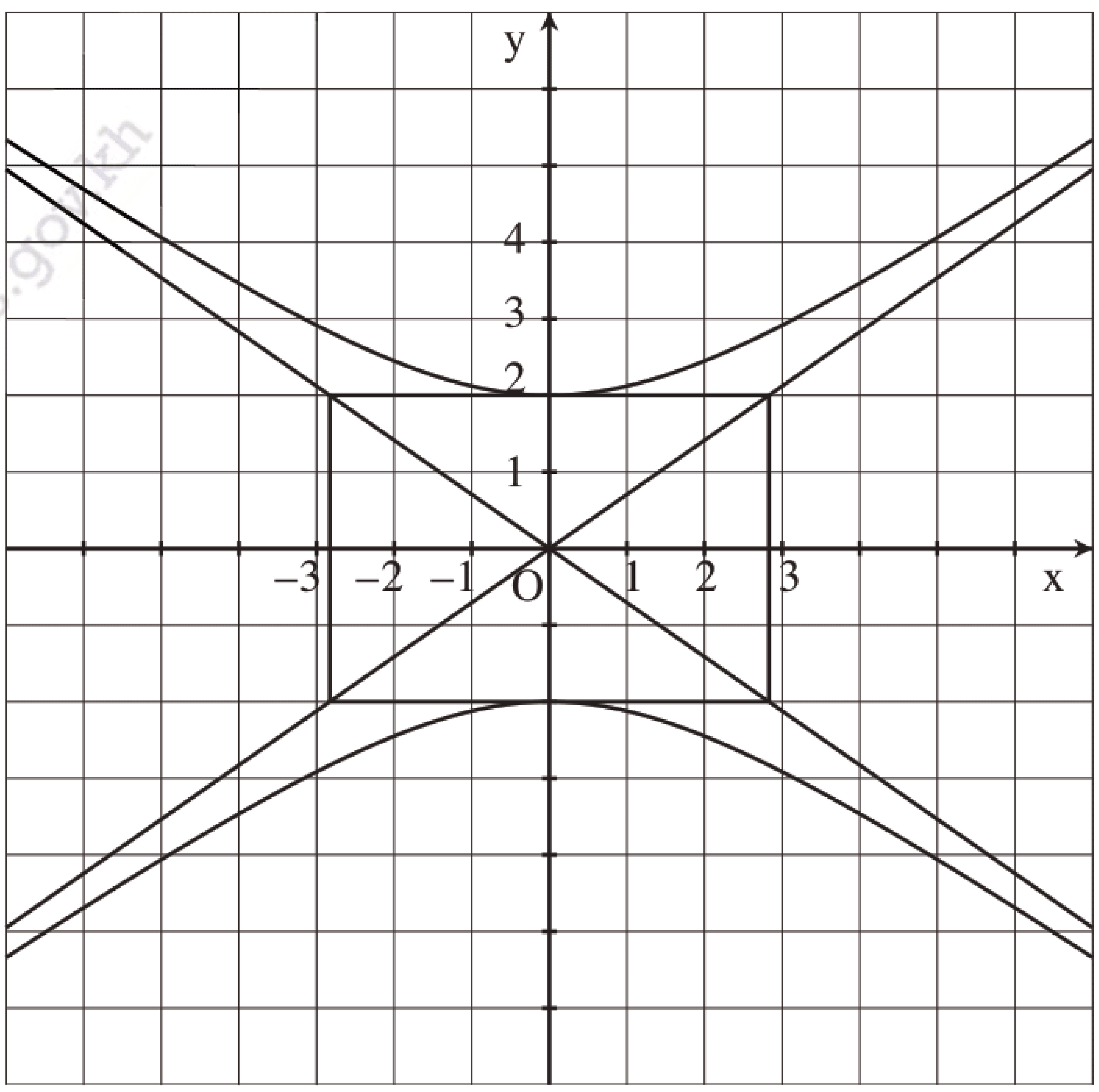
កូអរដោនេកំពូលទាំងពីរ $(0,\ 2)$ និង $(0,\ -2)$ ។

ដោយ $c^2=a^2+b^2=4+8=12$ នោះ $c=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$

កូអរដោនេកំណុំទាំងពីរគឺ $(0,\ 2\sqrt{3})$ និង $(0,\ -2\sqrt{3})$ ។

ខ. សមីការនៃអាស៊ីមតូតទាំងពីរ $y=\frac{\sqrt{2}}{2}x$ និង $y=-\frac{\sqrt{2}}{2}x$ ។

គ. ដើម្បីសង់អ៊ីពែរបូល គេដៅកំពូលហើយគូសចតុកោណកែងដែលមានបណ្តោយប្រវែង $4\sqrt{2}$ ឯកតានិងទទឹងប្រវែង 4 ឯកតា ហើយមានផ្ចិតនៅត្រង់គល់អ័ក្សកូអរដោនេ ។ គូសអង្កត់ទ្រូង និងបន្លាយអង្កត់ទ្រូងនោះ គេបានអាស៊ីមតូតទាំងពីរហើយគូសអ៊ីពែរបូលនោះ ។



ប្រតិបត្តិ : គេឱ្យសមីការអ៊ីពែរបូល $4x^2 - 9y^2 = -36$

ក. រកសមីការស្តង់ដានៃអ៊ីពែរបូល ។

ខ. រកកូអរដោនេនៃកំពូល កំណុំនិងសមីការអាស៊ីមតូតនៃអ៊ីពែរបូល ។

គ. សង់អ៊ីពែរបូលនោះ ។

3.2 សមីការស្តង់ដានៃអ៊ីពែរបូលដែលមានផ្ចិតខុសពីគល់អ័ក្សកូអរដោនេ

ឧទាហរណ៍ : គេឱ្យសមីការ $\frac{(x-3)^2}{4} - \frac{(y+2)^2}{9} = 1$

ក. កំណត់ប្រភេទនៃរូបធរណីមាត្រដែលជាក្រាបតាងសមីការខាងលើ ។

ខ. រកកូអរដោនេផ្ចិត កំពូល កំណុំនិងសមីការអាស៊ីមតូតនៃរូបនោះ រួចសង់រូបធរណីមាត្រនោះ ។

ចម្លើយ :

ក. បើគេជំនួស x ដោយ $(x-3)$ និង y ដោយ $(y+2)$ ក្នុងសមីការ $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$ នៃអ៊ីពែរបូល H នោះគេបាន $\frac{(x-3)^2}{4} - \frac{(y+2)^2}{9} = 1$ ដែលជាសមីការនៃអ៊ីពែរបូល H' ថ្មីមួយទៀតបានមកពីការរំកិលអ៊ីពែរបូល H ស្របនឹងអ័ក្សអាប់ស៊ីសទៅខាងស្តាំចំនួន 3 ឯកតា ហើយស្របនឹងអ័ក្សអរដោនេចុះក្រោមចំនួន 2 ឯកតា។

ខ. អ៊ីពែរបូលតាង $\frac{(x-3)^2}{4} - \frac{(y+2)^2}{9} = 1$ ប៉ុននឹងអ៊ីពែរបូលតាង $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$ នោះគេបាន

$a^2 = 4$, $b^2 = 9$ និង $c^2 = a^2 + b^2 = 13$

ដូចនេះ $a = 2$, $b = 3$ និង $c = \sqrt{13}$ ។

ផ្ចិតមានកូអរដោនេ $(3, -2)$

កំពូលទាំងពីរមានកូអរដោនេ

$(3+2, -2)$ ឬ $(5, -2)$ និង $(3-2, -2)$

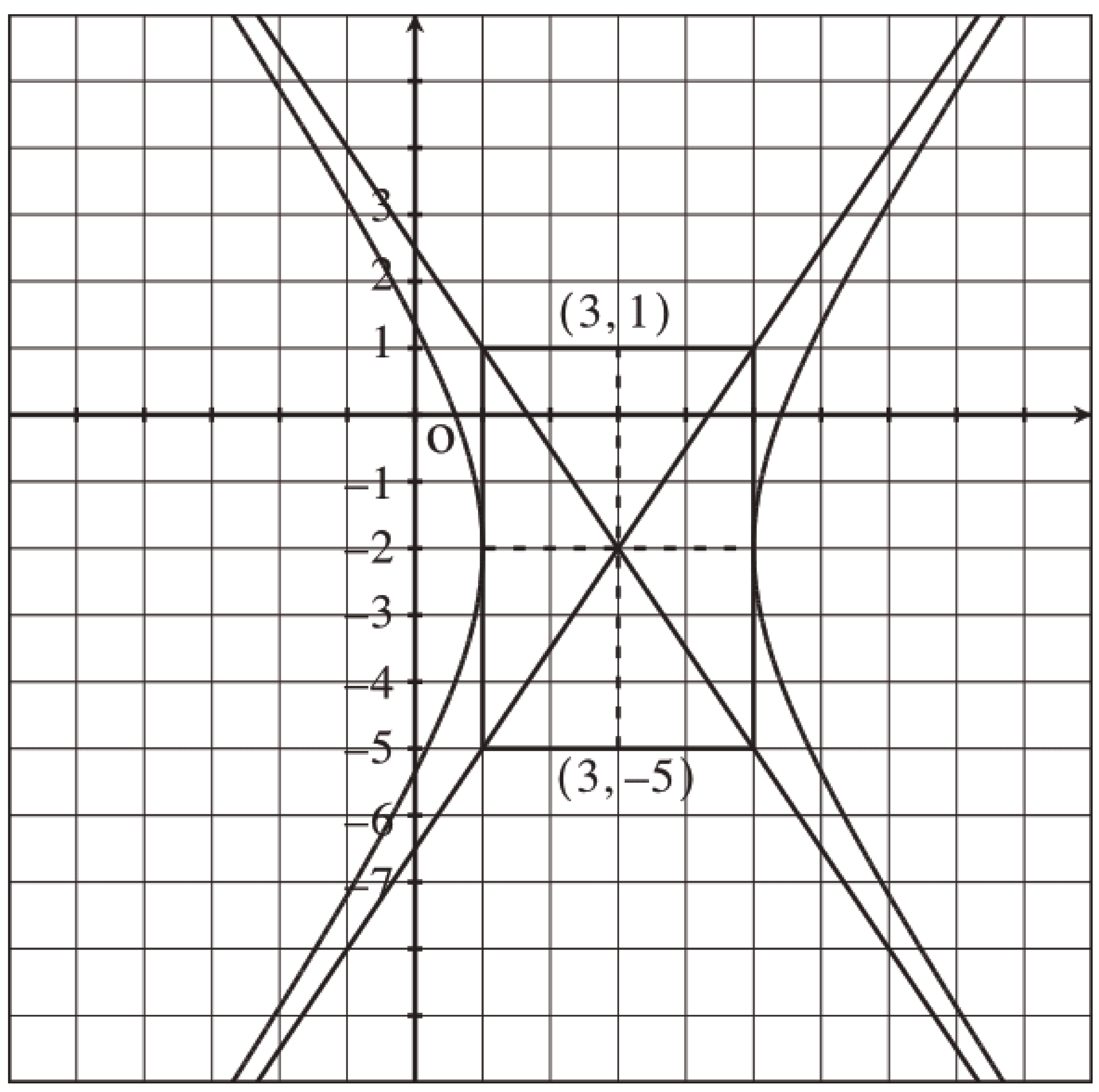
ឬ $(1, -2)$ ។

កំណុំទាំងពីរមានកូអរដោនេ $(3+\sqrt{13}, -2)$

និង $(3-\sqrt{13}, -2)$ ។

សមីការអាស៊ីមតូតទាំងពីរ $y + 2 = \pm\frac{3}{2}(x-3)$

ឬ $y = \frac{3}{2}(x-3) - 2$ និង $y = -\frac{3}{2}(x-3) - 2$



ឧទាហរណ៍ខាងលើ គេសង្កេតឃើញថា បើរំកិលអ៊ីពែរបូលដែលមានផ្ចិតនៅត្រង់គល់អ័ក្សកូអរដោនេនិងមានអ័ក្សទទឹងនៅលើអ័ក្សអាប់ស៊ីសចំនួន 3 ឯកតាទៅខាងស្តាំស្របនឹងអ័ក្សអាប់ស៊ីសនិង 2 ឯកតាចុះក្រោមស្របនឹងអ័ក្សអរដោនេ នោះគេបានអ៊ីពែរបូលមួយទៀតដែលមានផ្ចិតនៅត្រង់ចំណុច $(3, -2)$ ហើយអ័ក្សទទឹងស្របនឹងអ័ក្សអាប់ស៊ីសមានសមីការស្តង់ដា $\frac{(x-3)^2}{4} - \frac{(y+2)^2}{9} = 1$ ។

ជាទូទៅ :

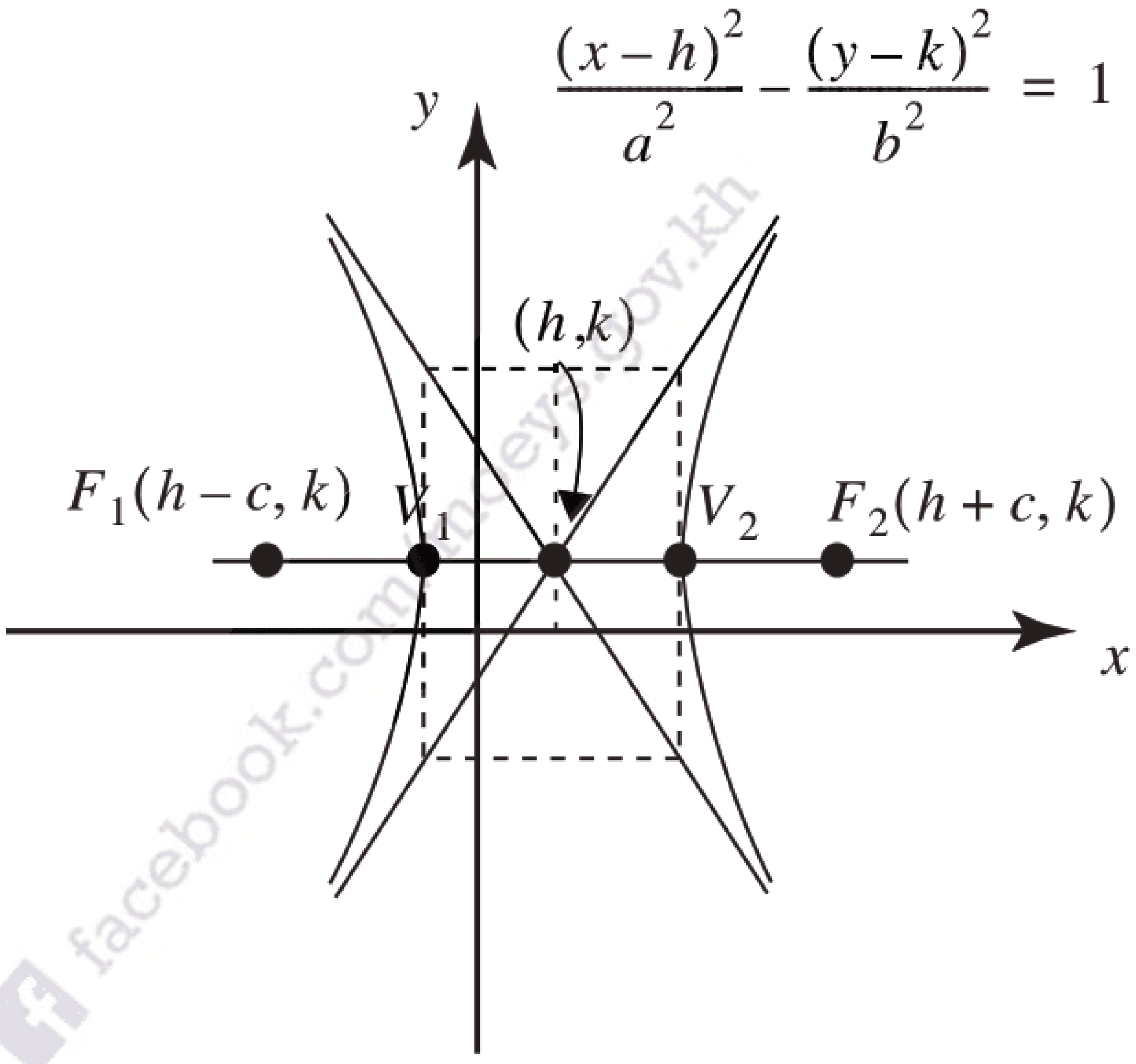
1. អ៊ីពែរបូលដែលមានផ្ចិត (h, k) និងអ័ក្សទទឹងស្របនឹងអ័ក្សអាប់ស៊ីស មានសមីការស្តង់ដា $\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \quad (a > 0,\ b > 0)$

- កំពូលទាំងពីរមានកូអរដោនេ $(h-a, k)$ និង $(h+a, k)$
- កំណុំទាំងពីរមានកូអរដោនេ $(h-c, k)$ និង $(h+c, k)$ ដែល $c^2 = a^2 + b^2$

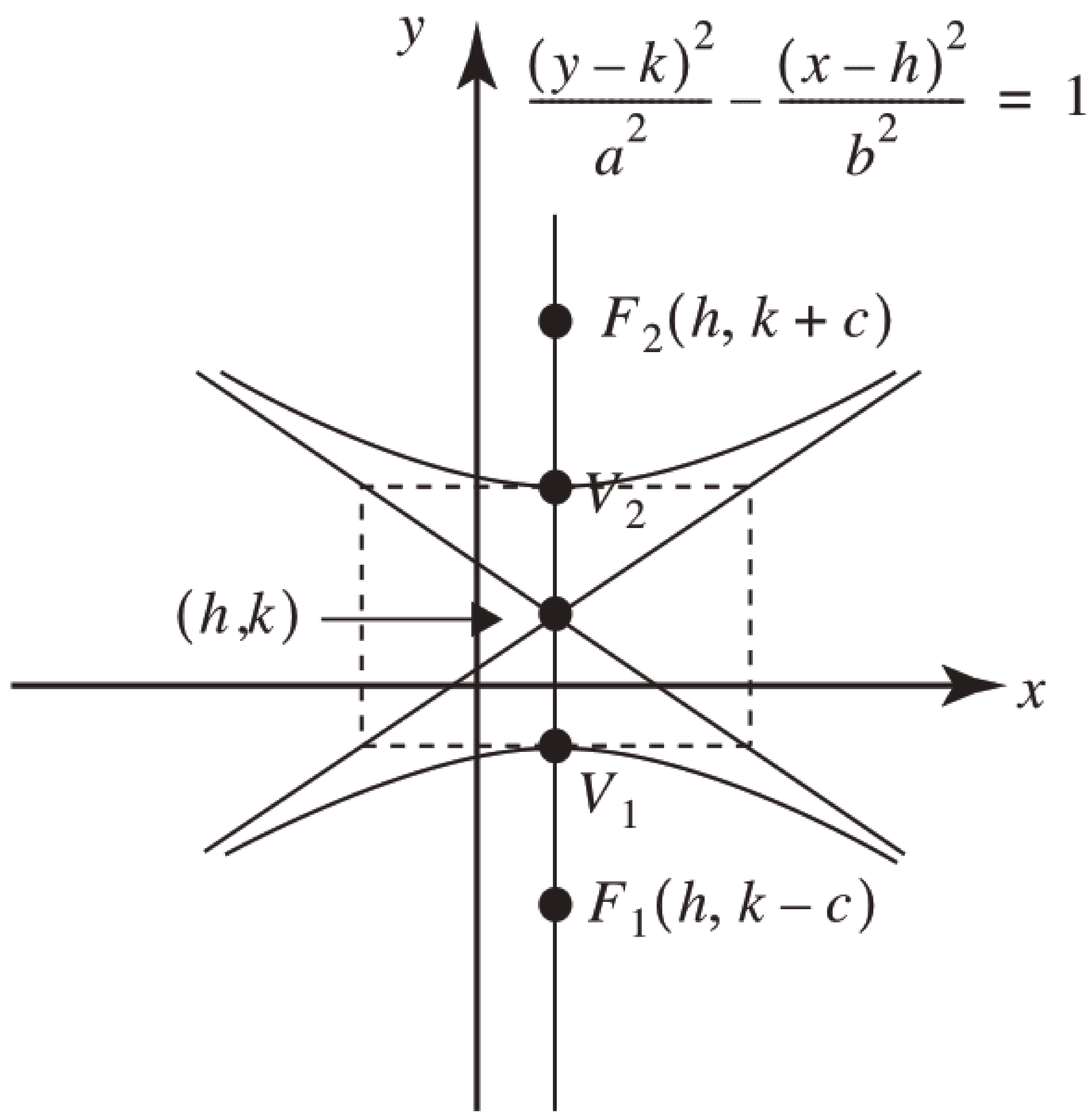
  សមីការអាស៊ីមតូតទាំងពីរគឺ $y = k + \frac{b}{a}(x-h)$ និង $y = k - \frac{b}{a}(x-h)$ ។

2. អ៊ីពែរបូលដែលមានផ្ចិត (h, k) និងអ័ក្សទទឹងស្របនឹងអ័ក្សអរដោនេ មានសមីការស្តង់ដា $\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1 \quad (a > 0,\ b > 0)$

- កំពូលទាំងពីរមានកូអរដោនេ $(h, k-a)$ និង $(h, k+a)$
- កំណុំទាំងពីរមានកូអរដោនេ $(h, k-c)$ និង $(h, k+c)$ ដែល $c^2 = a^2 + b^2$
- សមីការអាស៊ីមតូតទាំងពីរគឺ : $y = k + \frac{a}{b}(x-h)$ និង $y = k - \frac{a}{b}(x-h)$ ។



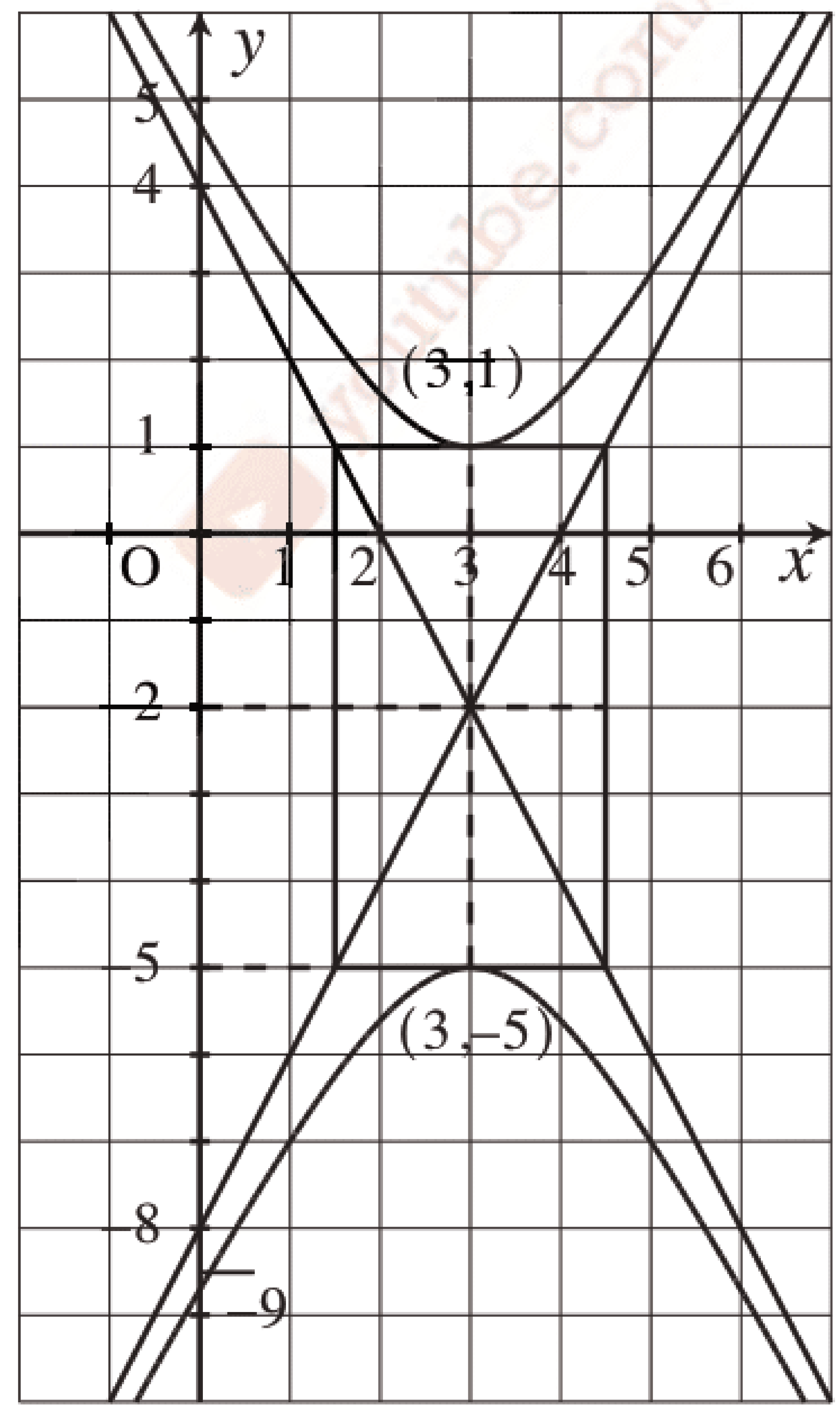
អ័ក្សទទឹងជាអ័ក្សដេក



អ័ក្សទទឹងជាអ័ក្សឈរ

លំហាត់គំរូ : រកសមីការស្តង់ដានៃអ៊ីពែរបូលដែលមានកំពូលត្រង់ចំណុច $(3, -5)$ និង $(3, 1)$ និងអាស៊ីមតូតមានសមីការ $y = 2x - 8$ និង $y = -2x + 4$ រួចសង់អ៊ីពែរបូលនោះ ។

ចម្លើយ : តាមរូបមន្តកូអរដោនេចំណុចកណ្តាលនៃអង្កត់គេបានផ្ចិតនៃអ៊ីពែរបូលគឺ $\left(\frac{3+3}{2}, \frac{-5+1}{2}\right)$ ឬ $(3, -2)$ ។



ម្យ៉ាងទៀតអ៊ីពែរបូលមានអ័ក្សទទឹងស្របនឹងអ័ក្សអរដោនេ ដែល $a = 3$ ។

គេអាចកំណត់បានថា សមីការអាស៊ីមតូតមានមេគុណប្រាប់ទិស $m_1 = \frac{a}{b}$ និង $m_2 = -\frac{a}{b}$ ។

តាមសមីការអាស៊ីមតូត គេដឹងថា $\frac{a}{b} = 2$ និង $-\frac{a}{b} = -2$

ដោយ $a = 3$ គេទាញបាន $b = \frac{3}{2}$

ដូចនេះ សមីការស្តង់ដាគឺ $\frac{(y+2)^2}{9} - \frac{(x-3)^2}{\frac{9}{4}} = 1$

ប្រតិបត្តិ : រកសមីការស្តង់ដានៃអ៊ីពែរបូលដែលមានកំណុំត្រង់ចំណុច $(6, 1)$ និង $(-2, 1)$ ហើយអាស៊ីមតូតមានសមីការ $y = \frac{3}{4}x - \frac{1}{2}$ និង $y = -\frac{3}{4}x + \frac{5}{2}$ ។

3.3 សមីការទូទៅនៃអ៊ីពែរបូល

ឧទាហរណ៍ : អ៊ីពែរបូលមួយមានសមីការស្តង់ដា $\frac{(x-2)^2}{4} - \frac{(y+3)^2}{9} = 1$ ។ ដោយភាគបែងរួមនៃសមីការនេះស្មើនឹង 36 គេបាន : $9(x-2)^2 - 4(y+3)^2 = 36$

$$9(x^2 - 4x + 4) - 4(y^2 + 6y + 9) = 36$$

$$9x^2 - 36x + 36 - 4y^2 - 24y - 36 = 36$$

$$9x^2 - 4y^2 - 36x - 24x - 36 = 0$$

សមីការដឺក្រេទីពីរនៃ x និង y នេះហៅថាសមីការទូទៅនៃអ៊ីពែរបូល ។

ជាទូទៅ : សមីការដឺក្រេទីពីរមានរាង $Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$ ដែល $AB < 0$ ជាសមីការទូទៅនៃអ៊ីពែរបូល ។

លំហាត់គំរូ : អ៊ីពែរបូលមួយមានសមីការទូទៅ $4x^2 - 9y^2 + 32x + 18y + 91 = 0$ ។

ក. បំប្លែងសមីការនេះជាសមីការស្តង់ដា ។

ខ. រកកូអរដោនេនៃផ្ចិត កំពូល កំណុំនិងសមីការអាស៊ីមតូត ហើយសង់អ៊ីពែរបូលនោះ ។

ចម្លើយ :

ក. គេផ្តុំតួដែលមាន x និងតួដែលមាន y

$$4x^2-9y^2+32x+18y+91 = 0$$

$$4x^2+32x-9y^2+18y+91 = 0$$

$$4(x^2+8x)-9(y^2-2y)+91 = 0$$

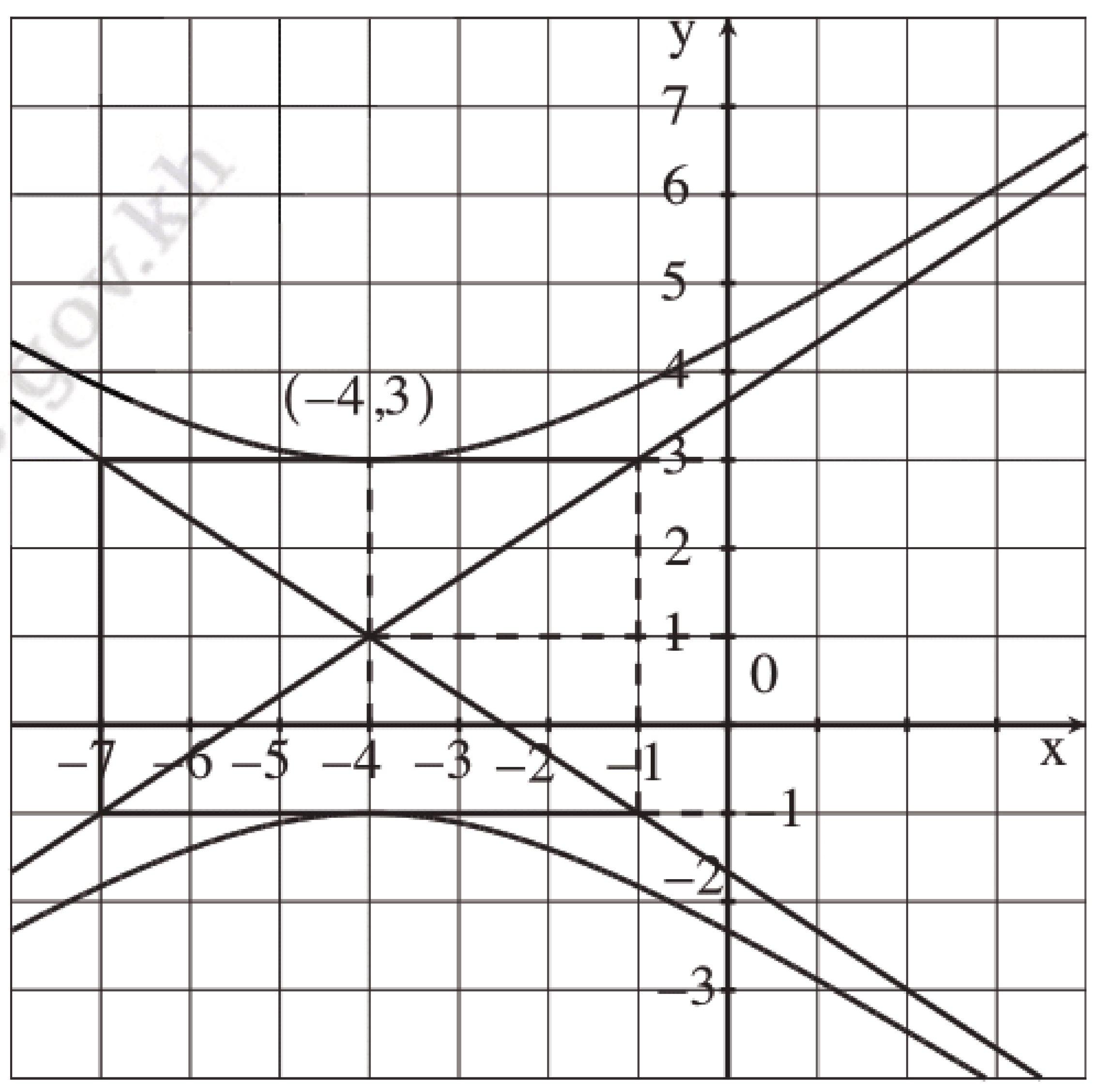
$$4(x^2+8x+16-16)-9(y^2-2y+1-1)+91 = 0$$

$$4(x+4)^2-64-9(y-1)^2+9+91 = 0$$

$$4(x+4)^2-9(y-1)^2 = -36$$

$$\frac{(y-1)^2}{4}-\frac{(x+4)^2}{9} = 1 \text{ ។}$$

ខ. សមីការអ៊ីពែរបូល $\frac{(y-1)^2}{4}-\frac{(x+4)^2}{9} = 1$



គេទាញបាន $h = -4$, $k = 1$, $a = 2$,

$b = 3$ និង $c^2 = a^2+b^2 = 4+9 = 13$

នោះ $c = \sqrt{13}$

អ័ក្សទទឹងស្របនឹងអ័ក្សអរដោនេ

កូអរដោនេផ្ចិតគឺ $(-4,\ 1)$

កូអរដោនេកំណុំទាំងពីរ $(h,\ k\pm a)$ គឺ

$(-4,\ 1\pm 2)$ ឬ $(-4,\ 3)$ និង $(-4,\ -1)$ ។

កូអរដោនេកំណុំទាំងពីរ $(h,\ k\pm c)$ គឺ $(-4,\ 1+\sqrt{13})$ និង $(-4,\ 1-\sqrt{13})$ ។

សមីការអាស៊ីមតូតទាំងពីរគឺ $y = k+\frac{a}{b}(x-h) = 1+\frac{2}{3}(x+4) = \frac{2}{3}x+\frac{11}{3}$

$$y = k-\frac{a}{b}(x-h) = 1-\frac{2}{3}(x+4) = -\frac{2}{3}x-\frac{5}{3} \text{ ។}$$

ប្រតិបត្តិ : រកកូអរដោនេផ្ចិត កំណុំ កំពូលនិងសមីការអាស៊ីមតូតនៃអ៊ីពែរបូល ហើយសង់អ៊ីពែរបូលនីមួយៗខាងក្រោម :

ក. $-x^2+4y^2-2x-16y+11 = 0$

ខ. $25x^2-16y^2+250x+32y+109 = 0$ ។

4. អ៊ិចសង់ទ្រីស៊ីតេ

និយមន័យ **:** អ៊ិចសង់ទ្រីស៊ីតេ e នៃអ៊ីពែរបូល គឺជាផលធៀបរវាង c ដែលជាចម្ងាយពីផ្ចិតទៅកំណុំនិង a ដែលជាចម្ងាយពីផ្ចិតទៅកំពូលនៃអ៊ីពែរបូល $e = \frac{c}{a}$ ។

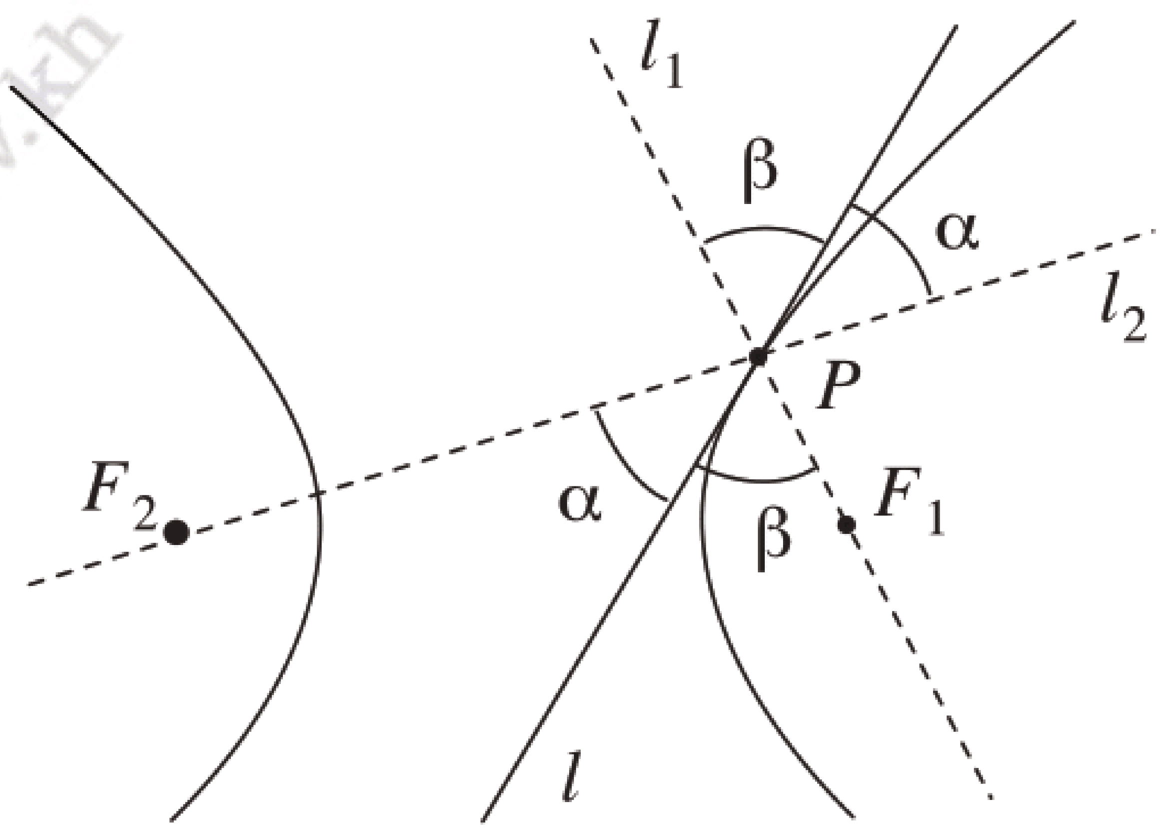
សំគាល់ **:** គ្រប់អ៊ីពែរបូលមានកំណុំនៅលើអ័ក្សទទឹងនៃអ៊ីពែបូលដែល $c > a > 0$ **នោះ** $\frac{c}{a} > 1$ ឬ $e > 1$ ។

5. លក្ខណៈចំណាំងផ្លាតនៃអ៊ីពែរបូល

អ៊ីពែរបូលមានលក្ខណៈចំណាំងផ្លាតដូចគ្នានឹងអេលីបដែរ ។

បើ ℓ ជាបន្ទាត់ប៉ះទៅនឹងអ៊ីពែរបូលត្រង់ចំណុច P ដែលមានកំណុំ F_1 និង F_2 ដូចរូប ។

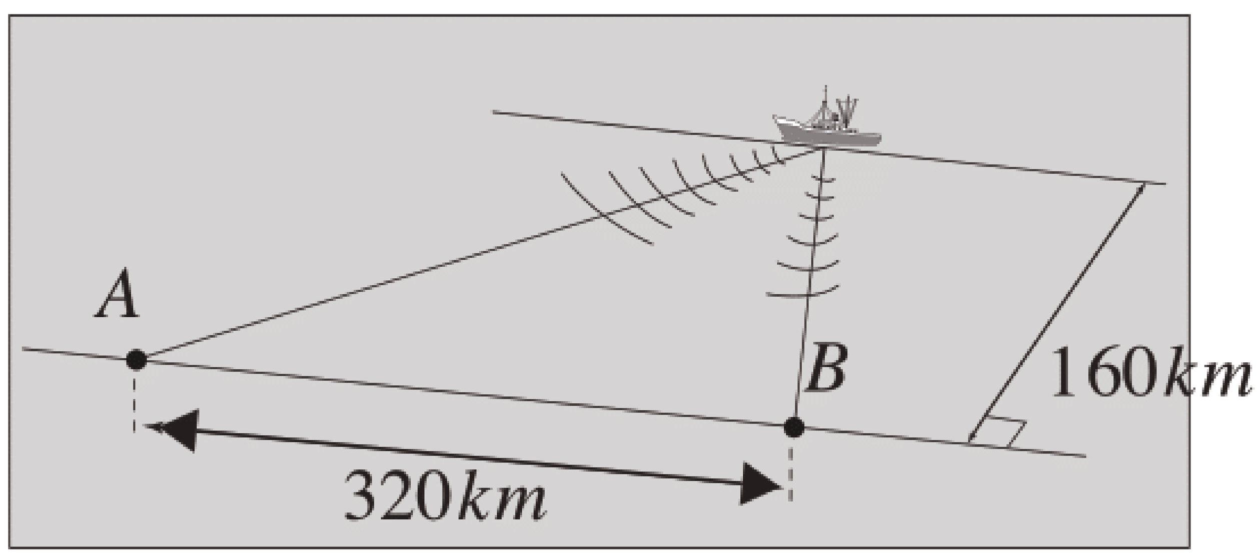
បើ α ជាមុំស្រួចផ្គុំឡើងរវាង F_2P និង ℓ ហើយ β ជាមុំផ្គុំរវាង F_1P និង ℓ នោះ $\alpha = \beta$ ។



បើកាំពន្លឺមានទិសដៅតាមបន្ទាត់ ℓ_1 កាត់តាមចំណុច F_1 និង P នោះវានឹងចាំងផ្លាតត្រឡប់ពីចំណុច P តាមបន្ទាត់ ℓ_2 កាត់តាមចំណុច F_2 និង P ។

លក្ខណៈនេះគេអាចប្រើក្នុងការកំណត់កែវយឺតប្រភេទ Casse grain ។

ឧទាហរណ៍ **:** កប៉ាល់មួយកំពុងធ្វើដំណើរស្របនឹងឆ្នេរត្រង់ជាប់មាត់សមុទ្រ ហើយមានចម្ងាយ $160km$ ពីមាត់សមុទ្រ កប៉ាល់នេះបានបង្ហាញនូវសញ្ញាគ្រោះថ្នាក់ដែលត្រូវបានទទួលដោយស្ថានីយពីរ A និង B ហើយមានចម្ងាយពីគ្នា $320km$ (ដូចរូបខាងស្តាំ) ។



តាមការវាស់រយៈពេលខុសគ្នាដោយមន្ត្រីស្ថានីយក្នុងការចាប់បានសញ្ញាគ្រោះថ្នាក់កំណត់ឃើញថាកប៉ាល់នេះនៅជិតស្ថានីយ B ជាងស្ថានីយ A ចម្ងាយ $256km$ ។ តើកប៉ាល់នេះមានទីតាំងនៅត្រង់ចំណុចណា ?

តាង d_1 ចម្ងាយពីកប៉ាល់ទៅស្ថានីយ A

d_2 ចម្ងាយពីកប៉ាល់ទៅស្ថានីយ B

គេមាន $d_1 - d_2 = 256 = 2a$

នាំឱ្យ $a = 128$

ដោយ $c = \frac{320}{2} = 160$ និង $c^2 = a^2 + b^2$

នោះ $b^2 = c^2 - a^2$

$b^2 = 160^2 - 128^2$

$\Rightarrow \quad b = \sqrt{160^2 - 128^2} = 96$

សមីការស្តង់ដានៃអ៊ីពែរបូលដែលមានកំណុំមួយនៅត្រង់ចំណុច A ហើយកាត់តាមកូអរដោនេនៃកប៉ាល់នៅត្រង់ចំណុច $P(x,\ y)$ គឺ $\frac{x^2}{128^2} - \frac{y^2}{96^2} = 1$ ។

ដោយ $y = 160$ គេបាន $\frac{x^2}{128^2} - \frac{160^2}{96^2} = 1$

$$x = \sqrt{\left(1 + \frac{160^2}{96^2}\right)128^2} \approx 128\sqrt{3.8}$$

កូអរដោនេនៃចំណុចដែលកប៉ាល់ស្ថិតនៅគឺ $(128\sqrt{3.8},\ 160)$ ។

មេរៀនសង្ខេប

- សមីការស្តង់ដានៃអ៊ីពែរបូលដែលមានផ្ចិតជាគល់អ័ក្សកូអរដោនេ

ផ្ចិត	អ័ក្សទទឹង	កំណុំ	កំពូល	សមីការស្តង់ដា	អាស៊ីមតូត
$(0,\ 0)$	នៅលើអ័ក្សអាប់ស៊ីស	$(c,\ 0)$ និង $(-c,\ 0)$	$(a,\ 0)$ និង $(-a,\ 0)$	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ $c^2 = a^2 + b^2$	$y = \frac{b}{a}x$ និង $y = -\frac{b}{a}x$
$(0,\ 0)$	នៅលើអ័ក្សអរដោនេ	$(0,\ c)$ និង $(0,\ -c)$	$(0,\ a)$ និង $(0,\ -a)$	$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$ $c^2 = a^2 + b^2$	$y = \frac{a}{b}x$ និង $y = -\frac{a}{b}x$

• សមីការស្តង់ដានៃអ៊ីពែរបូលដែលមានផ្ចិតខុសពីគល់អ័ក្សកូអរដោនេ

ផ្ចិត	អ័ក្សទទឹង	កំណុំ	កំពូល	សមីការស្តង់ដា	អាស៊ីមតូត
(h, k)	ស្របនឹងអ័ក្សអាប់ស៊ីស	$(h+c, k)$ និង $(h-c, k)$	$(h+a, k)$ និង $(h-a, k)$	$\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$ $c^2=a^2+b^2$	$y=k+\frac{b}{a}(x-h)$ និង $y=k-\frac{b}{a}(x-h)$
(h, k)	ស្របនឹងអ័ក្សអរដោនេ	$(h, k+c)$ និង $(h, k-c)$	$(h, k+a)$ និង $(h, k-a)$	$\frac{(y-k)^2}{a^2}-\frac{(x-h)^2}{b^2}=1$ $c^2=a^2+b^2$	$y=k+\frac{a}{b}(x-h)$ និង $y=k-\frac{a}{b}(x-h)$

? លំហាត់

1. សង់អ៊ីពែរបូលនិងអាស៊ីមតូតរបស់វា

ក. $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$ ខ. $\frac{y^2}{9}-\frac{x^2}{16}=1$ គ. $y^2-4x^2=16$

ឃ. $x^2-y^2=1$ ង. $x^2-5y^2=25$ ច. $y^2-x^2=25$ ។

2. រកផ្ចិត កំណុំ កំពូល អ៊ិចសង់ទ្រីតេនិងអាស៊ីមតូតនៃអ៊ីពែរបូល បន្ទាប់មកសង់អ៊ីពែរបូលនោះ

ក. $y^2-\frac{x^2}{4}=1$ ខ. $5y^2=4x^2+20$ គ. $\frac{(x-1)^2}{4}-\frac{(y+2)^2}{1}=1$

ឃ. $\frac{(x-2)^2}{4}-\frac{(y+3)^2}{9}=1$ ង. $4(x-2)^2-9(y+3)^2=36$

ច. $9x^2-y^2-36x-6y+18=0$ ឆ. $4x^2-y^2+8x+2y-1=0$ ។

3. រកផ្ចិត កំណុំ កំពូលនិងអាស៊ីមតូតនៃអ៊ីពែរបូល បន្ទាប់មកសង់អ៊ីពែរបូលនោះ

ក. $x^2-y^2-2x-2y-1=0$ ខ. $y^2-4x^2-16x-2y-19=0$

គ. $3y^2-x^2+6x-12y=0$ ឃ. $4x^2-5y^2-16x+10y+31=0$ ។

4. រកសមីការស្តង់ដានៃអ៊ីពែរបូលដែលផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌដែលឱ្យ ៖

ក. ផ្ចិតមានកូអរដោនេ $(0, 0)$ កំពូលមានកូអរដោនេ $(0, 2)$ និងកំណុំមានកូអរដោនេ $(0, 4)$ ។

ខ. ផ្ចិតមានកូអរដោនេ $(0, 0)$ កំពូលមានកូអរដោនេ $(3, 0)$ និងកំណុំមានកូអរដោនេ $(5, 0)$ ។

គ. កំពូលទាំងពីរមានកូអរដោនេ $(\pm1, 0)$ និងអាស៊ីមតូតទាំងពីរមាសមីការ $y = \pm3x$ ។

ឃ. កំពូលទាំងពីរមានកូអរដោនេ $(0, \pm3)$ និងអាស៊ីមតូតទាំងពីរមានសមីការ $y = \pm3x$ ។

ង. កំពូលទាំងពីរមានកូអរដោនេ $(2, \pm3)$ និងចំណុចមួយនៅលើក្រាបមានកូអរដោនេ $(0, 5)$ ។

5. រកសមីការស្តង់ដានៃអ៊ីពែរបូលដែលចំពោះគ្រប់ចំណុចនៅលើអ៊ីពែរបូលមានផលដកចម្ងាយរបស់វាពីចំណុច $(2, 2)$ និង $(10, 2)$ ស្មើនឹង 6 ។

6. រកសមីការស្តង់ដានៃអ៊ីពែរបូលដែលចំពោះគ្រប់ចំណុចនៅលើអ៊ីពែរបូល មានផលដកចម្ងាយរបស់វាពីចំណុច $(-3, 0)$ និង $(-3, 3)$ ស្មើនឹង 2 ។

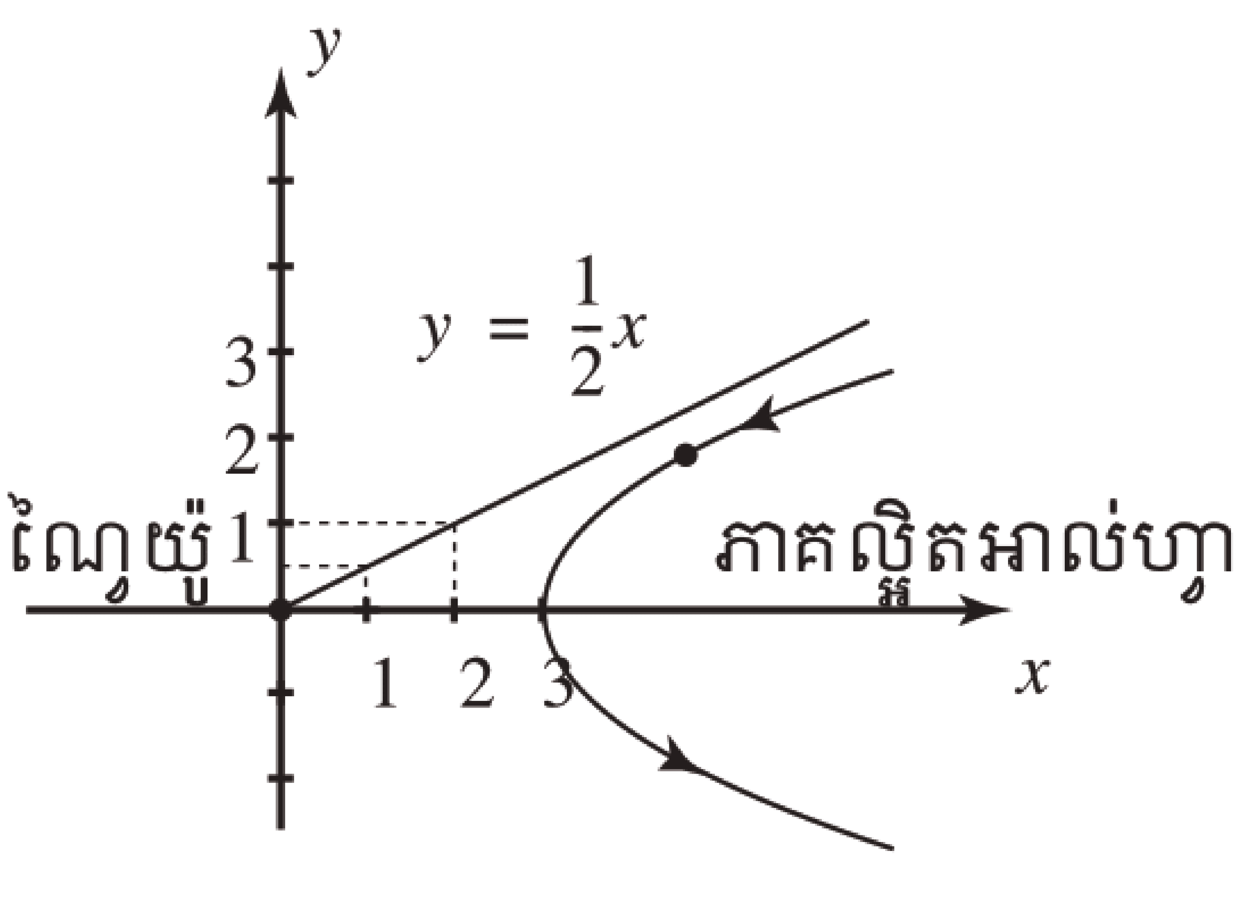
7. បង្ហាញថាបន្ទាត់ប៉ះទៅនឹង $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2} = 1$ ត្រង់ចំណុច (x_0, y_0) មានសមីការ $\frac{x_0x}{a^2}-\frac{y_0y}{b^2} = 1$ ។

8. កំណុំទាំងពីរនៃអ៊ីពែរបូលគឺ $F_1(0, 3)$ និង $F_2(0, -3)$ ហើយ P ជាចំណុចមួយនៅលើអ៊ីពែរបូលដែលមានផលដកចម្ងាយរបស់វាពីចំណុច F_1 និង F_2 ស្មើនឹង 2 ឯកតា។ ប្រើនិយមន័យនៃអ៊ីពែរបូលទាញរកសមីការស្តង់ដានៃអ៊ីពែរបូលនោះ ។

9. រកសមីការនៃអ៊ីពែរបូលដែលមានកំណុំ $(\pm4, 0)$ ហើយតម្លៃនៃផលដកចម្ងាយពីចំណុចមួយនៅលើអ៊ីពែរបូលទៅកំណុំទាំងពីរស្មើនឹង 4 ។

10. រកសមីការបន្ទាត់ប៉ះទៅនឹងអ៊ីពែរបូល $9x^2 - 4y^2 = 36$ ដែលកាត់តាមចំណុច $(1, 0)$ ។

11. អ្នករូបវិទ្យាម្នាក់បានរកឃើញថា នៅពេលភាគល្អិតអាល់ហ្វាត្រូវបានបាញ់ចេញឆ្ពោះទៅណ្វៀយ៉ូនៃអាតូមមួយ ដោយវាបានច្រានចេញពីណ្វៀយ៉ូតាមគន្លងអ៊ីពែរបូល ។ រូបខាងស្តាំ នេះបង្ហាញពីគន្លងនៃភាគល្អិតដែលចាប់ផ្តើមឆ្ពោះទៅគល់អ័ក្សកូអរដោនេតាមបន្ទាត់មួយមានសមីការ $y = \frac{1}{2}x$ ហើយធ្លាក់មក 3 ឯកតាពីណ្វៀយ៉ូ ។ ចូររកសមីការនៃគន្លង ។



លំហាត់ជំពូក 6

1. ចូរបញ្ជាក់ប្រភេទសមីការនីមួយៗនិងគូសក្រាបរបស់វា

ក. $y^2 - 12y - 8x + 20 = 0$ ខ. $3x^2 + 2y^2 - 12x + 12y + 29 = 0$

គ. $3x^2 - 2y^2 + 24x + 12y + 24 = 0$ ឃ. $x^2 - 6x + 2y + 9 = 0$ ។

2. រកសមីការប៉ារ៉ាបូលដែលកំណត់ដោយលក្ខខណ្ឌដូចខាងក្រោម ៖

ក. កំណុំ $F(4, 0)$ និងកំពូល $V(2, 0)$

ខ. កំពូល $V(0, 2)$ និងបន្ទាត់ប្រាប់ទិសមានសមីការ $x + 3 = 0$ ។

3. រកសមីការនៃអេលីបនីមួយៗខាងក្រោម ៖

ក. កំពូលទាំងពីរមានកូអរដោនេ $(0, 2)$ និង $(4, 2)$ និងមានអ៊ិចសង់ទ្រីស៊ីតេស្មើនឹង $\frac{1}{2}$ ។

ខ. កំពូលទាំងពីរមានកូអរដោនេ $(3, 1)$ និង $(3, 9)$ ហើយអ័ក្សតូចមានប្រវែងស្មើនឹង 6 ឯកតា ។

4. រកសមីការនៃអ៊ីពែរបូលនីមួយៗខាងក្រោម ៖

ក. កំណុំទាំងពីរមានកូអរដោនេ $(-4, 0)$ និង $(4, 0)$ ហើយតម្លៃដាច់ខាតនៃផលដកចម្ងាយពីចំណុចមួយស្ថិតនៅលើអ៊ីពែរបូលទៅកំណុំទាំងពីរស្មើនឹង 4 ។

ខ. កំណុំទាំងពីរមានកូអរដោនេ $(0, 0)$ និង $(8, 0)$ ហើយអាស៊ីមតូតទាំងពីរមានសមីការ $y = 2(x-4)$ និង $y = -2(x-4)$ ។

5. រកសមីការនៃបន្ទាត់ប៉ះទៅនឹងប៉ារ៉ាបូលមានសមីការ $y = x^2 - 2x + 2$ ហើយកែងទៅនឹងបន្ទាត់មានសមីការ $y = x - 2$ ។

6. បង្ហាញថា បន្ទាត់ប៉ះទៅនឹងអេលីប $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ត្រង់ចំណុច (x_0, y_0) មានសមីការ $\frac{x_0}{a^2}x + \frac{y_0}{b^2}y = 1$ ។

7. រកតម្លៃ a តាម b ដើម្បីឱ្យអ៊ីពែរបូល $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ គឺប៉ះទៅនឹងបន្ទាត់នៃសមីការ $2x - y - 4 = 0$ ។ រួចគណនាតម្លៃ a បើ $b = 2$ ។

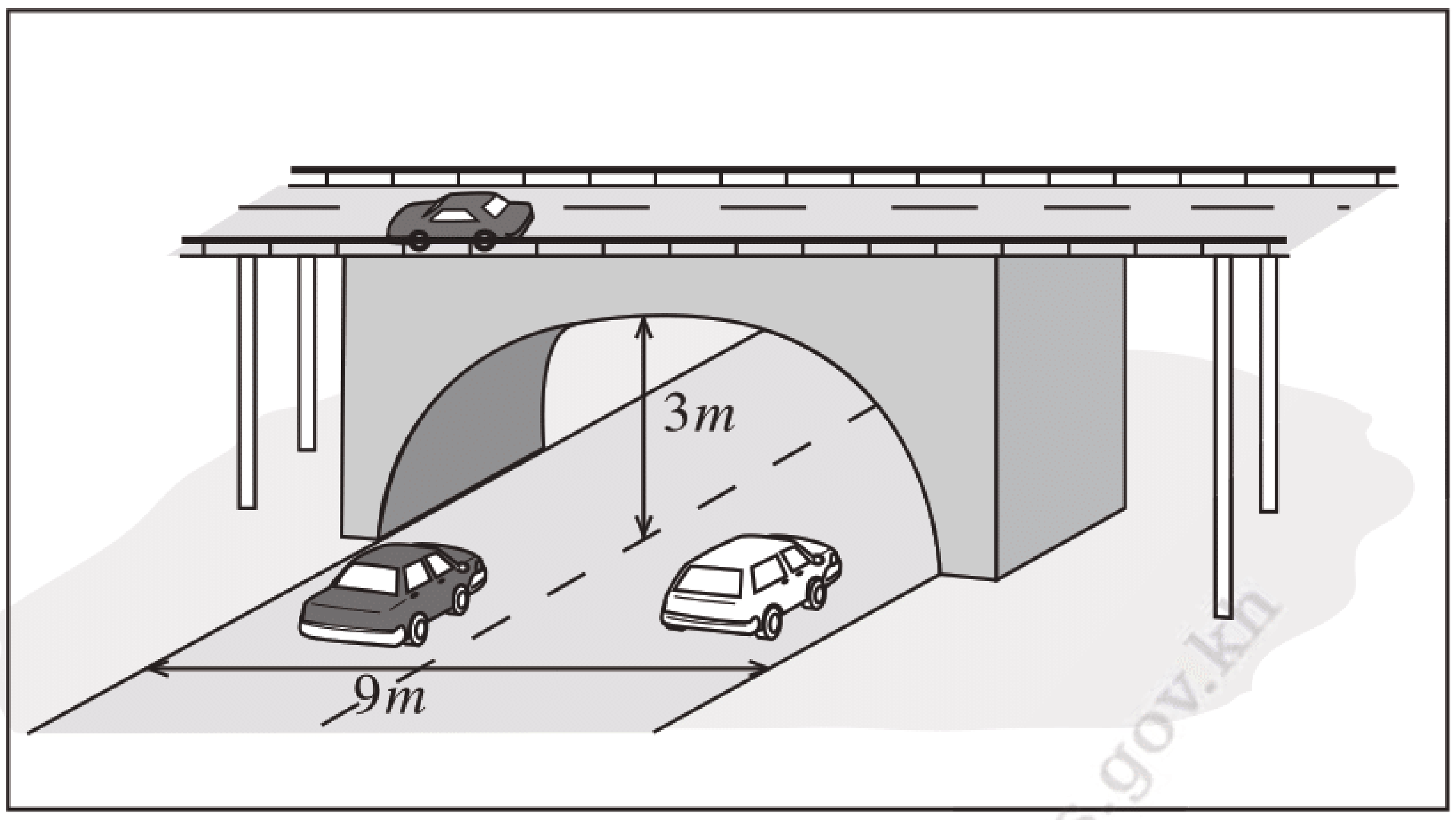
8. រកវិមាត្រនៃចតុកោណកែងដែលមានផ្ទៃក្រឡាអតិបរមាអាចចារឹកក្នុងអេលីប $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ។

9. អាងមួយមានរាងជាអេលីប ។ អ័ក្សធំមានប្រវែង $10m$ និងអ័ក្សតូចមានប្រវែង $6m$ ។

ក. សរសេរសមីការនៃអេលីប ។

ខ. រកប្រវែងទទឹងអាងនៅត្រង់ចំណុចមួយនៅលើអ័ក្សធំដែលមានចម្ងាយ $2m$ ពីផ្ចិត ។

10. ធ្នូនៃស្ពានមួយមានរាងពាក់កណ្ដាលអេលីបដែល មានអ័ក្សធំជាអ័ក្សដេក ។ បាតនៃធ្នូកាត់ទទឹងផ្លូវនៅក្រោមស្ពានមានប្រវែង $9m$ ហើយផ្នែកខ្ពស់បំផុតនៃធ្នូនៅចំកណ្ដាលទ្រូងផ្លូវក្រោមស្ពានមានកម្ពស់ $3m$ ដូចរូបដែលបានបង្ហាញ ។ រកប្រវែងកម្ពស់នៃធ្នូដែលមានចម្ងាយ $1.8m$ ពីផ្ចិតនៃបាត ។



11. ភាគល្អិតមួយកំពុងផ្លាស់ទីស្របនឹងដំណើរទ្រនិចនាឡិកានៅលើគន្លងរាងអេលីបមួយដែលមានសមីការ $\frac{x^2}{10^2}+\frac{y^2}{5^2}=1$ ។ ភាគល្អិតនេះបានចេញពីគន្លងនៅត្រង់ចំណុច $(-8,\ 3)$ ហើយផ្លាស់ទីតាមបន្ទាត់មួយប៉ះទៅនឹងអេលីប ។ តើភាគល្អិតនេះនឹងកាត់អ័ក្សអរដោនេត្រង់ចំណុចណា ?

ចម្លើយលំហាត់មេរៀនទី 1 ជំពូក 1

1\. ខ. ស្រាយបញ្ជាក់ $\lim_{x \to 2^-} \sqrt{(x-2)(x-3)} = 0$

ដោយ $x \to 2^-$ យើងឧបមាថា x នៅចន្លោះ $0 < x < 2$ ។

គេបាន $|x-3| = 3-x < 3$ និង $|x-2| = 2-x > 0$

ចំពោះគ្រប់ $\varepsilon > 0$ យក $\delta = \frac{\varepsilon^2}{3}$ នោះដែល

$0 < |x-2| < \delta$ នាំឱ្យ $\sqrt{(x-2)(x-3)} = \sqrt{(2-x)(3-x)} < \sqrt{3\delta} = \sqrt{3 \times \frac{\varepsilon^2}{3}} = \varepsilon$ ។

ដូចនេះ ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត $\varepsilon > 0$ មាន $\delta > 0$

ដែល $0 < |x-2| < \delta$ នាំឱ្យ $\left|\sqrt{(x-2)(x-3)}\right| < \varepsilon$ ។

គេបាន $\lim_{x \to 2^-} \sqrt{(x-2)(x-3)} = 0$ ។

2\. ខ. បង្ហាញថា $\lim_{x \to a} [f(x) \pm g(x)] = M \pm L$ ។

ដោយ $\lim_{x \to a} f(x) = M$ និង $\lim_{x \to a} g(x) = L$ ចំពោះគ្រប់ $\varepsilon > 0$

មាន $\delta_1 > 0$ និង $\delta_2 > 0$ ដែល

$|f(x) - M| < \frac{\varepsilon}{2}$ គ្រប់ x ដែល $|x-a| < \delta_1$

$|g(x) - L| < \frac{\varepsilon}{2}$ គ្រប់ x ដែល $|x-a| < \delta_2$

ម្យ៉ាងទៀត $|[f(x) \pm g(x)] - (M \pm L)| = |[f(x) - M] \pm [g(x) - L]| \le |f(x) - M| + |g(x) - L|$

បើគេយក δ ដែល $\delta < \delta_1$ និង $\delta < \delta_2$ នោះគ្រប់ x ដែល $|x-a| < \delta$ គេបាន :

$|[f(x) \pm g(x)] - (M \pm L)| \le |f(x) - M| + |g(x) - L| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ ។

ដូចនេះ គ្រប់ $\varepsilon > 0$ មាន δ ដែល $|x-a| < \delta$ នាំឱ្យ $|[f(x) \pm g(x)] - (M \pm L)| < \varepsilon$

គេបាន $\lim_{x \to a} [f(x) \pm g(x)] = M \pm L$ ។

3\. ក. $$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x^2 - x + 1} - 1}{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}} = \lim_{x \to 0} \frac{[(x^2 - x + 1) - 1](\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})}{[(1+x) - (1-x)](\sqrt{x^2 - x + 1} + 1)}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{(x^2 - x)(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})}{2x(\sqrt{x^2 - x + 1} + 1)} = -\frac{1}{2}$$ ។

ឃ. $\lim_{x \to -\infty} (\sqrt{x^2 + 8x - 1} - \sqrt{x^2 - 3})$ តាង $x = -t$, $t > 0$

$x \to -\infty$ នាំឱ្យ $t \to +\infty$ ។ ជំនួស $x = -t$

គេបាន $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{t^2-8t-1}-\sqrt{t^2-3}) = \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{(t^2-8t-1)-(t^2-3)}{\sqrt{t^2-8t-1}+\sqrt{t^2-3}}$

$$= \lim_{t\to+\infty}\frac{-8t+2}{\sqrt{t^2-8t-1}+\sqrt{t^2-3}} = -4$$ ។

4\. ខ. ដោយ $\lim\limits_{x\to0} x = 0$ គេបាន $\lim\limits_{x\to0}(\sqrt{1+3x}+a) = 0$

$\lim\limits_{x\to0}(\sqrt{1+3x}+a) = a+1$ គេបាន $a+1 = 0$ នាំឱ្យ $a = -1$ ។

ដូចនេះ $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+3x}+a}{x} = \lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+3x}-1}{x} = \lim\limits_{x\to0}\dfrac{(\sqrt{1+3x}-1)(\sqrt{1+3x}+1)}{x(\sqrt{1+3x}+1)}$

$$= \lim_{x\to0}\frac{3}{\sqrt{1+3x}+1} = \frac{3}{2}$$ ។

គ. $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt{x+a}-1}{x-2}$

$\lim\limits_{x\to0} x-2 = 0$ គេបាន $\lim\limits_{x\to0}(\sqrt{x+a}-1) = 0$

នាំឱ្យ $\sqrt{a+2}-1 = 0$ ដូចនេះ $a = -1$ ។

$$\lim_{x\to2}\frac{\sqrt{x+a}-1}{x-2} = \lim_{x\to2}\frac{\sqrt{x-1}-1}{x-2} = \lim_{x\to2}\frac{(x-1)-1}{(x-2)(\sqrt{x-1}+1)} = \frac{1}{2}$$ ។

5\. ក. $\dfrac{3}{25}$ ខ. $+\infty$ គ. $\dfrac{1}{4\sqrt{2}}$ ឃ. $\dfrac{1}{2}$ ង. 1 ច. $\dfrac{1}{2}$ ។

6\. ក. $+\infty$ ខ. $-\infty$ គ. 0 ឃ. $\dfrac{1}{2}$ ង. $-\infty$

ច. $\lim\limits_{x\to-\infty} x\ln(x^2+1) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln(x^2+1) = +\infty$

ឆ. $+\infty$ ជ. 1 ។

7\. ក. $\dfrac{1}{2}$ ខ. -1 គ. $\dfrac{3}{2}$ ឃ. $\dfrac{5}{2}$ ។

8\. ក. $-\dfrac{1}{4}$ ខ. 3 គ. 1 ឃ. 1 ង. $\dfrac{1}{2}$ ច. $6\sqrt{2}$

9\. $f(x) = x^2-4x+3$

10\. $S_n = \dfrac{na^2}{2}\sin\dfrac{2\pi}{n}$, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{na^2}{2}\sin\dfrac{2\pi}{n} = \lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{na^2}{2}\cdot\dfrac{2\pi}{n}\cdot\dfrac{\sin\frac{2\pi}{n}}{\frac{2\pi}{n}} = \pi a^2$ ។

ដូចនេះ $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \pi a^2$ ។

ចម្លើយលំហាត់មេរៀនទី 2 ជំពូក 1

1. ក. ជាប់ត្រង់ $x = 2$ គ. ដាច់ត្រង់ $x = 4$ ង. ដាច់ត្រង់ $x = 2$ ច. ជាប់ត្រង់ $x = -1$ ។

2. ក. $x = 3$ ខ. $x = -5$, $x = 1$ គ. $x = -1$, $x = 2$ ច. f ដាច់ត្រង់ $x = 1$ ។

4. ក. $A = 6$

5. $A = 0$, $B = -4$

6. ក. f គ្មានន័យត្រង់ $x = 3$ នាំឱ្យ f មិនជាប់ត្រង់ $x = 3$ ទេ ។

គេយក g ដែល $g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-9}{x-3} & \text{បើ } x \neq 3 \\ 6 & \text{បើ } x = 3 \end{cases}$

g ជាបន្លាយនៃអនុគមន៍ f តាមភាពជាប់ត្រង់ 3 ។ $g(3) = 6$

គ. $g(1) = 3$ ។

7. ក. $f(3) = 11$, $c = 3$ គ. $f(2) = 4$, $c = 2$ ។

8. ក. $c = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ ។

9. ក. តាង $f(x) = \cos x - x\tan x$ នោះ $f(x)$ ជាប់លើចន្លោះ $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$

$f(0) = 1 > 0$

$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\tan\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{2\sqrt{2}-\pi}{4} < \frac{2.84-3.14}{4} < 0$

ដូចនេះ តាមទ្រឹស្តីបទតម្លៃកណ្តាល គេសន្និដ្ឋានថា $f(x)$ យ៉ាងហោចណាស់មានឫសពិតមួយនៅចន្លោះ $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ ។

ខ. $f(x) = (x^n - 1)\cos x + \sqrt{2}\sin x - 1$ ជាប់លើ $(-\infty, +\infty)$

$f(0) = -2 < 0$

$f(1) = (1^n - 1)\cos 1 + \sqrt{2}\sin 1 - 1 = \sqrt{2}\sin 1 - 1 > \sqrt{2}\sin\frac{\pi}{4} - 1 = 0$

តាមទ្រឹស្តីបទតម្លៃកណ្តាល គេថា $f(x)$ មានឫសពិតមួយនៅចន្លោះ $(0, 1)$ ។

ចម្លើយលំហាត់ជំពូក 1

1. ក. $+\infty$ ខ. 1 គ. $\frac{1}{2}$

ឃ. គេបាន $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2x - \sin x}{\sqrt{1 - \cos x}}$

$$f(x) = \frac{2x - \sin x}{\sqrt{1 - \cos x}} = \frac{2x - \sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\sqrt{2\sin^2\frac{x}{2}}} = \frac{2\left(x - \sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\right)}{\sqrt{2}\left|\sin\frac{x}{2}\right|}$$

បើ $x \geq 0 \quad x \to 0^+ \quad : \left|\sin\frac{x}{2}\right| = \sin\frac{x}{2}$

$$f(x) = \sqrt{2} \times \frac{\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}} = \sqrt{2} \times \left(\frac{x}{\sin\frac{x}{2}} - \cos\frac{x}{2}\right) = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\frac{\sin\frac{x}{2}}{x}} - \cos\frac{x}{2}\right)$$

$$\lim_{x \to 0^+} \sqrt{2}(2 - 1) = \sqrt{2}$$

បើ $x \leq 0 \quad x \to 0^- \quad : \left|\sin\frac{x}{2}\right| = -\sin\frac{x}{2}$

$$f(x) = \sqrt{2} \times \left(-\frac{x}{\sin\frac{x}{2}} + \cos\frac{x}{2}\right) = \sqrt{2} \times \left(-\frac{1}{\frac{\sin\frac{x}{2}}{x}} + \cos x\right)$$

$$\lim_{x \to 0^-} \sqrt{2}(-2 + 1) = -\sqrt{2}$$ ។

2. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 + ax - \sqrt{1 + x}}{x^2} = \dfrac{1}{8}$, $a = \dfrac{1}{2}$ ។

3. ក. តាង $U = \sqrt[mn]{x} \cdot \geq x = U^{mn}$ នាំឱ្យ $\sqrt[n]{x} = U^m$ និង $\sqrt[m]{x} = U^n$

$$\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt[n]{x} - 1}{\sqrt[m]{x} - 1} = \lim_{x \to u} \frac{U^m - 1}{U^n - 1} = \frac{m}{n}$$ ។

ខ. $\dfrac{1}{4a\sqrt{a - b}}$ ។

4. គេមាន $f(0) = \sqrt{2}$

ចំពោះ $x \neq 0$, $f(x) = \sin x + \dfrac{\sqrt{1 - \cos 2x}}{\sin x} = \sin x + \dfrac{\sqrt{2\sin^2 x}}{\sin x} = \sin x + \dfrac{\sqrt{2}|\sin x|}{\sin x}$ ។

គេបាន $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \sin x + \dfrac{-\sqrt{2}\sin x}{\sin x} = -\sqrt{2}$ ។

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \sin x + \dfrac{\sqrt{2}\sin x}{\sin x} = \sqrt{2} = f(0)$ ។

ដូចនេះ អនុគមន៍ $f(x)$ ជាប់ខាងស្តាំតែមិនជាប់ខាងឆ្វេងទេ ។ $f(x)$ មិនជាប់ត្រង់ $x = 0$ ទេ ។

5. ក. គ្រប់ $x \ge 1$: $f(x) = \log_3 x$ ដូចនេះ $f(1) = \log_3 1 = 0$ និង $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = 0 = f(1)$

គេដឹងថា $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} (-2x+a) = a-2$

ដូចនេះ ដើម្បីឱ្យអនុគមន៍ជាប់ត្រង់ $x = 1$ គេបាន $a-2 = 0 \Leftrightarrow a = 2$

ខ. គ្រប់ $x \le 0$: $f(x) = a$ នាំឱ្យ $f(0) = a$ និង $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = a = f(0)$

គេដឹងថា $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} x\sin\dfrac{1}{x} = 0$

ដូចនេះ អនុគមន៍ជាប់ត្រង់ $x = 0$ គេបាន $a = 0$ ។

6. ក. តាង $f(x) = x - 1 - \sin x$

$f(0) = -1 < 0$, $f(\pi) = \pi - 1 > 0$

$f(x) = 0$ នាំឱ្យ $\sin x = x - 1$

ដោយ $f(0) \cdot f(\pi) < 0$ នាំឱ្យ $f(x)$ មានឫសយ៉ាងតិចណាស់មួយនៅចន្លោះ $(0, \pi)$ ។

ខ. $20\log_{10}x - x = 0$ តាង $f(x) = 20\log_{10}x - x$

$f(x)$ ជាអនុគមន៍ជាប់នៅចន្លោះ $(0, +\infty)$

គេបាន $f(1) = -1 < 0$, $f(10) = 20 - 10 = 10 > 0$

ដោយ $f(1) \cdot f(10) < 0$ នាំឱ្យ $f(x)$ មានឫសមួយយ៉ាងតិចនៅចន្លោះ $(1, 10)$ ។

7. $f(x) = ax^2 + bx + c$ ជាប់លើចន្លោះ $\left[0, \dfrac{2}{3}\right]$

គេបាន $f(0)\cdot f\left(\dfrac{2}{3}\right) = c\left(\dfrac{4a}{9} + \dfrac{2b}{3} + c\right) = c\dfrac{(4a+6b+9c)}{9}$

គេដឹងថា $2a + 3b + 6c = 0$ សមមូល $4a + 6b + 12c = 0$

សមមូល $4a + 6b + 9c = -3c$

សមមូល $f(0)\cdot f\left(\dfrac{2}{3}\right) = -3c^2 \le 0$

ដូចនេះ $ax^2 + bx + c = 0$ មានឫសមួយយ៉ាងតិចនៅចន្លោះ $0 \le x_0 \le \dfrac{2}{3}$ ។

6. ក. $y = 3x^2 - \sin 2x$

$y' = 6x - 2\cos x$

$y'' = 6 + 4\sin 2x$

ឃ. $g(x) = \dfrac{x^2}{x+1}$

$g'(x) = \dfrac{x^2+2x}{(x+1)^2}$

$g''(x) = \dfrac{2}{(x+1)^3}$

7. ឃ. $x + \sin y = xy$

$(x+\sin y)' = (xy)'$

$1 + y'\cos y = y + xy'$

$y' = \dfrac{1-y}{x-\cos y}$

ច. $(y^2)' = (\sin 2x + \cos^4 2x)$

$2yy' = 8\cos^3 2x - 8\sin^3 2x$

$yy' = 4(\cos^3 2x - \sin^3 2x)$

$y' = \dfrac{4(\cos^3 2x - \sin^3 2x)}{y}$

8. រក y' និង y'' ជាអនុគមន៍នៃ x និង y :

ក. គេមាន $2x^2 + y^2 = 4$

ដេរីវេអង្គទាំងពីរ គេបាន $\dfrac{d}{dx}[2x^2+y^2] = \dfrac{d}{dx}[4]$

$\dfrac{d}{dx}[2x^2] + \dfrac{d}{dx}[y^2] = 0$

$4x + 2yy' = 0 \Rightarrow y' = -\dfrac{2x}{y}$

គេបាន $4 + 2y'y' + 2yy'' = 0$

$$y'' = \frac{-4-2(y')^2}{2y} = \frac{-2-\left(-\frac{2x}{y}\right)^2}{y} = \frac{-2y^2-4x^2}{y^3}$$

ដូចនេះ $y' = -\dfrac{2x}{y}$ និង $y'' = \dfrac{-4x^2-2y^2}{y^3}$ ។

ខ. គេមាន $2x^3 + y^3 = 8$

ដេរីវេអង្គទាំងពីរ គេបាន $\dfrac{d}{dx}[2x^3+y^3] = \dfrac{d}{dx}[8]$

$6x^2 + 3y^2y' = 0$ សមមូល $y' = -\dfrac{2x^2}{y^2}$

គេបាន $12x + 6yy'y' + 3y^2y'' = 0$

$$y'' = \frac{-4x - 2y(y')^2}{y^2} = \frac{-4x - 2y\left(\frac{4x^4}{y^4}\right)}{y^2}$$

$$= \frac{-4xy^4 - 8x^4y}{y^6} \text{ ។}$$

ដូចនេះ $y' = -\frac{2x^2}{y^2}$ និង $y'' = \frac{-4xy(y^3 + 2x^3)}{y^6} = \frac{-4x(y^3 + 2x^3)}{y^5}$ ។

គ. គេមាន $x^2 + xy + y^2 = -1$

ដេរីវេអង្គទាំងពីរ គេបាន $\frac{d}{dx}[x^2 + xy + y^2] = \frac{d}{dx}[-1]$

$2x + y + xy' + 2yy' = 0$ សមមូល $y' = -\frac{2x + y}{x + 2y}$

គេបាន $2 + y' + y' + xy'' + 2y'y' + 2yy'' = 0$

$$y'' = \frac{-2 - 2y' - 2(y')^2}{x + 2y} = \frac{-2 + 2\left(\frac{2x + y}{x + 2y}\right) - 2\left(\frac{2x + y}{x + 2y}\right)^2}{x + 2y}$$

$$y'' = \frac{-6y^2 - 6x^2 - 6xy}{(x + 2y)^3}$$

ដូចនេះ $y'' = \frac{-6y^2 - 6x^2 - 6xy}{(x + 2y)^3}$ ។

ឃ. គេមាន $x^3 + 2xy - y^2 = 3$

ដេរីវេអង្គទាំងពីរ គេបាន $\frac{d}{dx}[x^3 + 2xy - y^2] = \frac{d}{dx}[3]$

$3x^2 + 2y + 2xy' - 2yy' = 0$ សមមូល $y' = \frac{-3x^2 - 2y}{2x - 2y}$

គេបាន $6x + 2y' + 2y' + 2xy'' - 2y'y' - 2yy'' = 0$

$$y'' = \frac{2(y')^2 - 6x - 4y'}{2x - 2y} = \frac{2\left(\frac{-3x^2 - 2y}{2x - 2y}\right)^2 - 6x + 4\left(\frac{3x^2 + 2y}{2x - 2y}\right)}{2x - 2y}$$

$$= \frac{18x^4 + 48x^2y - 8y^2 - 24xy^2 + 16xy}{8(x - y)^3} \text{ ។}$$

ដូចនេះ $y' = -\frac{3x^2 + 2y}{2x - 2y}$ និង $y'' = \frac{18x^4 + 48x^2y - 8y^2 - 24xy^2 + 16xy}{8(x - y)^3}$

ង. គេមាន $x^3 + y^3 = 3xy$

ដេរីវេអង្គទាំងពីរ គេបាន $3x^2 + 3y^2y' = 3y + 3xy'$ សមមូល $y' = \frac{3y - 3x^2}{3y^2 - 3x}$

គេបាន $6x + 6yy'y' + 3y^2y'' = 3y' + 3y' + 3xy''$

$$y'' = \frac{6y' - 6x - 6y(y')^2}{3y^2 - 3x}$$

ច. គេមាន $x^3y + xy^3 = 3x^2$

ដេរីវេអង្គទាំងពីរ គេបាន $3x^2y + x^3y' + y^3 + 3xy^2y' = 6x$ នាំឱ្យ $y' = \dfrac{6x - 3x^2y - y^3}{x^3 + 3xy^2}$

គេបាន $6xy + 3x^2y' + 3x^2y' + x^3y'' + 3y^2y' + 3y^2y' + 6xy(y')^2 + 3xy^2y'' = 6$

$$y'' = \frac{6 - 6xy - 6x^2y' - 6y^2y' - 6xy(y')^2}{x^3 + 3xy^2}$$

$$= \frac{12x^3y(x^4 - 18) + x^2y^2(234y^2 + 108x^2) - 12x^3y^3(x^2 + y^2) + 6xy^6(3 - y) - 30x^6}{(x^3 + 3xy^2)^3}$$

9. ខ. គណនា $f^{(6)}(x)$ បើ $f(x) = \frac{1}{7}x^7 - \sin 2x$

គេបាន $f'(x) = x^6 - 2\cos 2x$, $f''(x) = 6x^5 + 4\sin 2x$

$f'''(x) = 30x^4 + 8\cos 2x$, $f^{(4)}(x) = 120x^3 - 16\sin 2x$

$f^{(5)}(x) = 360x^2 - 32\cos 2x$, $f^{(6)}(x) = 720x + 64\sin 2x$

ឃ. គណនា $f^{(10)}(x)$ បើ $f(x) = \dfrac{120}{x^6} = 120x^{-6}$

គេបាន $f'(x) = 120 \times (-6)x^{-7}$

$f''(x) = 120 \times (-6) \times (-7)x^{-8} = (-1)^2 \times 120 \times 6 \times 7x^{-8}$

$f^{(3)}(x) = 120 \times (-6) \times (-7) \times (-8)x^{-9} = (-1)^3 \times 120 \times 6 \times 7 \times 8x^{-9}$

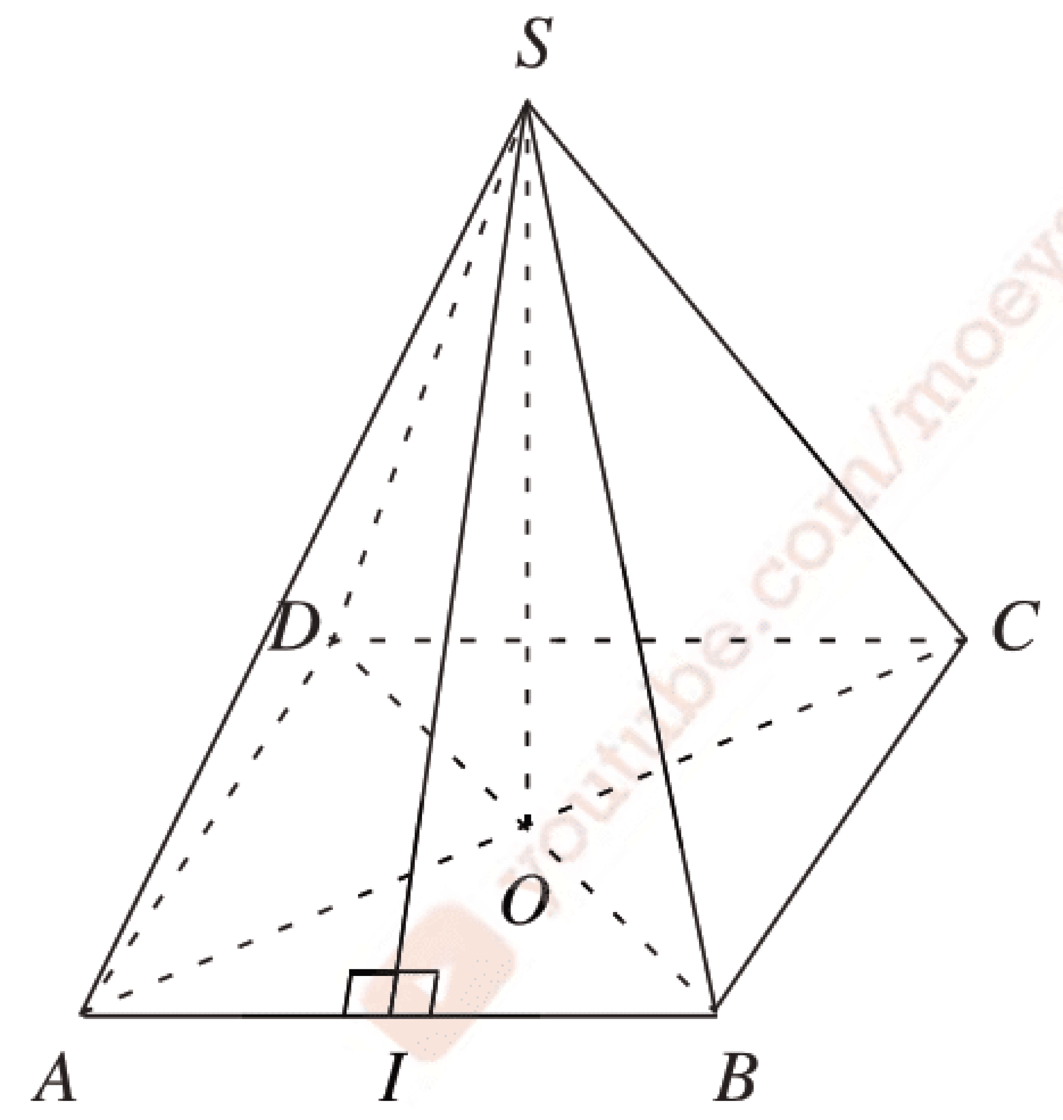
....

....

$f^{(10)}(x) = (-1)^{10} \times 120 \times 6 \times 7 \times 8 \times \ldots \times 15x^{-16}$,

$120 = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5$ នាំឱ្យ $f^{(10)}(x) = \dfrac{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \ldots \times 15}{x^{16}} = \dfrac{15!}{x^{16}}$

ចម្លើយលំហាត់មេរៀនទី 2 ជំពូក 2



1. តាង $|AB| = x \ , \ x > 0$ រង្វាស់ជ្រុងបាត

យក I ជាចំណុចកណ្តាល $[AB]$ នាំឱ្យ $[SI]$

ជាអាប៉ូតែម

គេបាន $S_\ell = \frac{1}{2} \times 4x \times SI$ នាំឱ្យ $SI = \frac{S_\ell}{2x}$

ត្រីកោណ SOI កែងត្រង់ O

គេបាន $SO^2 = SI^2 - OI^2 = \left(\frac{S_\ell}{2x}\right)^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2$

$$= \frac{S_\ell^2 - x^4}{4x^2} \quad \text{តែ } S_\ell^2 - x^2 > 0$$

$x^4 < S_\ell^2$ នាំឱ្យ $x^2 < S_\ell$ នាំឱ្យ $x < \sqrt{S_\ell}$ នាំឱ្យ $0 < x < \sqrt{S_\ell}$

$SO = \frac{\sqrt{S_\ell^2 - x^4}}{2x}$ តាង $v(x)$ ជាមាឌនៃពីរ៉ាមីត

នោះ $v(x) = \frac{1}{3}x^2 \frac{\sqrt{S_\ell^2 - x^4}}{2x} = \frac{x}{6}\sqrt{S_\ell^2 - x^4}$

$v'(x) = \frac{S_\ell^2 - 3x^4}{6\sqrt{S_\ell^2 - x^4}}$, $v'(x) = O$ នាំឱ្យ $3x^4 = S_\ell^2$ នាំឱ្យ $x = \sqrt[4]{\frac{S_\ell^2}{3}}$

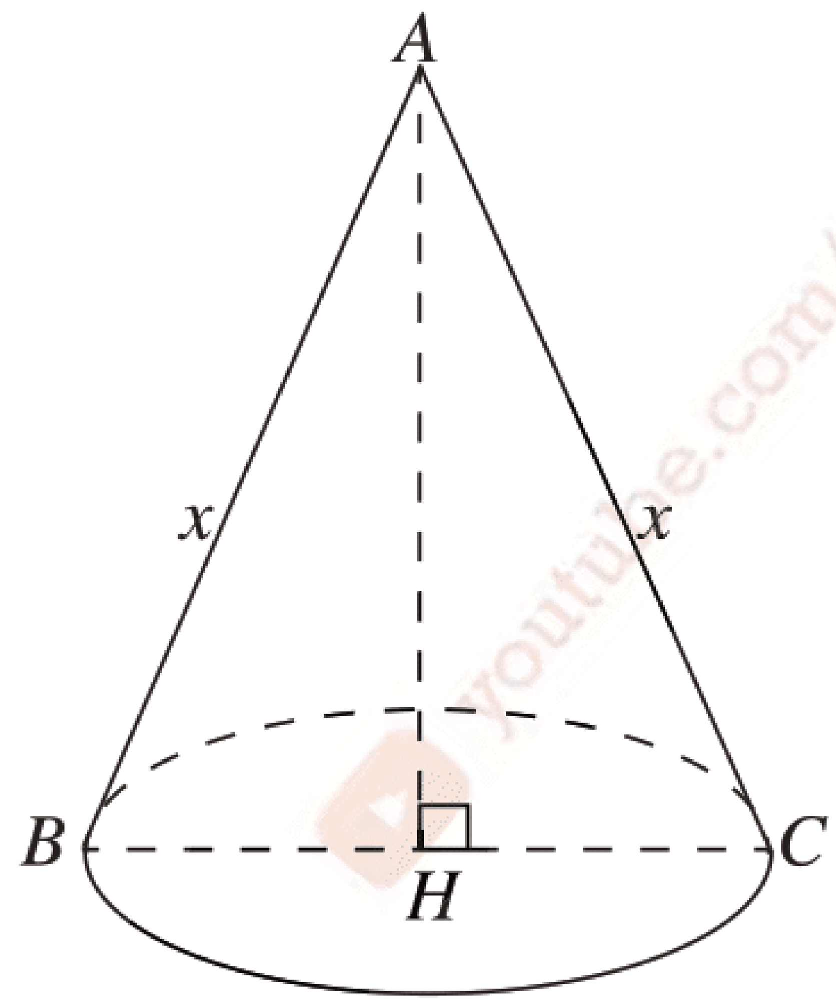
x	0		$\sqrt[4]{\frac{S_\ell^2}{3}}$		$\sqrt{S_\ell}$
$v'(x)$		$+$	0	$-$	
$v(x)$		$\nearrow$	អតិបរមា	$\searrow$	

តាមតារាងអថេរភាព

គេបាន $\frac{SO}{x} = \frac{\sqrt{S_\ell^2 - x^4}}{2x^2} = \frac{\sqrt{S_\ell^2 - \frac{S_\ell^2}{3}}}{2\sqrt{\frac{S_\ell^2}{3}}} = \frac{\sqrt{\frac{2S_\ell^2}{3}}}{2\sqrt{\frac{S_\ell^2}{3}}} = \frac{\sqrt{2} \times \sqrt{\frac{S_\ell^2}{3}}}{2 \times \sqrt{\frac{S_\ell^2}{3}}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ។

ដូចនេះ ផលធៀបរង្វាស់កម្ពស់និងជ្រុងបាតនៃពីរ៉ាមីតគឺ $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ។

6. តាង ABC ជាត្រីកោណសមបាត $AB = AC = x$, $x > 0$



$[AH]$ ជាកម្ពស់គូសចេញពីកំពូល A ។

ដោយត្រីកោណ ABC វិញជុំវិញ $[AH]$ កំណត់បានសូលីតមួយ

គឺកោនបរិវត្ត កំពូល A ដែល $[AB]$, $[AC]$ ជាជនេត្រ

$HB = HC$ ជារង្វាស់កាំថាសនៃបាត ។

ដោយ $AB + AC + BC = 2x + BC = 2p$ នាំឱ្យ $BC = 2(p - x)$

តែ $0 < x < p$ ហើយ $HB = HC = p - x$ ត្រីកោណកែង AHB

កែងត្រង់ H

គេបាន $AH^2 = AB^2 - HB^2 = x^2 - (p-x)^2 = 2px - p^2$

នាំឱ្យ $2px - p^2 > 0$ សមមូល $x > \frac{P}{2}$ នាំឱ្យ$AH = \sqrt{2px - p^2}$ ជារង្វាស់កម្ពស់កោន

ផ្ទៃក្រឡាថាសបាតកោន $S = \pi \times HB^2 = \pi(p-x)^2$

តាង $v(x)$ ជាមាឌកោន

គេបាន $v(x) = \frac{1}{3}S \times AH = \frac{1}{3}\pi(p-x)^2\sqrt{2px - p^2}$

$$v'(x) = \frac{\pi}{3} \times \frac{5px^2 - 8p^2x + 3p^3}{\sqrt{2px - p^2}}$$

$v'(x) = 0$ សមមូល $5px^2 - 8p^2x + 3p^3 = 0$

សមមូល $5x^2 - 8px + 3p^2 = 0$

$$x_1 = \frac{3p}{5} \quad , \quad x_2 = p$$

x	$\frac{P}{2}$		$\frac{3p}{5}$		P
$v'(x)$		$+$	0	$-$	
$v(x)$		$\nearrow$	អតិបរមា	$\searrow$	

តាមតារាងអថេរភាពនិងលក្ខខណ្ឌកំណត់ $\frac{P}{2} < x = \frac{3p}{5} < P$

គេកំណត់បាន $x = \frac{3p}{5}$ នាំឱ្យ $AB = AC = \frac{3P}{5}$

$BC = 2(p-x) = \frac{4P}{5}$, $AH = \sqrt{2px - p^2} = \frac{P\sqrt{5}}{5}$ ។

ចម្លើយលំហាត់មេរៀនទី 1 ជំពូក 3

1. ក. អាស៊ីមតូតឈរ $x = -2$ អាស៊ីមតូតទ្រេត $y = x+2$ ។

ខ. អាស៊ីមតូតឈរ $x = \pm 1$ អាស៊ីមតូតទ្រេត $y = 1$ ។

គ. អាស៊ីមតូតឈរ $x = 1$ អាស៊ីមតូតទ្រេត $y = -x+3$ ។

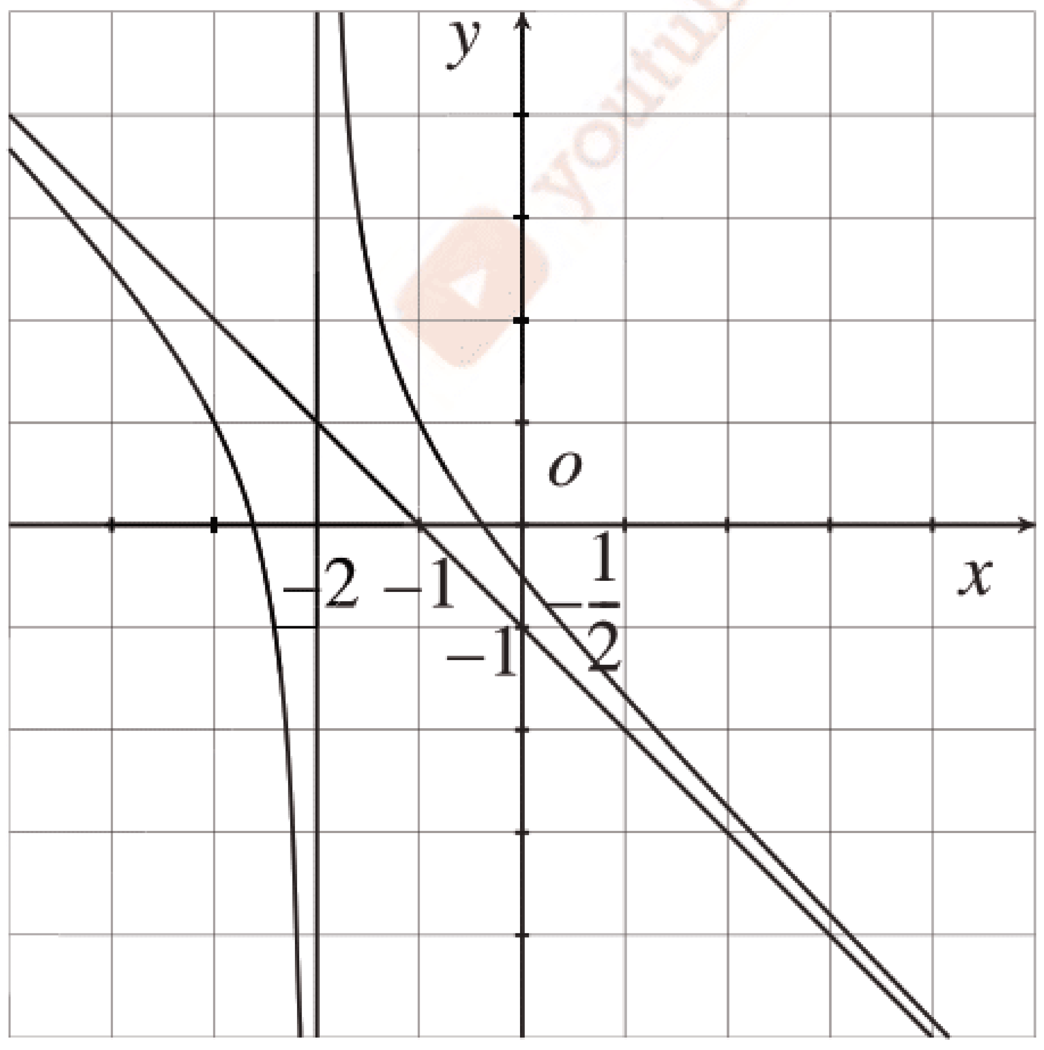
4. $a \le 2-\sqrt{3}$ ។

5. ក. (d_m) កាត់តាមចំណុច $(-1,\ 0)$ ។

ខ. $m = 1$ ។

គ. បើ $m = -1,\ y = -x-1+\dfrac{1}{x+2},\ D = R-\{2\}$ ។

x	$-\infty$		-2		$-\infty$
y'		$-$	||	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$ $-\infty$	||	$+\infty$ $\searrow$	$-\infty$



6. ក. $m = 0$, $y = \dfrac{x^2+2x+2}{x+1} = x+1\dfrac{1}{x+1}$ $a.I(-1\ ,\ 0)$ $b.a = 2$ ខ. $m \ge 0$ ។

7. $y' = \dfrac{10x^2+22x+4}{(3x^2+2x+1)^2}$

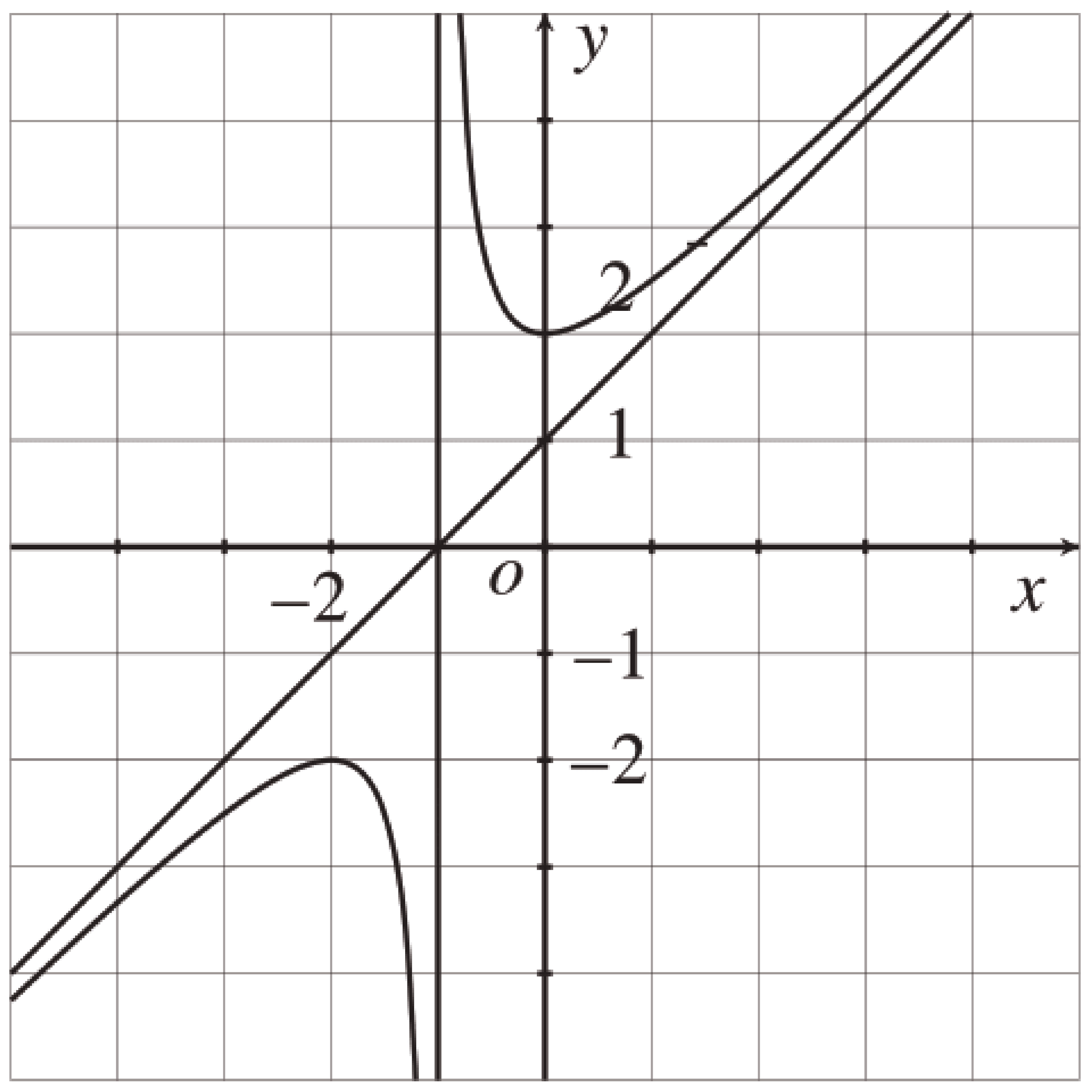
$y_{max} = 7$; $y_{min} = \dfrac{5}{2}$

x	$-\infty$		-2		$-\frac{1}{5}$		$\infty +$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$\nearrow$		7	$\searrow$	$\frac{5}{2}$	$\nearrow$	

8. $y_{max} = 2|a|$

9. $y = x+1+\dfrac{1}{x+1}$

x	$-\infty$		-2		$-\infty$
y'		$-$	||	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$ $-\infty$	||	$+\infty$ $\searrow$	$-\infty$



10. ក. មាន C_m កាត់តាមចំណុច A(1,3) ។

ខ. មាន $y' = \dfrac{(x+m)^3-8}{(x+m)^3}$ ត្រង់ $x = 2-m$, $y'(2-m) = 0$ ដូចនេះ បន្ទាត់ប៉ះ o_m ត្រង់ ចំណុចដែលមានអាប់ស៊ីស $x = 2-m$ ស្របនឹងអ័ក្ស ox ។

ចម្លើយលំហាត់មេរៀនទី 2 ជំពូក 3

1. គណនាលីមីតនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម ៖

ក. $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{3x} = +\infty$ ខ. $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{5x} = 0$ គ. $\lim\limits_{x \to +\infty} 6e^{2x} = +\infty$

2. គណនាលីមីតនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម ៖

ក. $\lim\limits_{x \to +\infty} xe^{x+1} = +\infty$ ខ. $\lim\limits_{x \to -\infty} x^2e^{4x} = 0$ គ. $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{n}{x}\right)^x = e^n$

3. គណនាលីមីតនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម ៖

ក. $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{3e^{x-2}}{x^3} = +\infty$ ខ. $\lim\limits_{x \to 0}\left(\frac{x+3}{x-1}\right)^{x+2} = e^4$ គ. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{x} = 2$

4. គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម ៖

ក. $y' = e^{-x}(1-x)$ ខ. $f'(x) = e^x(x^2+2x)$ គ. $g(x)' = \frac{2}{(e^x+e^{-x})^2}$

5. គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម ៖

ក. $y' = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ ខ. $f'(x) = \frac{e^x \sin x(\sin x - 2)}{(1-\cos x)^2}$ គ. $g'(x) = \frac{4}{(x+1)^2}e^{\frac{x-1}{x+1}}$

8. ក. $P = 2000$, $i = \frac{6}{100} = 0.06$, $n = 4$, $A = p(1+i)^n = 2000(1+0.06)^4 = 2524.95$

ខ. $A = p(1+i)^n = 2000\left(1+\frac{0.06}{2}\right)^{4\times 2} = 2533.54$

គ. $A = p(1+i)^n = 2\left(1+\frac{0.06}{4}\right)^{4\times 4} = 2537.07$

ឃ. គ. $A = p(1+i)^n = 2000\left(1+\frac{0.06}{12}\right)^{4\times 12} = 2540.97$

9. 15 020 ដុល្លា ។

10. $t = 15.69$ ឬ 16 ឆ្នាំ ។

ចម្លើយលំហាត់មេរៀនទី 3 ជំពូក 3

1. ក. $e^{\ln 7} = 7$ ខ. $\ln e^{x-2} = x - 2$ គ. $\ln e^{7x} = 7x$

2.

3. ក. $\lim\limits_{x \to +\infty} x^{-5}\ln x = 0$ ខ. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 + \ln x}{x^2} = 0$ គ. $\lim\limits_{x \to 0}(x\ln x) = 0$

4. ក. $y' = \dfrac{2 + \ln x}{2\sqrt{x}}$ ខ. $y' = \dfrac{1 + \ln x}{3\sqrt[3]{(\ln x)2}}$ គ. $y' = \dfrac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$

5. ក. $y' = \dfrac{1}{e^x + 1}$ ខ. $y' = \ln x$ គ. $y' = -2x\ln x^2 - 2x$

8. 105.5

9. 5.05 ថ្ងៃ

10. $k = 3.6\ \%$

ចម្លើយលំហាត់ជំពូក 3

1. រកដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ខាងក្រោម ៖

ក. $y=\sqrt{x^2-2\sqrt{x^2-1}}+\sqrt{x-3+2\sqrt{x-4}}$

អនុគមន៍មានន័យបើ $\begin{cases} x^2-1\geq 0 \\ x^2-2\sqrt{x^2-1}\geq 0 \\ x-4\geq 0 \\ x-3+2\sqrt{x-4}\geq 0 \end{cases}$ ឬ $\begin{cases} x^2-1\geq 0 \\ [\sqrt{x^2-1}-1]^2\geq 0 \\ x-4\geq 0 \\ [\sqrt{x-4}+1]^2\geq 0 \end{cases}$

ឬ $\begin{cases} x\leq -1 \\ x\geq 1 \\ x\geq 4 \end{cases}$ នាំឱ្យ $x\geq 4$ ។

ខ. $y=log\left(\frac{2^{1-x}-2x+1}{2^x-1}\right)$

តាង $f(x)=2^{1-x}-2x+1=2\left(\frac{1}{2}\right)^x+(-2)x+1$ នាំឱ្យ $f(x)$ ជាអនុគមន៍ចុះ

ដែល $f(1)=0$ នោះវិសមីការ $f(x)>0$ សមមូល $f(x)>f(1)$ សមមូល $x<1$

នាំឱ្យ $1-x>0$ ។ ដូចនេះ $f(x)$ យកសញ្ញាតាម $(1-x)$ ។

តាង $g(x)=2^x-1$ គេបាន $g(x)$ ជាអនុគមន៍កើន និង $g(0)=0$

ដូចនេះ វិសមីការ $g(x)>0$ សមមូល $g(x)>g(0)$ សមមូល $x>0$

$g(x)$ មានសញ្ញាដូច x

ហេតុនេះអនុគមន៍ $y=log\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)$ មានន័យថា $\frac{f(x)}{g(x)}>0$ សមមូល $\frac{1-x}{x}>0$

ដូចនេះ អនុគមន៍មានន័យ កាលណា $0<x<1$ ។

2. រកអាស៊ីមតូតរបស់ក្រាបនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម ៖

ក. $\lim\limits_{x\to -\frac{5}{2}}\frac{4x-3}{2x+5}=\infty$ អនុគមន៍ $y=\frac{4x-3}{2x+5}$ មានអាស៊ីមតូតឈរ $x=-\frac{5}{2}$ ។

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x-3}{2x+5}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4-\frac{3}{x}}{2+\frac{5}{x}}=2$ អនុគមន៍ $y=\frac{4x-3}{2x+5}$ មានអាស៊ីមតូតដេក $y=2$ ។

ខ. $y = f(x) = \dfrac{3x^2-7x+15}{x-1} = 3x-4+\dfrac{11}{x-1}$

$\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2-7x+15}{x-1} = \infty$ អនុគមន៍ $y = f(x)$ មានអាស៊ីមតូតឈរ $x = 1$

$\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-(3x-4)] = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{11}{x-1}\right) = 0$ អនុគមន៍មានអាស៊ីមតូតទ្រេត $y = 3x-4$

គ. $y = f(x) = \dfrac{2x-1}{x^2-7x+10} = \dfrac{2x-1}{(x-2)(x-5)}$

$\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x-1}{(x-2)(x-5)} = \infty$, $\lim\limits_{x\to 5} f(x) = \lim\limits_{x\to 5}\dfrac{2x-1}{(x-2)(x-5)} = \infty$

ដូចនេះ អនុគមន៍មានបន្ទាត់ $x = 2$, $x = 5$ ជាអាស៊ីមតូតឈរ ។

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x-1}{x^2-7x+10} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2-\frac{1}{x}}{x-7+\frac{10}{x}} = 0$ អនុគមន៍មាន $y = 0$ ជាអាស៊ីមតូតដេក ។

3. សិក្សាអថេរភាពនិងសង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម ៖

ក. $y = f(x) = \dfrac{x^2+3x+3}{x+2} = x+1+\dfrac{1}{x+2}$

- ដែនកំណត់ : $D = R-\{-2\}$
- ទិសដៅអថេរភាព

- ដេរីវេនិងតម្លៃបរមា $f'(x) = \dfrac{x^2+4x+3}{x+2}$, $f'(x) = 0$ សមមូល $x = -3$, $x = -1$

$f(-3) = -3$, $f(-1) = 1$

- អាស៊ីមតូត

$\lim\limits_{x\to -2} f(x) = \lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2+3x+3}{x+2} = \infty$ អនុគមន៍ $y = f(x)$ មានអាស៊ីមតូតឈរ $x = -2$

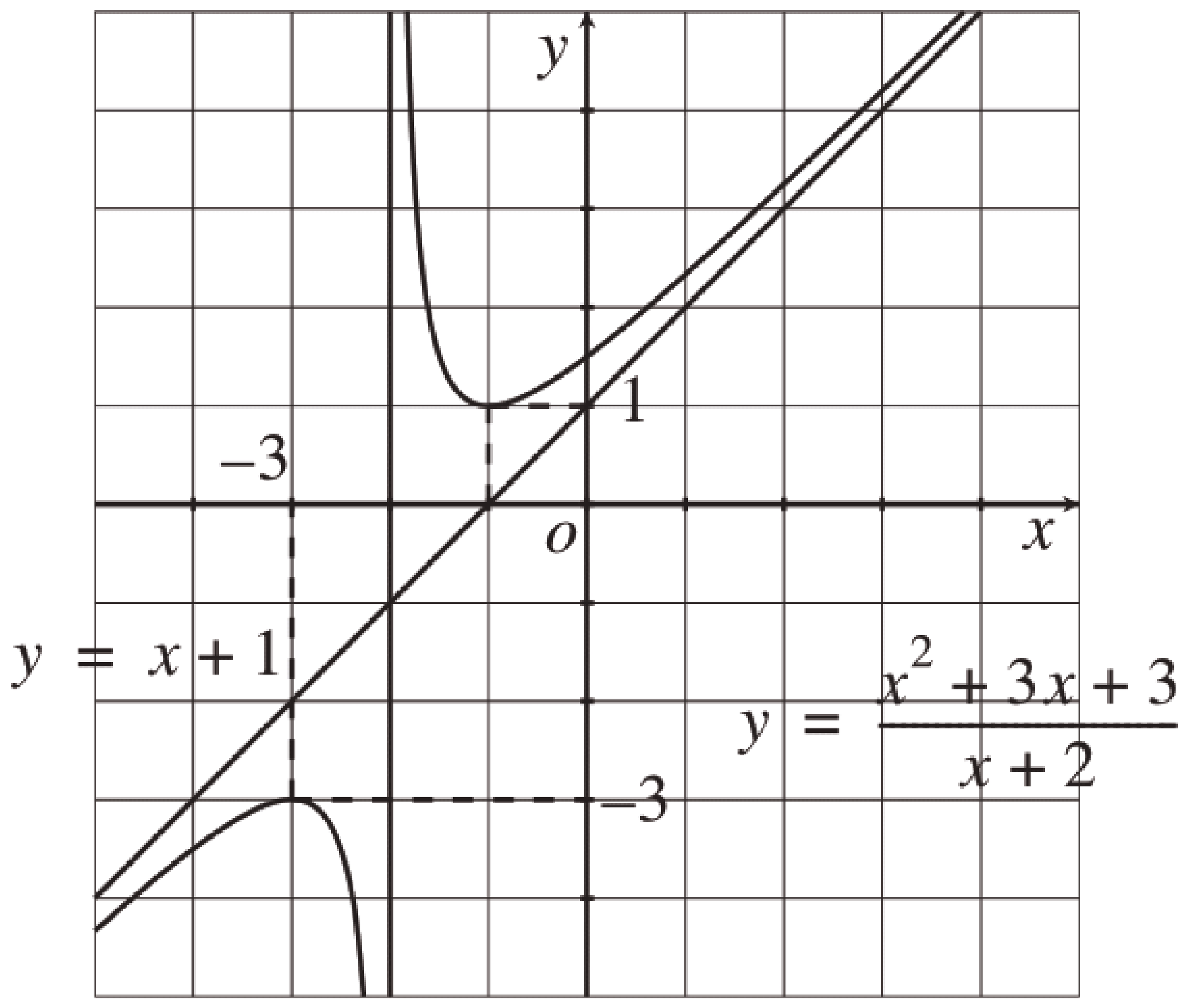
$\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-(x+1)] = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1}{x+2}\right) = 0$ អនុគមន៍មានអាស៊ីមតូតទ្រេត $y = x+1$

- តារាងអថេរភាព

x	$-\infty$		-3		-2		-1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	-3	$\searrow$	$-\infty \Vert +\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

- សំណង់ក្រាប

បើ $x = 0$, $y = \dfrac{3}{2}$ ក្រាបមានចំណុចប្រសព្វអ័ក្ស $\left(0, \dfrac{3}{2}\right)$



4. ក. $y = f(x) = \frac{2x^2+x+1}{x+1} = 2x - 1 + \frac{2}{x+1}$

- ដែនកំណត់ $D = R - \{-1\}$

- ទិសដៅអថេរភាព

- ដេរីវេ $f'(x) = \frac{2x^2+4}{(x+1)^2}$, $f'(x) = 0$ សមមូល $x = -2$, $x = 0$

$$f(-2) = -7 \quad , \quad f(0) = 1$$

- អាស៊ីមតូត

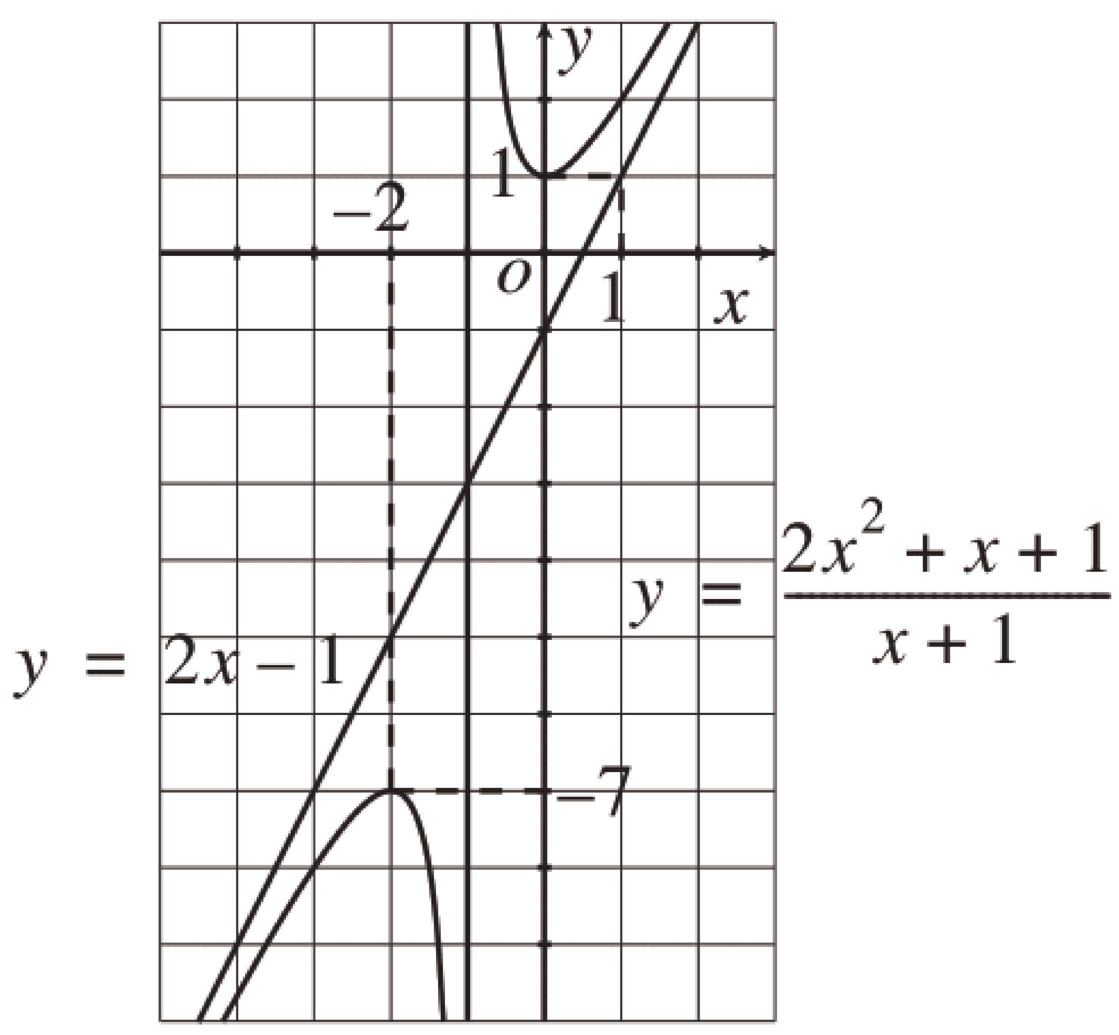
$\lim\limits_{x \to -1} f(x) = \lim\limits_{x \to -1} \frac{2x^2+x+1}{x+1} = \infty$ អនុគមន៍ $y = f(x)$ មានអាស៊ីមតូតឈរ $x = -1$

$\lim\limits_{x \to \infty} [f(x) - (2x-1)] = \lim\limits_{x \to \infty} \left(\frac{2}{x+1}\right) = 0$ អនុគមន៍មានអាស៊ីមតូតទ្រេត $y = 2x - 1$

- សំណង់ក្រាប

- តារាងអថេរភាព

x	$-\infty$		-2		-1		0		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	-7	↘ $-\infty$	‖ $+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$



ខ. តាង $t = |\cos x| \in [0, 1]$ ចំពោះគ្រប់ x ។

តាមក្រាប $MaxA = f(1) = 2$, $MinA = f(0) = 1$ ។

8. សិក្សាអថេរភាពនិងសង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម ៖

ក. $y = x - 1 - \ln x$

- ដែនកំណត់ $D = (0, \quad +\infty)$
- ដេរីវេ $y' = 1 - \dfrac{1}{x} = \dfrac{x-1}{x}$

ដោយ $\lim\limits_{x \to 0^+} (\ln x) = -\infty$ នោះ $\lim\limits_{x \to 0^+} y = \quad +\infty$

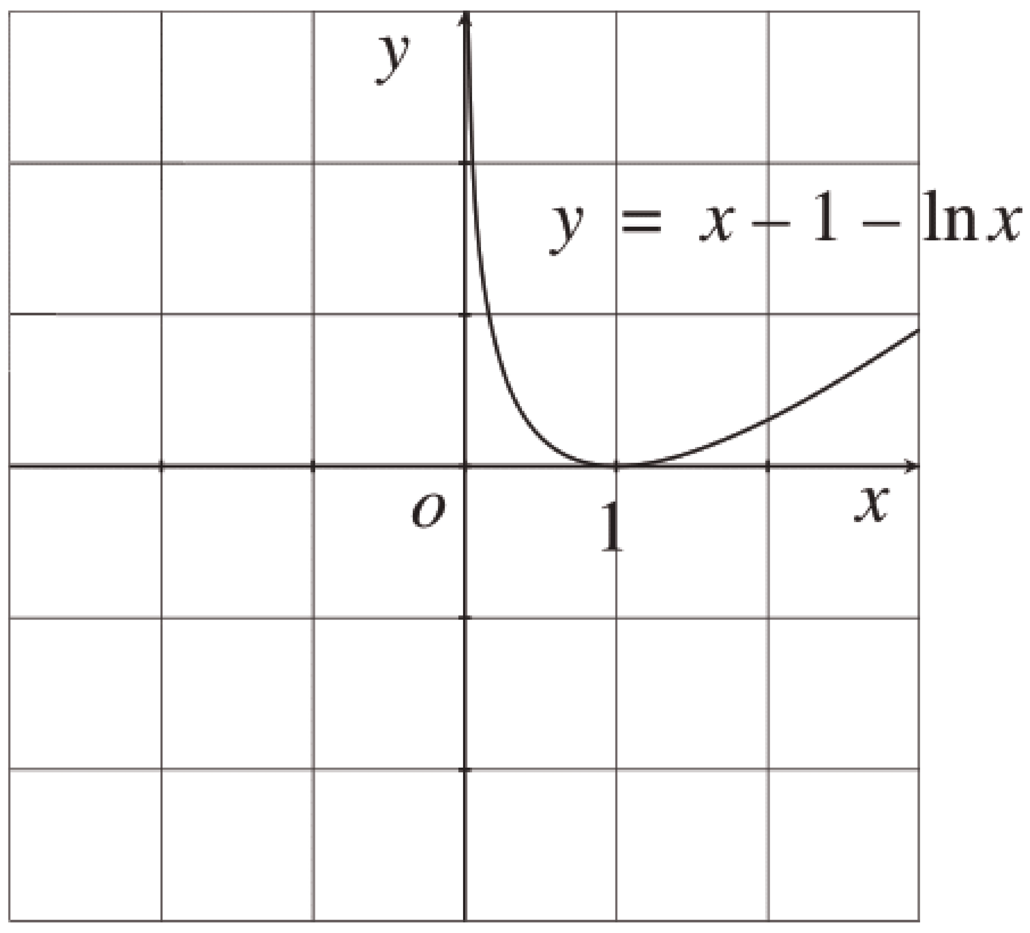
មានបន្ទាត់ $x = 0$ ជាអាស៊ីមតូតឈរ ។

ដោយ $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0$

នោះ $\lim\limits_{x \to +\infty} y = \lim\limits_{x \to +\infty} x\left(1 - \dfrac{1}{x} - \dfrac{\ln x}{x}\right) = \quad +\infty$

- តារាងអថេរភាព

x	0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$



9. ចំនួនប្រាក់សរុបរបស់មន្ត្រីគឺ $A = p(1+r)^t$ ដែល $P = 1000$

$$r = 11\ \% = \frac{11}{100} = 0.11$$

$$t = 60 - 30 = 30$$

គេបាន $A = 1000(1+0.11)^{30}$

$= 22892$

ដូចនេះ នៅពេលចូលនិវត្តន៍អាយុ 60 ឆ្នាំ មន្ត្រីនោះមានប្រាក់សរុប 22892 ដុល្លារ ។

10. អត្រាកំណើននៃចំនួនប្រជាជនក្នុងទីក្រុង

ប្រើរូបមន្ត $p(t) = p_0 e^{kt}$ ដែល p_0 ចំនួនប្រជាជនកាលពី 20 ឆ្នាំមុន

t រយៈពេលពី $t = 20$

តាមសម្មតិកម្ម $150000 = 60000 e^{k(20)}$ សមមូល $e^{20k} = \dfrac{150000}{60000} = 2.5$

សមមូល $\ln e^{20k} = \ln 2.5$

សមមូល $k = \dfrac{\ln 2.5}{20} = 0.04581$

ដូចនេះ ប្រជាជនក្នុងទីក្រុងនេះមានអត្រាកើនឡើងប្រមាណ $4,58\ \%$ ក្នុងមួយឆ្នាំ ។

ចម្លើយលំហាត់មេរៀនទី 1 ជំពូក 4

1. . ក. $F(x) = -7x+4$ នាំឱ្យ $F'(x) = -7 = f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$

ដូចនេះ អនុគមន៍ $F(x)$ ជាព្រីមីទីវនៃអនុគមន៍ $F(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$

ខ. $F(x) = 3x^3 - 7x$ នាំឱ្យ $F'(x) = 9x^2 - 7 = f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$

ដូចនេះ អនុគមន៍ $F(x)$ ជាព្រីមីទីវនៃអនុគមន៍ $F(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$

គ. $F(x) = 3e^{x^2-1} - 7$ នាំឱ្យ $F'(x) = 6xe^{x^2-1} = f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$

ដូចនេះ អនុគមន៍ $F(x)$ ជាព្រីមីទីវនៃអនុគមន៍ $F(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$

ឃ. $F(x) = \ln(e^{3x} - x) + \sqrt{11}$ នាំឱ្យ $F'(x) = \dfrac{(e^{3x}-x)'}{e^{3x}-x} = \dfrac{3e^{3x}-1}{e^{3x}-x} = f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$ ។

ដូចនេះ អនុគមន៍ $F(x)$ ជាព្រីមីទីវនៃអនុគមន៍ $F(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$

2. ក. $F(x)$ ជាព្រីមីទីវនៃអនុគមន៍ $f(x)$ កំណត់និងជាប់លើចន្លោះ I នោះគេបាន

$F(x) = \int f(x)dx = \int 5dx = 5x + c$, $c \in \mathbb{R}$ ។

ខ. $F(x)$ ជាព្រីមីទីវនៃអនុគមន៍ $f(x)$ កំណត់និងជាប់លើចន្លោះ I នោះគេបាន

$F(x) = \int f(x)dx = \int(-4x+3)dx = -2x^2 + 3x + c$, $c \in \mathbb{R}$

ដូចនេះ អនុគមន៍ព្រីមីទីវ $F(x) = -2x^2 + 3x + c$, $c \in \mathbb{R}$

គ. $F(x)$ ជាព្រីមីទីវនៃអនុគមន៍ $f(x)$ កំណត់និងជាប់លើចន្លោះ I នោះគេបាន

$F(x) = \int f(x)dx = \int(-x^2+3x+5)dx = -\frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 5x + c$, $c \in \mathbb{R}$

ដូចនេះ អនុគមន៍ព្រីមីទីវ $F(x) = -\frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 5x + c$, $c \in \mathbb{R}$

ឃ. $F(x)$ ជាព្រីមីទីវនៃអនុគមន៍ $f(x)$ កំណត់និងជាប់លើចន្លោះ I នោះគេបាន

$F(x) = \int f(x)dx = \int \frac{2}{x}dx = 2\int \frac{1}{x}dx = 2\ln|x| + c$, $c \in \mathbb{R}$

ដូចនេះ អនុគមន៍ព្រីមីទីវ $F(x) = 2\ln|x| + c$, $c \in \mathbb{R}$

ង. $F(x)$ ជាព្រីមីទីវនៃអនុគមន៍ $f(x)$ កំណត់និងជាប់លើចន្លោះ I នោះគេបាន

$F(x) = \int f(x)dx = \int \frac{1}{3x+2}dx = \frac{1}{3}\int \frac{1}{3x+2}(3x+2)'\,dx = \frac{1}{3}\ln|3x+2| + c$, $c \in \mathbb{R}$

ដូចនេះ អនុគមន៍ព្រីមីទីវ $F(x) = \frac{1}{3}\ln|3x+2| + c$, $c \in \mathbb{R}$

ច. $F(x)$ ជាព្រីមីទីវនៃអនុគមន៍ $f(x)$ កំណត់និងជាប់លើចន្លោះ I នោះគេបាន

$$F(x) = \int f(x)dx = \int \frac{x}{x^2+5}dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2+5}(x^2+5)' \; dx = \frac{1}{2}\ln|x^2+5| + c \quad , \; c \in \mathbb{R}$$

ដូចនេះ អនុគមន៍ព្រីមីទីវ $F(x) = \frac{1}{2}\ln|x^2+5| + c \quad , \; c \in \mathbb{R}$

ឆ. $F(x)$ ជាព្រីមីទីវនៃអនុគមន៍ $f(x)$ កំណត់និងជាប់លើចន្លោះ I នោះគេបាន

$$F(x) = \int f(x)dx = \int e^{3x-2}dx = \frac{1}{3}\int e^{3x-2}(3x-2)' \; dx = \frac{1}{3}e^{3x-2} + c \quad , \; c \in \mathbb{R}$$

ដូចនេះ អនុគមន៍ព្រីមីទីវ $F(x) = \frac{1}{3}e^{3x-2} + c \quad , \; c \in \mathbb{R}$

ជ. $F(x)$ ជាព្រីមីទីវនៃអនុគមន៍ $f(x)$ កំណត់និងជាប់លើចន្លោះ I នោះគេបាន

$$F(x) = \int f(x)dx = \int xe^{x^2}dx = \frac{1}{2}\int e^{x^2}(x^2)' \; dx = \frac{1}{2}e^{x^2} + c \quad , \; c \in \mathbb{R}$$ ។

ដូចនេះ អនុគមន៍ព្រីមីទីវ $F(x) = \frac{1}{2}e^{x^2} + c \quad , \; c \in \mathbb{R}$

3. រកព្រីមីទីវ $F(x)$ នៃអនុគមន៍ $f(x)$:

ក. $F(x) = 3\tan x - 4$

ខ. $F(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 1$

គ. $F(x) = \frac{1}{3}x^3 - e^x + 2$

ឃ. $F(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}e^{x^2} + \frac{3}{2}$ ។

4. រកព្រីមីទីវ $F(x)$ នៃអនុគមន៍ $F(x)$ ដែលកំណត់ដោយ :

ក. $F(x) = -\cos x + 4$

ខ. $F(x) = \frac{1}{2}x^2 - e^x + \frac{1}{2}$

គ. $F(x) = -\frac{1}{4}\,\frac{1}{(x^2-4)^2} + \frac{5293}{1764}$

ឃ. $F(x) = -\frac{1}{4}\cos^4 x + \frac{257}{16}$ ។

5. ក. $\frac{1}{2}x^4 - \frac{5}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + x + c \quad , \; c \in \mathbb{R}$

ខ. $5x - 2\sqrt{x} + c \quad , \; c \in \mathbb{R}$

គ. $\frac{8}{5}x^{\frac{5}{4}} + c \quad , \; c \in \mathbb{R}$

ឃ. $\frac{-1}{x^3} - \frac{1}{4x^4} + c \quad , \; c \in \mathbb{R}$

ង. $\frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}} - \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + c \quad , \; c \in \mathbb{R}$

ច. $2e^x + 6\ln|x| - x\ln 5 + c \quad , \; c \in \mathbb{R}$

ឆ. $4x - \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{3x^3} + c \quad , \; c \in \mathbb{R}$

ជ. $\frac{6}{5}x^{\frac{5}{2}} - \frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} + 2\sqrt{x} + c \quad , \; c \in \mathbb{R}$

ឈ. $-3\cos x + 5\sin x + c \quad , \; c \in \mathbb{R}$

ញ. $-\cot x + 4\tan x - 5x + c \quad , \; c \in \mathbb{R}$

ដ. $\frac{1}{2}e^{2x} - e^x + x + c \quad , \; c \in \mathbb{R}$

ឋ. $x - 2e^x + \frac{1}{2}e^{2x} + c \; , \; c \in \mathbb{R}$ ឌ. $-\cot x - \tan x + c \; , \; c \in \mathbb{R}$ ឍ. $\tan x - \cot x + c \; , \; c \in \mathbb{R}$ ។

6. ក. $e^{3x}+c$, $c\in\mathbb{R}$ ខ. $e^{x^2}+c$, $c\in\mathbb{R}$ គ. $-e^{4-5x}+c$, $c\in\mathbb{R}$

ឃ. $e^{3x^2-7x}+c$, $c\in\mathbb{R}$ ង. $e^{x^3-x^2+x}+c$, $c\in\mathbb{R}$ ច. $e^{\sin x}+c$, $c\in\mathbb{R}$

ឆ. $\frac{1}{2}e^{x^2}+c$, $c\in\mathbb{R}$ ឈ. $\frac{1}{2}e^{x^2+2x}+c$, $c\in\mathbb{R}$ ញ. $-4e^{-\sqrt{x}}+c$, $c\in\mathbb{R}$ ។

7. ក. $-xe^{-x}-e^{-x}+c$, $c\in\mathbb{R}$ ខ. $2xe^{\frac{x}{2}}-4e^{\frac{x}{2}}+c$, $c\in\mathbb{R}$ គ. $(1-x)e^{x}+e^{x}+c$, $c\in\mathbb{R}$

ឃ. $-e^{-x}+2xe^{-x}+c$, $c\in\mathbb{R}$ ង. $\frac{1}{2}x^2\ln 2x-\frac{1}{4}x^2+c$, $c\in\mathbb{R}$

ច. $\frac{1}{2}x^2\ln x^2-\frac{1}{2}x^2+c$, $c\in\mathbb{R}$ ឆ. $-5xe^{\frac{-x}{5}}-25e^{\frac{-x}{5}}+c$, $c\in\mathbb{R}$

ជ. $10xe^{0.1x}-100e^{0.1x}+c$, $c\in\mathbb{R}$ ឈ. $\frac{2x(x-6)^{\frac{3}{2}}}{3}-\frac{4(x-6)^{\frac{5}{2}}}{15}+c$, $c\in\mathbb{R}$

ញ. $-\frac{2x}{3}(1-x)^{\frac{3}{2}}-\frac{4}{15}(1-x)^{\frac{5}{2}}+c$, $c\in\mathbb{R}$ ដ. $\frac{1}{10}(x+1)^{10}-\frac{1}{9}(x+1)^{9}+c$, $c\in\mathbb{R}$

ឋ. $\frac{1}{8}(x+2)^{8}-\frac{1}{7}(x+2)^{7}+c$, $c\in\mathbb{R}$ ឌ. $2x\sqrt{x+2}-\frac{4}{3}(x+2)^{\frac{3}{2}}+c$, $c\in\mathbb{R}$

ឍ. $\left(-\frac{1}{3}\right)(2x+1)^{\frac{3}{2}}+x(2x+1)^{\frac{1}{2}}+c$, $c\in\mathbb{R}$ ណ. $-x^2e^{-x}-2xe^{-x}-2e^{-x}+c$, $c\in\mathbb{R}$

ត. $\frac{1}{3}\left(x^2e^{3x}-\frac{2}{3}xe^{3x}+\frac{2}{9}e^{3x}\right)+c$, $c\in\mathbb{R}$ ថ. $x^3e^{x}-3x^2e^{x}+6xe^{x}-6e^{x}+c$, $c\in\mathbb{R}$

ទ. $\frac{1}{2}\left(x^3e^{2x}-\frac{3}{2}x^2e^{2x}+\frac{3}{2}xe^{2x}-\frac{3}{4}e^{2x}\right)+c$, $c\in\mathbb{R}$ ធ. $\frac{1}{3}x^3\ln x-\frac{1}{9}x^3+c$, $c\in\mathbb{R}$

ន. $\frac{1}{2}x^2(\ln x)^2-\frac{1}{2}x^2\ln x+\frac{1}{4}x^2+c$, $c\in\mathbb{R}$ ប. $-\frac{\ln x}{x}-\frac{1}{x}+c$, $c\in\mathbb{R}$

ផ. $-\frac{\ln x}{2x^2}-\frac{1}{4x^2}+c$, $c\in\mathbb{R}$ ព. $\frac{1}{2}x^2e^{x^2}-\frac{1}{2}e^{x^2}+c$, $c\in\mathbb{R}$

ភ. $\frac{1}{2}\left[\frac{1}{12}(x^2-1)^{12}+\frac{1}{11}(x^2-1)^{11}\right]+c$, $c\in\mathbb{R}$ ។

8. $F(t)=\frac{100t}{t+3}-100\ln|t+3|+100\ln 3+1200$

9. ក្នុងរយៈពេល 10 ឆ្នាំទៅមុខទៀតដីមួយហិចតានឹងមានតម្លៃប្រហែល 911 (គិតជាម៉ឺនរៀល) ឬ 9 110 000 រៀល ។

10. ចំនួនប្រជាពលរដ្ឋរយៈពេល 8 ខែទៅមុខទៀតគឺ 2000088 នាក់ ។

ចម្លើយលំហាត់មេរៀនទី 2 ជំពូក 4

1. ក. 0 ខ. 0

2. ក. 2 ខ. 8 គ. -8 ។

3. $k = 5$

4. ក. 0 ខ. $\frac{-5}{2}$ គ. 4 ឃ. $\frac{4\sqrt{2}}{3}$ ង. $\frac{3\sqrt[3]{2}}{2}$

ច. $4\sqrt{2}-4$ ឆ. $-\frac{4}{3}$ ជ. -800 ឈ. $\frac{52}{3}$ ញ. $\sqrt{13}-\sqrt{6}$

ដ. 3 ឋ. $\frac{2}{15}$, ឌ. $\frac{21}{338}$ ។

5. គណនា

ក. $\frac{3}{4}e^{8}-\frac{3}{4}e^{4}$ ខ. $\frac{1}{2}e^{2}-\frac{1}{2}$ គ. $2e(e-1)$ ឃ. $6-\frac{3}{2}e^{6}+\frac{3}{2}e^{2}$ ង. $\frac{1}{3}\ln\frac{5}{2}$ ។

6. គណនា

ក. $\frac{1}{3}\ln 3$ ខ. $\frac{1}{4}\ln 6-\frac{1}{4}\ln(4e-2)$ គ. $\frac{1}{2}\ln 5$ ឃ. $\frac{1}{3}$

ង. $\frac{1}{4}(e^{2}-1)$ ច. $\ln 2$ ឆ. $\frac{7}{6}$ ជ. $\ln 2$ ។

7. បម្រែបម្រួលនៃប្រាក់ចំណូលក្នុងការលក់កើនឡើងពីចំនួន 30 ទៅ 40 គ្រឿងគឺ 1870 (គិតជាពាន់រៀល) ។

ចម្លើយលំហាត់ជំពូក 4

1. ក. $x^2+c \ , c\in\mathbb{R}$ ខ. $4x+c \ , c\in\mathbb{R}$ គ. $x^2+3x+c \ , c\in\mathbb{R}$

ឃ. $-2x+c \ , c\in\mathbb{R}$ ង. $\frac{-5}{2}x^2+4x+c \ , c\in\mathbb{R}$ ច. $\frac{1}{3}x^3+c \ , c\in\mathbb{R}$

ឆ. $x^3+c \ , c\in\mathbb{R}$ ជ. $\frac{-4}{3}x^3+\frac{5}{2}x^2+7x+c \ , c\in\mathbb{R}$

ឈ. $\frac{-1}{2}x^8-x^5+\frac{7}{4}x^4-3x^2+8x+c \ , c\in\mathbb{R}$ ញ. $\frac{-1}{x}+c \ , c\in\mathbb{R}$

ដ. $\frac{5}{x}+c \ , c\in\mathbb{R}$ ឋ. $4x+\frac{7}{x}+c \ , c\in\mathbb{R}$ ឌ. $\frac{1}{2}x^{\frac{3}{2}}+c \ , c\in\mathbb{R}$

ឍ. $\frac{8}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{4}{x}+c \ , c\in\mathbb{R}$ ណ. $\frac{1}{4}(2x+1)^{\frac{3}{2}}+c \ , c\in\mathbb{R}$ ត. $\frac{1}{9}(3x-1)^3+c \ , c\in\mathbb{R}$

ថ. $\frac{1}{3}(3x-1)^5+c \ , c\in\mathbb{R}$ ទ. $\frac{1}{6}(3x^2-1)^5+c \ , c\in\mathbb{R}$ ធ. $\frac{2}{5}(2x^3+1)^5+c \ , c\in\mathbb{R}$

ន. $\frac{1}{15}(2x^3+1)^5+c \ , c\in\mathbb{R}$ ។

2. គណនាអាំងតេក្រាលដោយប្រើអថេរជំនួស :

ក. 72 ខ. 0 គ. $\ln\frac{11}{5}$ ឃ. $\frac{1}{2}e(e-1)$ ង. $\frac{1}{8}$ ច. $\frac{1}{6}$ ឆ. $\frac{-3}{4}$

ជ. $\sqrt{2}-1$ ឈ $\sqrt{2}-1$ ញ. $\frac{-3}{8}$ ដ. 4 ឋ. $e-\sqrt{e}$ ឌ. $\frac{3}{2}$ ឍ. 0 ។

3. គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោមដោយប្រើអាំងតេក្រាលដោយផ្នែក :

ក. $\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\ln 2$ ខ. $\left(\frac{x^2}{2}+x\right)\ln x-\frac{x^2}{4}-x+\frac{5}{4} \ , x>0$ គ. $e^m(1-m)-e^e(e-1)$

ឃ. $\frac{1}{2}e^{-\pi}+\frac{1}{2}$ ង. $\frac{1}{3}\pi-\frac{2}{3}$ ច. $\frac{2}{9}e^3+\frac{1}{9}$ ឆ. $\frac{12\sqrt{2}}{5}-\frac{8}{5}$ ជ. $3\ln 3-2\ln 2-1$

ឈ. $-\frac{1}{2}\pi$ ញ. $\frac{44}{3}$ ដ. $6e^2\cdot\ln 2+\frac{9}{4}e^2$ ឋ. $e+1$ ឌ. $2e-5$

ឍ. $e-2$ ណ. 0 ត. $\frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}\pi}-\frac{1}{2}$ ថ. $\frac{272}{15}$ ទ. $\frac{441\sqrt{7}}{5}-\frac{297\sqrt{3}}{35}$ ។

4. ក. -8 ខ. 1 គ. -5 ឃ. 0 ។

5. ក. ចំនួនពិត $A=-1 \ , B=2$ ខ. $2\ln 6-3\ln 5+\ln 4$ ។

6. ក. ចំនួនពិត $A=1 \ , B=1 \ , C=-2$ ខ. $\frac{5}{2}-2\ln 4+2\ln 3$ ។

7. $J=1$ ។

8. ក. $a = -1$, $b = 1$

ខ. អនុគមន៍ $G(x) = \frac{1}{x-1} + c$, $c \in \mathbb{R}$, $H(x) = \frac{1}{2}\ln|2x-3| + c$, $c \in \mathbb{R}$ ។

គ. $J = \frac{1}{2}\ln 3 - \frac{1}{2}$ ។

9. $h(x) = (x+1)e^{-\frac{1}{x}}$ នាំឱ្យ $h'(x) = e^{-\frac{1}{x}} + \frac{1}{x^2}(x+1)e^{-\frac{1}{x}} = \frac{x^2+x+1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}$ ។

នោះ h ជាព្រីមីទីវមួយនៃ $x \longmapsto \frac{x^2+x+1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}$ ។

10. ក. $\frac{-\pi}{4}$ ខ. $I + J = \frac{\pi^3}{24}$, $I - J = -\frac{\pi}{4}$, $I = \frac{\pi^3}{48} - \frac{\pi}{8}$, $J = \frac{\pi^3}{48} + \frac{\pi}{8}$ ។

11. ក. -3 ខ. 3 ។

13. តម្លៃនៃ $k = 1.5$ ។

14. តម្លៃនៃ $k = 0$, $k = 2$ ។

15. សមីការនៃខ្សែកោង $f(x) = 2e^{\sqrt{x+1}} + 1 - 2e$ ។

16. $\frac{d}{dx}(x^2e^{x^2}) = 2xe^{x^2} + 2xx^2e^{x^2} = 2xe^{x^2} + 2x^3e^{x^2}$ ។

17. $I = 8$ ។

18. $\frac{1}{2}$ ។

19. ក. $-\frac{1}{2}\cos x\sin x + \frac{1}{2}x + c$, $c \in \mathbb{R}$ ខ. $\frac{\sin^6 x}{3} + c$, $c \in \mathbb{R}$

គ. $\frac{1}{2}(\ln x)^2 + C$, $c \in \mathbb{R}$ ឃ. $\ln\left|1 + e^x\right| + C$, $c \in \mathbb{R}$

ង. $\frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x}$, $c \in \mathbb{R}$ ច. $-\frac{1}{2}e^{-x}\cos x - \frac{1}{2}e^{-x}\sin x$, $c \in \mathbb{R}$ ។

20. ក. $2\ln 2 - \frac{3}{4}$ ខ. $2\ln 2 - 1$ គ. $-\frac{1}{2}\pi$ ឃ. $\frac{1}{8}\pi^2 - \frac{1}{2}$ ង. $\frac{1}{2}\pi - 1$ ច. $e - 2$ ។

21. ក. $\ln 2$ ខ. $e - 1$ គ. $\ln 2$ ឃ. $1 - \ln 2$ ង. $-\frac{1}{2} + \ln 2$

ច. $\ln 3 - \ln 2$ ឆ. $\frac{1}{3}(\ln 2)^3$ ជ. $\ln(\ln 2)$ ឈ. $\frac{1}{2}\ln 3$ ញ. $\frac{1}{4}\pi$ ។

22. ក. $\frac{1}{8}\pi - \frac{1}{4}$ ខ. $\frac{2}{3}$ គ. 0 ឃ. $\frac{8}{15}$ ង. $\frac{9}{560}\sqrt{2} - \frac{2}{35}$ ច. $\frac{1}{64}\sqrt{3} + \frac{1}{96}\pi$ ឆ. $\frac{1}{24}$ ។

23. រយៈពេល 15.9 ខែ ឬប្រហែល 16 ខែ ដែលការចែកចាយរបស់ទស្សនាវដ្ដីធ្លាក់ចុះដល់ 460000 ច្បាប់

2. ខ. ក្រុមទី 1 : (2, 10) , (3.5, 15) , (2.5, 20) , (4, 18) , (4.5, 30)

ក្រុមទី 2 : (5, 35) , (6, 40) , (6.5, 38) , (7, 32) , (8, 45)

គ. $M_1(3.3, 18.6)$ និង $M_2(6.5, 38)$

$y = 6.06x - 1.40$

3. ក. បើ $x = 0$ តាងឆ្នាំ 1970 នោះគេបាន

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8
y_i	12.4	13.6	12.7	13.3	12.3	13	12	12.4	12.5

ខ. ចែកទិន្នន័យជាពីរក្រុម

ក្រុមទី 1 : (0, 12.4) , (1, 13.6) , (2, 12.7) , (3, 13.3)

ក្រុមទី 2 : (4, 12.3) , (5, 13) , (6, 12) , (7, 12.4) , (8, 12.5)

ដូចនេះ $M_1(1.5, 13)$ និង $M_2(6, 12.44)$ ។

គ. សមីការបន្ទាត់តម្រែតម្រង់គឺ $y = -0.12x + 13.18$ ។

5. បើ $x_1 = 0$ តាងខែមេសា គេបាន

x_i	0	1	2	3	4	5
y_i	24	19	30	49	68	67

ក. សមីការបន្ទាត់តម្រែតម្រង់

ក្រុមទី 1 : (0, 24) , (1, 19) , (2, 30)

ក្រុមទី 2 : (3, 49) , (4, 68) , (5, 67)

ចំណុចមធ្យមក្រុមទី 1 $M_1(1, 24.33)$

ចំណុចមធ្យមក្រុមទី 2 $M_2(4, 61.33)$ ។

សមីការបន្ទាត់តម្រែតម្រង់គឺ $y = 12.33x + 12$ ។

ខ. ខែតុលាត្រូវនឹង $x = 6$ ។បើ $x = 6$ នាំឱ្យ $y = 12.33 \times 6 + 12 = 85.98$

ដូចនេះ ចំនួនប្រាក់ដែលត្រូវចំណាយក្នុងខែតុលាប្រហែល 85.98 ពាន់ដុល្លា។

ចម្លើយលំហាត់មេរៀនទី 2 ជំពូក 5

1. ក. សង់តារាងផលបូកនៃ x_i, y_1, y, d និង d^2

- ចំពោះ $y = -0.5x+3$

• ចំណុច $(0, 4)$

គេបាន $y = -0.5(0)+3 = 3$

$d = y_i - y = 4-3 = 1$

បើ $d = 1$ នាំឱ្យ $d^2 = 1$ ។

ចំណុច $(2, 2)$

គេបាន $y = -0.5(2)+3 = 2$

$d = y_i - y = 2-2 = 0$

បើ $d = 0$ នាំឱ្យ $d^2 = 0$ ។

ដោយធ្វើរបៀបនេះចំពោះចំណុច $(2, 0)$, $(5, -2)$ និង $(6, 1)$ ។

គេបានតារាងខាងស្តាំ

x_i	y_i	y	d	d^2
0	4	3	1	1
2	2	2	0	0
2	0	2	–2	4
5	–2	0.5	–2.5	6.25
6	1	0	1	1
				$\sum d^2 = 12.25$

(តារាងទី 1)

- ចំពោះ $y = -x+4$

• ចំណុច $(0, 4)$

$y = -0+4 = 4$

$y_i = 4$

$d = y_i - y = 4-4 = 0$

បើ $d = 0$ នាំឱ្យ $d^2 = 0$ ។

• ចំណុច $(2, 2)$

$y = -2+4 = 2$

$y_i = 2$

$d = y_i - y = 2-2 = 0$

បើ $d = 0$ នាំឱ្យ $d^2 = 0$ ។

បន្តធ្វើរបៀបនេះ គេបានតារាងផលបូកខាងស្តាំ។

x_i	y_i	y	d	d^2
0	4	4	0	0
2	2	2	0	0
2	0	2	–2	4
5	–2	–1	–1	1
6	1	–2	3	9
				$\sum d^2 = 14$

(តារាងទី 2)

ខ. តើបន្ទាត់មួយណាដែលនៅជិតចំណុចទាំងនោះជាងគេ ? ដោយផលបូកការេនៃប្រវែងក្នុងតារាងទី 1 តូចជាងតារាងទី 2 បញ្ជាក់ថាចំណុចទាំងនោះនៅជិតបន្ទាត់ $y = 0.5x + 3$ ។

គ. $y = -0.5x + 3$

បើ $x = 2$ នាំឱ្យ $y = -0.5(2) + 3 = 2$

$x = 3$ នាំឱ្យ $y = -0.5(3) + 3 = 1.5$ ។

4. ក. រកសមីការបន្ទាត់តម្រែតម្រង់លីនេអ៊ែ

x_i	y_i	$x_i\ y_i$	x_i^2	y_i^2
150	50	7500	22500	2500
152	58	8816	23104	3364
152	48	7296	23104	2304
155	50	7750	24025	2500
155	52	8060	24025	2704
157	60	9420	24649	3600
158	53	8374	24964	2809
158	63	9954	24964	3969
160	54	8640	25600	2916
160	62	9920	25600	3844
165	56	9240	27225	3136

$y = ax + b$ ដែល $a = \dfrac{n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}$

និង $b = \dfrac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} y_i - a\sum_{i=1}^{n} x_i\right)$, $n = 11$

ដោយ $\sum_{i=1}^{11} x_i = 1722$, $\sum_{i=1}^{11} y_i = 605$, $\sum_{i=1}^{11} x_i y_i = 94970$

$$\sum_{i=1}^{11} x_i^2 = 269760 \quad , \quad \sum_{i=1}^{11} y_i^2 = 33646$$ ។

នាំឱ្យ $a = \dfrac{11 \times 94970 - 1722 \times 605}{11 \times 269760 - (1722)^2} = \dfrac{2860}{2076} = 1.38$

$b = \dfrac{1}{11}(605 - 1.38 \times 1722) = -161.03$

ដូចនេះ $y = 1.38x - 161.03$ ។

ខ. ម៉ាសនៃកម្មការនីដែលត្រូវនឹងកម្ពស់ $152cm$, $155cm$ និង$160cm$

បើ $x = 152$ នាំឱ្យ $y = 1.38(152) - 161.03 = 48.73kg$

$x = 155$ នាំឱ្យ $y = 1.38(155) - 161.03 = 52.87kg$

$x = 160$ នាំឱ្យ $y = 1.38(160) - 161.03 = 59.77kg$

គ. រកមេគុណតម្រែតម្រង់លីនេអ៊ែ

$$r = \frac{n\sum_{i=1}^{n} x_i y_1 - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i}{\sqrt{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2} \times \sqrt{n\sum_{i=1}^{n} y_1^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)^2}}$$

គេបាន $r = \dfrac{(11 \times 94970) - (1722 \times 605)}{\sqrt{11(269760) - (1722)^2} \times \sqrt{11(33646) - (605)^2}}$

$= \dfrac{2860}{\sqrt{2076} \times \sqrt{4081}} = \dfrac{2860}{2910.70} = 0.98$

ដូចនេះ $r = 0.98$ មានន័យថាអថេរ x និង y មានទំនាក់ទំនងគ្នាខ្លាំង ។

5. ក. $y = 8.6x + 24.67$

ខ. 76.27 ពាន់លានរៀល ។

4. ខ. រកសមីកានៃប៉ារ៉ាបូល

- ដោយកំពូលនិងកំណុំស្ថិតនៅលើងបន្ទាត់ដេក នោះអ័ក្សឆ្លុះនៃប៉ារ៉ាបូលត្រូវតែជាអ័ក្សដេក ហើយសមីការស្តង់ដាមានទម្រង់ $(y-k)^2 = 4p(x-h)$ ដោយកំពូល $V(3,\ 2)$ គេទាញបាន $h = 3$ និង $k = 2$ ។

  ម្យ៉ាងទៀត $p = 1-3 = -2$

  ដូចនេះ សមីការស្តង់ដាគឺ $(y-2)^2 = 4(-2)(x-3)$

$$y^2 - 4y + 8x - 20 = 0 \text{ ។}$$

9. ដោយអ័ក្សឆ្លុះជាអ័ក្សដេក ទម្រង់ស្តង់ដាគឺ : $(y-k)^2 = 4p(x-h)$

ទម្រង់ម្យ៉ាងទៀតចំពោះសមីការនេះគឺ : $x = ay^2 + by + c$

ជំនួសកូអរដោនេនៃចំណុចទាំងបីទៅក្នុងសមីការនេះ គេបាន

$$\begin{cases} a+b+c = -1 & (1) \\ 4a-2b+c = 11 & (2) \\ a-b+c = 5 & (3) \end{cases}$$

ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការនេះ គេបាន $a = 1$, $b = -3$, $c = 1$ ។

ដូចនេះ សមីការប៉ារ៉ាបូលគឺ $x = y^2 - 3y + 1$ ។

10. ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ $\begin{cases} y^2 = 4px \\ y = mx + b \end{cases}$

គេបាន $(mx+b)^2 = 4px$ នាំឱ្យ $m^2x^2 + (2mb-4p)x + b^2 = 0$

សមីការនេះមានចម្លើយតែមួយគត់ លុះត្រាតែឌីសគ្រីមីណង់ $\Delta = 0$

$\Delta = (2mb-4p)^2 - 4m^2b^2 = 0$

$16p(p-mb) = 0$ នាំឱ្យ $p = 0$ ឬ $p = mb$

ប្រើចំណុច $P(x_1\ ,\ y_1)$, $y = mx + b$ នាំឱ្យ $b = y_1 - mx_1$ និង $p = mb = m(y_1 - mx_1)$ ។

ប៉ុន្តែ $y^2 = 4px$ នាំឱ្យ $p = \dfrac{y_1^2}{4x_1}$ ដូចនេះ $m(y_1 - mx_1) = \dfrac{y_1^2}{4x_1}$

នាំឱ្យ $(4x_1^2)m^2 - (4x_1y_1)m + y_1^2 = 0$

មេគុណប្រាប់ទិស $m = \dfrac{4x_1y_1 \pm \sqrt{16x_1^2y_1^2 - 16x_1^2y_1^2}}{8x_1^2} = \dfrac{4x_1y_1}{8x_1} = \dfrac{y_1}{2x_1}$

11. សមីការស្តង់ដានៃប៉ារ៉ាបូលគឺ $x^2 = 4py$ ហើយមានកំណុំ $(0,\ p)$ ។

ចំណុច $(1.5,\ 1.2)$ ស្ថិតនៅលើប៉ារ៉ាបូល គេបាន

$(1.5)^2 = 4 \times 1.2p$ នាំឱ្យ $p = \dfrac{2.25}{4.8} \approx 0.47$ ។

ដូចនេះ គ្រឿងទទួលខុសត្រូវស្ថិតនៅ $0.47m$ ពីកំពូលនៃថាសផ្កាយរណប ហើយស្ថិតនៅលើអ័ក្សឆ្លុះនៃប៉ារ៉ាបូល ។

14. ដោយអ័ក្សឆ្លុះនៃប៉ារ៉ាបូលជាអ័ក្សឈរ នោះសមីការស្តង់ដាមានទម្រង់ $(x-h)^2 = 4p(y-k)$

ដោយកំពូល $V(0,\ 0)$ នាំឱ្យ $h = 0$ និង $k = 0$ ។

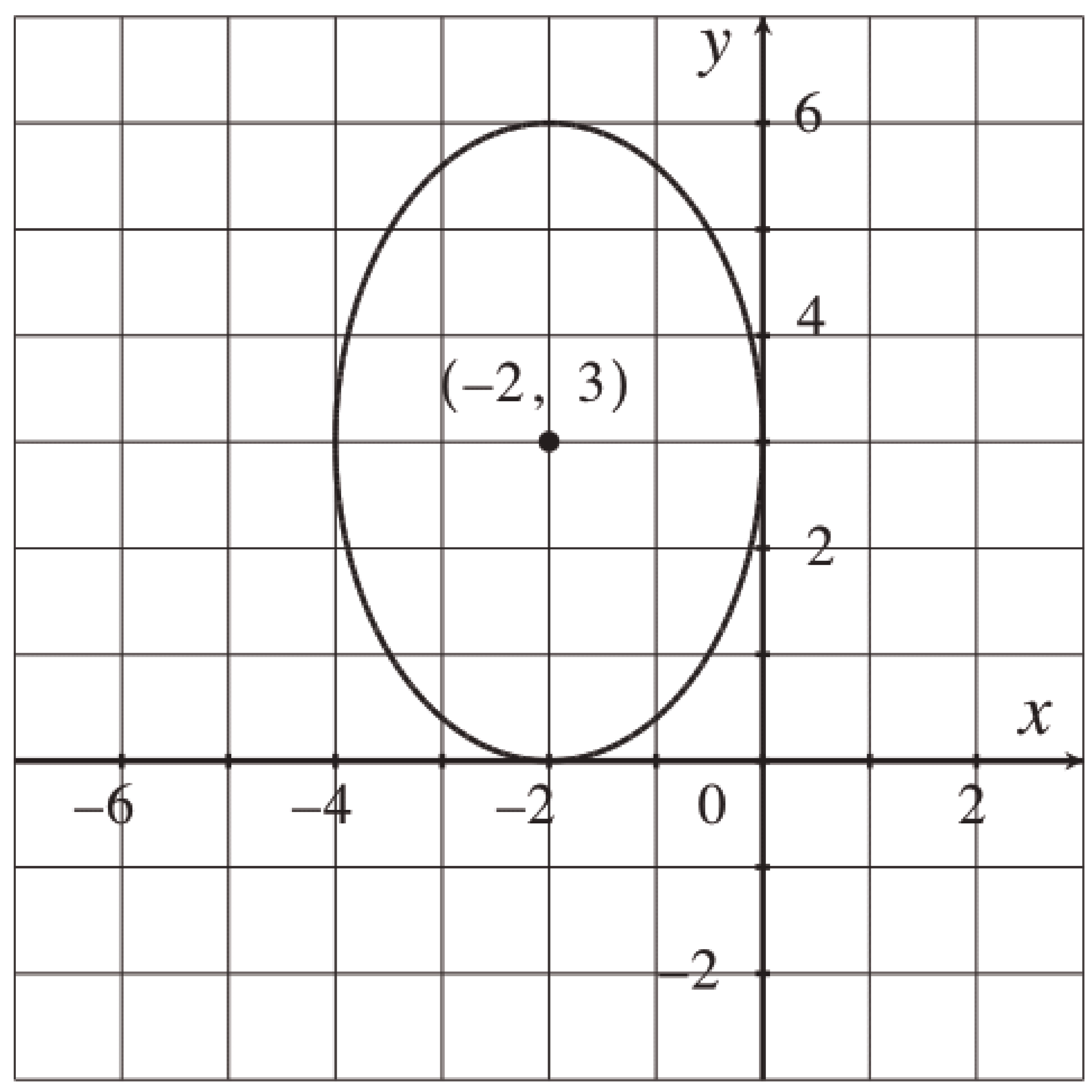
ដូចនេះ $x^2 = 4py$

ដោយប៉ារ៉ាបូលកាត់តាមចំណុច $(120,\ 15)$ គេបាន : $120^2 = 4p(15)$ នាំឱ្យ $p = \dfrac{14400}{60} = 240$

ដូចនេះ $x^2 = 4(240)y$ ឬ $y = \dfrac{1}{960}x^2$ ។

ចម្លើយលំហាត់មេរៀនទី 2 ជំពូក 6

2. ក. ជាទម្រង់ស្តង់ដា គេបាន



$$9x^2 + 4y^2 + 36x - 24y + 36 = 0$$

$$9x^2 + 36x + 4y^2 - 24y = -36$$

$$9(x^2 + 4x + 4) + 4(y^2 - 6y + 9) = -36 + 36 + 36$$

$$9(x+2)^2 + 4(y-3)^2 = 36$$

$$\frac{(x+2)^2}{2^2} + \frac{(y-3)^2}{3^2} = 1$$

$$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$$

ដូចនេះ $h = -2$, $k = 3$, $a = 3$, $b = 2$

និង $c = \sqrt{3^2 - 2^2} = \sqrt{5}$ ។គេអាចសន្និដ្ឋានបានថា

ផ្ចិត $(h,\ k)$ គឺ $(-2,\ 3)$

កំណុំទាំងពីរ $(h,\ k \pm c)$ គឺ $(-2,\ 3 \pm \sqrt{5})$

កំពូលទាំងពីរ $(h,\ k \pm a)$ គឺ $(-2,\ 6)$ និង $(-2,\ 0)$

$e = \dfrac{c}{a} = \dfrac{\sqrt{5}}{3}$ ។

5. ដោយកំពូលទាំងពីរស្ថិតនៅលើអ័ក្សអាប់ស៊ីស នោះសមីការស្តង់ដានៃអេលីបគឺ

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

ដោយផ្ចិតជាចំណុចកណ្តាលនៃអង្កត់ភ្ជាប់កំពូលទាំងពីរ គេបាន $(h,\ k) = (0,\ 0)$ ។ ម្យ៉ាងទៀត

a ជាចម្ងាយពីផ្ចិតទៅកំពូល គេបាន $a = 5$ ហើយ $e = \frac{c}{a} = \frac{c}{5} = \frac{3}{5} \Rightarrow c = 3$

$b^2 = a^2 - c^2 = 25 - 9 = 16$ ។

ដូចនេះ សមីការស្តង់ដាគឺ $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16} = 1$ ។

ចម្លើយលំហាត់មេរៀនទី 3 ជំពូក 6

4. គ. ដោយកំពូលស្ថិតនៅលើបន្ទាត់ដេកនោះសមីការស្តង់ដាមានទម្រង់ $\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$

ផ្ចិតនៃអ៊ីពែរបូលស្ថិតនៅត្រង់ចំណុចកណ្តាលនៃអង្កត់ភ្ជាប់កំពូលទាំងពីរ

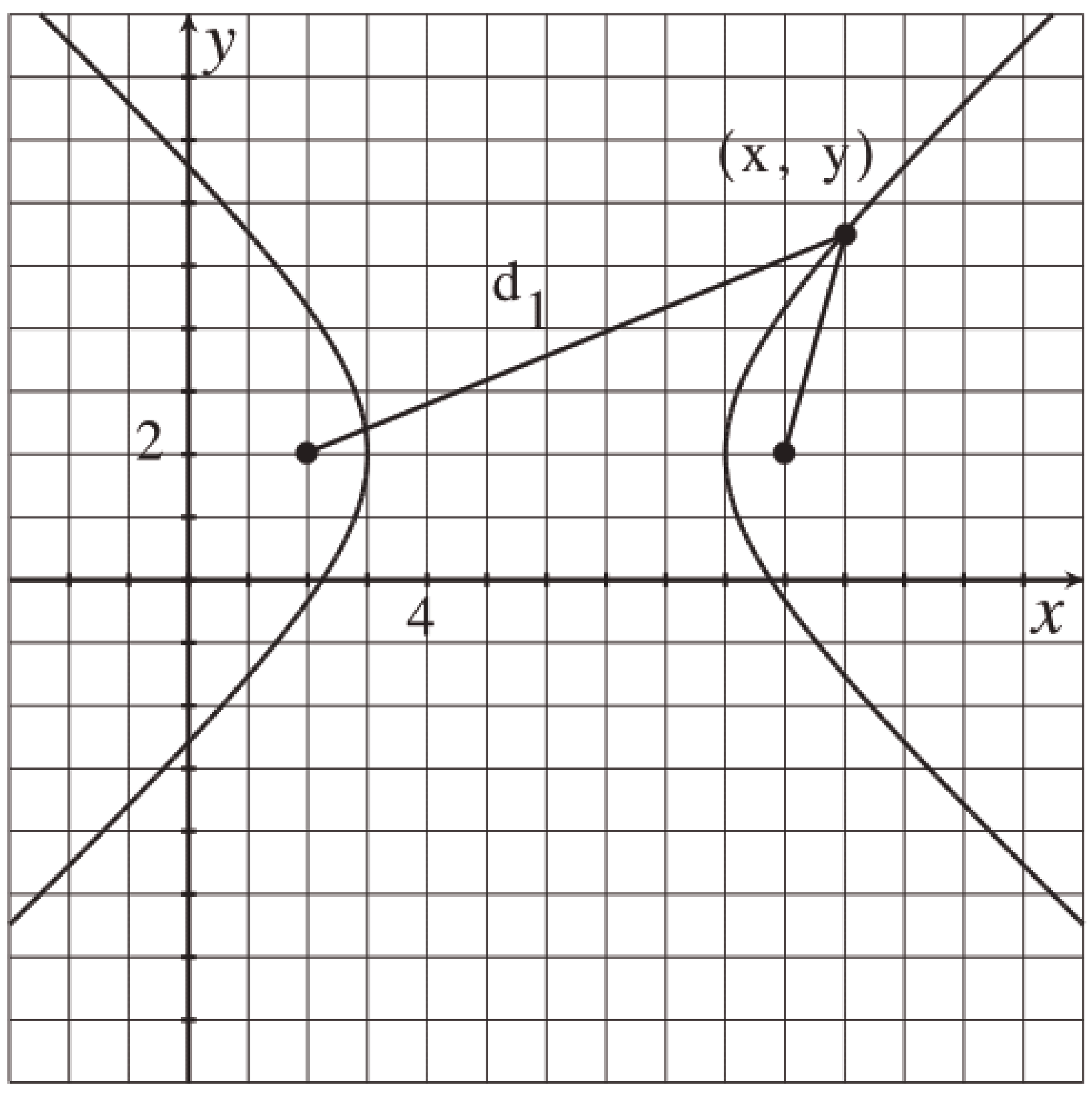
ដូចនេះ $(h,\ k) = \left(\frac{1+(-1)}{2}\ ,\ \frac{0+0}{2}\right) = (0,\ 0)$

គេបាន $h = 0$ និង $k = 0$ ។ ដោយអាស៊ីមតូតមានទម្រង់ : $y = k \pm \frac{b}{a}(x-h) = \pm 3x$

គេបាន $\pm\frac{b}{a} = \pm 3$ ឬ $b = 3a$ ដោយ $a = 1$ គេបាន $b = 3$ ហើយសមីការស្តង់ដាគឺ

$\frac{x^2}{1^2}-\frac{y^2}{3^2} = 1$ ឬ $x^2-\frac{y^2}{9} = 1$ ។

5. តាមរូបគេបាន $d_1 - d_2 = 6$



$$\sqrt{(x-2)^2+(y-2)^2}-\sqrt{(x-10)^2+(y-2)^2} = 6$$

$$\sqrt{(x-2)^2+(y-2)^2} = 6+\sqrt{(x-10)^2+(y-2)^2}$$

$$(x-2)^2-(x-10)^2-36 = 12\sqrt{(x-10)^2+(y-2)^2}$$

$$16x^2-264x+1089 = 9(x^2-20x+100+y^2-4y+4)$$

$$7(x-6)^2-9(y-2)^2 = 63$$

$$\frac{(x-6)^2}{9}-\frac{(y-2)^2}{7} = 1$$

7. $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2} = 1$

$\frac{2x}{a^2}-\frac{2yy'}{b^2} = 0$ នាំឱ្យ $y' = \frac{b^2x}{a^2y}$

ដូចនេះ សមីការនៃបន្ទាត់ប៉ះគឺ $y-y_0 = \frac{b^2x_0}{a^2y_0}(x-x_0) = ay_0y-a^2y_0^2 = b^2x_0x-b^2x_0^2$

$$b^2x_0^2 - a^2y_0^2 = b^2x_0x - a^2y_0y = a^2b^2 = b^2x_0x - a^2y_0y$$

$$1 = \frac{x_0x}{a^2} - \frac{y_0y}{b^2} \text{ ។}$$

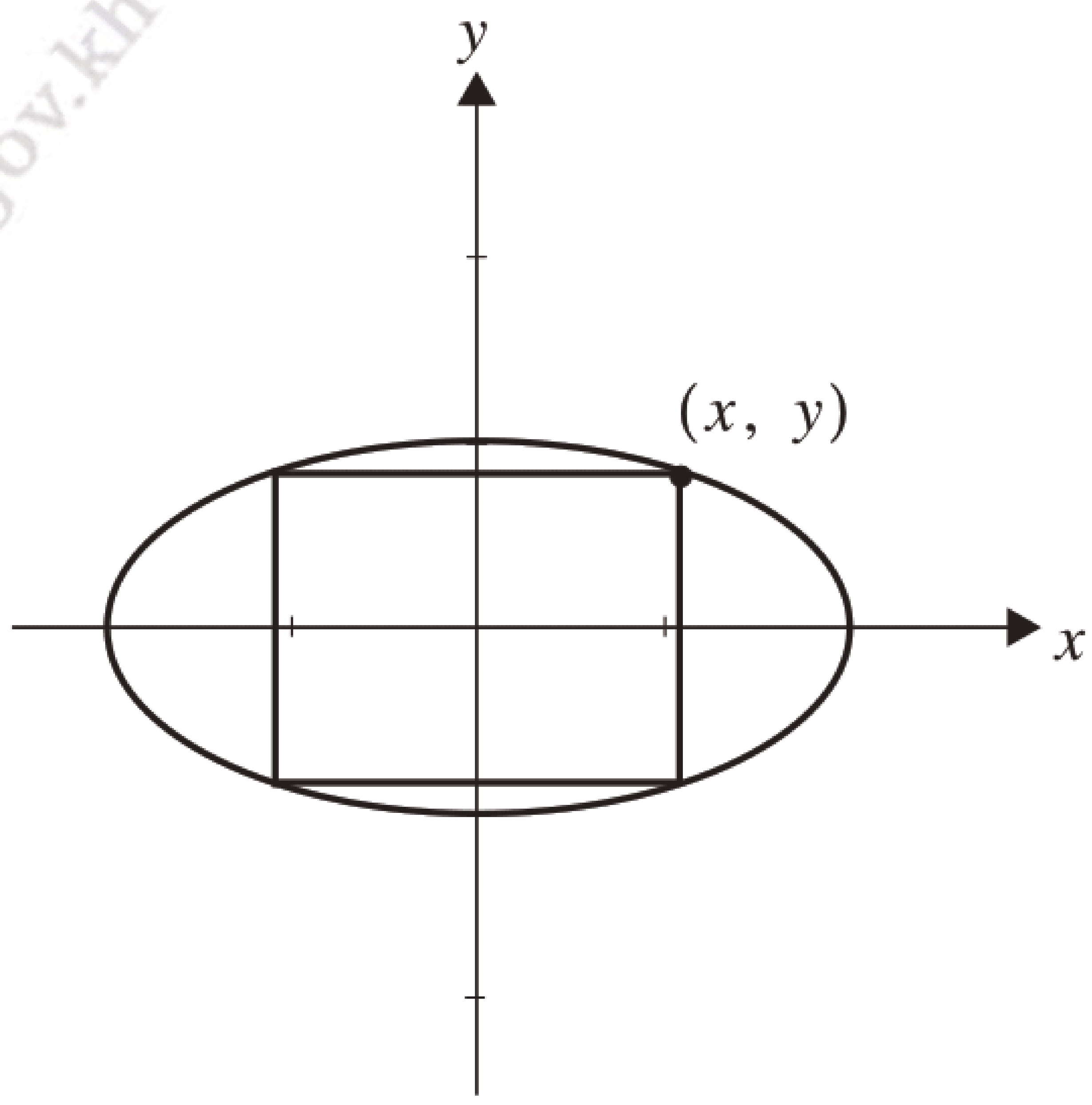
11. គន្លងជាអ៊ីពែរបូលដែលមាន $V(\pm3,\ 0)$ និង $W\left(0,\ \pm\frac{3}{2}\right)$

សមីការស្តង់ដាគឺ $\frac{x^2}{3^2} - \frac{y^2}{\left(\frac{3}{2}\right)^2} = 1$ នាំឱ្យ $x^2 - 4y^2 = 9$

បើមានមែកតែម្ខាងនៅខាងស្តាំ នោះ $x = \sqrt{9+4y^2}$ ជាសមីការនៃគន្លង ។

ចម្លើយលំហាត់ជំពូក 6

8. តាង $(x,\ y)$ ជាកំពូលមួយនៃចតុកោណកែងដែលស្ថិតនៅលើអេលីបក្នុងកាដ្រង់ទី I ។ គេបាន



$$\frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2} = \frac{a^2-x^2}{a^2}$$

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)$$

$$y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$$

ដូចនេះ វិមាត្រនៃចតុកោណកែងគឺ

បណ្តោយ $= 2x$

ទទឹង $= 2y = \frac{2b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$

ផ្ទៃក្រឡានៃចតុកោណកែងឱ្យដោយ

$$A = 2x\left[\frac{2b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\right] = \frac{4b}{a}(x\sqrt{a^2-x^2})$$

$$\frac{dA}{dx} = \frac{4b}{a}\left[\frac{-x^2}{\sqrt{a^2-x^2}} + \sqrt{a^2-x^2}\right]$$

$\frac{dA}{dx} = 0$ នោះ $x = \frac{a}{\sqrt{2}}$ ហើយវិមាត្រនៃចតុកោណកែងដែលមានផ្ទៃក្រឡាអតិបរមាគឺ

បណ្តោយ $= 2x = \sqrt{2}a$

ទទឹង $= \frac{2b}{a}\sqrt{a^2-x^2} = \frac{2b}{a}\sqrt{a^2-\frac{a^2}{2}} = \sqrt{2}b$ ។

10. ចំណោទនេះជាអេលីបមួយដែលមាន $V\left(\pm\frac{9}{2},\ 0\right)$ និង $M(0,\ \pm3)$

ជំនួស $x = 1.8$ ក្នុង $\frac{x^2}{\left(\frac{9}{2}\right)^2}+\frac{y^2}{3^2} = 1$ នាំឱ្យ $\frac{y^2}{9} = 1-\frac{(1.8)^2}{81}\times 4$

$$y^2 = 9\left(1-\frac{(18)^2}{8100}\times 4\right) = \frac{6804\times 9}{8100} = \frac{756\times 9}{900} = 7.56$$

$$y = \sqrt{7.56}\approx 2.75m$$

ប្រវែងកម្ពស់នៃធ្នូដែលមានចម្ងាយ $1.8m$ ពីផ្ចិតនៃបាតគឺ $2.75m$ ។

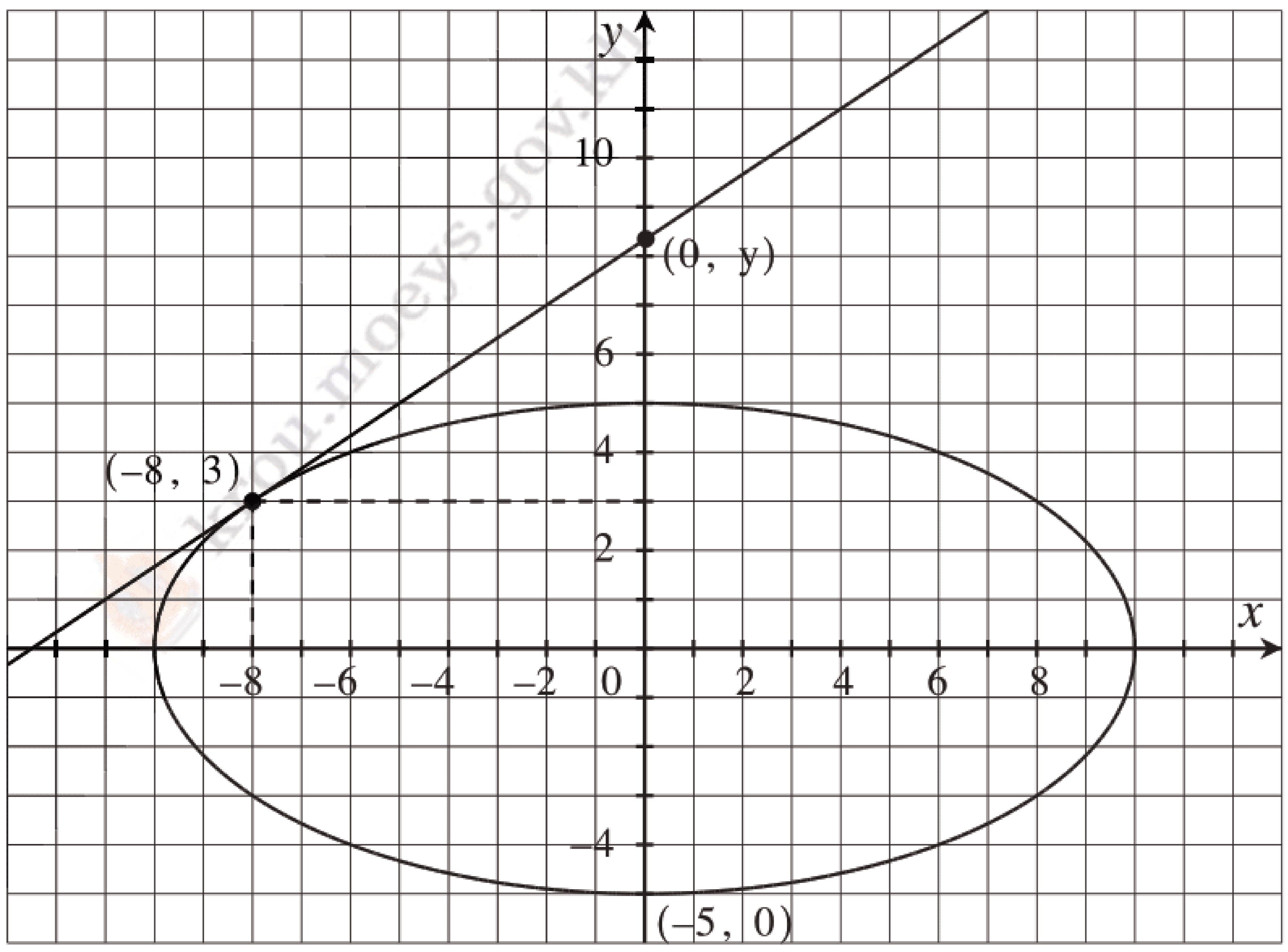
11. ដើម្បីរកមេគុណប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់ប៉ះត្រង់ $(-8,\ 3)$ គេរកដេរីវេអនុគមន៍អំព្លីស៊ីតដូចខាងក្រោម :

$$\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{25} = 1$$

$$\frac{x}{50}+\frac{2yy'}{25} = 0$$

$$x+4yy' = 0$$

$$y' = \frac{-x}{4y}$$



ដូចនេះ មេគុណប្រាប់ទិសត្រង់ $(-8,\ 3)$ គឺ

$$m = \frac{-(-8)}{4(3)} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$$

សមីការនៃបន្ទាត់ប៉ះគឺ :

$$(y-3) = \frac{2}{3}[x-(-8)]$$

$$3y = 2x+25$$

បើ $x = 0$ នាំឱ្យ $y = \frac{25}{3}$

ដូចនេះ ភាគល្អិតនេះនឹងកាត់អ័ក្សអរដោនេត្រង់ចំណុច $\left(0,\ \frac{25}{3}\right)$ ។